VERIFICA

Verifica di fine parte · La gravitazione

Tempo indicativo: 100 minuti · Punteggio totale: 100 punti

Fisica 3 · Parte IV · La gravitazione · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte · La gravitazione · pagine 381–386 del volume completo · estratto per lo studio

La verifica riguarda i capitoli 12 e 13. È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi sempre le formule che usi, i passaggi e le unità di misura: un risultato senza unità è considerato incompleto. Esprimi i risultati con un numero di cifre significative coerente con i dati. Quando usi una legge di conservazione, scrivi quale grandezza si conserva e perché. Puoi consultare le tabelle dell'appendice. Dove non è indicato diversamente usa $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ e i dati astronomici della Tabella A.2, considera sferici i corpi celesti e trascura l'aria e la rotazione dei pianeti.

Parte A · Domande a scelta multipla (10 domande, 2 punti ciascuna)

1. ● Nel sistema di Tolomeo gli epicicli servivano soprattutto a spiegare:
   - **A.** il moto retrogrado dei pianeti
   - **B.** le fasi di Venere
   - **C.** l'assenza di parallasse stellare
   - **D.** le maree

2. ● Quale osservazione di Galileo era incompatibile con l'ordine dei pianeti del sistema tolemaico?
   - **A.** le montagne della Luna
   - **B.** le macchie solari
   - **C.** la serie completa delle fasi di Venere
   - **D.** le stelle della Via Lattea

3. ●● Un asteroide passa al perielio a 2,0 au dal Sole e all'afelio a 6,0 au. L'eccentricità della sua orbita è:
   - **A.** 0,33
   - **B.** 0,50
   - **C.** 0,67
   - **D.** 3,0

4. ●● Una cometa ha un periodo orbitale di 27 anni. Il semiasse maggiore della sua orbita è:
   - **A.** 3,0 au
   - **B.** 5,2 au
   - **C.** 27 au
   - **D.** 9,0 au

5. ● Secondo la seconda legge di Keplero, un pianeta su un'orbita ellittica si muove:
   A. con velocità costante in modulo
   B. più velocemente all'afelio
   C. più velocemente al perielio
   D. con una velocità che non dipende dalla distanza dal Sole

6. ●● Le masse di due sfere raddoppiano entrambe e la distanza fra i loro centri raddoppia. La forza gravitazionale fra le sfere:
   A. resta uguale
   B. raddoppia
   C. quadruplica
   D. si dimezza

7. ●● Detto R il raggio terrestre, a quale quota sopra la superficie il campo gravitazionale della Terra è un nono di quello al suolo?
   A. $3R$
   B. $9R$
   C. $8R$
   D. $2R$

8. ● Un satellite geostazionario compie un giro intorno alla Terra in:
   A. 24 ore esatte, un giorno solare
   B. un giorno siderale, circa 23 h 56 min
   C. 12 ore
   D. 27,3 giorni

9. ●● Il satellite A percorre un'orbita circolare di raggio r, il satellite B una di raggio $2r$ intorno allo stesso pianeta. Il rapporto v_B/v_A fra le velocità è circa:
   A. 2
   B. 0,50
   C. 0,71
   D. 1,4

10. ●● Un pianeta ha la stessa densità media della Terra e metà del suo raggio. La sua velocità di fuga è circa:
    A. 11,2 km/s
    B. 2,8 km/s
    C. 4,0 km/s
    D. 5,6 km/s

Parte B · Esercizi (5 esercizi, 6 punti ciascuno)

11. ●● Un asteroide passa al perielio a 1,8 au dal Sole e all'afelio a 3,4 au. a) Calcola il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita (2 punti). b) Calcola il periodo orbitale in anni (2 punti). c) Quante volte l'asteroide è più veloce al perielio che all'afelio? Indica la legge che usi (2 punti).

12. ●● Un pianeta esterno immaginario ha un periodo siderale di 6,0 anni e un'orbita quasi circolare. a) Calcola il raggio della sua orbita in unità astronomiche (2 punti). b) Calcola il suo periodo sinodico, in anni e in giorni (2 punti). c) Ogni quanto tempo, osservato dalla Terra, il pianeta mostra il moto retrogrado? Spiega perché (2 punti).

13. ●● Titano, il satellite più grande di Saturno, percorre un'orbita quasi circolare di raggio $1{,}222 \times 10^{9}$ m in 15,95 giorni. a) Calcola la massa di Saturno e confrontala con quella della Terra (2 punti). b) Il raggio medio di Saturno è $5{,}82 \times 10^{7}$ m: calcola il campo gravitazionale al livello di questo raggio (2 punti). c) Saturno ha una massa quasi cento volte quella terrestre, ma il campo «alla superficie» supera di poco quello della Terra. Spiega perché (2 punti).

14. ●● Una sonda di 800 kg percorre un'orbita circolare a 2000 km di quota sopra la Terra. a) Calcola la sua velocità (2 punti). b) Calcola la sua energia meccanica totale, con $U = 0$ all'infinito (2 punti). c) Quale energia minima bisogna fornirle perché si allontani indefinitamente dalla Terra, e di quanto deve aumentare la sua velocità se l'energia viene fornita con una breve accensione dei motori? (2 punti)

15. ●● a) Calcola il campo gravitazionale del Sole alla distanza della Terra (1 au) e quello della Terra alla distanza della Luna (2 punti). b) Quale dei due corpi attira di più la Luna? (2 punti) c) Perché, allora, la Luna non abbandona la Terra per seguire il Sole? (2 punti)

Parte C · Problemi (3 problemi, 50 punti in totale)

16. ●● **(16 punti)** L'asteroide Vesta, il più luminoso visibile dalla Terra, torna in opposizione circa ogni 504 giorni; la sua orbita, quasi complanare con quella terrestre, ha eccentricità 0,090. a) Calcola il periodo siderale di Vesta in anni, considerando circolare l'orbita della Terra (4 punti). b) Calcola il semiasse maggiore dell'orbita (3 punti). c) Calcola le distanze di Vesta dal Sole al perielio e all'afelio (3 punti). d) Calcola il rapporto fra la velocità al perielio e quella all'afelio (2 punti). e) Intorno all'opposizione Vesta, osservato dalla Terra, si muove per alcune settimane all'indietro rispetto alle stelle. Spiega in poche righe come un astronomo tolemaico descriveva questo fenomeno e perché la spiegazione copernicana è più semplice (4 punti).

17. ●●● **(18 punti)** Marte. Usa i dati della Tabella A.3 e quelli che seguono. a) Esprimi in unità del SI il semiasse maggiore e il periodo dell'orbita di Marte, calcola il rapporto T^2/a^3 e ricava la massa del Sole (4 punti). b) Marte dista dal Sole $2{,}067 \times 10^{11}$ m al perielio e $2{,}493 \times 10^{11}$ m all'afelio: calcola l'eccentricità dell'orbita (2 punti). c) Di quanto per cento l'attrazione del Sole su Marte è maggiore al perielio che all'afelio? (3 punti) d) All'afelio la velocità di Marte è 21,97 km/s: calcola la velocità al perielio e indica il principio di conservazione da cui discende la legge che usi (3 punti). e) Deimos, il satellite più esterno di Marte, percorre un'orbita quasi circolare di raggio $2{,}346 \times 10^7$ m in 30,3 h: ricava la massa di Marte (4 punti). f) Il rapporto T^2/a^3 di Deimos è molto diverso da quello di Marte. Contraddice la terza legge di Keplero? Spiega (2 punti).

18. ●●● **(16 punti)** Da una base sulla Luna una sonda viene lanciata in verticale verso l'alto con velocità 2,0 km/s. a) Quale grandezza si conserva durante la salita, e perché? Spiega anche perché non si conserva la quantità di moto della sonda (3 punti). b) Calcola la massima distanza dal centro della Luna raggiunta dalla sonda e la quota corrispondente (4 punti). c) Confronta la quota con quella che si otterrebbe supponendo costante il campo lunare della superficie, e spiega la differenza (3 punti). d) Calcola la velocità minima di lancio per sfuggire alla Luna (3 punti). e) Usa le velocità di fuga della Terra e della Luna per spiegare in poche righe perché la Terra ha trattenuto un'atmosfera e la Luna no; le molecole dei gas dell'aria si muovono, a temperatura ambiente, con velocità di alcune centinaia di metri al secondo (3 punti).

Griglia di valutazione Punti per sezione.

Sezione	Contenuto	Punti
Parte A	domande 1–10 × 2 punti	20
Parte B	esercizi 11–15 × 6 punti	30
Parte C	problema 16 (16), problema 17 (18), problema 18 (16)	50
Totale		**100**

Dal punteggio al voto Corrispondenza indicativa fra punteggio e voto in decimi.

Punteggio	0–24	25–34	35–44	45–54	55–64	65–74	75–84	85–94	95–100
Voto	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Soluzioni

1. A (2 punti). Il pianeta gira sull'epiciclo mentre il centro dell'epiciclo percorre il deferente: quando i due moti si oppongono, il pianeta visto dalla Terra torna indietro.

2. C (2 punti). Nell'ordine tolemaico Venere sta sempre fra la Terra e il Sole e potrebbe mostrare solo fasi falcate; Galileo osservò anche la fase quasi piena, possibile solo se Venere passa dietro il Sole.

3. B (2 punti). $a = (2{,}0 + 6{,}0)/2$ au = 4,0 au; $c = a - r_p$ = 2,0 au; $e = c/a = 0{,}50$.

4. D (2 punti). Per i corpi che girano intorno al Sole, con T in anni e a in au, $a = T^{2/3} = 27^{2/3} = 9{,}0$ au.

5. C (2 punti). Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali: vicino al Sole, dove il raggio è corto, il pianeta deve percorrere un arco più lungo nello stesso tempo.

6. A (2 punti). $F = G(2m_1)(2m_2)/(2r)^2 = 4/4 \cdot Gm_1m_2/r^2$: la forza non cambia.

7. D (2 punti). $g \propto 1/r^2$: g diventa un nono quando la distanza dal centro triplica, $r = 3R$; la quota è $h = r - R = 2R$ ($3R$ è la distanza dal centro, non la quota).

8. B (2 punti). Deve ruotare insieme alla Terra rispetto alle stelle: il periodo è il giorno siderale, 86 164 s.

9. C (2 punti). $v = \sqrt{(GM/r)} \propto 1/\sqrt{r}$: $v_B/v_A = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$. Il satellite più lontano è più lento.

10. D (2 punti). A parità di densità $M \propto R^3$, quindi $M/R \propto R^2$ e $v_{fuga} = \sqrt{(2GM/R)} \propto R$: metà raggio, metà velocità di fuga, 11,2/2 km/s = 5,6 km/s.

11. a) $a = (1{,}8 + 3{,}4)/2$ au = 2,6 au; $c = a - r_p$ = 0,8 au; $e = 0{,}8/2{,}6 \approx 0{,}31$ (2 punti). b) Terza legge di Keplero con T in anni e a in au: $T = a^{3/2} = 2{,}6^{3/2}$ anni ≈ 4,2 anni (2 punti). c) Seconda legge (conservazione del momento angolare): $v_p r_p = v_a r_a$, quindi $v_p/v_a = r_a/r_p = 3{,}4/1{,}8 \approx 1{,}9$ (2 punti).

12. a) $a = T^{2/3} = 6{,}0^{2/3}$ au ≈ 3,3 au (2 punti). b) Per un pianeta esterno $1/S = 1/T_T - 1/T = (1 - 1/6{,}0)$ anni^{-1}, quindi S = 1,2 anni ≈ 438 giorni (2 punti). c) Il moto retrogrado si osserva intorno all'opposizione, quando la Terra, più veloce, «sorpassa» il pianeta; le opposizioni si ripetono ogni periodo sinodico, cioè ogni 1,2 anni circa (2 punti).

13. a) $T = 15{,}95 \times 86\,400$ s = $1{,}378 \times 10^6$ s; dalla condizione dell'orbita circolare (la gravità di Saturno fa da forza centripeta), $M = 4\pi^2a^3/(GT^2) = 4\pi^2 \times (1{,}222 \times 10^9)^3/[6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}378 \times 10^6)^2]$ kg ≈ $5{,}69 \times 10^{26}$ kg, circa 95 volte la massa della Terra (2 punti). b) $g = GM/R^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}69 \times 10^{26}/(5{,}82 \times 10^7)^2$ m/s^2 ≈ 11,2 m/s^2 (2 punti; il valore misurato all'equatore è un po' minore per la rapida rotazione del pianeta). c) Il campo alla superficie è GM/R^2: la massa è 95 volte maggiore, ma il raggio è circa 9,1 volte maggiore e il suo quadrato circa 83 volte; i due effetti quasi si compensano. Saturno ha una densità media molto bassa (2 punti).

14. a) $r = 6{,}37 \times 10^6$ m + $2{,}0 \times 10^6$ m = $8{,}37 \times 10^6$ m; $v = \sqrt{(GM/r)} = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}/8{,}37 \times 10^6)}$ m/s ≈ $6{,}90 \times 10^3$ m/s (2 punti). b) $E = -GMm/(2r) = -6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times 800/(2 \times 8{,}37 \times 10^6)$ J ≈ $-1{,}90 \times 10^{10}$ J (2 punti). c) Per allontanarsi indefinitamente serve $E \geq 0$: l'energia minima è l'energia di legame, $1{,}90 \times 10^{10}$ J. Dopo l'accensione la sonda, alla stessa distanza, deve avere la velocità di fuga da quel punto, $\sqrt{(2GM/r)} = \sqrt{2} \cdot 6{,}90$ km/s ≈ 9,75 km/s: la velocità deve aumentare di circa 2,86 km/s (2 punti).

15. a) $g_{Sole} = GM_S/d^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}/(1{,}496 \times 10^{11})^2$ m/s^2 ≈ $5{,}93 \times 10^{-3}$ m/s^2; $g_{Terra} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}/(3{,}84 \times 10^8)^2$ m/s^2 ≈ $2{,}70 \times 10^{-3}$ m/s^2 (2 punti). b) Il Sole: il suo campo nel punto in cui si trova la Luna è circa 2,2 volte quello della Terra (2 punti). c) Il Sole attira quasi allo stesso modo la Terra e la Luna, che si trovano praticamente alla stessa distanza da esso: entrambe «cadono» insieme intorno al Sole con la stessa accelerazione. Il

moto della Luna *rispetto alla Terra* dipende soltanto dalla differenza fra le accelerazioni che il Sole imprime ai due corpi, che è piccola, e dall'attrazione della Terra (2 punti).

16. a) Vesta è più lontano dal Sole della Terra (si osserva in opposizione), quindi la Terra lo «sorpassa» una volta ogni periodo sinodico: $1/T = 1/T_T - 1/S$ (2 punti). Con $T_T = 365{,}25$ giorni e $S = 504$ giorni: $1/T = (1 - 365{,}25/504)$ anni$^{-1} = 0{,}2753$ anni^{-1}, $T \approx 3{,}63$ anni (2 punti). b) Terza legge di Keplero, con T in anni e a in au: $a = T^{2/3} = 3{,}63^{2/3}$ au $\approx 2{,}36$ au (3 punti). c) $r_p = a(1 - e) = 2{,}36 \times 0{,}910$ au $\approx 2{,}15$ au; $r_a = a(1 + e) = 2{,}36 \times 1{,}090$ au $\approx 2{,}57$ au (3 punti). d) Seconda legge: $v_p/v_a = r_a/r_p = 1{,}090/0{,}910 \approx 1{,}20$ (2 punti). e) Traccia: nel sistema tolemaico l'astro percorre un epiciclo il cui centro si muove sul deferente intorno alla Terra; quando l'astro si trova sul tratto interno dell'epiciclo il suo moto si oppone a quello del centro, e lo si vede tornare indietro: il moto retrogrado è un moto reale, che richiede una costruzione apposita per ogni astro (2 punti). Nel sistema copernicano non c'è nessun moto all'indietro: Vesta e la Terra girano entrambi intorno al Sole, la Terra più in fretta; all'opposizione la Terra lo sorpassa e la linea di vista verso Vesta ruota all'indietro rispetto alle stelle, come un'auto più lenta sembra arretrare quando la sorpassiamo. Il fenomeno è un effetto del moto della Terra, si spiega per tutti i pianeti esterni con lo stesso meccanismo e cade necessariamente all'opposizione (2 punti).

17. a) $a = 1{,}524 \times 1{,}496 \times 10^{11}$ m $\approx 2{,}280 \times 10^{11}$ m; $T = 1{,}881 \times 3{,}156 \times 10^7$ s $\approx 5{,}936 \times 10^7$ s (1 punto); $T^2/a^3 \approx 2{,}97 \times 10^{-19}$ s^2/m^3 (1 punto); da $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$: $M = 4\pi^2/(6{,}67 \times 10^{-11} \times 2{,}97 \times 10^{-19})$ kg $\approx 1{,}99 \times 10^{30}$ kg (2 punti). b) $a = (r_p + r_a)/2 = 2{,}280 \times 10^{11}$ m; $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p) = 0{,}426/4{,}560 \approx 0{,}093$ (2 punti). c) $F \propto 1/r^2$: $F_p/F_a = (r_a/r_p)^2 = (2{,}493/2{,}067)^2 \approx 1{,}45$: l'attrazione al perielio è maggiore di circa il 45% (3 punti). d) Seconda legge di Keplero, che discende dalla conservazione del momento angolare del pianeta (la forza del Sole è centrale, quindi ha momento nullo rispetto al Sole): $v_p r_p = v_a r_a$ (1 punto), $v_p = 21{,}97$ km/s $\times 2{,}493/2{,}067 \approx 26{,}5$ km/s (2 punti). e) $T = 30{,}3 \times 3600$ s $= 1{,}091 \times 10^5$ s (1 punto); la gravità di Marte fa da forza centripeta: $M_{Marte} = 4\pi^2 a^3/(GT^2) = 4\pi^2 \times (2{,}346 \times 10^7)^3/[6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}091 \times 10^5)^2]$ kg $\approx 6{,}42 \times 10^{23}$ kg (3 punti). f) No. La terza legge afferma che T^2/a^3 è uguale per i corpi che girano intorno allo *stesso* corpo centrale, e vale $4\pi^2/(GM)$: Deimos gira intorno a Marte, e la sua costante ($\approx 9{,}2 \times 10^{-13}$ s^2/m^3) è maggiore di quella dei pianeti nello stesso rapporto in cui la massa del Sole supera quella di Marte, circa 3 milioni (2 punti).

18. a) Si conserva l'energia meccanica della sonda, $K + U$: l'unica forza è la gravità della Luna, che è conservativa, e sulla Luna non c'è aria che dissipi energia (2 punti). La quantità di moto non si conserva perché sulla sonda agisce una forza esterna, l'attrazione lunare, che la rallenta (1 punto). b) $\frac{1}{2}mv_0^2 - GM_L m/R_L = -GM_L m/r_{max}$ (1 punto); $1/r_{max} = 1/R_L - v_0^2/(2GM_L) = 5{,}75 \times 10^{-7}$ m$^{-1} - 4{,}08 \times 10^{-7}$ m$^{-1} \approx 1{,}67 \times 10^{-7}$ m^{-1} (1 punto); $r_{max} \approx 6{,}0 \times 10^6$ m, quota $\approx 4{,}3 \times 10^6$ m (2 punti). c) $g_L = GM_L/R_L^2 \approx 1{,}62$ m/s^2; con campo costante $h = v_0^2/(2g_L) \approx 1{,}2 \times 10^6$ m (1 punto), circa 3,4 volte meno. Salendo il campo diminuisce come $1/r^2$ e la sonda è frenata sempre meno: con quote paragonabili al raggio lunare l'approssimazione del campo costante non vale più (2 punti). d) $v_{fuga} = \sqrt{(2GM_L/R_L)} = \sqrt{(2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}35 \times 10^{22}/1{,}74 \times 10^6)}$ m/s $\approx 2{,}37$ km/s (3 punti). e) Traccia: le molecole di un gas non hanno tutte la stessa velocità; alcune sono molto più veloci della media. Sulla Terra la velocità di fuga, 11,2 km/s, è decine di volte maggiore delle velocità tipiche delle molecole, e quasi nessuna riesce a sfuggire; sulla Luna la soglia, 2,4 km/s, è soltanto qualche volta maggiore, e la superficie esposta al Sole si scalda molto, rendendo le molecole più veloci: nel corso di miliardi di anni una frazione non trascurabile di molecole supera la soglia e il gas si disperde (3 punti).