CAPITOLO

13

La gravitazione universale e il campo gravitazionale

Lunam gravitare in terram, et vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, et in orbe suo retineri.
«La Luna gravita verso la Terra, e dalla forza di gravità è continuamente distolta dal moto rettilineo e trattenuta nella sua orbita.» — Isaac Newton, Principia (1687), libro III, proposizione IV (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Ricostruire il test della Luna e ricavare dalla terza legge di Keplero una forza che diminuisce come $1/r^2$.
2. Enunciare la legge di gravitazione universale in forma vettoriale e applicarla a corpi puntiformi e sferici.
3. Spiegare la misura di G con la bilancia di torsione e ricavare le masse della Terra, del Sole e dei pianeti.
4. Descrivere il campo gravitazionale, calcolarne il valore in quota e discutere il problema dell'azione a distanza.
5. Calcolare velocità, periodo ed energia dei satelliti in orbita circolare, compresa l'orbita geostazionaria.
6. Usare l'energia potenziale $U = -GMm/r$ per i moti legati e per la velocità di fuga, e misurare in laboratorio la massa della Terra.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Dalla mela alla Luna 2
13.2 La legge di gravitazione universale 4
13.3 La misura di G e le masse dei corpi celesti 6
13.4 Il campo gravitazionale 9
13.5 I satelliti in orbita circolare 13
13.6 L'energia nel campo gravitazionale 16

Fisica 3 · Parte IV · La gravitazione · versione 1.0
Capitolo 13: La gravitazione universale e il campo gravitazionale · pagine 353–380 del volume completo · estratto per lo studio

Una mela si stacca dal ramo e cade; la Luna gira intorno alla Terra senza cadere. Per Aristotele, e per quasi due millenni dopo di lui, i due fatti appartenevano a mondi diversi, governati da leggi diverse. Nel capitolo 12 hai seguito il dibattito che ha messo in crisi questa separazione e hai incontrato le leggi di Keplero, che descrivono *come* si muovono i pianeti senza dire *perché*.

La risposta arriva da Isaac Newton, con un'idea di sorprendente semplicità: la forza che fa cadere la mela è la stessa che trattiene la Luna. Ne nasce una legge che vale per ogni coppia di corpi, dalla quale si ricavano le leggi di Keplero, le masse dei corpi celesti, il moto dei satelliti e la velocità necessaria per lasciare per sempre la Terra. Incontreremo anche il *campo*, un concetto che accompagnerà tutta la fisica dei prossimi anni.

13.1 Dalla mela alla Luna

13.1.1 Un'accelerazione 3600 volte più piccola

Nel volume dello scorso anno hai calcolato l'accelerazione centripeta della Luna, trattandone l'orbita come una circonferenza di raggio $r = 3{,}84 \times 10^8$ m percorsa in 27,3 giorni (*Fisica 2*, capitolo 3):

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3{,}84 \times 10^8\ \text{m}}{(27{,}3 \times 86\,400\ \text{s})^2} \approx 2{,}72 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

È un'accelerazione minuscola: circa 3600 volte più piccola dell'accelerazione di gravità $g = 9{,}8$ m/s^2 con cui cade la mela. Il numero 3600 non è casuale. La Luna dista dal centro della Terra circa 60 raggi terrestri ($3{,}84 \times 10^8$ m / $6{,}37 \times 10^6$ m $\approx 60{,}3$), e $60^2 = 3600$. Se la forza che la Terra esercita su un corpo diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza dal centro, allora a una distanza 60 volte maggiore l'accelerazione che produce deve essere 60^2 volte minore:

$$\frac{g}{60^2} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{3600} \approx 2{,}72 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

I due numeri coincidono (Figura 13.1). È il **test della Luna**: il confronto fra l'accelerazione della Luna, ricavata dal suo moto, e quella prevista estendendo fino alla Luna la gravità terrestre con la legge dell'inverso del quadrato. Il suo esito dice due cose insieme: la forza che trattiene la Luna è la gravità, la stessa che agisce sulla mela; e questa forza diminuisce come $1/r^2$.

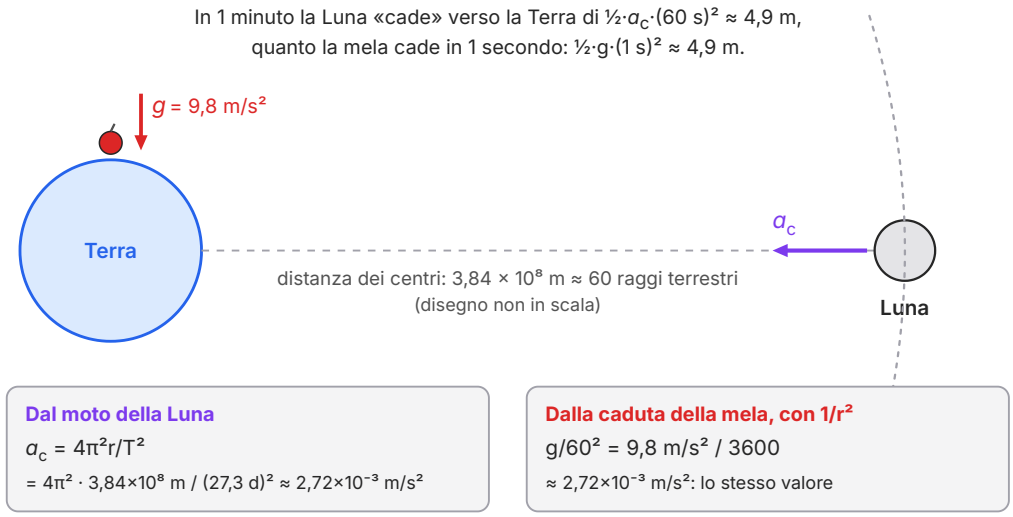

Figura 13.1 Il test della Luna. L'accelerazione centripeta della Luna, ricavata dal raggio e dal periodo dell'orbita, coincide con l'accelerazione di gravità alla superficie divisa per 60^2, dove 60 è il rapporto fra la distanza della Luna e il raggio terrestre. Ne segue un confronto suggestivo: in un minuto la Luna devia dalla tangente verso la Terra quanto la mela cade in un secondo.

13.1.2 Il calcolo dei *Principia*

Newton espose questo ragionamento nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Londra, 1687), nella proposizione IV del terzo libro, dedicato al «sistema del mondo». Con una distanza media di 60 raggi terrestri, il periodo di 27 giorni, 7 ore e 43 minuti e la misura della circonferenza terrestre fatta da poco dagli astronomi francesi, trova che in un minuto la Luna, scostandosi dalla tangente, «cade» verso la Terra di 15 piedi di Parigi e 1/12, circa 4,9 m (è $\tfrac{1}{2}a_c\Delta t^2$ con $\Delta t = 60$ s): proprio quanto cadono in un secondo i corpi vicino alla superficie, secondo le esperienze con i pendoli di Christiaan Huygens. Ne conclude che la forza che trattiene la Luna è quella che chiamiamo gravità: se fossero due forze diverse, un corpo vicino alla Terra le sentirebbe entrambe e cadrebbe due volte più in fretta di quanto si osserva.

13.1.3 Le leggi di Keplero chiedono la stessa forza

L'inverso del quadrato viene anche dai pianeti. Le loro orbite sono quasi circolari: trattandole come circonferenze di raggio r, la terza legge di Keplero si scrive $T^2 = kr^3$, con k uguale per tutti i pianeti. Da qui si ricava quale forza deve tenerli in orbita.

ESEMPIO SVOLTO

Dalla terza legge di Keplero alla forza: la dimostrazione passo per passo

Problema. Un pianeta di massa m percorre di moto circolare uniforme un'orbita di raggio r intorno al Sole, con periodo T. Sapendo che $T^2 = kr^3$, con k uguale per tutti i pianeti, ricava come la forza sul pianeta dipende da m e da r.

Passo 1: la forza necessaria. Nel sistema inerziale del Sole sul pianeta agisce una sola forza, l'attrazione del Sole, diretta verso il centro dell'orbita: è la forza centripeta. Per il secondo principio $F = ma_c = m \cdot 4\pi^2 r/T^2$.

Passo 2: si usa la terza legge. Si sostituisce $T^2 = kr^3$: $F = m \cdot 4\pi^2 r/(kr^3) = \dfrac{4\pi^2}{k} \cdot \dfrac{m}{r^2}$. La forza è proporzionale alla massa del pianeta e all'inverso del quadrato della distanza dal Sole.

Passo 3: il terzo principio. Il pianeta attira il Sole con una forza uguale e opposta. Se la forza è proporzionale alla massa del corpo attirato, per simmetria deve esserlo anche alla massa del corpo che attira: il fattore $4\pi^2/k$ deve contenere la massa M del Sole. Scriviamo $4\pi^2/k = GM$, con G costante: $F = GMm/r^2$.

Passo 4: che cosa significa la costante di Keplero. Dall'uguaglianza $4\pi^2/k = GM$ si ottiene

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Il rapporto di Keplero dipende soltanto dalla massa del corpo centrale: è lo stesso per tutti i pianeti perché tutti girano intorno allo stesso Sole; per i satelliti di Giove ha un altro valore, perché il corpo centrale è un altro.

Controllo. Unità: $4\pi^2/k$ si misura in m^3/s^2 e m/r^2 in kg/m^2: il prodotto è $kg \cdot m/s^2 = N$. Il ragionamento vale per orbite circolari; nei *Principia* Newton dimostrò che una forza come $1/r^2$ produce in generale orbite ellittiche con il Sole in un fuoco: la prima legge di Keplero.

13.2 La legge di gravitazione universale

13.2.1 L'enunciato

Newton fece il passo decisivo: non solo la Terra attira la mela e la Luna, e il Sole attira i pianeti, ma *ogni* corpo attira ogni altro corpo. La **legge di gravitazione universale** afferma che due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2, a distanza r, si attirano con forze dirette lungo la retta che li congiunge, di modulo

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la **costante di gravitazione universale**, che vale $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ (il valore più preciso, $6{,}674 \times 10^{-11}$, è nella Tabella A.1 dell'Appendice). In forma vettoriale, se $\mathbf{u}$ è il versore che punta dal corpo 1 al corpo 2, la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2 è

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}$$

Il segno meno dice che la forza è attrattiva: punta da 2 verso 1. La forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 è $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$: le due forze formano una coppia di azione e reazione, uguali in modulo anche quando le masse sono diversissime. Una mela di 0,10 kg attira la Terra con la stessa forza, 0,98 N, con cui la Terra attira la mela; ma la Terra, di massa $5{,}97 \times 10^{24}$ kg, riceve un'accelerazione di $0{,}98\ \text{N} / 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} \approx 1{,}6 \times 10^{-25}\ \text{m/s}^2$, del tutto impercettibile.

La legge è *universale* in un senso preciso: la stessa costante G vale per ogni coppia di corpi, qualunque sia il materiale di cui sono fatti, sulla Terra come nei cieli. È questa la sintesi newtoniana: la fisica della Terra e quella dei cieli sono una fisica sola. E la massa che compare nella legge è la stessa massa che compare in $F = ma$, per l'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale che conosci dallo scorso anno (*Fisica 2*, capitolo 5).

13.2.2 Corpi estesi e corpi sferici

La legge parla di corpi puntiformi. Un corpo esteso si può pensare diviso in tanti pezzetti, ciascuno dei quali attira ciascun pezzetto dell'altro corpo; la forza totale è la somma vettoriale di tutte queste forze. È il **principio di sovrapposizione**: la forza gravitazionale che più corpi esercitano su un corpo è la somma vettoriale delle forze che ciascuno eserciterebbe da solo, come se gli altri non ci fossero.

Per i corpi a simmetria sferica la somma ha un risultato semplice, che Newton dimostrò nel primo libro dei *Principia*. Secondo il **teorema del guscio sferico**, un guscio sferico omogeneo attira un corpo esterno come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro, e non esercita alcuna forza risultante su un corpo al suo interno. Una sfera fatta di gusci concentrici omogenei, anche di densità diverse, attira quindi i corpi esterni come un punto materiale posto nel centro: nella legge di gravitazione la distanza fra la Terra e la mela è quella fra i *centri*, circa $6{,}37 \times 10^6$ m.

13.2.3 Quanto è debole la gravità

Due studenti di 70 kg seduti a 1,0 m di distanza si attirano con una forza di $Gm^2/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 70 \times 70 / 1{,}0^2\ \text{N} \approx 3{,}3 \times 10^{-7}$ N, meno di un miliardesimo del loro peso. L'attrito con la sedia basta a impedire qualunque avvicinamento. La gravità diventa importante solo quando almeno una delle masse è enorme: la Terra attira la Luna con una forza di $6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times 7{,}35 \times 10^{22} / (3{,}84 \times 10^8)^2\ \text{N} \approx 2{,}0 \times 10^{20}$ N. La gravità domina il mondo dei pianeti e delle stelle perché agisce sempre come attrazione e si somma su masse gigantesche.

ERRORE FREQUENTE

«Un satellite che orbita a 400 km di quota sente una gravità GM/h^2, con $h = 400$ km.» No: nella legge di gravitazione r è la distanza dal **centro** della Terra, cioè $R + h = 6{,}77 \times 10^6$ m. Con h al posto di r si otterrebbe un'accelerazione di quasi 2500 m/s^2, assurda.

Non confondere poi G e g: G è una costante universale, in N·m^2/kg^2; g è un'accelerazione (o un campo, come vedremo) che dipende dal corpo che attira e dalla distanza: 9,8 m/s^2 al suolo, 8,7 m/s^2 alla quota della Stazione Spaziale.

13.3 La misura di *G* e le masse dei corpi celesti

13.3.1 La bilancia di torsione

Il test della Luna e le leggi di Keplero permettono di verificare la legge di Newton senza conoscere G: compaiono soltanto rapporti. Per misurare G bisogna invece misurare la forza fra due masse note, e la forza è minuscola. Ci riuscì per primo Henry Cavendish, che pubblicò i risultati nel 1798, con uno strumento ideato da John Michell, morto prima di poterlo usare: la **bilancia di torsione** (Figura 13.2).

Un'asta leggera lunga circa 1,8 m, con due sferette di piombo di circa 0,7 kg agli estremi, è appesa al centro a un filo sottile. Accanto alle sferette si portano due sfere di piombo di circa 160 kg, in posizioni opposte. L'attrazione fra ogni sfera grande e la sferetta vicina fa ruotare l'asta, che torce il filo finché il momento della forza elastica di torsione equilibra quello delle due forze gravitazionali. Le forze in gioco erano dell'ordine di 10^{-7} N, il peso di una massa di qualche centesimo di milligrammo: Cavendish chiuse l'apparato in una cassa, in una stanza sigillata, e lo osservò da fuori con un cannocchiale, per evitare che le correnti d'aria e il calore del suo corpo falsassero la misura.

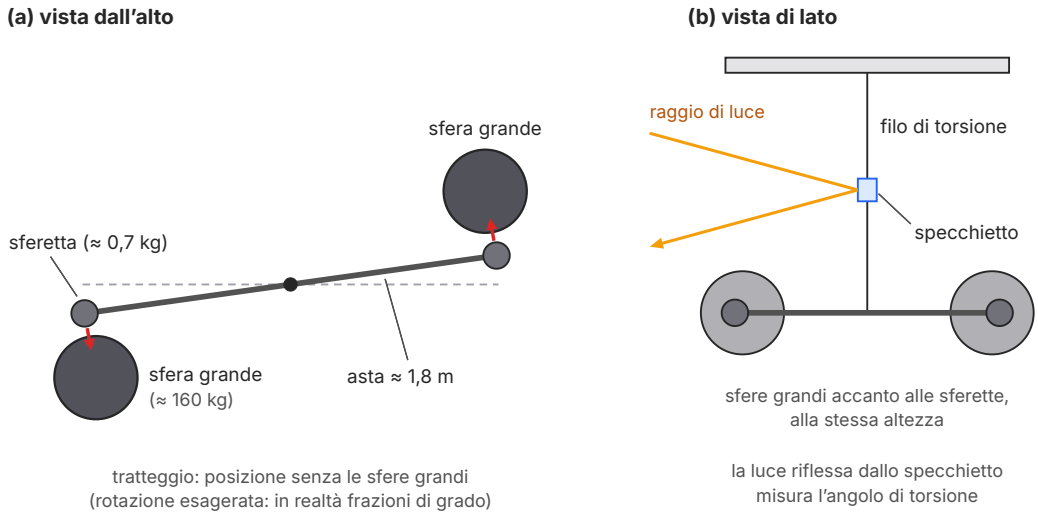

Figura 13.2 Schema della bilancia di torsione di Cavendish (non in scala). (a) Dall'alto: le sfere grandi attirano le sferette e fanno ruotare l'asta rispetto alla posizione di riposo. (b) Di lato: il filo di torsione regge l'asta; uno specchietto solidale con il filo riflette un raggio di luce e trasforma una rotazione piccolissima in uno spostamento leggibile della macchia luminosa (nelle versioni moderne dello strumento; Cavendish leggeva la posizione dell'asta con un cannocchiale e una scala graduata).

Cavendish non scrisse mai il valore di G: espresse il risultato come **densità media della Terra**, il rapporto fra la sua massa e il suo volume, che trovò circa 5,5 volte quella dell'acqua; il valore di G che se ne ricava differisce di circa l'1% da quello attuale. È circa il doppio della densità delle rocce della crosta, $2{,}7\text{–}3{,}0 \times 10^3$ kg/m^3: l'interno della Terra deve essere molto più denso della superficie, come conferma oggi il nucleo di ferro e nichel.

13.3.2 Pesare la Terra

Perché si disse che Cavendish aveva «pesato la Terra»? Perché, una volta noto G, la massa della Terra segue dal valore di g alla superficie. Per il teorema del guscio, un corpo di massa m sulla superficie è attirato con la forza GMm/R^2, che è il suo peso mg:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G}$$

Con $g = 9{,}8$ m/s^2 e $R = 6{,}37 \times 10^6$ m si ottiene $M = 9{,}8 \times (6{,}37 \times 10^6)^2 \,/\, 6{,}67 \times 10^{-11}$ kg $\approx 5{,}96 \times 10^{24}$ kg, in accordo con il valore $5{,}97 \times 10^{24}$ kg dell'Appendice. Una nota sulla massa del corpo che cade: si semplifica. Tutti i corpi in un luogo cadono con la stessa accelerazione $g = GM/R^2$, che dipende soltanto dalla massa e dal raggio del pianeta.

13.3.3 La massa del Sole e dei pianeti

Lo stesso metodo funziona per ogni corpo intorno al quale gira qualcosa. Dalla relazione $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$ si ricava $M = 4\pi^2 r^3/(GT^2)$. Per il Sole basta l'orbita della Terra, con $r = 1{,}496 \times 10^{11}$ m e $T = 3{,}156 \times 10^7$ s: $M_{\text{Sole}} = 4\pi^2 \times (1{,}496 \times 10^{11})^3 / [6{,}67 \times 10^{-11} \times (3{,}156 \times 10^7)^2]$ kg $\approx 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, circa 330 000 volte la massa della Terra. La massa del satellite non compare: non si può «pesare» un corpo dall'orbita che *lui* percorre, ma soltanto dalle orbite dei corpi che gli girano intorno.

ESEMPIO SVOLTO

La massa di Giove dai suoi satelliti

Problema. La Tabella 13.1 riprende i dati della NASA usati nel laboratorio del capitolo 12 sui satelliti scoperti da Galileo. a) Calcola per ogni satellite il rapporto T^2/a^3 in unità del SI. b) Ricava la massa di Giove e confrontala con il valore misurato dalle sonde, $1{,}898 \times 10^{27}$ kg.

Tabella 13.1 I satelliti galileiani di Giove: semiasse maggiore e periodo orbitale siderale (fonte: NASA, NSSDC, *Jovian Satellite Fact Sheet*), con le grandezze calcolate nell'esempio.

Satellite	a (10^8 m)	T (giorni)	T^2/a^3 (10^{-16} s^2/m^3)	M (10^{27} kg)
Io	4,218	1,769	3,113	1,901
Europa	6,711	3,551	3,114	1,900
Ganimede	10,704	7,155	3,116	1,899
Callisto	18,827	16,689	3,116	1,900

Soluzione. a) Per Io: $T = 1{,}769 \times 86\,400$ s $= 1{,}528 \times 10^5$ s; $T^2/a^3 = (1{,}528 \times 10^5 \text{ s})^2 / (4{,}218 \times 10^8 \text{ m})^3 \approx 3{,}113 \times 10^{-16}$ s^2/m^3. Gli altri valori, calcolati allo stesso modo, sono nella quarta colonna: coincidono entro lo 0,1%, come vuole la terza legge di Keplero.

b) Da $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$, con il valore medio del rapporto, che arrotondato a tre cifre è la pendenza $3{,}12 \times 10^{-16}$ s^2/m^3 trovata nel capitolo 12: $M = 4\pi^2/(G \times 3{,}115 \times 10^{-16} \text{ s}^2/\text{m}^3) = 39{,}48 / (6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}115 \times 10^{-16})$ kg $\approx 1{,}90 \times 10^{27}$ kg. La differenza dal valore delle sonde, circa lo 0,1%, viene quasi tutta dall'arrotondamento di G (6,67 invece di 6,674). Giove ha circa 318 volte la massa della Terra e circa un millesimo di quella del Sole.

Controllo. La formula vale se la massa del satellite è trascurabile rispetto a quella del pianeta: il satellite più massiccio, Ganimede, ha circa $1{,}5 \times 10^{23}$ kg, meno di un decimillesimo di Giove.

13.4 Il campo gravitazionale

13.4.1 Dalla forza al campo

La forza che la Terra esercita su un corpo dipende da due cose: dalla massa m del corpo e dal punto dello spazio in cui si trova. Conviene separarle. Si chiama **campo gravitazionale** in un punto il vettore

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

cioè la forza gravitazionale che agirebbe su un corpo posto in quel punto, divisa per la sua massa. Il corpo che «sonda» il campo si chiama **massa di prova**: deve essere così piccolo da non disturbare con la propria attrazione i corpi che generano il campo. Il campo si misura in N/kg, cioè in $\mathrm{m/s^2}$: se sul corpo agisce soltanto la gravità, $\boldsymbol{g}$ è proprio la sua accelerazione. Il «g = 9,8 N/kg» del primo anno era già il valore del campo terrestre alla superficie.

Il campo di un corpo sferico di massa M, a distanza $r \geq R$ dal centro, ha modulo

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

ed è diretto verso il centro. Il campo è una proprietà dello spazio intorno alla Terra: esiste in ogni punto anche se lì non c'è nessun corpo a risentirne. La forza su un corpo di massa m si ottiene poi semplicemente come $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Se i corpi che attirano sono più d'uno, per il principio di sovrapposizione i loro campi si sommano come vettori.

13.4.2 Come cambia g salendo

Il campo diminuisce con il quadrato della distanza dal centro (Figura 13.3). Ma i satelliti più vicini sono, in proporzione, molto vicini: la Stazione Spaziale Internazionale orbita a circa 400 km di quota, cioè a $r = 6{,}77 \times 10^6$ m dal centro, e lì

$$g = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{(6{,}77 \times 10^6)^2}\ \mathrm{m/s^2} \approx 8{,}7\ \mathrm{m/s^2}$$

l'89% del valore al suolo: è il calcolo promesso nel capitolo 3. Gli astronauti galleggiano perché la stazione e tutto ciò che contiene sono in caduta libera intorno alla Terra con la stessa accelerazione g: è la condizione di microgravità descritta in quel capitolo, non l'assenza di gravità.

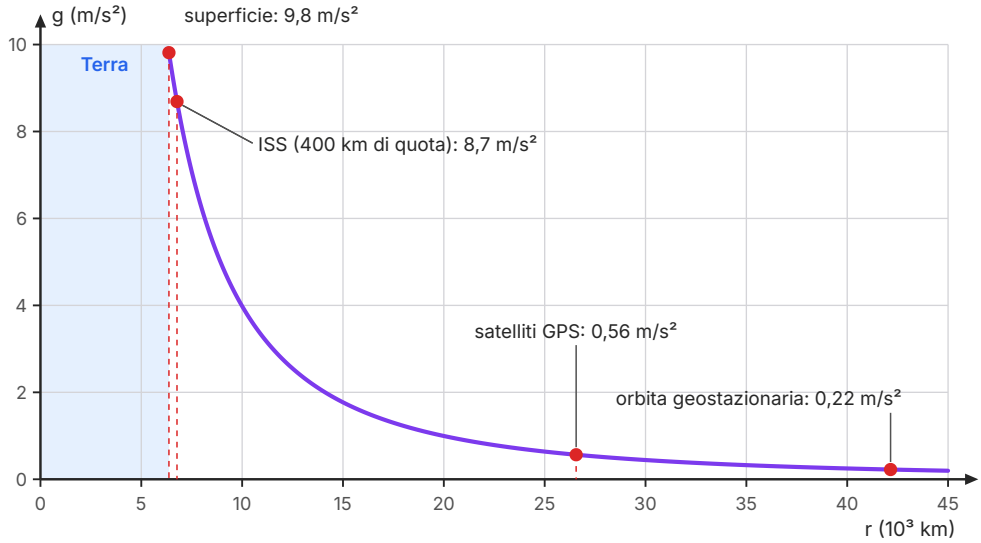

Figura 13.3 Modulo del campo gravitazionale terrestre in funzione della distanza r dal centro, fuori dalla Terra, calcolato con $g = GM/r^2$. Sono segnate la superficie, la quota della Stazione Spaziale Internazionale, l'orbita dei satelliti GPS e quella geostazionaria. Raddoppiando la distanza dal centro il campo diventa quattro volte più debole.

Con la stessa formula si calcola il campo sulla superficie degli altri corpi del Sistema solare (Tabella 13.2). Il campo alla superficie dipende sia dalla massa sia dal raggio: Venere ha l'82% della massa della Terra e un raggio un po' minore, e il suo campo è quasi uguale al nostro; Mercurio e Marte, molto diversi in massa, hanno quasi lo stesso campo superficiale, perché Mercurio è anche molto più piccolo.

Tabella 13.2 Campo gravitazionale alla superficie $g = GM/R^2$ e velocità di fuga (definita più avanti nel capitolo) di alcuni corpi del Sistema solare, calcolati dalla massa e dal raggio medio (fonte: NASA/JPL, *Planetary Physical Parameters*; Terra e Luna: Tabella A.2). Il calcolo trascura la rotazione; per Giove, che non ha una superficie solida, il raggio è quello convenzionale degli strati esterni.

Corpo	M (10^{24} kg)	R (km)	g (m/s^2)	v_{fuga} (km/s)
Mercurio	0,330	2440	3,70	4,25
Venere	4,87	6052	8,87	10,4
Terra	5,97	6370	9,81	11,2
Luna	0,0735	1740	1,62	2,37
Marte	0,642	3390	3,73	5,03
Giove	1898	69 911	25,9	60,2

13.4.3 Le linee di campo

Un campo vettoriale si rappresenta con le **linee di campo**: linee orientate tangenti in ogni punto al vettore $\boldsymbol{g}$, tracciate più fitte dove il campo è più intenso (Figura 13.4). Intorno a un corpo sferico isolato sono semirette che puntano verso il centro: arrivano dall'infinito e terminano sul corpo, avvicinandosi l'una all'altra man mano che il campo cresce. Le linee non si incrociano mai, perché in ogni punto il campo ha una sola direzione.

Intorno a due corpi il disegno si complica. Le linee si piegano, e fra i due corpi c'è un punto in cui i due campi, opposti, hanno lo stesso modulo: lì il campo totale è nullo. Per due masse in rapporto 4 : 1, come nella figura, il punto si trova dove $(d_1/d_2)^2 = 4$, cioè a due terzi della distanza dal corpo più massiccio. Un punto così esiste anche fra la Terra e la Luna, e in un esercizio di fine capitolo lo troverai tu.

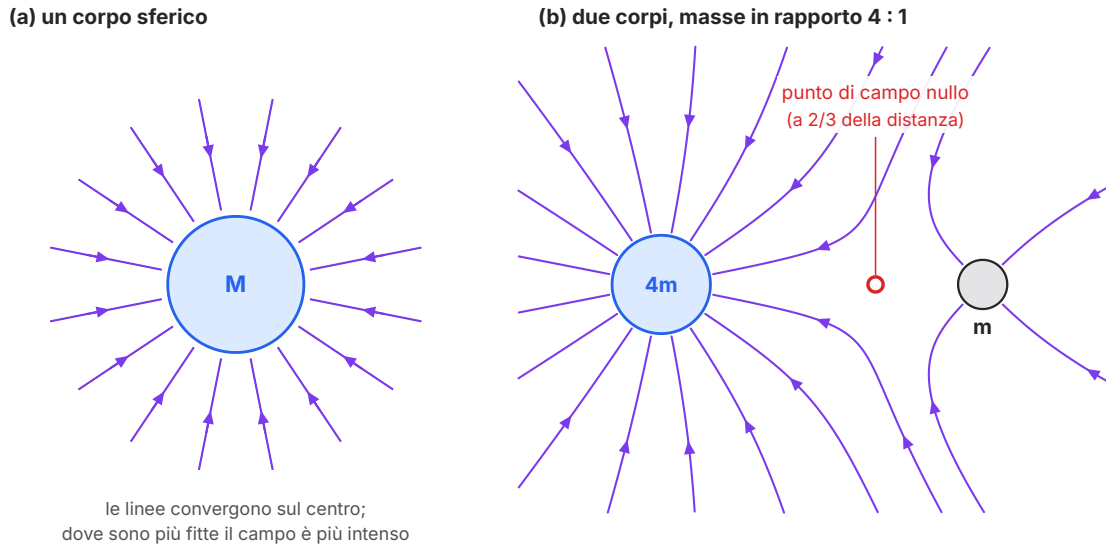

Figura 13.4 Linee del campo gravitazionale (schemi in sezione). (a) Intorno a un corpo sferico isolato le linee sono radiali e puntano verso il centro. (b) Intorno a due corpi con masse in rapporto 4 : 1 (linee calcolate; il numero di linee che arrivano su ciascun corpo è proporzionale alla sua massa). Fra i due corpi c'è un punto in cui il campo totale è nullo. Per la Terra e la Luna il rapporto fra le masse è circa 81 : 1.

13.4.4 Il problema dell'azione a distanza

La legge di Newton descrive la forza, ma tace su *come* la Terra raggiunga la Luna attraverso 384 000 km di spazio quasi vuoto. Le forze di contatto richiedono che i corpi si tocchino; le forze a distanza che hai incontrato nel primo anno sembrano agire attraverso il nulla, istantaneamente. È il problema dell'**azione a distanza**: l'idea che un corpo agisca su un altro, lontano, senza nulla che trasmetta l'azione.

Newton per primo la considerava inaccettabile come spiegazione. In una lettera del 25 febbraio 1693 al teologo Richard Bentley scrisse: «Che la gravità sia innata, inerente ed essenziale alla materia, così che un corpo possa agire su un altro a distanza attraverso il vuoto, senza la mediazione di qualcos'altro per mezzo del quale la loro azione o forza sia trasmessa dall'uno all'altro, è per me un'assurdità così grande che credo che nessuno che abbia in filosofia una competente facoltà di pensare possa mai cadervi» (traduzione della redazione dall'originale inglese). Newton si limitò a dimostrare che la legge descrive con esattezza i moti, lasciando aperta la questione della causa.

Il concetto di campo è la risposta che la fisica ha costruito in seguito: la Terra modifica lo spazio intorno a sé, creando un campo in ogni punto, ed è il campo, *lì dove si trova la Luna*, ad agire su di essa. Per la gravità newtoniana le due descrizioni danno gli stessi numeri; il prossi-

mo anno, con le cariche elettriche e i magneti, vedrai che il campo è molto di più: un'entità fisica che trasporta le interazioni da un punto all'altro.

COLLEGAMENTI

Scienze della Terra: le maree

Due volte al giorno, in quasi tutti i mari, il livello dell'acqua sale e scende: sono le **maree**. Le produce la differenza fra il campo gravitazionale della Luna nei diversi punti della Terra. Il campo lunare vale circa $3{,}3 \times 10^{-5}$ m/s^2 al centro della Terra, un po' di più sul lato rivolto verso la Luna e un po' di meno sul lato opposto. Rispetto al centro, l'acqua dal lato della Luna è tirata di più e quella dal lato opposto di meno, e resta indietro: si formano due rigonfiamenti, uno da ciascuna parte. La differenza è di circa $1{,}1 \times 10^{-6}$ m/s^2, un decimilionesimo di g, ma agisce su interi oceani.

La Terra ruota sotto i due rigonfiamenti, e in poco più di un giorno un punto della costa ha due alte e due basse maree. Il Sole, 390 volte più lontano della Luna, produce maree circa la metà di quelle lunari: il suo campo sulla Terra è quasi 180 volte più intenso, ma varia molto meno da un lato all'altro. Con la Luna nuova o piena, Sole, Terra e Luna sono allineati e le maree sono più ampie (maree vive); al primo e all'ultimo quarto gli effetti si compensano in parte (maree morte).

13.5 I satelliti in orbita circolare

13.5.1 Il cannone di Newton

Newton spiegò con un esperimento ideale perché la Luna può cadere continuamente verso la Terra senza mai raggiungerla. Un cannone in cima a una montagna altissima, al di sopra dell'atmosfera, spara proiettili orizzontalmente con velocità sempre maggiori (Figura 13.5). Più il proiettile è veloce, più lontano ricade, e su grandi distanze la superficie della Terra si incurva sotto la traiettoria. A una velocità ben precisa il proiettile cade verso la Terra esattamente quanto la superficie si abbassa sotto di lui, e torna al punto di partenza: è un satellite in orbita circolare. A velocità ancora maggiori l'orbita diventa un'ellisse sempre più allungata e, oltre un valore limite, il proiettile non torna più.

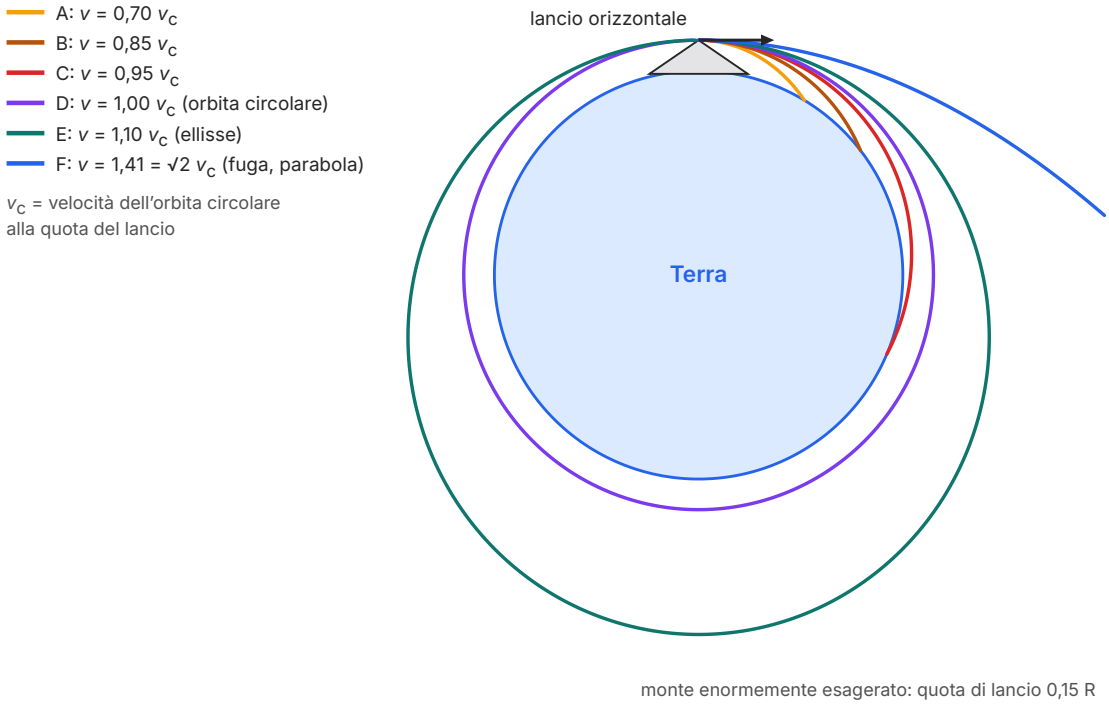

Figura 13.5 Il cannone di Newton: traiettorie calcolate per proiettili lanciati orizzontalmente da una quota di 0,15 raggi terrestri con velocità diverse, espresse come frazioni della velocità v_c dell'orbita circolare a quella quota (trascurando l'aria). A, B e C ricadono sulla Terra; D è l'orbita circolare; E è un'ellisse con il centro della Terra in un fuoco; F, lanciato con $\sqrt{2}\, v_c$, sfugge lungo una parabola.

13.5.2 La velocità orbitale e il periodo

Per un satellite di massa m in orbita circolare di raggio r intorno a un corpo di massa M, nel sistema inerziale del corpo centrale l'unica forza è l'attrazione gravitazionale, che fa da forza centripeta:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\left(\frac{GM}{r}\right)}$$

È la **velocità orbitale**: la velocità che un satellite deve avere per percorrere un'orbita circolare di raggio r. Non dipende dalla massa del satellite (la massa m si semplifica), e diminuisce allontanandosi dal centro: i satelliti lontani sono più lenti. Il periodo è il tempo per percorrere la circonferenza:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{r^3}{GM}\right)}$$

Elevando al quadrato si ritrova la terza legge di Keplero, $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$: vale per i pianeti intorno al Sole, per la Luna e per i satelliti artificiali intorno alla Terra, ciascuna famiglia con la sua costante. Per un'orbita radente alla superficie terrestre (ignorando l'aria) $v = \sqrt{(GM/R)} \approx 7{,}9$ km/s e $T \approx 84$ minuti: nessun satellite può girare intorno alla Terra più in fretta.

13.5.3 Orbite basse, orbite medie, orbita geostazionaria

Si chiamano **orbite basse** quelle fra qualche centinaio e circa 2000 km di quota: le percorrono la Stazione Spaziale (a 400 km, $v \approx 7{,}67$ km/s, un giro in circa 92 minuti), i satelliti per l'osservazione della Terra e le grandi costellazioni di satelliti per le telecomunicazioni.

Più in alto, a circa 20 200 km di quota, orbitano i satelliti dei sistemi di navigazione come il GPS, che compiono un giro ogni mezzo giorno siderale, circa 11 ore e 58 minuti. Ancora più in alto c'è un'orbita speciale. Un satellite che gira nel piano dell'equatore, nello stesso verso della rotazione terrestre, con un periodo uguale a quello di rotazione della Terra, resta sempre sopra lo stesso punto dell'equatore: per chi lo guarda da terra è fermo nel cielo. È l'**orbita geostazionaria**, usata dai satelliti per le telecomunicazioni e per la televisione e da alcuni satelliti meteorologici: un'antenna parabolica puntata una volta per tutte riceve sempre il segnale.

ESEMPIO SVOLTO

Il raggio dell'orbita geostazionaria

Problema. a) Quale periodo deve avere un satellite geostazionario? b) Calcola il raggio della sua orbita e la sua quota sull'equatore. c) Calcola la sua velocità e il campo gravitazionale terrestre alla sua distanza. d) Spiega perché non può esistere un satellite geostazionario sopra l'Italia.

Soluzione. a) Il satellite deve fare un giro mentre la Terra ruota una volta *rispetto alle stelle*, cioè in un giorno siderale, $T = 86\,164$ s (Tabella A.2), circa 23 h 56 min. Il giorno solare di 24 h è un po' più lungo perché, mentre la Terra avanza lungo l'orbita, deve ruotare ancora un poco perché il Sole torni nella stessa posizione nel cielo.

b) Dalla terza legge di Keplero per i satelliti della Terra: $r^3 = GMT^2/(4\pi^2) = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times (86\,164)^2 / (4\pi^2)\ \text{m}^3 \approx 7{,}49 \times 10^{22}\ \text{m}^3$, quindi $r = \sqrt[3]{(7{,}49 \times 10^{22}\ \text{m}^3)} \approx 4{,}22 \times 10^7$ m, cioè circa 42 150 km dal centro. La quota è $r - R \approx 4{,}22 \times 10^7\ \text{m} - 0{,}0637 \times 10^7\ \text{m} \approx 3{,}58 \times 10^7$ m, circa 35 780 km. Con i valori più precisi delle costanti e il raggio equatoriale si ottengono 42 160 km dal centro e 35 790 km di quota.

c) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 4{,}215 \times 10^7\ \text{m} / 86\,164\ \text{s} \approx 3{,}07 \times 10^3$ m/s, cioè 3,07 km/s. Il campo è $g = GM/r^2 \approx 0{,}224\ \text{m/s}^2$; per controllo, è uguale all'accelerazione centripeta $v^2/r = (3{,}07 \times 10^3)^2/4{,}215 \times 10^7\ \text{m/s}^2 \approx 0{,}224\ \text{m/s}^2$, come deve essere per un'orbita circolare.

d) La gravità punta sempre verso il centro della Terra, quindi il piano di ogni orbita passa per il centro. Un cerchio «sopra l'Italia», parallelo all'equatore a circa 42° di latitudine, avrebbe il centro sull'asse terrestre ma fuori dal centro della Terra: la gravità non potrebbe fornire la forza centripeta. Per questo i satelliti geostazionari stanno sopra l'equatore, e dall'Italia le parabole sono puntate verso sud.

Controllo. Il risultato non dipende dalla massa del satellite: tutti i satelliti geostazionari, grandi o piccoli, stanno sullo stesso anello.

13.6 L'energia nel campo gravitazionale

13.6.1 Oltre *mgh*

Nel capitolo 5 hai visto che $U = mgh$ vale per una forza peso costante; ma salendo la forza diminuisce come $1/r^2$. L'energia potenziale è definita dal lavoro della forza conservativa, $\Delta U = -W$, e il lavoro di una forza variabile è l'area sotto il grafico della forza (capitolo 5): per la gravità lo si calcola con un ragionamento a passi.

ESEMPIO SVOLTO

Il lavoro della forza gravitazionale, a passi

Problema. Un corpo di massa m si allontana in direzione radiale dalla distanza r_A alla distanza r_B dal centro della Terra. Calcola il lavoro della forza gravitazionale e ricava l'energia potenziale.

Passo 1: un tratto breve. Su un tratto da r_1 a r_2, poco più grande, la forza passa da GMm/r_1^2 a GMm/r_2^2. Come valore «medio» della forza sul tratto prendiamo $GMm/(r_1 r_2)$: il prodotto $r_1 r_2$ sta fra r_1^2 e r_2^2, e sui tratti brevi l'errore diventa trascurabile. La forza punta verso il centro e lo spostamento in fuori, quindi il lavoro è negativo:

$$W_{12} = -G\frac{Mm}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = -GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Passo 2: si sommano i tratti. Dividiamo il cammino da r_A a r_B in tratti r_A, r_1, r_2, ..., r_B. Sommando, ogni termine $1/r_k$ compare una volta con il segno + e una volta con il segno −, e si cancella: restano soltanto il primo e l'ultimo.

$$W_{AB} = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Il risultato non dipende da quanti tratti si usano: è il valore esatto, che con l'analisi matematica otterrai come area sotto la curva $F(r)$. (Con dieci tratti fra R e $2R$, prendendo la forza all'inizio di ogni tratto si sbaglia di circa l'8% in eccesso, prendendola alla fine di circa il 7% in difetto.)

Passo 3: l'energia potenziale. Da $\Delta U = -W$: $U(r_B) - U(r_A) = GMm(1/r_A - 1/r_B) = (-GMm/r_B) - (-GMm/r_A)$. La funzione $U(r) = -GMm/r$ ha esattamente queste differenze.

Controllo. Vicino alla superficie, con $r_A = R$ e $r_B = R + h$: $\Delta U = GMmh/[R(R + h)]$. Se h è molto minore di R, $R(R + h) \approx R^2$ e $\Delta U \approx m(GM/R^2)h = mgh$: si ritrova la formula che conosci.

Questo aggiorna la definizione dello scorso anno: l'**energia potenziale gravitazionale** di un corpo di massa m a distanza r dal centro di un corpo sferico di massa M è

$$U = -G\frac{Mm}{r} \quad (r \geq R)$$

Come sai, conta soltanto la differenza di energia potenziale fra due posizioni, e la costante si può scegliere: qui la scelta è $U = 0$ a distanza infinita, dove la forza si annulla. Così U è sempre negativa e cresce verso zero man mano che il corpo si allontana: per allontanarlo bisogna fornire energia. Vicino alla superficie, mgh resta una buona approssimazione delle differenze di energia potenziale.

ERRORE FREQUENTE

«Per portare una sonda di 1000 kg a 400 km di quota servono $mgh = 1000 \times 9{,}8 \times 4{,}0 \times 10^5$ J $\approx 3{,}9 \times 10^9$ J.» Il valore è sbagliato due volte. Primo, salendo g diminuisce: la variazione esatta di energia potenziale è $GMm(1/R - 1/r) \approx 3{,}7 \times 10^9$ J, il 6% in meno. Secondo, e soprattutto, una sonda ferma a 400 km di quota ricadrebbe: per restare lassù deve avere la velocità orbitale, e la sua energia cinetica, circa $2{,}9 \times 10^{10}$ J, è quasi otto volte la variazione di energia potenziale. Mettere in orbita un satellite costa soprattutto velocità, non quota.

13.6.2 Il grafico di $U(r)$ e le orbite legate

Il grafico di $U(r)$ è una curva che sale verso lo zero (Figura 13.6): è il diagramma dell'energia potenziale del capitolo 5, e si legge allo stesso modo. Un corpo con energia meccanica totale $E = K + U$ negativa può allontanarsi soltanto fino alla distanza in cui $U = E$, dove K si annulla: è in un moto limitato, intrappolato nella buca di potenziale della Terra. Un corpo con $E \geq 0$ non ha punti di inversione e può allontanarsi indefinitamente.

Per un satellite in orbita circolare l'energia si calcola subito. Dalla condizione dell'orbita, $mv^2 = GMm/r$, l'energia cinetica è $K = \tfrac{1}{2}mv^2 = GMm/(2r)$, metà del valore assoluto dell'energia potenziale. L'energia totale è

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} < 0$$

L'energia totale di un'orbita circolare è negativa, e il satellite è legato alla Terra. Il suo valore assoluto, $GMm/(2r)$, è l'**energia di legame**: l'energia minima che bisognerebbe fornire al satellite per liberarlo, portandolo a distanza infinita con velocità nulla. Una conseguenza curiosa: un satellite che perde energia per l'attrito con l'alta atmosfera scende su un'orbita più bassa e, poiché $K = -E$, *accelera*. L'attrito fa diminuire l'energia totale, ma la gravità, mentre il satellite scende, fornisce in energia cinetica il doppio di quanto l'attrito dissipa.

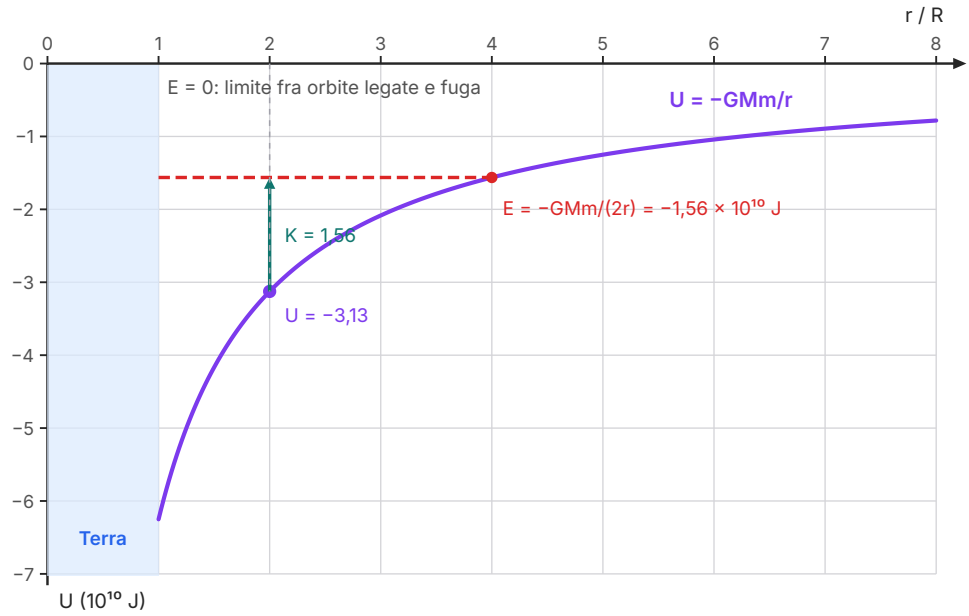

Figura 13.6 Energia potenziale gravitazionale di un satellite di 1000 kg in funzione della distanza dal centro della Terra, in raggi terrestri, calcolata con $U = -GMm/r$. Per un'orbita circolare a $r = 2R$ l'energia totale (tratteggio rosso) è metà dell'energia potenziale, e l'energia cinetica è uguale al suo valore assoluto. Con quell'energia un corpo lanciato in verticale arriverebbe al più a $r = 4R$, dove la retta incontra la curva.

13.6.3 La velocità di fuga

Con quale velocità minima bisogna lanciare un corpo dalla superficie perché si allontani per sempre? Trascurando l'aria, l'energia meccanica si conserva; il corpo arriva all'infinito, al limite con velocità nulla, se $E = 0$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{fuga}} = \sqrt{\left(\frac{2GM}{R}\right)}$$

È la **velocità di fuga**. Per la Terra vale $\sqrt{(2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} / 6{,}37 \times 10^{6})}$ m/s $\approx 1{,}12 \times 10^{4}$ m/s = 11,2 km/s, $\sqrt{2}$ volte la velocità dell'orbita radente. Non dipende dalla massa del corpo lanciato né dalla direzione del lancio, purché la traiettoria non incontri la Terra: l'energia è uno scalare, e conta soltanto il modulo della velocità. Per la Luna è soltanto 2,4 km/s (Tabella 13.2): è uno dei motivi per cui la Luna non ha trattenuto un'atmosfera, perché le molecole di gas più veloci, scaldate dal Sole, riescono a sfuggire.

APPROFONDIMENTO

Il pianeta scoperto con carta e penna

Nel 1781 William Herschel scoprì con il telescopio un nuovo pianeta, Urano. Nei decenni seguenti gli astronomi si accorsero che Urano non seguiva esattamente l'orbita calcolata con la gravitazione newtoniana, anche tenendo conto dell'attrazione dei pianeti noti. O la legge di Newton smetteva di valere lontano dal Sole, o un altro pianeta, invisibile, tirava Urano.

Il francese Urbain Le Verrier, e indipendentemente in Inghilterra John Couch Adams, rovesciarono il problema: cercarono massa e posizione del pianeta sconosciuto capaci di spiegare le deviazioni di Urano. Le Verrier comunicò la sua previsione all'astronomo Johann Galle dell'osservatorio di Berlino, che nel settembre 1846, la prima notte di ricerca, trovò il pianeta a meno di un grado dal punto indicato. Era Nettuno, scoperto dal calcolo prima che al telescopio: il trionfo più spettacolare della meccanica newtoniana.

Le Verrier provò a spiegare allo stesso modo una piccola anomalia dell'orbita di Mercurio, ma quel pianeta non fu mai trovato: il limite era della teoria, e la spiegazione venne dalla relatività generale di Einstein. Una deviazione dalle previsioni può rivelare un corpo sconosciuto, o i limiti di una legge.

APPROFONDIMENTO

Stelle oscure e buchi neri

Alla fine del Settecento lo stesso John Michell che aveva progettato la bilancia di torsione si chiese che cosa accadrebbe a una stella così compatta che la sua velocità di fuga superasse quella della luce: se la luce fosse fatta di corpuscoli soggetti alla gravità, non potrebbe uscirne, e la stella sarebbe invisibile. Ponendo $v_{\text{fuga}} = c$ si ottiene il raggio $r = 2GM/c^2$: circa 3 km per la massa del Sole, meno di un centimetro per quella della Terra. Oggetti così compatti si conoscono davvero, i **buchi neri**, da cui nulla, nemmeno la luce, può sfuggire. Ma il ragionamento di Michell è soltanto euristico: la luce non è un proiettile newtoniano, e la gravità di corpi così compatti si descrive con la relatività generale; che questa dia lo stesso raggio $2GM/c^2$ è, per la fisica newtoniana, una coincidenza fortunata.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: dal pendolo alla massa della Terra

Materiali. Una sfera di acciaio di circa 3 cm di diametro appesa a un filo sottile e inestensibile, fissato con una morsa a un supporto rigido; un metro a nastro (sensibilità 1 mm); un cronometro (sensibilità 0,01 s) o, meglio, una fotocellula con contatore. È il pendolo del capitolo 4, usato come strumento di precisione.

Procedimento. 1) Si misura la lunghezza l dal punto di sospensione al centro della sfera: $(1{,}500 \pm 0{,}002)$ m. 2) Si sposta la sfera di pochi centimetri: con un'ampiezza sotto i 5° il periodo supera quello delle piccole oscillazioni di meno dello 0,05%. 3) Si misura il tempo di 50 oscillazioni complete, avviando e fermando il cronometro al passaggio per la posizione di equilibrio, dove la sfera è più veloce. 4) Si ripete cinque volte.

Tabella 13.3 Tempo di 50 oscillazioni di un pendolo lungo $(1{,}500 \pm 0{,}002)$ m (dati tipici di una prova).

Prova	1	2	3	4	5
t_{50} (s)	122,8	123,0	122,9	122,7	123,1

Elaborazione. Il valore medio è $t_{50} = 122{,}9$ s, con semidispersione 0,2 s: $T = (2{,}458 \pm 0{,}004)$ s. Da $T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$: $g = 4\pi^2 l/T^2 = 4\pi^2 \times 1{,}500\ \text{m}/(2{,}458\ \text{s})^2 \approx 9{,}80\ \text{m/s}^2$. L'incertezza relativa è quella di l più il doppio di quella di T: $0{,}0013 + 0{,}0033 \approx 0{,}46\%$, quindi $g = (9{,}80 \pm 0{,}05)\ \text{m/s}^2$. Le 50 oscillazioni dividono per 50 l'errore dovuto ai riflessi.

Confronto teoria–esperimento. Con $M = gR^2/G$, $R = 6{,}37 \times 10^6$ m e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2$ si ottiene $M = (5{,}96 \pm 0{,}03) \times 10^{24}$ kg (l'incertezza relativa è quella di g; quelle di R e G, molto più piccole, si trascurano). Il valore accettato, $5{,}97 \times 10^{24}$ kg, differisce di $0{,}01 \times 10^{24}$ kg, meno dell'incertezza: la misura è compatibile.

Che cosa concludere. Con un filo, una sfera, un cronometro e il valore di G misurato da Cavendish si ottiene la massa del pianeta su cui si sta. Il pendolo misura però la gravità *efficace*, che alle nostre latitudini la rotazione terrestre riduce di circa lo 0,2% (capitolo 3), e la Terra è un po' schiacciata ai poli: con una misura più precisa questi effetti non sarebbero più trascurabili.

Sicurezza. Il supporto deve essere ben fissato al banco, e nessuno deve stare nel piano di oscillazione della sfera.

Per la relazione. Riporta la tabella, il calcolo di g e di M con le incertezze e il confronto con il valore accettato. Stima la correzione per la rotazione terrestre alla latitudine della tua scuola ($\omega^2 R \cos^2\varphi$, con φ la latitudine) e discuti se migliora l'accordo. Quale incertezza, su l o su T, conviene ridurre per prima, e come?

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$F = Gm_1m_2/r^2$ — legge di gravitazione universale: forza attrattiva lungo la retta che congiunge i centri; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2 per ogni coppia di corpi. Vale per corpi puntiformi e per corpi a simmetria sferica, all'esterno.

$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$; $g = GM/r^2$ — campo gravitazionale (N/kg = m/s^2) a distanza $r \geq R$ dal centro di un corpo sferico di massa M, diretto verso il centro. Alla superficie $g = GM/R^2$, da cui $M = gR^2/G$.

$v = \sqrt{(GM/r)}$; $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$ — satellite in orbita circolare di raggio r intorno a un corpo di massa M molto maggiore della sua; non dipendono dalla massa del satellite. Orbita geostazionaria: equatoriale, $T = 86\,164$ s, $r \approx 42\,160$ km.

$U = -GMm/r$ — energia potenziale gravitazionale (J), nulla a distanza infinita, negativa ovunque; vale per $r \geq R$. Vicino alla superficie $\Delta U \approx mg\Delta h$.

$E = -GMm/(2r)$ — energia meccanica totale di un satellite in orbita circolare: negativa (sistema legato); $K = -E$, $U = 2E$.

$v_{\text{fuga}} = \sqrt{(2GM/R)}$ — velocità minima di lancio dalla superficie per allontanarsi indefinitamente (11,2 km/s per la Terra); non dipende dalla massa né dalla direzione del lancio.

SINTESI

- Il test della Luna mostra che la forza che trattiene la Luna è la gravità terrestre, ridotta di 60^2 volte a una distanza 60 volte maggiore: la forza diminuisce come $1/r^2$.
- Dalla terza legge di Keplero, per orbite circolari, segue una forza proporzionale alla massa del pianeta e a $1/r^2$; con il terzo principio si arriva a $F = GMm/r^2$ e a $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$.
- La legge di gravitazione universale vale per ogni coppia di corpi, con la stessa costante G: la fisica della Terra e quella dei cieli sono una sola.
- Per il teorema del guscio sferico un corpo a simmetria sferica attira i corpi esterni come se la sua massa fosse nel centro: r è la distanza fra i centri.
- Cavendish misurò nel 1798, con la bilancia di torsione, la debolissima attrazione fra masse di laboratorio. Noto G, si «pesano» i corpi celesti: $M = gR^2/G$ per la Terra, $M = 4\pi^2r^3/(GT^2)$ per un corpo intorno al quale gira un satellite.
- Il campo gravitazionale $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$ è una proprietà dello spazio; intorno a un corpo sferico vale GM/r^2 e le sue linee sono radiali. A 400 km di quota vale ancora l'89% del valore al suolo: gli astronauti galleggiano perché sono in caduta libera.
- Newton considerava assurda un'azione a distanza senza mediazione; il campo è la risposta che la fisica svilupperà con l'elettromagnetismo.
- Un satellite in orbita circolare ha velocità $\sqrt{(GM/r)}$ e periodo $2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$, indipendenti dalla sua massa; l'orbita geostazionaria è equatoriale, con periodo di un giorno siderale e raggio di circa 42 160 km.
- L'energia potenziale gravitazionale è $U = -GMm/r$, nulla all'infinito; mgh ne approssima le variazioni vicino alla superficie. In orbita circolare $E = -GMm/(2r) < 0$: il satellite è legato.
- Con $E \geq 0$ un corpo sfugge: la velocità di fuga dalla Terra è 11,2 km/s, qualunque sia la direzione del lancio.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Se la distanza fra i centri di due corpi triplica, la forza gravitazionale fra di essi:
   A. diventa un terzo
   B. diventa un nono
   C. triplica
   D. diventa nove volte maggiore

2. ● La costante di gravitazione universale G:
   A. vale 9,8 m/s^2 sulla superficie terrestre
   B. è maggiore sui pianeti più massicci
   C. si misura in m/s^2
   D. ha lo stesso valore per qualunque coppia di corpi, in qualunque luogo

3. ●● A una quota uguale al raggio terrestre il campo gravitazionale della Terra vale circa:
   A. 4,9 m/s^2
   B. 9,8 m/s^2
   C. 2,5 m/s^2
   D. 1,1 m/s^2

4. ● A bordo della Stazione Spaziale Internazionale gli astronauti galleggiano perché:
   A. la stazione e gli astronauti sono in caduta libera intorno alla Terra
   B. a 400 km di quota la gravità terrestre è trascurabile
   C. fuori dall'atmosfera la gravità non agisce
   D. l'attrazione della Luna compensa quella della Terra

5. ●● La velocità di un satellite in orbita circolare intorno alla Terra dipende:
   A. dalla massa del satellite e dal raggio dell'orbita
   B. dalla massa del satellite e dalla massa della Terra
   C. dal raggio dell'orbita e dalla massa della Terra
   D. soltanto dal raggio dell'orbita

6. ●● Il raggio dell'orbita circolare di un satellite viene portato a un valore quattro volte maggiore. Il periodo:
   A. raddoppia
   B. quadruplica
   C. diventa sedici volte maggiore
   D. diventa otto volte maggiore

7. ●● Un satellite passa da un'orbita circolare di raggio r a una di raggio $2r$. La sua energia potenziale gravitazionale $U = -GMm/r$:
   A. aumenta, perché diventa meno negativa
   B. diminuisce, perché il satellite è più lontano
   C. resta uguale, perché il satellite resta in orbita
   D. cambia segno

8. ●● Un pianeta ha lo stesso raggio della Terra e massa quattro volte maggiore. La sua velocità di fuga è circa:
   A. 11,2 km/s
   B. 22,4 km/s
   C. 44,8 km/s
   D. 5,6 km/s

Vero o falso

9. ● Una mela attira la Terra con una forza minore di quella con cui la Terra attira la mela, perché la sua massa è molto più piccola. V / F

10. ●● Alla quota della Stazione Spaziale Internazionale il campo gravitazionale terrestre è circa il 90% di quello alla superficie. V / F

11. ● Si potrebbe mettere un satellite geostazionario fermo sopra Roma, se lo si portasse alla quota giusta. V / F

12. ●● L'energia meccanica totale di un satellite in orbita circolare è negativa, se si pone $U = 0$ a distanza infinita. V / F

13. ●● Trascurando l'atmosfera, per sfuggire alla Terra un corpo lanciato in verticale ha bisogno di una velocità minore di uno lanciato in orizzontale. V / F

Applicare

14. ● Due navi di $5{,}0 \times 10^7$ kg ciascuna sono ormeggiate a 200 m di distanza fra i centri di massa. Calcola la forza gravitazionale fra le due navi, trattandole come corpi puntiformi.

15. ● Calcola il campo gravitazionale terrestre a 1000 km di quota.

16. ● Completa: dalla legge di gravitazione, l'unità di G è $\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, che in unità fondamentali del SI equivale a _____ ; il campo gravitazionale si misura in N/kg, che equivale a _____ .

17. ● Usa la Figura 13.3: a quale distanza dal centro della Terra il campo vale un quarto del valore alla superficie? Verifica la lettura con la legge $1/r^2$.

18. ●● Un satellite per l'osservazione della Terra orbita a 800 km di quota. Calcola la sua velocità e il suo periodo in minuti.

19. ●● Phobos, il satellite più vicino a Marte, percorre un'orbita quasi circolare di raggio $9{,}38 \times 10^6$ m in 7,65 h. Calcola la massa di Marte.

20. ●● Calcola la velocità di fuga dalla superficie del pianeta nano Cerere (massa $9{,}38 \times 10^{20}$ kg, raggio 470 km). Potresti sfuggirgli lanciando un sasso a mano?

21. ●● Una sonda di 500 kg viene portata dalla superficie terrestre a 1000 km di quota. Calcola la variazione della sua energia potenziale con $U = -GMm/r$ e confrontala con il valore mgh: di quale percentuale sbaglia la formula approssimata?

Problemi

22. ●●● Fra la Terra e la Luna c'è un punto in cui un'astronave sente attrazioni uguali e opposte dai due corpi. a) A quale distanza dal centro della Terra si trova? b) Quanto vale lì il campo della sola Terra? c) Perché il campo totale nel punto è nullo, ma un'astronave ferma lì non ci resta a lungo?

23. ●● Un pendolo semplice lungo 0,80 m viene portato sulla Luna. a) Calcola il campo gravitazionale sulla superficie lunare dai dati della Tabella A.2. b) Calcola il periodo delle piccole oscillazioni sulla Terra e sulla Luna. c) Quale lunghezza dovrebbe avere il pendolo sulla Luna per oscillare con lo stesso periodo che ha sulla Terra?

24. ●●● Marte compie un giro su se stesso, rispetto alle stelle, in 1,026 giorni; la sua massa è $6{,}42 \times 10^{23}$ kg e il raggio $3{,}39 \times 10^{6}$ m. a) Calcola raggio e quota dell'orbita «areostazionaria», l'analoga marziana dell'orbita geostazionaria. b) Calcola la velocità di un satellite su quell'orbita. c) Phobos orbita a $9{,}38 \times 10^{6}$ m dal centro di Marte: visto dalla superficie marziana, si muove nel cielo nello stesso verso delle stelle o in verso opposto? Motiva.

25. ●●● Un satellite di 1500 kg deve essere portato dalla superficie terrestre su un'orbita circolare a 600 km di quota. a) Calcola la velocità orbitale e l'energia totale in orbita. b) Calcola l'energia minima da fornire, partendo da fermo nel sistema di riferimento della Terra non rotante. c) In realtà il satellite parte dall'equatore, dove il suolo, per la rotazione terrestre, si muove verso est a 465 m/s rispetto a quel sistema. Con la composizione galileiana delle velocità (capitolo 2), spiega perché conviene lanciare verso est e calcola di quanto si riduce l'energia da fornire.

26. ●●● Due stelle di uguale massa M girano intorno al loro centro di massa (capitolo 8) su un'orbita circolare comune, mantenendosi sempre da parti opposte; la distanza fra le stelle è $1{,}5 \times 10^{11}$ m e il periodo è un anno ($3{,}156 \times 10^{7}$ s). a) Dove si trova il centro di massa e qual è il raggio dell'orbita di ciascuna stella? b) Scrivi la condizione dell'orbita circolare per una stella e ricava M. c) Confronta M con la massa del Sole.

27. ●● In una versione da laboratorio dell'esperimento di Cavendish una sferetta di piombo di 20 g si trova a 4,5 cm, fra i centri, da una sfera di piombo di 1,5 kg. a) Calcola la forza gravitazionale fra le due sfere. b) Quante volte è più piccola del peso della sferetta? c) Se la sferetta fosse libera di muoversi senza attrito e la forza restasse costante, di quanto si sposterebbe in un minuto? Commenta.

28. ●● Durante le missioni Apollo il modulo di comando orbitava intorno alla Luna a circa 100 km di quota. a) Calcola la velocità orbitale e il periodo, in minuti. b) Calcola il campo gravitazionale lunare a quella quota e confrontalo con l'accelerazione centripeta del modulo.

29. ●●● Trascurando l'aria e la rotazione terrestre: a) un proiettile viene lanciato in verticale dalla superficie a 8,0 km/s; a quale distanza dal centro della Terra si ferma? Confronta la quota raggiunta con quella che si otterrebbe con la formula $h = v^2/(2g)$, che presuppone g costante. b) Una sonda viene lanciata a 15 km/s. Con quale velocità passa alla distanza della Luna ($3{,}84 \times 10^8$ m; trascura l'attrazione della Luna)? Con quale velocità si allontanerebbe a distanza molto grande?

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Alla quota della Stazione Spaziale, 400 km, il campo terrestre è $g = GM/h^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}/(4{,}0 \times 10^5)^2$ m/s$^2 \approx 2{,}5 \times 10^3$ m/s^2.» Individua l'errore, correggilo e spiega perché il risultato avrebbe dovuto insospettire lo studente.

31. ●● Spiega perché il test della Luna non dimostra soltanto che la gravità diminuisce come $1/r^2$, ma anche che la forza che trattiene la Luna e quella che fa cadere i corpi sulla Terra sono la stessa forza. Usa l'argomento di Newton sulle «due forze».

32. ●●● Stima. Di quanto diminuisce, in percentuale, il tuo peso salendo dal livello del mare alla cima dell'Everest (8849 m)? Una bilancia pesapersone che misura al decimo di chilogrammo se ne accorgerebbe? (Trascura gli effetti della rotazione terrestre e della forma della Terra.)

33. ●●● Progetta. Vuoi verificare con un pendolo che il campo gravitazionale diminuisce salendo, misurando g al piano terra e sul tetto di un edificio alto 30 m. Calcola la variazione relativa prevista di g e confrontala con la precisione del laboratorio di questo capitolo. L'esperimento è fattibile? Quale altro strumento servirebbe?

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: il terzo libro, «Il sistema del mondo», con il test della Luna (proposizione IV) e il calcolo delle masse del Sole e dei pianeti.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla teoria della gravitazione, dalle leggi di Keplero a Cavendish, con una discussione del problema dell'azione a distanza.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla gravitazione, con molti problemi su satelliti, energia orbitale e velocità di fuga.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: i capitoli sulla gravità universale e sul moto dei satelliti, con le maree e il cannone di Newton spiegati quasi senza formule.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: come il concetto di campo è nato dalle difficoltà dell'azione a distanza ed è diventato centrale nella fisica moderna.

Glossario del capitolo

Azione a distanza
L'idea che un corpo agisca su un altro lontano senza alcun mezzo che trasmetta l'azione; Newton la riteneva inaccettabile come spiegazione, e la fisica l'ha superata con il concetto di campo.

Bilancia di torsione
Strumento in cui un'asta appesa a un filo sottile ruota sotto l'azione di forze piccolissime, misurate dalla torsione del filo; con essa Cavendish misurò l'attrazione fra masse di laboratorio.

Buchi neri
Corpi così compatti che nulla, nemmeno la luce, può sfuggire dalla regione che li circonda; si descrivono con la relatività generale.

Campo gravitazionale
Il vettore $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$, forza gravitazionale per unità di massa in un punto dello spazio; per un corpo sferico vale GM/r^2 e punta verso il centro. Si misura in $\mathrm{N/kg} = \mathrm{m/s^2}$.

Costante di gravitazione universale
La costante $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$ della legge di gravitazione; ha lo stesso valore per qualunque coppia di corpi.

Densità media della Terra
Rapporto fra la massa e il volume della Terra, circa $5{,}5 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$: circa il doppio di quella delle rocce superficiali.

Energia di legame
Energia minima da fornire a un corpo legato per portarlo a distanza infinita con velocità nulla; per un'orbita circolare vale $GMm/(2r)$.

Energia potenziale gravitazionale (forma generale)
Forma generale, che estende quella di *Fisica 2*: $U = -GMm/r$, con zero a distanza infinita; vicino alla superficie le sue variazioni sono approssimate da $mg\Delta h$.

Legge di gravitazione universale
Due corpi puntiformi si attirano con forze uguali e opposte, dirette lungo la loro congiungente, di modulo $F = Gm_1m_2/r^2$.

Linee di campo
Linee orientate tangenti in ogni punto al vettore campo, più fitte dove il campo è più intenso; non si incrociano mai.

Maree
Innalzamenti e abbassamenti periodici del livello del mare, prodotti dalla differenza del campo della Luna (e del Sole) fra i diversi punti della Terra.

Massa di prova
Corpo abbastanza piccolo da non disturbare le masse che generano un campo, usato per misurare il campo in un punto.

Orbita geostazionaria
Orbita circolare nel piano equatoriale, percorsa nel verso della rotazione terrestre in un giorno siderale, a circa 42 160 km dal centro: il satellite resta fermo nel cielo.

Orbite basse
Orbite fra qualche centinaio e circa 2000 km di quota, con periodi di circa un'ora e mezza; vi orbita la Stazione Spaziale Internazionale.

Principio di sovrapposizione
La forza (o il campo) prodotta da più corpi è la somma vettoriale delle forze (o dei campi) che ciascuno produrrebbe da solo.

Teorema del guscio sferico
Un guscio sferico omogeneo attira i corpi esterni come se la sua massa fosse concentrata nel centro e non esercita forza risultante sui corpi al suo interno.

Test della Luna
Confronto fra l'accelerazione centripeta della Luna, ricavata dal suo moto, e l'accelerazione di gravità terrestre divisa per 60^2: mostra che la gravità trattiene la Luna e diminuisce come $1/r^2$.

Velocità di fuga
Velocità minima di lancio dalla superficie, $v_{\text{fuga}} = \sqrt{(2GM/R)}$, con cui un corpo può allontanarsi indefinitamente; per la Terra 11,2 km/s.

Velocità orbitale
Velocità $v = \sqrt{(GM/r)}$ di un satellite in orbita circolare di raggio r; non dipende dalla massa del satellite.

Soluzioni

1. B. $F \propto 1/r^2$: con distanza tripla la forza diventa $1/3^2 = 1/9$ di quella iniziale.

2. D. G è una costante universale ($6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2); è g, non G, a cambiare da un luogo all'altro e a misurarsi in m/s^2.

3. C. A quota R la distanza dal centro è $2R$: $g = 9{,}8$ m/s$^2/2^2 \approx 2{,}5$ m/s^2.

4. A. A 400 km il campo è ancora 8,7 m/s^2; la stazione e il suo contenuto cadono intorno alla Terra con la stessa accelerazione, e nel sistema della stazione la gravità efficace è quasi nulla.

5. C. $v = \sqrt{(GM/r)}$: la massa del satellite si semplifica.

6. D. $T \propto r^{3/2}$: $4^{3/2} = 8$.

7. A. U passa da $-GMm/r$ a $-GMm/(2r)$: resta negativa ma il suo valore cresce, si dimezza in valore assoluto.

8. B. $v_{\text{fuga}} = \sqrt{(2GM/R)} \propto \sqrt{M}$ a parità di raggio: $\sqrt{4} = 2$, quindi $2 \times 11{,}2$ km/s = 22,4 km/s.

9. F. Per il terzo principio le due forze sono uguali in modulo (0,98 N per una mela di 0,10 kg); è l'*accelerazione* della Terra a essere trascurabile, perché la sua massa è enorme.

10. V. A $r = 6{,}77 \times 10^6$ m, $g = GM/r^2 \approx 8{,}7$ m/s^2, l'89% di 9,8 m/s^2.

11. F. Il piano di ogni orbita passa per il centro della Terra; l'unica orbita che resta sopra un punto fisso è nel piano equatoriale, quindi i satelliti geostazionari stanno sopra l'equatore.

12. V. $E = -GMm/(2r) < 0$: il satellite è legato alla Terra.

13. F. La velocità di fuga dipende dall'energia, che è uno scalare: è la stessa, 11,2 km/s, in ogni direzione (purché la traiettoria non incontri la Terra).

14. $F = Gm_1m_2/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times (5{,}0 \times 10^7)^2/(200)^2$ N $\approx$ 4,2 N: il peso di circa 0,4 kg, del tutto trascurabile rispetto alle forze dell'acqua e del vento.

15. $r = 6{,}37 \times 10^6$ m + $1{,}00 \times 10^6$ m = $7{,}37 \times 10^6$ m; $g = GM/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}/(7{,}37 \times 10^6)^2$ m/s$^2 \approx$ 7,33 m/s^2.

16. N = kg·m/s^2, quindi N·m^2/kg^2 = kg·m^3/(s^2·kg^2) = **m^3/(kg·s^2)**; N/kg = **m/s^2**.

17. Un quarto di 9,8 m/s^2 è circa 2,5 m/s^2: sul grafico si legge a circa $12{,}7 \times 10^3$ km dal centro. Con la legge $1/r^2$, perché g diventi un quarto la distanza deve raddoppiare: $r = 2R = 1{,}27 \times 10^7$ m, cioè a una quota uguale al raggio terrestre.

18. $r = 6{,}37 \times 10^6$ m + $8{,}0 \times 10^5$ m = $7{,}17 \times 10^6$ m; $v = \sqrt{(GM/r)} = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}/7{,}17 \times 10^6)}$ m/s $\approx$ $7{,}45 \times 10^3$ m/s; $T = 2\pi r/v \approx 6{,}05 \times 10^3$ s $\approx$ 101 minuti.

19. $T = 7{,}65 \times 3600$ s = $2{,}754 \times 10^4$ s; $M = 4\pi^2r^3/(GT^2) = 4\pi^2 \times (9{,}38 \times 10^6)^3/[6{,}67 \times 10^{-11} \times (2{,}754 \times 10^4)^2]$ kg $\approx$ $6{,}44 \times 10^{23}$ kg, circa un decimo della massa della Terra.

20. $v_{\text{fuga}} = \sqrt{(2GM/R)} = \sqrt{(2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 9{,}38 \times 10^{20}/4{,}70 \times 10^5)}$ m/s $\approx$ 516 m/s. No: un buon lancio a mano arriva a qualche decina di metri al secondo, più di dieci volte meno.

21. $\Delta U = GMm(1/R - 1/r) = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times 500 \times (1/6{,}37 \times 10^6 - 1/7{,}37 \times 10^6)$ J $\approx 4{,}24 \times 10^9$ J. Con mgh: $500 \times 9{,}8 \times 1{,}0 \times 10^6$ J = $4{,}9 \times 10^9$ J, circa il 16% in più: la formula approssimata usa il valore di g al suolo anche dove il campo è più debole.

22. a) Nel punto i due campi hanno modulo uguale: $GM_T/x^2 = GM_L/(d - x)^2$, quindi $(d - x)/x = \sqrt{(M_L/M_T)} = \sqrt{(7{,}35 \times 10^{22}/5{,}97 \times 10^{24})} \approx 0{,}111$ e $x = d/1{,}111 \approx 3{,}46 \times 10^8$ m, il 90% della distanza Terra–Luna (a circa $3{,}8 \times 10^7$ m dalla Luna). b) $g_T = GM_T/x^2 \approx 3{,}3 \times 10^{-3}$ m/s^2. c) Il punto non è fisso: la Luna gira intorno alla Terra e il punto si muove con lei; inoltre è un equilibrio instabile, perché spostandosi verso uno dei due corpi la sua attrazione cresce e quella dell'altro diminuisce, e l'astronave si allontana sempre di più dal punto.

23. a) $g_L = GM_L/R_L^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}35 \times 10^{22}/(1{,}74 \times 10^6)^2$ m/s^2 ≈ 1,62 m/s^2. b) Terra: $T = 2\pi\sqrt{(l/g)} = 2\pi\sqrt{(0{,}80/9{,}8)}$ s ≈ 1,80 s; Luna: $2\pi\sqrt{(0{,}80/1{,}62)}$ s ≈ 4,42 s. c) A parità di periodo l/g deve restare uguale: l_L = 0,80 m × 1,62/9,8 ≈ 0,13 m (13 cm).

24. a) Si conserva la condizione di orbita circolare con periodo uguale a quello di rotazione: T = 1,026 × 86 400 s ≈ 8,86 × 10^4 s; $r = \sqrt[3]{(GMT^2/4\pi^2)} = \sqrt[3]{[6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}42 \times 10^{23} \times (8{,}86 \times 10^4)^2/4\pi^2]}$ m ≈ 2,04 × 10^7 m; quota $r - R$ ≈ 1,70 × 10^7 m (circa 17 000 km). b) $v = 2\pi r/T$ ≈ 1,45 × 10^3 m/s. c) Phobos è più vicino dell'orbita areostazionaria (9,38 × 10^6 m < 2,04 × 10^7 m), quindi per la terza legge di Keplero ha un periodo minore della rotazione di Marte (7,65 h contro circa 24,6 h): gira più in fretta del pianeta, e dalla superficie lo si vede sorgere a ovest e tramontare a est, al contrario delle stelle, che nel sistema rotante di Marte si muovono da est a ovest.

25. Sistema di riferimento: quello inerziale con origine nel centro della Terra, che non ruota. a) r = 6,97 × 10^6 m; la gravità fa da forza centripeta: $v = \sqrt{(GM/r)}$ ≈ 7,56 × 10^3 m/s; $E = -GMm/(2r)$ ≈ −4,28 × 10^{10} J. b) Senza attriti si conserva l'energia meccanica più il lavoro fornito: in partenza $E_0 = U(R) = -GMm/R$ ≈ −9,38 × 10^{10} J, quindi ΔE ≈ 5,09 × 10^{10} J (di cui 0,81 × 10^{10} J di energia potenziale e 4,28 × 10^{10} J di energia cinetica). c) Per la composizione galileiana, nel sistema inerziale la velocità del satellite è quella rispetto al suolo più 465 m/s verso est: lanciando verso est (lo stesso verso della rotazione) il satellite possiede già, prima di partire, K_0 = ½ × 1500 × 465^2 J ≈ 1,6 × 10^8 J. L'energia da fornire scende a circa 5,08 × 10^{10} J: un risparmio di circa lo 0,3%, piccolo in energia ma utile, perché ogni chilogrammo di carburante risparmiato è carico utile in più; lanciando verso ovest servirebbe invece più energia.

26. a) Le masse sono uguali, quindi il CM è a metà strada fra le stelle; ciascuna percorre una circonferenza di raggio $d/2$ = 7,5 × 10^{10} m intorno al CM, che resta fermo perché il sistema è isolato. b) Su ciascuna stella agisce soltanto l'attrazione dell'altra, a distanza d (non $d/2$!), che fa da forza centripeta: $GM^2/d^2 = M \cdot 4\pi^2(d/2)/T^2$, da cui $M = 2\pi^2 d^3/(GT^2) = 2\pi^2 \times (1{,}5 \times 10^{11})^3/[6{,}67 \times 10^{-11} \times (3{,}156 \times 10^7)^2]$ kg ≈ 1,0 × 10^{30} kg. c) Circa metà della massa del Sole (1,99 × 10^{30} kg): ha senso, perché con la stessa distanza e lo stesso periodo della Terra intorno al Sole la massa *totale* del sistema, $2M$, deve essere circa quella del Sole.

27. a) $F = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 0{,}020 \times 1{,}5/(0{,}045)^2$ N ≈ 9,9 × 10^{-10} N. b) Il peso della sferetta è 0,020 × 9,8 N = 0,196 N: la forza è circa 5 × 10^{-9} volte il peso, circa 200 milioni di volte più piccola. c) $a = F/m$ ≈ 4,9 × 10^{-8} m/s^2; in 60 s, partendo da ferma, $x = \frac{1}{2}at^2$ ≈ 8,9 × 10^{-5} m, meno di un decimo di millimetro. Per questo serve una bilancia di torsione, che non oppone resistenza alla rotazione se non quella debolissima del filo, e uno specchietto che amplifichi la rotazione; qualunque attrito o corrente d'aria coprirebbe l'effetto.

28. a) r = 1,74 × 10^6 m + 1,0 × 10^5 m = 1,84 × 10^6 m; $v = \sqrt{(GM_L/r)} = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}35 \times 10^{22}/1{,}84 \times 10^6)}$ m/s ≈ 1,63 × 10^3 m/s; $T = 2\pi r/v$ ≈ 7,1 × 10^3 s ≈ 118 minuti, quasi due ore. b) $g = GM_L/r^2$ ≈ 1,45 m/s^2; $a_c = v^2/r = (1{,}63 \times 10^3)^2/1{,}84 \times 10^6$ m/s^2 ≈ 1,45 m/s^2: coincidono, perché la gravità lunare è l'unica forza sul modulo e fa da forza centripeta.

29. Si conserva l'energia meccanica, perché l'unica forza è la gravità, conservativa. a) $\frac{1}{2}mv_0^2 - GMm/R = -GMm/r_{max}$, da cui $1/r_{max} = 1/R - v_0^2/(2GM) = 1{,}570 \times 10^{-7}$ m^{-1} − 0,804 × 10^{-7} m^{-1} ≈ 0,766 × 10^{-7} m^{-1}, quindi r_{max} ≈ 1,31 × 10^7 m e la quota è circa 6,7 × 10^6 m. Con g costante: $h = (8{,}0 \times 10^3)^2/(2 \times 9{,}8)$ m ≈ 3,3 × 10^6 m, circa la metà: salendo il campo si indebolisce e il proiettile, frenato meno, va molto più in alto. b) $\frac{1}{2}v_d^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - GM(1/R - 1/d)$: $v_d = \sqrt{[(1{,}5 \times 10^4)^2 - 2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times (1/6{,}37 \times 10^6 - 1/3{,}84 \times 10^8)]}$ m/s ≈ 1,01 × 10^4 m/s. A grande distanza $U \to 0$: $v_\infty = \sqrt{(v_0^2 - v_{fuga}^2)} = \sqrt{(15{,}0^2 - 11{,}2^2)}$ km/s ≈ 10,0 km/s.

30. Lo studente ha usato la quota h al posto della distanza dal centro: nella legge di gravitazione r è la distanza fra i centri, $r = R + h$ = 6,77 × 10^6 m, e $g = GM/r^2$ ≈ 8,7 m/s^2. Il risultato sbagliato, 250 volte il valore al suolo, avrebbe dovuto insospettirlo: salendo il campo diminuisce, non aumenta, e con $h \to 0$ la sua formula darebbe un campo infinito sulla superficie.

31. Traccia: l'accelerazione della Luna, $2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s^2, coincide con $g/60^2$, cioè con quella che la gravità terrestre produrrebbe alla distanza della Luna se diminuisce come $1/r^2$. Se oltre alla gravità esistesse un'altra forza, diversa, capace di trattenere la Luna, l'accelerazione della Luna sarebbe la somma delle due e non coinciderebbe con $g/60^2$. Newton aggiunge l'argomento inverso: se la forza che trattiene la Luna fosse un'altra forza che agisce anche sui corpi vicino alla Terra, questi la sentirebbero in aggiunta alla gravità e cadrebbero due volte più in fretta di quanto si osserva. Quindi la forza è una sola.

32. Traccia: $g \propto 1/r^2$, quindi $g_E/g_0 = [R/(R+h)]^2 \approx 1 - 2h/R$; la diminuzione relativa è $2 \times 8849/6{,}37 \times 10^6 \approx 2{,}8 \times 10^{-3}$, circa lo 0,28%. Per una persona di 60 kg il peso cala di circa 1,6 N, e la bilancia, tarata con il g del livello del mare, segnerebbe circa 0,17 kg in meno: con una risoluzione di 0,1 kg la differenza sarebbe appena visibile, ma altri fattori (la taratura, la temperatura, il fatto che la bilancia non sia in piano) contano altrettanto.

33. Traccia: $\Delta g/g \approx 2h/R = 2 \times 30/6{,}37 \times 10^6 \approx 9{,}4 \times 10^{-6}$, circa un centomillesimo. Il pendolo del laboratorio misura g con un'incertezza dello 0,5%, cioè 5×10^{-3}: circa 500 volte troppo grande. L'esperimento non è fattibile con un pendolo scolastico; anche migliorando la misura del tempo con una fotocellula, resterebbe l'incertezza sulla lunghezza. Servono strumenti dedicati, i gravimetri, che misurano variazioni relative di g di una parte su cento milioni e sono usati dai geologi per rilevare le differenze di densità nel sottosuolo.