CAPITOLO

12

Dai sistemi del mondo alle leggi di Keplero

Per duemila anni gli astronomi cercarono i cerchi giusti; il passo decisivo fu prendere sul serio un errore di pochi primi d'arco.

OBIETTIVI

1. Descrivere i fenomeni celesti osservabili a occhio nudo, in particolare il moto retrogrado dei pianeti e l'elongazione di Mercurio e Venere.
2. Confrontare il sistema geocentrico di Aristotele e Tolomeo, quello eliocentrico di Copernico e quello di Tycho Brahe, riconoscendo che cosa ciascuno spiegava e quali argomenti li sostenevano.
3. Valutare il ruolo delle osservazioni di Galileo e collocare nel suo contesto storico e filosofico il dibattito del XVI e XVII secolo sui sistemi del mondo.
4. Usare le proprietà dell'ellisse per descrivere un'orbita: semiasse maggiore, eccentricità, distanze al perielio e all'afelio.
5. Enunciare e applicare le tre leggi di Keplero, collegando la seconda alla conservazione del momento angolare.
6. Verificare la terza legge con i dati dei pianeti e delle lune di Giove, anche su un grafico logaritmico, confrontando previsione e misura con le loro incertezze.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Il cielo a occhio nudo e il sistema geocentrico 2

12.2 La rivoluzione copernicana 5

12.3 Galileo e il dibattito sui sistemi del mondo 9

12.4 L'ellisse e le prime due leggi di Keplero 12

12.5 La terza legge e il significato delle leggi di Keplero 16

Fisica 3 · Parte IV · La gravitazione · versione 1.0
Capitolo 12: Dai sistemi del mondo alle leggi di Keplero · pagine 327–352 del volume completo · estratto per lo studio

Lontano dalle luci della città, in una notte serena, il cielo sembra immobile: le stelle sorgono e tramontano tutte insieme, come se fossero fissate a un'unica grande cupola che gira. Ma se lo osservi per qualche settimana, ti accorgi che alcuni punti luminosi non stanno al loro posto: si spostano lentamente fra le stelle, e ogni tanto tornano indietro. I Greci li chiamarono «pianeti», cioè «erranti». Capire il loro moto è stato uno dei problemi più lunghi della storia del pensiero: dall'antichità al Seicento ha impegnato astronomi, filosofi e teologi, e la sua soluzione ha cambiato il posto dell'uomo nell'universo e il modo stesso di fare scienza.

In questo capitolo ripercorriamo quel dibattito, perché le idee che vi si sono scontrate sono ancora un modello di come si confrontano due teorie: il sistema geocentrico di Aristotele e di Tolomeo, il sistema eliocentrico di Copernico, il compromesso di Tycho Brahe, le osservazioni di Galileo. Poi arriviamo al risultato con cui la storia si chiude: le tre leggi di Keplero, che descrivono con precisione come si muovono i pianeti. Sono leggi ricavate dai dati, senza una spiegazione; perché valgano lo vedrai nel capitolo 13, con la gravitazione universale di Newton.

12.1 Il cielo a occhio nudo e il sistema geocentrico

12.1.1 Che cosa si vede

Chi osserva il cielo senza strumenti vede anzitutto il **moto diurno**: in circa 24 ore il Sole, la Luna e le stelle compiono un giro intorno alla Terra, da est verso ovest, attorno a un asse che nel nostro emisfero passa vicino alla Stella Polare. Le stelle mantengono fra loro le stesse distanze, e per questo si pensò che fossero fissate a una sfera, la **sfera celeste**. Rispetto alle stelle, però, il Sole si sposta di circa un grado al giorno verso est e in un anno percorre un cerchio completo, l'**eclittica**; la Luna fa lo stesso in circa un mese.

A occhio nudo si vedono cinque pianeti: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno. Anch'essi si muovono vicino all'eclittica e di solito verso est, ma non con regolarità. Di tanto in tanto un pianeta rallenta, si ferma, torna indietro verso ovest per alcune settimane e poi riprende il cammino: è il **moto retrogrado**. Per Marte accade ogni 780 giorni circa, dura un paio di mesi e il pianeta descrive fra le stelle un piccolo cappio o una «zeta». Durante il moto retrogrado Marte è anche molto più luminoso del solito, ed è sempre dalla parte del cielo opposta al Sole: sorge al tramonto e resta visibile tutta la notte. Si dice che è in **opposizione**.

Mercurio e Venere si comportano in un altro modo: non si allontanano mai molto dal Sole, e si vedono solo poco dopo il tramonto o poco prima dell'alba. L'angolo fra la direzione del pianeta e quella del Sole, visto dalla Terra, si chiama **elongazione**: per Venere non supera mai i 47° circa, per Mercurio i 28°. Ogni modello del cielo, antico o moderno, deve rendere conto di questi fatti.

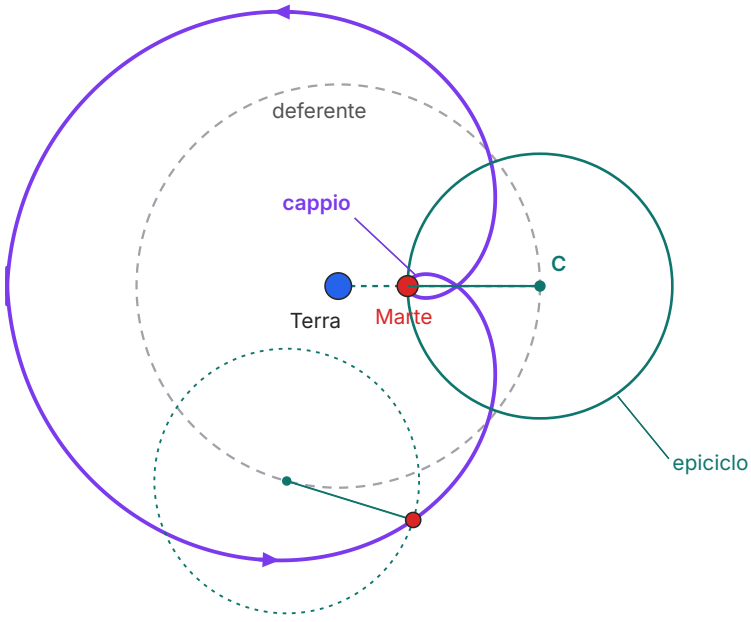
12.1.2 Il cosmo di Aristotele

Nel IV secolo a.C. Aristotele organizzò queste osservazioni in un quadro filosofico che sarebbe durato quasi duemila anni. Il cosmo è una sfera finita, divisa in due regioni con leggi diverse. Sotto la sfera della Luna c'è il mondo dei quattro elementi (terra, acqua, aria, fuoco), dove tutto nasce, si trasforma e muore, e dove i moti naturali sono rettilinei: i corpi pesanti scendono verso il centro del cosmo, quelli leggeri salgono. Sopra la Luna c'è il mondo celeste, fatto di un quinto elemento, l'etere, incorruttibile: lì l'unico moto naturale è quello circolare uniforme, che non ha né inizio né fine. I pianeti sono trasportati da sfere concentriche che ruotano intorno alla Terra.

La Terra è ferma al centro, e non per un pregiudizio: per Aristotele era la conclusione di argomenti fisici. I gravi cadono verso il centro del cosmo, e la Terra, che è fatta di gravi, si è raccolta lì; se la Terra girasse, un sasso lanciato in alto dovrebbe ricadere più a ovest, e le nuvole e gli uccelli resterebbero indietro (è l'argomento della torre che hai discusso nel capitolo 2). C'era poi un argomento astronomico serio. Se la Terra girasse intorno al Sole, la vedremmo nel corso dell'anno da punti diversi, e le stelle più vicine dovrebbero spostarsi un poco rispetto a quelle più lontane: è la **parallasse stellare**. Nessuno l'aveva mai osservata. O la Terra è ferma, o le stelle sono talmente lontane da rendere la parallasse invisibile a occhio nudo: la seconda ipotesi sembrava a quasi tutti assurda.

12.1.3 Epicicli e deferenti: il sistema di Tolomeo

Le sfere concentriche non bastavano a spiegare il moto retrogrado e le variazioni di luminosità dei pianeti, che indicano che la loro distanza dalla Terra cambia. Nel II secolo d.C., ad Alessandria d'Egitto, Claudio Tolomeo raccolse nell'*Almagesto* un modello matematico molto più potente. Ogni pianeta si muove di moto circolare uniforme su un piccolo cerchio, l'**epiciclo**, il cui centro percorre a sua volta un cerchio più grande intorno alla Terra, il **deferente**. Quando il pianeta, girando sull'epiciclo, si trova dalla parte della Terra, il suo moto sull'epiciclo è opposto a quello del centro e lo supera: visto dalla Terra, il pianeta torna indietro. Nello stesso momento è più vicino a noi, e quindi più luminoso: le due osservazioni, moto retrogrado e massima luminosità, sono spiegate insieme (Figura 12.1).



Il centro C dell'epiciclo percorre il deferente in 687 giorni; il pianeta gira sull'epiciclo in un anno.

Raggi in proporzione 1 : 1,524, come nel modello equivalente eliocentrico.

Traiettoria per 720 giorni: un solo cappio, quando il pianeta è dalla parte della Terra (opposizione).

Figura 12.1 Il modello a epiciclo e deferente per Marte, calcolato: il centro C dell'epiciclo percorre il deferente in 687 giorni, mentre il pianeta gira sull'epiciclo in un anno; i raggi stanno nel rapporto 1,524 : 1. La traiettoria vista dalla Terra (in viola, 720 giorni) forma un cappio quando il pianeta passa dalla parte della Terra. Con queste scelte il modello dà esattamente le direzioni del modello eliocentrico a orbite circolari della Figura 12.2.

Per accordare il modello con le osservazioni Tolomeo introdusse altri accorgimenti: la Terra non sta esattamente al centro del deferente, e il centro dell'epiciclo si muove con velocità angolare costante non rispetto al centro del deferente ma rispetto a un altro punto, l'**equante**. Il risultato era un sistema complicato, ma capace di prevedere le posizioni dei pianeti con errori dell'ordine del grado: le sue tavole furono usate, in Oriente e in Occidente, per oltre un millennio. Notiamo un dettaglio che avrà peso più avanti: per far sì che Mercurio e Venere restino sempre vicini al Sole, Tolomeo doveva imporre che il centro dei loro epicicli stesse sempre sulla linea Terra–Sole. Era una regola aggiunta «a mano», senza una ragione nel modello.

Non tutti gli antichi misero la Terra al centro. Nel III secolo a.C. Aristarco di Samo propose che la Terra girasse intorno al Sole e ruotasse su sé stessa: lo sappiamo da un'opera di Archimede, l'*Arenario*, che riferisce la sua ipotesi. L'idea non ebbe seguito, anche per il problema della parallasse.

12.2 La rivoluzione copernicana

12.2.1 Il Sole al centro

Nel 1543 uscì a Norimberga il *De revolutionibus orbium coelestium* («Sulle rivoluzioni delle sfere celesti») del canonico polacco Niccolò Copernico. Il libro proponeva un **sistema eliocentrico**: al centro (o quasi) sta il Sole, immobile; la Terra è un pianeta come gli altri, il terzo in ordine di distanza, che gira intorno al Sole in un anno e ruota su sé stessa in un giorno; la Luna gira intorno alla Terra. Per contrasto, il sistema di Aristotele e Tolomeo si dice **sistema geocentrico**.

Con un solo cambiamento di punto di vista molti fatti diventavano semplici. Il moto diurno di tutto il cielo è un effetto della rotazione della Terra; il moto annuo del Sole lungo l'eclittica, della sua rivoluzione. Il moto retrogrado non ha più bisogno di epicicli: è un effetto di moto relativo, come quello che hai studiato nel capitolo 2. La Terra, più interna, si muove più in fretta di Marte; quando lo raggiunge e lo sorpassa, cioè all'opposizione, la direzione in cui lo vediamo ruota all'indietro rispetto alle stelle, come un'auto più lenta sembra andare indietro a chi la sorpassa in autostrada. In Figura 12.2 le posizioni di Terra e Marte sono calcolate ogni due settimane intorno all'opposizione: le linee di vista prima ruotano verso est, poi per circa settanta giorni verso ovest, poi di nuovo verso est. Ed è proprio all'opposizione che Marte è più vicino alla Terra, e quindi più luminoso.

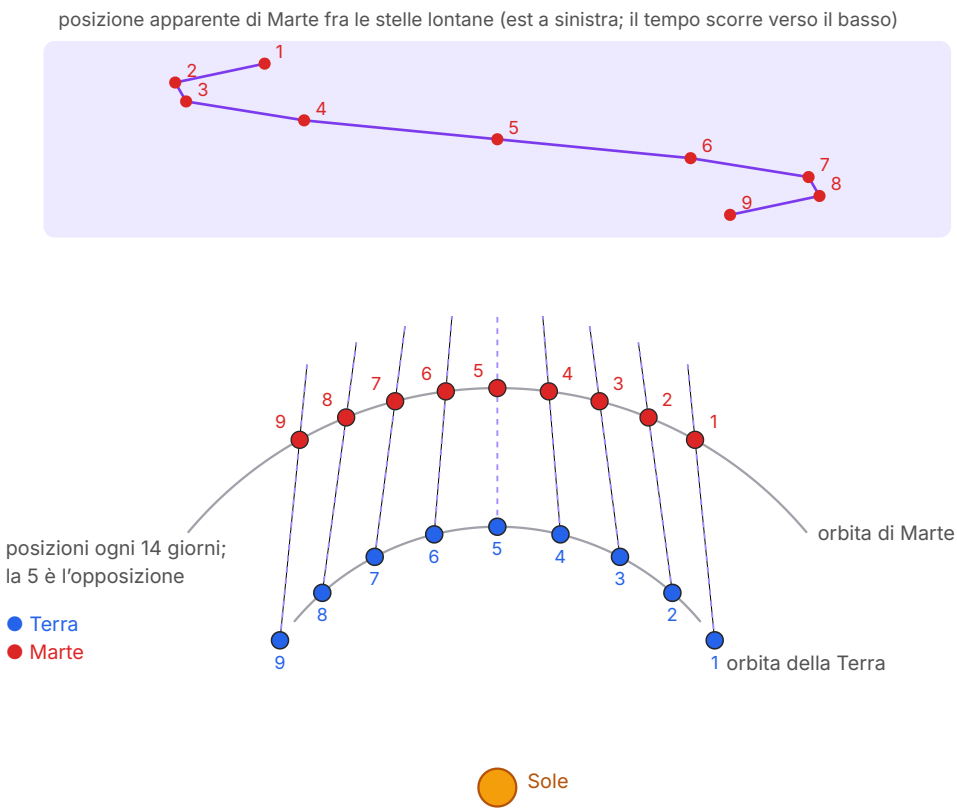


Figura 12.2 Il moto retrogrado di Marte nel sistema eliocentrico, calcolato con orbite circolari (1 au e 1,524 au; periodi 365,25 e 687 giorni). Le posizioni sono prese ogni 14 giorni; la 5 è l'opposizione. In alto, le direzioni delle linee di vista riportate su una scala angolare: fra la 2 e la 8 la direzione ruota all'indietro, verso ovest. Nel modello il moto retrogrado dura circa 73 giorni e copre circa 16°.

Anche Mercurio e Venere trovano una spiegazione naturale: girano intorno al Sole su orbite più piccole di quella terrestre, quindi dalla Terra non possono mai apparire lontani dal Sole. La regola che Tolomeo aveva aggiunto a mano diventa una conseguenza della geometria. E c'è di più: il sistema copernicano permette di **misurare** le distanze dei pianeti dal Sole in rapporto alla distanza Terra–Sole, cosa che il sistema tolemaico non poteva fare, perché lì la grandezza di ogni deferente era arbitraria. Oggi quella distanza media si usa come unità di misura in astronomia: l'**unità astronomica**, 1 au ≈ 1,496 × 10^{11} m (Tabella A.2 dell'appendice).

ESEMPIO SVOLTO

La distanza di Venere dal Sole

Problema. L'elongazione massima di Venere è di circa 46°. Supponendo circolari e concentriche le orbite di Venere e della Terra, calcola il raggio dell'orbita di Venere in unità astronomiche.

Soluzione. L'elongazione è massima quando la linea di vista Terra–Venere è tangente all'orbita di Venere. In quel momento l'angolo in Venere, fra la direzione del Sole e quella della Terra, è retto (il raggio è perpendicolare alla tangente). Nel triangolo rettangolo Sole–Venere–Terra l'ipotenusa è la distanza Terra–Sole, 1 au, e il cateto opposto all'angolo di 46° è il raggio r_V dell'orbita di Venere:

$$r_V = (1\ \text{au}) \cdot \text{sen}\ 46° = 0{,}72\ \text{au}$$

Controllo. La Tabella A.3 dà 0,723 au. L'accordo è buono; la piccola differenza viene dal valore arrotondato dell'elongazione (sen 47° = 0,73). Con lo stesso metodo, per Mercurio l'elongazione massima varia fra 18° e 28° circa: sen 18° = 0,31 e sen 28° = 0,47. Il fatto che il risultato cambi è un indizio che l'orbita di Mercurio non è una circonferenza centrata nel Sole; lo capiremo nel paragrafo sulle leggi di Keplero.

12.2.2 Periodo sinodico e periodo siderale

Copernico ricavò anche i periodi di rivoluzione dei pianeti. Quello che si osserva direttamente è l'intervallo fra due opposizioni successive di un pianeta esterno (o fra due configurazioni uguali rispetto al Sole): è il **periodo sinodico** S. Il tempo che il pianeta impiega a compiere un giro completo intorno al Sole, rispetto alle stelle, è invece il **periodo siderale** T. I due sono diversi, perché nel frattempo anche la Terra si è mossa.

ESEMPIO SVOLTO

Dal periodo sinodico al periodo siderale: la dimostrazione

Problema. Ricava la relazione fra il periodo sinodico S di un pianeta esterno, il suo periodo siderale T e il periodo siderale della Terra $T_\mathrm{T} = 1$ anno, supponendo moti circolari uniformi; poi applicala a Marte, il cui periodo sinodico è di 780 giorni.

1. Le velocità angolari. In un tempo t la Terra descrive l'angolo $2\pi t/T_\mathrm{T}$ e il pianeta l'angolo $2\pi t/T$. La Terra, più interna, gira più in fretta: l'angolo fra le due direzioni dal Sole cresce di $(2\pi/T_\mathrm{T} - 2\pi/T)$ ogni unità di tempo.

2. La condizione. Fra due opposizioni la Terra deve guadagnare esattamente un giro sul pianeta, cioè 2π:

$$(2\pi/T_\mathrm{T} - 2\pi/T)\cdot S = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_\mathrm{T}} - \frac{1}{S}$$

3. Marte. $1/T = 1/(365{,}25\ \mathrm{d}) - 1/(780\ \mathrm{d}) \Rightarrow T = 687$ giorni $= 1{,}88$ anni, in accordo con la Tabella A.3. Per Giove ($S = 398{,}9$ d) si trova $T = 4330$ d $= 11{,}9$ anni.

4. Pianeti interni. Per Mercurio e Venere è il pianeta a guadagnare un giro sulla Terra, e i segni si scambiano: $1/T = 1/T_\mathrm{T} + 1/S$. Per Venere, con $S = 584$ d, si ottiene $T = 225$ giorni.

Messi in ordine, i risultati mostravano una regolarità sorprendente: quanto più un pianeta è lontano dal Sole, tanto più lungo è il suo periodo, da Mercurio (88 giorni) a Saturno (circa 29 anni e mezzo). Per Copernico era il segno che il suo sistema rivelava un ordine vero della natura, non un artificio di calcolo.

12.2.3 Che cosa il sistema copernicano non risolveva

Il *De revolutionibus* non era però la vittoria che a noi sembra oggi. Copernico restava fedele al moto circolare uniforme: per riprodurre le osservazioni dovette usare ancora piccoli epicicli, e le sue tavole non erano più precise di quelle tolemaiche. Restavano poi senza risposta le obiezioni fisiche: perché non sentiamo la Terra muoversi, perché un sasso lanciato in alto ricade ai nostri piedi? E perché non si osserva la parallasse stellare? Copernico rispondeva che le stelle sono immensamente lontane, ma era un'ipotesi senza prove. Una prefazione anonima, aggiunta durante la stampa dal teologo Andrea Osiander, presentava il sistema come una semplice ipotesi matematica, utile per i calcoli: un'interpretazione che Copernico non aveva scritto e che molti lettori presero per sua.

12.2.4 Tycho Brahe: misure più precise e un sistema di compromesso

La generazione successiva capì che per decidere fra i sistemi servivano dati migliori. Il danese Tycho Brahe (1546–1601) costruì nell'isola di Hven, nello stretto fra Danimarca e Svezia, un os-

servatorio con grandi strumenti a occhio nudo (quadranti, sestanti, sfere armillari) e per oltre vent'anni misurò le posizioni dei pianeti con un'incertezza dell'ordine di un primo d'arco, circa un trentesimo del diametro apparente della Luna: dieci volte meglio dei suoi predecessori. Le sue osservazioni della stella nuova apparsa nel 1572 e della cometa del 1577 mostrarono che entrambe erano più lontane della Luna, in contrasto con l'idea aristotelica di un cielo immutabile.

Tycho, tuttavia, non accettò il moto della Terra. Non trovava la parallasse stellare, e una Terra pesante che corre nello spazio gli sembrava fisicamente inaccettabile. Propose allora il **sistema ticonico**: la Terra è ferma al centro, la Luna e il Sole le girano intorno, e tutti gli altri pianeti girano intorno al Sole. Dal punto di vista geometrico, per le posizioni dei pianeti viste dalla Terra, questo sistema è equivalente a quello copernicano: cambia solo quale corpo si considera fermo. Era quindi un concorrente molto serio, che conservava i vantaggi di Copernico senza muovere la Terra.

12.3 Galileo e il dibattito sui sistemi del mondo

12.3.1 Le prove del cannocchiale

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 2*, capitolo 16) hai visto come Galileo, fra il 1609 e il 1610, puntò il cannocchiale verso il cielo e descrisse le sue scoperte nel *Sidereus Nuncius* (1610). Ora possiamo valutarle come argomenti nel dibattito. Le montagne della Luna e, poco dopo, le macchie del Sole mostravano che i corpi celesti non sono perfetti e immutabili: la distinzione fra fisica del cielo e fisica della Terra perdeva il suo fondamento. I quattro satelliti di Giove provavano che esiste nell'universo almeno un centro di rotazione diverso dalla Terra, e che un pianeta in moto può portare con sé le sue lune: l'obiezione «se la Terra girasse, perderebbe la Luna» cadeva.

L'argomento più stringente arrivò alla fine del 1610, con le **fasi di Venere**. Venere, come la Luna, è illuminata dal Sole, e mostra fasi diverse a seconda della posizione da cui la vediamo. Nel sistema tolemaico Venere sta sempre fra la Terra e il Sole (il centro del suo epiciclo è sulla linea Terra–Sole): ci mostra quindi sempre soprattutto il lato in ombra, e dovrebbe apparire solo come una falce, mai piena. Galileo la vide invece passare per tutte le fasi, da una falce sottile e grande a un disco quasi pieno e piccolo: segno che Venere gira intorno al Sole, e a volte si trova al di là di esso (Figura 12.3).

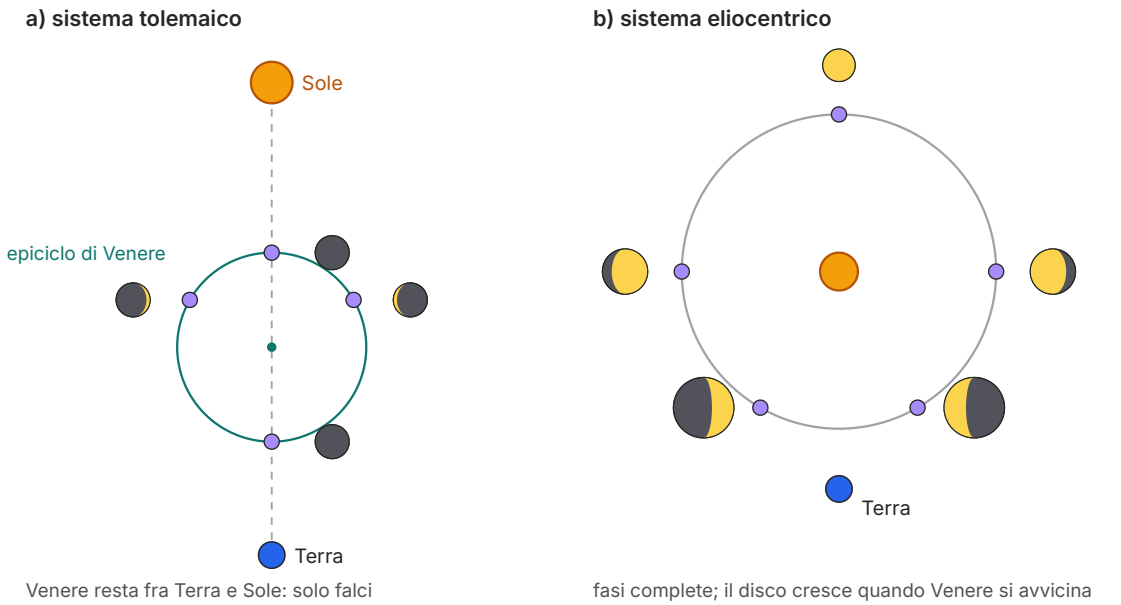


Figura 12.3 Le fasi di Venere viste dalla Terra nei due sistemi (accanto a ogni posizione, il disco come appare dalla Terra; la parte illuminata è quella rivolta verso il Sole). a) Nel sistema tolemaico Venere resta fra la Terra e il Sole e mostra solo falci. b) Nel sistema eliocentrico (raggio dell'orbita 0,72 au, in scala) Venere mostra tutte le fasi; quando è al di là del Sole appare quasi piena ma piccola, quando è vicina alla Terra appare come una falce grande. Le dimensioni dei dischi crescono come l'inverso della distanza, ma non sono in scala con le orbite.

Le fasi di Venere dimostravano che il sistema tolemaico era sbagliato. Non dimostravano però che quello copernicano fosse giusto: anche nel sistema ticonico Venere gira intorno al Sole, e le fasi sono le stesse. Per decidere fra Copernico e Tycho ci voleva una prova del moto della Terra, e una prova del genere, con gli strumenti del tempo, non c'era. Galileo ne cercò una nelle maree, che riteneva prodotte dalla combinazione della rotazione e della rivoluzione terrestre: era un argomento sbagliato, perché le maree dipendono dall'attrazione della Luna e del Sole, come vedrai nel capitolo 13.

DA RICORDARE

Un'osservazione può **escludere** una teoria senza **dimostrare** quella rivale. Le fasi complete di Venere sono incompatibili con il sistema tolemaico, ma compatibili sia con quello copernicano sia con quello ticonico. Nel dibattito sui sistemi del mondo il moto della Terra fu accettato da gran parte degli astronomi nel corso del Seicento perché il sistema eliocentrico, nella forma di Keplero, prevedeva le posizioni dei pianeti meglio di ogni altro, e poi perché la meccanica di Newton lo spiegava; le prove dirette del moto della Terra arrivarono più tardi.

12.3.2 Il Dialogo e il processo

Nel 1616 la Congregazione dell'Indice sospese il *De revolutionibus* finché non fosse corretto, e a Galileo fu intimato di non sostenere la teoria copernicana. Nel 1632 egli pubblicò a Firenze, in italiano, il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, tolemaico e copernicano: tre personaggi discutono per quattro giornate, Salviati che difende Copernico, Simplicio che difende Aristotele e Sagredo, un uomo colto e senza pregiudizi. Nella Giornata seconda si trova la nave «sotto coverta» che hai letto nel capitolo 2: con il principio di relatività Galileo risponde alle obiezioni fisiche contro il moto della Terra, mostrando che un moto uniforme non si può rivelare con esperimenti di meccanica. Il libro fu considerato una violazione dell'ordine del 1616; nel 1633 Galileo fu processato dal Sant'Uffizio a Roma, condannato e costretto ad abiurare, e, dopo alcuni mesi a Siena, passò il resto della vita confinato nella sua villa di Arcetri, vicino a Firenze.

COLLEGAMENTI

Filosofia e storia: che cosa afferma una teoria?

Dietro lo scontro sui sistemi del mondo c'era una domanda che riguarda la filosofia della scienza di ogni tempo: una teoria fisica descrive come è fatto il mondo, o è soltanto uno strumento per calcolare? Molti astronomi antichi e medievali consideravano gli epicicli artifici per «salvare i fenomeni», cioè per riprodurre ciò che si osserva, senza pretendere che esistessero davvero. La prefazione di Osiander leggeva così anche Copernico.

Galileo sosteneva invece una posizione realista: il sistema copernicano è vero, e la natura, scritta in lingua matematica, si conosce con le osservazioni e le dimostrazioni. Il cardinale Roberto Bellarmino, in una lettera del 1615, ammetteva che, se fosse stata data una vera dimostrazione del moto della Terra, si sarebbero dovuti interpretare con prudenza i passi della Scrittura che sembravano negarlo; ma riteneva che quella dimostrazione non ci fosse, e che fino ad allora si dovesse parlare del sistema copernicano solo come di un'ipotesi. Sul piano strettamente logico, come hai visto, aveva ragione a dire che la prova mancava; il dissenso era su chi avesse l'autorità di decidere e su quanto valessero le ragioni a favore di una teoria prima della prova definitiva.

APPROFONDIMENTO

La parallasse che mancava

La parallasse stellare, l'argomento più forte contro il moto della Terra, fu misurata per la prima volta solo nel 1838 da Friedrich Bessel, per la stella 61 Cygni: circa un terzo di secondo d'arco (il valore moderno è 0,29″), cioè meno di un decimillesimo di grado. Copernico aveva dunque ragione: le stelle sono così lontane che nessuno strumento a occhio nudo, nemmeno quelli di Tycho, avrebbe mai potuto rivelarla. Una stella con una parallasse di un secondo d'arco dista circa 206 265 au; 61 Cygni, con 0,29″, dista circa tre volte e mezzo di più, cioè circa 7×10^5 au. Le obiezioni di Tycho non erano irragionevoli: erano basate su un'ipotesi, l'universo «piccolo», che i dati del suo tempo non permettevano di smentire.

12.4 L'ellisse e le prime due leggi di Keplero

12.4.1 Otto primi d'arco

Nel 1600 il giovane matematico tedesco Giovanni Keplero raggiunse Tycho Brahe a Praga, dove l'astronomo danese si era trasferito; alla sua morte, l'anno dopo, ereditò il compito di elaborare le sue osservazioni. Keplero era copernicano convinto, e cercò per anni l'orbita di Marte, il pianeta per cui i dati di Tycho erano più ricchi e i modelli funzionavano peggio. Costruì un modello con cerchi ed equante che riproduceva le opposizioni molto bene, ma in altre posizioni sbagliava fino a 8 primi d'arco. Per Tolomeo e per Copernico sarebbe stato un ottimo accordo; ma i dati di Tycho erano precisi a un primo o due, e Keplero concluse che il modello andava abbandonato. Dopo altri anni di calcoli trovò che l'orbita di Marte è un'ellisse. Pubblicò il risultato nel 1609 nell'*Astronomia nova*.

12.4.2 L'ellisse

Nel corso di matematica studi l'ellisse come luogo geometrico; qui ne richiamiamo le proprietà che servono (Figura 12.4). L'**ellisse** è l'insieme dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi, i fuochi F_1 e F_2, è costante e uguale a $2a$: $r_1 + r_2 = 2a$. Si disegna con un filo di lunghezza $2a$ fissato con due chiodi nei fuochi, tenendolo teso con la matita. Il segmento più lungo che passa per il centro è l'asse maggiore, lungo $2a$; la sua metà a è il **semiasse maggiore**. Il semiasse minore b e la semidistanza focale c sono legati da $a^2 = b^2 + c^2$. Quanto l'ellisse è «schiacciata» lo dice l'**eccentricità**

$$e = \frac{c}{a} \qquad (0 \le e < 1)$$

Per $e = 0$ i fuochi coincidono con il centro e l'ellisse è una circonferenza; per e vicino a 1 è molto allungata. Il punto dell'orbita più vicino al Sole si chiama **perielio**, il più lontano **afelio**: sono i

due estremi dell'asse maggiore, e le loro distanze dal fuoco in cui sta il Sole valgono

$$r_p = a - c = a(1 - e) \qquad r_a = a + c = a(1 + e)$$

La loro media è proprio a: per questo il semiasse maggiore si chiama anche distanza media del pianeta dal Sole.

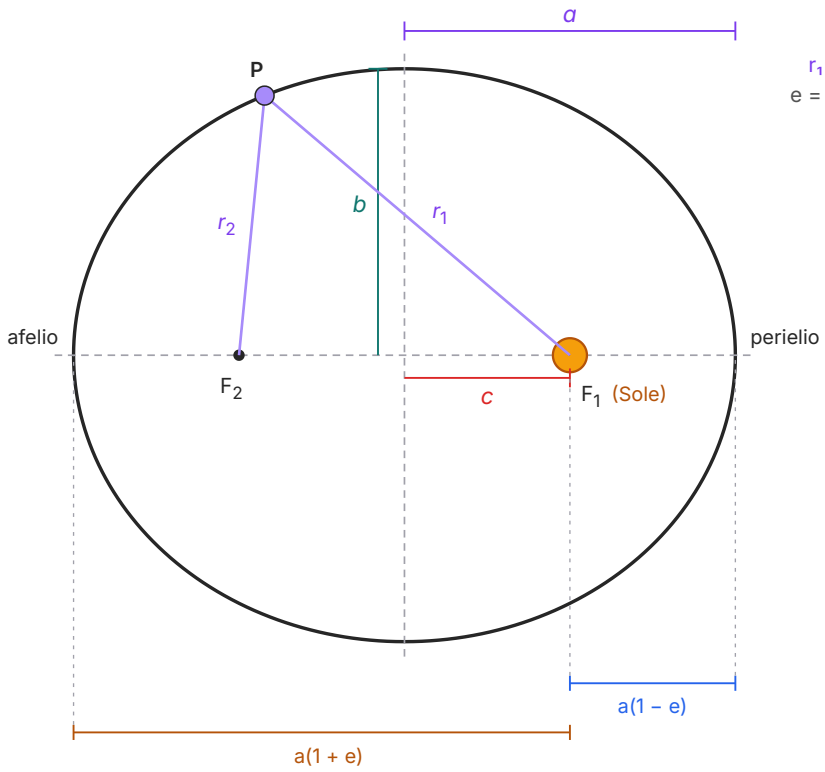


Figura 12.4 L'ellisse (qui con eccentricità 0,5): semiasse maggiore a, semiasse minore b, semidistanza focale c, fuochi F_1 e F_2. Per ogni punto P la somma dei raggi focali vale $2a$. Se il Sole è nel fuoco F_1, le distanze al perielio e all'afelio valgono $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$.

12.4.3 La prima legge

La **prima legge di Keplero** afferma: **ogni pianeta si muove su un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei fuochi**. L'altro fuoco è vuoto. Si tratta di ellissi quasi circolari: l'orbita della Terra ha $e \approx 0{,}017$, con il perielio a 147,1 milioni di km e l'afelio a 152,1 milioni di km dal Sole (dati NASA); disegnata in scala su questa pagina, sarebbe indistinguibile da una circonferenza, con il Sole spostato dal centro di appena un paio di millimetri. Per Marte, $e \approx 0{,}093$: con $a = 1{,}524$ au, $r_p = 1{,}524 \text{ au} \times (1 - 0{,}093) = 1{,}38$ au e $r_a = 1{,}524 \text{ au} \times 1{,}093 = 1{,}67$ au. Una differenza del 20%, abbastanza grande da tradire il cerchio, abbastanza piccola da aver ingannato tutti fino a Keplero.

Le comete, invece, hanno spesso orbite molto allungate. La cometa di Halley ha $a \approx 17{,}9$ au ed $e \approx 0{,}97$ (dati del Jet Propulsion Laboratory della NASA): al perielio passa a 0,58 au dal Sole, dentro l'orbita di Venere, all'afelio si allontana fino a 35 au, oltre l'orbita di Nettuno.

ERRORE FREQUENTE

«D'estate fa caldo perché la Terra è più vicina al Sole.» No: la Terra passa al perielio all'inizio di gennaio, in pieno inverno per l'emisfero nord, e all'afelio all'inizio di luglio. La differenza di distanza, circa il 3%, cambia di poco l'energia ricevuta. Le stagioni dipendono dall'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'orbita: d'estate il Sole sta più alto sull'orizzonte e resta sopra di esso più a lungo. Infatti, quando nell'emisfero nord è estate, in quello sud è inverno, alla stessa distanza dal Sole.

12.4.4 La seconda legge

La **seconda legge di Keplero** afferma: **il segmento che congiunge il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali**. Il pianeta, quindi, non si muove con velocità costante: vicino al perielio, dove il segmento è corto, deve percorrere un arco più lungo per spazzare la stessa area, e va più veloce; vicino all'afelio va più piano (Figura 12.5). Keplero arrivò a questa legge, studiando Marte, ancora prima di scoprire l'ellisse.

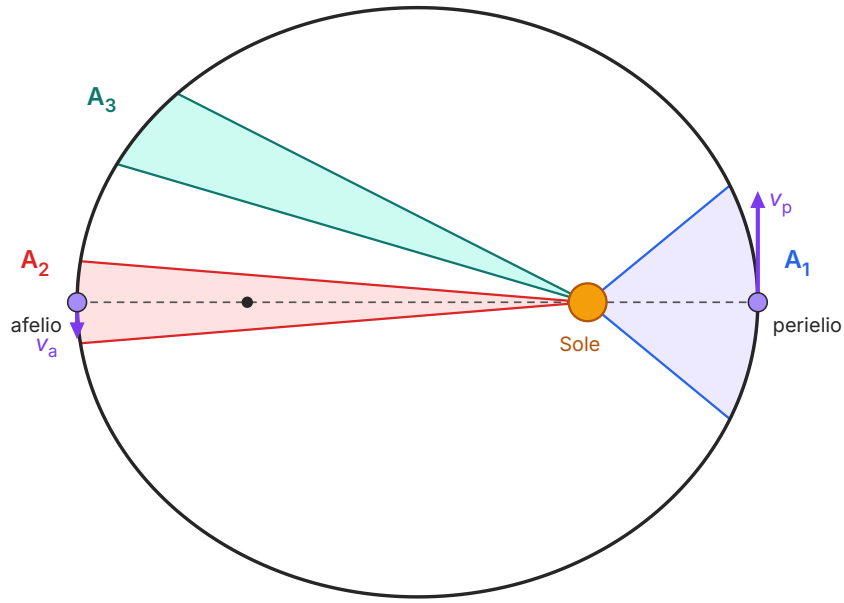


Figura 12.5 La seconda legge di Keplero, calcolata con l'equazione di Keplero per un'orbita con eccentricità 0,5 (molto più grande di quelle dei pianeti, per rendere visibile l'effetto). I tre settori sono spazzati in tempi uguali, ciascuno un quindicesimo del periodo, e hanno la stessa area. Le frecce sono le velocità al perielio e all'afelio, nel rapporto 3 : 1.

Nel capitolo 10 hai visto da dove viene questa legge: la forza che il Sole esercita sul pianeta è diretta sempre verso il Sole, cioè è una forza centrale, e una forza centrale ha momento nullo rispetto al centro. Il momento angolare del pianeta si conserva, e con esso la velocità areolare $\Delta A/\Delta t = L/(2m)$: aree uguali in tempi uguali. Al perielio e all'afelio la velocità è perpendicolare al raggio, e la conservazione del momento angolare, $mv_\mathrm{p}r_\mathrm{p} = mv_\mathrm{a}r_\mathrm{a}$, dà

$$v_\mathrm{p}r_\mathrm{p} = v_\mathrm{a}r_\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1+e}{1-e}$$

Keplero, naturalmente, non conosceva il momento angolare: per lui la legge delle aree era un fatto ricavato dalle osservazioni. Che sia una conseguenza delle leggi della dinamica lo mostrerà Newton.

ESEMPIO SVOLTO

La velocità della Terra al perielio e all'afelio

Problema. Al perielio la Terra dista dal Sole $1{,}471 \times 10^{11}$ m e ha velocità 30,3 km/s; all'afelio dista $1{,}521 \times 10^{11}$ m. a) Calcola la velocità all'afelio. b) Calcola l'eccentricità dell'orbita. c) Di quanto per cento la Terra è più veloce al perielio che all'afelio?

Soluzione. a) La forza del Sole è centrale, quindi il momento angolare della Terra rispetto al Sole si conserva; ai due estremi dell'asse maggiore la velocità è perpendicolare al raggio: $v_a = v_p r_p / r_a = 30{,}3 \text{ km/s} \times 1{,}471/1{,}521 = 29{,}3 \text{ km/s}$.

b) $a = (r_p + r_a)/2 = 1{,}496 \times 10^{11}$ m (1 au, come deve essere); $c = a - r_p = 0{,}025 \times 10^{11}$ m; $e = c/a = 0{,}025/1{,}496 = 0{,}017$.

c) $v_p/v_a = r_a/r_p = 1{,}034$: al perielio la Terra va più veloce del 3,4%.

Controllo. La velocità media dell'orbita è circa $2\pi \times 1{,}496 \times 10^{11}$ m / $3{,}156 \times 10^{7}$ s = 29,8 km/s, compresa fra 29,3 km/s e 30,3 km/s, come ci si aspetta.

12.5 La terza legge e il significato delle leggi di Keplero

12.5.1 Una legge che lega i pianeti fra loro

Le prime due leggi descrivono un pianeta alla volta. Keplero cercò per tutta la vita anche una legge che legasse i pianeti fra loro, convinto che il cosmo fosse costruito secondo un'armonia matematica. La trovò quasi dieci anni dopo l'*Astronomia nova* e la pubblicò nel 1619 negli *Harmonices mundi*. La **terza legge di Keplero** afferma: **il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita**, con la stessa costante per tutti i pianeti:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$$

Se si misurano i periodi in anni e i semiassi in unità astronomiche, la costante vale 1, perché per la Terra $T = 1$ anno e $a = 1$ au. Allora $T^2 = a^3$, cioè $T = a^{3/2}$. Puoi verificarlo con la Tabella A.3 dell'appendice: l'ultima colonna, T^2/a^3, vale 1,00 per tutti gli otto pianeti, anche se i semiassi variano di un fattore 80 e i periodi di un fattore quasi 700. In unità del SI la costante vale $(3{,}156 \times 10^7 \text{ s})^2/(1{,}496 \times 10^{11} \text{ m})^3 = 2{,}97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$.

La terza legge contiene un'informazione nuova. Un pianeta più lontano ha un periodo più lungo non solo perché deve percorrere un'orbita più lunga, ma anche perché va più piano: la velocità media $2\pi a/T$ è proporzionale ad $a/a^{3/2} = 1/\sqrt{a}$. Saturno, a 9,5 au, viaggia a circa un terzo della velocità della Terra. Qualcosa che parte dal Sole agisce sui pianeti con minore intensità quanto più sono lontani: è l'indizio che Newton trasformerà nella legge di gravitazione.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere la terza legge su un grafico logaritmico

Problema. In Figura 12.6 i periodi dei pianeti sono riportati in funzione dei semiassi su due scale logaritmiche, dove intervalli uguali corrispondono a uguali rapporti (da 1 a 10 c'è la stessa distanza che da 10 a 100). a) Perché i punti stanno su una retta? b) Ricava la pendenza dai dati di Mercurio e Nettuno nella Tabella A.3. c) Usa il grafico per stimare il semiasse di un corpo con periodo 40 anni e controlla con la terza legge.

Soluzione. a) Da $T = a^{3/2}$ segue $\log T = (3/2) \log a$: sulle scale logaritmiche la relazione è una retta per l'origine (il punto della Terra, $a = 1$ au, $T = 1$ anno) con pendenza 3/2. Una legge di potenza diventa una retta, qualunque sia l'esponente: il grafico logaritmico serve proprio a riconoscerla e a leggerne l'esponente. b) Pendenza = log(164,8/0,241)/log(30,07/0,387) = 2,835/1,890 = 1,500, cioè 3/2 entro la precisione dei dati. c) Sul grafico, il valore 40 anni sull'asse verticale corrisponde a circa 12 au; la terza legge dà $a = 40^{2/3}$ au = 11,7 au.

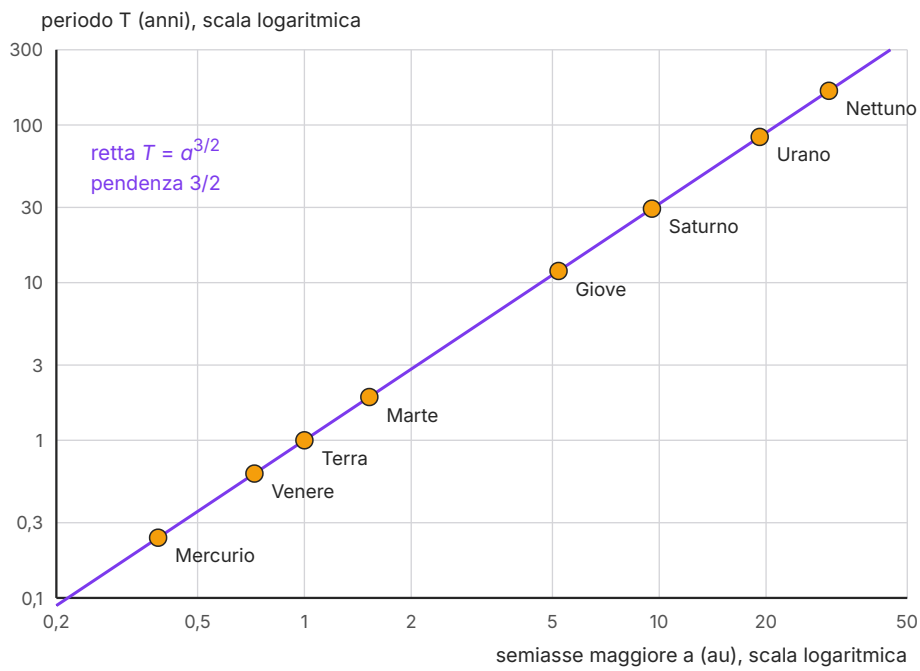


Figura 12.6 La terza legge di Keplero per gli otto pianeti, con i dati della Tabella A.3 su scale logaritmiche: i punti stanno sulla retta $T = a^{3/2}$ (T in anni, a in unità astronomiche), di pendenza 3/2.

ESEMPIO SVOLTO

Il ritorno della cometa di Halley

Problema. La cometa di Halley passa al perielio a 0,58 au dal Sole e all'afelio arriva a 35,3 au. a) Calcola il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita. b) Calcola il periodo. c) L'ultimo passaggio al perielio è avvenuto nel 1986: quando è atteso il prossimo?

Soluzione. a) $a = (r_p + r_a)/2 = (0{,}58 + 35{,}3)/2$ au = 17,9 au; $c = a - r_p$ = 17,4 au; $e = c/a$ = 0,97. b) La cometa gira intorno al Sole, quindi vale la terza legge con la costante dei pianeti: $T = a^{3/2} = (17{,}9)^{3/2}$ anni = 76 anni. c) 1986 + 76 = 2062. Il prossimo passaggio è atteso in realtà nel 2061: l'attrazione dei pianeti, soprattutto di Giove e di Saturno, modifica un poco l'orbita a ogni giro, e il periodo varia di qualche anno da un passaggio all'altro.

Commento. Le leggi di Keplero valgono esattamente solo per un corpo che risente del Sole e di nient'altro. Le piccole deviazioni dovute agli altri pianeti si spiegano con la gravitazione di Newton.

12.5.2 Leggi empiriche

Le tre leggi di Keplero sono **leggi empiriche**: sono state ricavate dalle osservazioni, e dicono **come** si muovono i pianeti, non **perché**. Keplero immaginava che dal Sole partisse una forza che spinge i pianeti lungo le orbite, indebolendosi con la distanza, ma non riuscì a trasformare questa intuizione in una teoria quantitativa. Le sue leggi hanno anche limiti precisi, che oggi sappiamo spiegare: valgono per corpi che girano intorno a un corpo centrale di massa molto maggiore, trascurando l'attrazione reciproca dei pianeti; e la costante della terza legge dipende dal corpo centrale. Le lune di Giove obbediscono alla terza legge, ma con una costante diversa da quella dei pianeti, come vedrai nell'attività di laboratorio.

Il passo successivo fu di Newton. Nei *Principia* (1687) egli mostrò che le tre leggi sono conseguenze dei principi della dinamica e di una sola forza, l'attrazione gravitazionale, inversamente proporzionale al quadrato della distanza: la stessa forza che fa cadere i corpi sulla Terra. La separazione fra la fisica del cielo e quella della Terra, messa in crisi da Galileo, fu così abolita. È l'argomento del capitolo 13.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: le lune di Giove e la terza legge

Materiali. Un binocolo (almeno 10 ingrandimenti) su un treppiede, oppure un piccolo telescopio; uno smartphone con adattatore per fotografare all'oculare; un programma per misurare distanze in pixel sulle foto; le effemeridi di Giove per scegliere le serate. Per i periodi si usano i valori della NASA (*Jovian Satellite Fact Sheet*, NSSDCA): Io 1,769 d, Europa 3,551 d, Ganimede 7,155 d, Callisto 16,689 d. Il raggio equatoriale di Giove, che useremo come unità di lunghezza, è $R_G = 71\,492$ km.

Procedimento. 1) Per due o tre settimane, ogni sera serena, si fotografa Giove con le sue lune; le quattro lune appaiono come puntini allineati lungo l'equatore del pianeta. 2) Su ogni foto si misura in pixel il diametro del disco di Giove e la distanza di ciascuna luna dal suo centro, e si esprime la distanza in raggi di Giove. 3) Poiché le orbite sono quasi circolari e le vediamo quasi di taglio, ogni luna oscilla avanti e indietro: la distanza massima osservata è il raggio dell'orbita a. Le misure in serate diverse non colgono tutte esattamente la massima elongazione e il bordo del disco è sfumato: l'incertezza è di qualche decimo di raggio. 4) Per ogni luna si calcola T^2/a^3 con la sua incertezza: l'incertezza relativa è tre volte quella di a (quella di T è trascurabile).

Tabella 12.1 Raggi delle orbite delle lune galileiane misurati sulle foto (dati tipici di una serie di osservazioni) e periodi della NASA; nell'ultima colonna, il rapporto T^2/a^3 con la sua incertezza.

luna	a (R_G)	T (d)	T^2/a^3 (10^{-3} d^2/$R_G{}^3$)
Io	5,8 ± 0,2	1,769	16,0 ± 1,7
Europa	9,5 ± 0,3	3,551	14,7 ± 1,4
Ganimede	15,1 ± 0,4	7,155	14,9 ± 1,2
Callisto	26,0 ± 0,6	16,689	15,8 ± 1,1

Che cosa concludere. La terza legge prevede che il rapporto sia lo stesso per le quattro lune. Con i dati precisi della NASA per Io ($a = 421\,800$ km $= 5{,}90\ R_G$) la previsione è $T^2/a^3 = 15{,}24 \times 10^{-3}$ d^2/$R_G{}^3$. Per ogni luna la differenza fra il valore misurato e la previsione è minore dell'incertezza: per esempio, per Io 16,0 − 15,2 = 0,8, contro un'incertezza di 1,7; per Callisto 0,6 contro 1,1. Le misure sono compatibili con la terza legge. L'incertezza dominante è quella sui raggi delle orbite, che pesa tre volte; le lune più lontane danno il risultato relativamente più preciso.

Un confronto con i pianeti. Con i dati della NASA in unità del SI (Figura 12.7) i punti stanno su una retta per l'origine con pendenza $3{,}12 \times 10^{-16}$ s^2/m^3, circa mille volte più grande della costante dei pianeti, $2{,}97 \times 10^{-19}$ s^2/m^3: la costante dipende dal corpo intorno a cui si gira. Conserva questa pendenza: nel capitolo 13 ti servirà per calcolare la massa di Giove.

Sicurezza. Non puntare mai il binocolo o il telescopio verso il Sole, nemmeno al tramonto: anche pochi istanti possono danneggiare gravemente la vista.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze e il calcolo di un rapporto. Spiega perché la distanza massima osservata di una luna è il raggio della sua orbita e perché alcune serate possono dare valori più piccoli. Discuti se il valore di T^2/a^3 è più preciso per Io o per Callisto, e perché. Ricorda che furono proprio queste lune, osservate da Galileo nel 1610, il primo esempio di un sistema in miniatura che gira intorno a un corpo diverso dalla Terra.

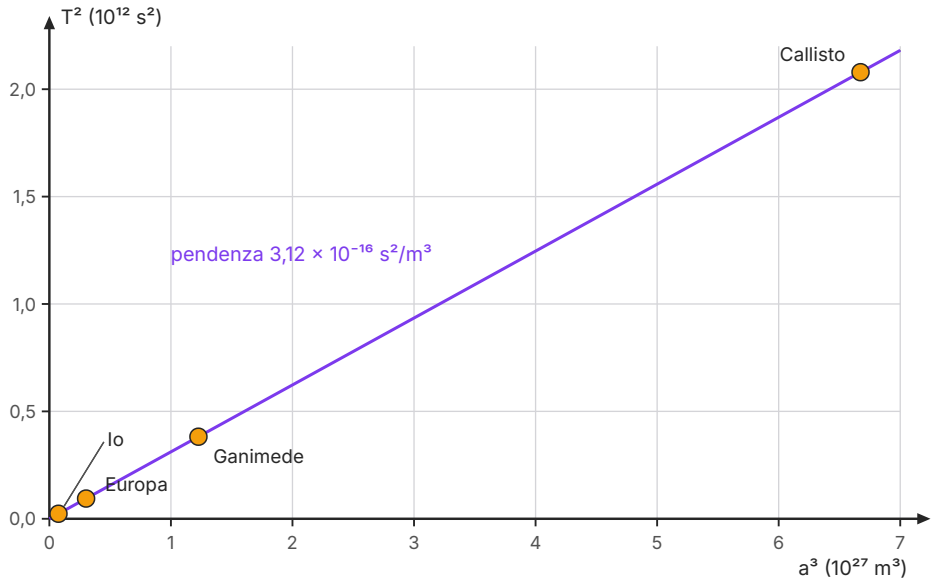


Figura 12.7 La terza legge per le lune galileiane di Giove, con i dati della NASA in unità del SI: T^2 in funzione di a^3. I punti stanno su una retta per l'origine; la sua pendenza, $3{,}12 \times 10^{-16}$ s^2/m^3, è molto diversa dalla costante dei pianeti.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$1/T = 1/T_T - 1/S$ (pianeti esterni); $1/T = 1/T_T + 1/S$ (pianeti interni) — legame fra il periodo sidereale T di un pianeta, quello della Terra T_T e il periodo sinodico S, osservato dalla Terra; vale per orbite circolari e moti uniformi.

$r = (1\text{ au}) \cdot \text{sen}\,\varepsilon_{max}$ — raggio dell'orbita di un pianeta interno dalla sua elongazione massima, per orbite circolari.

$e = c/a$; $r_p = a(1 - e)$, $r_a = a(1 + e)$ — eccentricità dell'ellisse (numero puro, $0 \le e < 1$) e distanze dal Sole al perielio e all'afelio; a è la media delle due.

Prima legge: orbite ellittiche con il Sole in un fuoco. Seconda legge: aree uguali in tempi uguali; ai due estremi dell'asse maggiore $v_p r_p = v_a r_a$, conseguenza della conservazione del momento angolare.

Terza legge: T^2/a^3 = costante per tutti i corpi che girano intorno allo stesso corpo centrale; per i pianeti, con T in anni e a in au, $T = a^{3/2}$; in unità del SI la costante vale $2{,}97 \times 10^{-19}\ \text{s}^2/\text{m}^3$.

Le leggi di Keplero sono empiriche e approssimate: trascurano l'attrazione fra i pianeti e valgono per un corpo centrale di massa molto maggiore. La loro spiegazione è la gravitazione universale (capitolo 13).

SINTESI

- A occhio nudo si osservano il moto diurno del cielo, il moto annuo del Sole lungo l'eclittica e i moti irregolari dei pianeti: il moto retrogrado dei pianeti esterni, all'opposizione, e l'elongazione limitata di Mercurio e Venere.
- Nel cosmo di Aristotele la Terra è ferma al centro, il mondo sublunare e quello celeste hanno leggi diverse; l'assenza di parallasse stellare era un argomento serio contro il moto della Terra.
- Il sistema di Tolomeo (*Almagesto*, II secolo d.C.) spiega moto retrogrado e variazioni di luminosità con epicicli, deferenti ed equanti, e prevede le posizioni dei pianeti con buona precisione.
- Il sistema eliocentrico di Copernico (1543) spiega il moto retrogrado come effetto di moto relativo, ordina i pianeti e ne misura le distanze in unità astronomiche, ma conserva i cerchi e non è più preciso di quello tolemaico.
- Il periodo sinodico, osservato dalla Terra, e il periodo siderale sono legati da $1/T = 1/T_\mathrm{T} - 1/S$ per i pianeti esterni.
- Tycho Brahe misurò le posizioni dei pianeti con la precisione di circa un primo d'arco e propose un sistema geo-eliocentrico, geometricamente equivalente a quello copernicano.
- Le scoperte di Galileo (1609–1610) tolsero fondamento alla distinzione fra cielo e Terra; le fasi di Venere esclusero il sistema tolemaico, ma non quello ticonico. Il *Dialogo* (1632) portò al processo del 1633.
- Prima legge di Keplero (*Astronomia nova*, 1609): le orbite sono ellissi con il Sole in un fuoco; perielio $a(1-e)$, afelio $a(1+e)$. Le orbite dei pianeti sono quasi circolari.
- Seconda legge: il raggio Sole–pianeta spazza aree uguali in tempi uguali; il pianeta è più veloce al perielio, e $v_\mathrm{p} r_\mathrm{p} = v_\mathrm{a} r_\mathrm{a}$ per la conservazione del momento angolare.
- Terza legge (*Harmonices mundi*, 1619): T^2/a^3 è la stessa per tutti i corpi che girano intorno allo stesso corpo centrale; per i pianeti $T = a^{3/2}$ con T in anni e a in au.
- Le leggi di Keplero sono empiriche: descrivono come si muovono i pianeti; perché lo spiega la gravitazione di Newton (capitolo 13).

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Il moto retrogrado di Marte si osserva quando:
   A. il Sole si trova fra la Terra e Marte
   B. la Terra si trova fra il Sole e Marte, cioè all'opposizione
   C. Marte si trova all'afelio della sua orbita
   D. Marte si trova alla massima distanza dalla Terra

2. ● Nel sistema ticonico:
   - **A.** il Sole è fermo al centro e tutti i pianeti, Terra compresa, gli girano intorno
   - **B.** la Terra è ferma al centro e tutti i pianeti le girano intorno su epicicli
   - **C.** la Terra è ferma al centro, il Sole le gira intorno e gli altri pianeti girano intorno al Sole
   - **D.** la Terra ruota su sé stessa ma non gira intorno al Sole

3. ● Le fasi complete di Venere osservate da Galileo mostrano che:
   - **A.** la Terra gira intorno al Sole
   - **B.** le orbite dei pianeti sono ellissi
   - **C.** Venere ha un'atmosfera che diffonde la luce
   - **D.** Venere gira intorno al Sole, e il sistema tolemaico è sbagliato

4. ● Un'orbita con eccentricità uguale a zero è:
   - **A.** una circonferenza
   - **B.** un'ellisse con i fuochi molto lontani
   - **C.** un segmento
   - **D.** un'ellisse molto allungata

5. ● Secondo la seconda legge di Keplero, la velocità di un pianeta:
   - **A.** è costante lungo tutta l'orbita
   - **B.** è massima al perielio e minima all'afelio
   - **C.** è massima all'afelio e minima al perielio
   - **D.** dipende solo dal semiasse maggiore

6. ● Un asteroide gira intorno al Sole su un'orbita con semiasse maggiore di 4 au. Il suo periodo è:
   - **A.** 4 anni
   - **B.** 16 anni
   - **C.** 64 anni
   - **D.** 8 anni

7. ● Le leggi di Keplero sono:
   - **A.** leggi empiriche, ricavate dalle osservazioni di Tycho Brahe
   - **B.** conseguenze dimostrate da Keplero a partire dai principi della dinamica
   - **C.** ipotesi matematiche senza alcun riscontro nelle osservazioni
   - **D.** valide solo per l'orbita di Marte

8. ● Rispetto al sistema tolemaico, il sistema di Copernico:
   - **A.** eliminava del tutto epicicli e cerchi
   - **B.** prevedeva le posizioni dei pianeti con molta più precisione
   - **C.** spiegava più semplicemente il moto retrogrado, ma usava ancora moti circolari
   - **D.** introduceva per primo le orbite ellittiche

Vero o falso

9. ● Nel sistema copernicano il moto retrogrado dei pianeti esterni è un effetto del moto della Terra. V / F

10. ● Le stagioni dipendono dal fatto che la distanza fra la Terra e il Sole cambia durante l'anno. V / F

11. ● Per le lune di Giove il rapporto T^2/a^3 ha lo stesso valore che per i pianeti. V / F

12. ●● Il segmento Sole–pianeta spazza aree uguali in tempi uguali solo se l'orbita è circolare. V / F

13. ● Il Sole occupa il centro dell'orbita ellittica di un pianeta. V / F

Applicare

14. ● Marte ha semiasse maggiore 1,524 au ed eccentricità 0,093. Calcola le sue distanze dal Sole al perielio e all'afelio, in unità astronomiche e in chilometri.

15. ● Disegni un'ellisse con un filo e due chiodi: i chiodi distano 6,0 cm e il filo, chiuso ad anello intorno ai chiodi e alla matita, fa sì che la somma delle distanze dai chiodi sia 10,0 cm. Calcola il semiasse maggiore, la semidistanza focale, il semiasse minore e l'eccentricità.

16. ● Il periodo di Giove è di 11,86 anni. Calcola con la terza legge di Keplero il semiasse maggiore della sua orbita e confrontalo con la Tabella A.3.

17. ● L'elongazione massima di Mercurio, quando il pianeta è all'afelio, è di circa 28°. Supponendo che in quel momento la linea di vista sia tangente all'orbita, calcola la distanza di Mercurio dal Sole in unità astronomiche.

18. ●● Il periodo sinodico di Saturno è di 378,1 giorni. Calcola il suo periodo siderale in anni.

19. ●● La cometa di Halley passa al perielio a 0,58 au dal Sole con velocità 54,9 km/s; all'afelio si trova a 35,3 au. Calcola la velocità all'afelio e il rapporto fra le due velocità.

20. ●● Usa la Figura 12.6: un corpo che gira intorno al Sole ha un periodo di 100 anni. Leggi sul grafico il suo semiasse maggiore e confronta con il valore calcolato.

21. ● Completa: un asteroide con semiasse maggiore di 2,5 au ha un periodo di _____ anni; un altro, con periodo 8,0 anni, ha semiasse maggiore di _____ au.

Problemi

22. ●● Una cometa ha un periodo di 70 anni e al perielio passa a 0,50 au dal Sole. a) Calcola il semiasse maggiore dell'orbita. b) Calcola la distanza all'afelio. c) Calcola l'eccentricità. d) In quale rapporto stanno le sue velocità al perielio e all'afelio?

23. ●● Io, la luna più interna di Giove, ha un'orbita di raggio $4{,}218 \times 10^8$ m e un periodo di 1,769 giorni; Ganimede ha un'orbita di raggio $1{,}0704 \times 10^9$ m. a) Prevedi il periodo di Ganimede con la terza legge di Keplero. b) Confronta con il valore misurato, 7,155 giorni: la differenza è significativa, se i periodi sono noti al millesimo di giorno e i raggi alla quarta (o quinta) cifra?

24. ●●● Il moto retrogrado visto come velocità relativa (capitolo 2). Considera circolari e complanari le orbite della Terra (raggio 1,000 au, velocità 29,8 km/s) e di Marte (raggio 1,524 au, velocità 24,1 km/s). All'opposizione le due velocità sono parallele e concordi. a) Calcola la velocità di Marte rispetto alla Terra in quell'istante. b) Calcola la distanza Terra–Marte. c) Calcola la velocità angolare con cui ruota la linea di vista, in rad/s e in gradi al giorno, e spiega perché il moto appare retrogrado.

25. ●●● Mercurio ha semiasse maggiore 0,387 au ed eccentricità 0,206. a) Calcola le distanze dal Sole al perielio e all'afelio. b) Calcola il rapporto fra le velocità al perielio e all'afelio, spiegando quale principio di conservazione usi e perché si può applicare (capitolo 10). c) Confronta le distanze con il risultato dell'esercizio sull'elongazione massima di 28° e spiega perché l'elongazione di Mercurio varia fra circa 18° e 28°.

26. ●●● Un pianeta immaginario gira intorno al Sole su un'orbita circolare con periodo di 2,0 anni. a) Calcola il raggio dell'orbita in au e in metri. b) Calcola la sua velocità orbitale e confrontala con quella della Terra (*Fisica 2*, capitolo 3: $v = 2\pi r/T$). c) Ogni quanto tempo lo si vedrebbe in opposizione dalla Terra?

27. ●● Dall'elongazione massima di Venere, 46°, ricava il raggio della sua orbita; poi, con il periodo siderale di 0,615 anni, calcola T^2/a^3 in anni^2/au^3. Il risultato conferma la terza legge entro la precisione dei dati? Stima di quanto cambia il risultato se l'elongazione vale 47°.

28. ●●● Per andare dalla Terra a Marte, una sonda viene messa su un'orbita ellittica intorno al Sole con il perielio sull'orbita della Terra (1,00 au) e l'afelio sull'orbita di Marte (1,52 au). a) Calcola il semiasse maggiore e l'eccentricità di quest'orbita. b) Calcola il periodo con la terza legge e la durata del viaggio, che copre mezza orbita, in giorni. c) In quale rapporto stanno le velocità della sonda alla partenza e all'arrivo?

Ragionare e argomentare

29. ●● Per Tycho Brahe l'assenza di parallasse stellare era una prova che la Terra è ferma. Spiega che cosa avrebbe dovuto supporre per conciliarla con il moto della Terra, e perché la sua conclusione era ragionevole con i dati del tempo ma sbagliata.

30. ●● Nell'emisfero nord la primavera e l'estate insieme (dall'equinozio di marzo a quello di settembre) durano circa 186 giorni, l'autunno e l'inverno circa 179. Spiega la differenza con la seconda legge di Keplero, sapendo che la Terra passa all'afelio all'inizio di luglio.

31. ●●● Trova l'errore. Uno studente vuole calcolare la distanza Terra–Luna con la terza legge: «La Luna ha un periodo di 27,3 giorni = 0,0747 anni; con $T^2 = a^3$ trovo $a = 0{,}0747^{2/3}$ au = 0,177 au = $2{,}65 \times 10^{10}$ m». Confronta il risultato con la distanza vera (Tabella A.2), spiega che cosa ha sbagliato e che cosa servirebbe per usare correttamente la terza legge per la Luna.

32. ●● Le fasi di Venere escludono il sistema tolemaico ma non quello ticonico. Descrivi un'osservazione che, con gli strumenti di oggi, permette di distinguere fra il sistema ticonico e quello copernicano, e spiega perché ai tempi di Galileo non si poteva fare.

PER APPROFONDIRE

- [KUH] T. S. Kuhn, *La rivoluzione copernicana*: la storia del dibattito sui sistemi del mondo, dall'astronomia greca a Newton, con i suoi legami con la filosofia e la teologia.
- [DIA] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*: nella Giornata terza le discussioni su Venere, su Marte e sulla parallasse delle stelle fisse.
- [KEP] J. Kepler, *Astronomia nova*: il resoconto, anno dopo anno, della lunga ricerca dell'orbita di Marte, con i tentativi falliti e il passaggio dal cerchio all'ellisse.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla gravitazione si apre con le leggi di Keplero e con il lavoro di Tycho.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sulle orbite dei pianeti e dei satelliti, quasi senza formule.

Glossario del capitolo

Deferente
Nel sistema tolemaico, cerchio intorno alla Terra percorso dal centro dell'epiciclo.

Eccentricità
Per un'ellisse, il rapporto $e = c/a$ fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore; vale 0 per la circonferenza.

Eclittica
Il cerchio che il Sole percorre in un anno sulla sfera celeste, rispetto alle stelle; è il piano dell'orbita terrestre.

Elongazione
Angolo fra le direzioni di un pianeta e del Sole viste dalla Terra; per Mercurio e Venere non supera un valore massimo.

Epiciclo
Nel sistema tolemaico, cerchio percorso dal pianeta, con il centro sul deferente.

Equante
Punto, nel sistema tolemaico, rispetto al quale il centro dell'epiciclo si muove con velocità angolare costante.

Leggi empiriche
Leggi ricavate dalle osservazioni, che descrivono un fenomeno senza spiegarne la causa.

Moto retrogrado
Moto apparente di un pianeta verso ovest rispetto alle stelle, contrario a quello abituale.

Opposizione
Posizione di un pianeta esterno dalla parte del cielo opposta al Sole: Sole, Terra e pianeta sono allineati, con la Terra in mezzo.

Parallasse stellare
Spostamento apparente annuo di una stella vicina rispetto alle più lontane, dovuto alla rivoluzione della Terra (misurata dal 1838).

Perielio
Il punto dell'orbita di un corpo più vicino al Sole, a distanza $a(1 - e)$; l'afelio è il più lontano, a distanza $a(1 + e)$.

Periodo siderale
Durata di un giro completo dell'orbita di un pianeta rispetto alle stelle.

Periodo sinodico
Intervallo di tempo fra due configurazioni uguali di un pianeta rispetto al Sole viste dalla Terra, per esempio fra due opposizioni.

Sfera celeste
Sfera immaginaria, centrata nell'osservatore, su cui sembrano fissate le stelle.

Sistema eliocentrico
Modello con il Sole al centro e la Terra che gira intorno al Sole come gli altri pianeti e ruota su sé stessa (Copernico, 1543).

Sistema geocentrico
Modello con la Terra ferma al centro dell'universo (Aristotele, Tolomeo).

Sistema ticonico
Modello di Tycho Brahe: la Terra è ferma al centro, il Sole e la Luna le girano intorno, gli altri pianeti girano intorno al Sole.

Terza legge di Keplero
T^2/a^3 ha lo stesso valore per tutti i corpi che girano intorno allo stesso corpo centrale; per i pianeti $T = a^{3/2}$ con T in anni e a in au.

Unità astronomica
Distanza media Terra–Sole: 1 au $\approx 1{,}496 \times 10^{11}$ m.

Soluzioni

1. B. All'opposizione la Terra sorpassa Marte, e la direzione in cui lo vediamo ruota all'indietro.

2. C. Il sistema ticonico tiene ferma la Terra, ma fa girare intorno al Sole gli altri pianeti.

3. D. Le fasi quasi piene richiedono che Venere passi al di là del Sole; il sistema ticonico le spiega allo stesso modo, quindi non provano il moto della Terra.

4. A. Con $e = c/a = 0$ i fuochi coincidono con il centro.

5. B. Vicino al Sole il raggio è corto e, per spazzare la stessa area nello stesso tempo, il pianeta deve percorrere un arco più lungo.

6. D. $T = a^{3/2} = 4^{3/2}$ anni = 8 anni.

7. A. Keplero le ricavò dai dati di Tycho; la spiegazione dinamica è di Newton.

8. C. Copernico conservò il moto circolare uniforme e piccoli epicicli; le sue tavole non erano più precise di quelle tolemaiche.

9. V. La Terra, più veloce, sorpassa il pianeta esterno, e la linea di vista ruota all'indietro rispetto alle stelle.

10. F. La Terra è più vicina al Sole in gennaio; le stagioni dipendono dall'inclinazione dell'asse terrestre, e sono opposte nei due emisferi.

11. F. La costante dipende dal corpo centrale: per le lune di Giove vale circa $3{,}1 \times 10^{-16}$ s^2/m^3, per i pianeti $2{,}97 \times 10^{-19}$ s^2/m^3.

12. F. La legge delle aree vale per ogni orbita ellittica (è la conservazione del momento angolare); nell'orbita circolare la velocità è anche costante.

13. F. Il Sole occupa uno dei due fuochi; l'altro fuoco è vuoto.

14. $r_p = a(1 - e) = 1{,}524$ au $\times\, 0{,}907 = 1{,}382$ au $= 2{,}068 \times 10^8$ km; $r_a = a(1 + e) = 1{,}524$ au $\times\, 1{,}093 = 1{,}666$ au $= 2{,}492 \times 10^8$ km (con 1 au $= 1{,}496 \times 10^8$ km).

15. $2a = 10{,}0$ cm $\Rightarrow a = 5{,}00$ cm; $2c = 6{,}0$ cm $\Rightarrow c = 3{,}0$ cm; $b = \sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{(25{,}0 - 9{,}0)}$ cm $= 4{,}0$ cm; $e = c/a = 0{,}60$.

16. $a = T^{2/3} = 11{,}86^{2/3}$ au $= 5{,}20$ au; la Tabella A.3 dà 5,203 au: accordo entro la precisione dei dati.

17. $r = (1\text{ au}) \cdot \text{sen}\, 28° = 0{,}47$ au. Il valore è vicino alla distanza di Mercurio all'afelio, $0{,}387 \times 1{,}206 = 0{,}47$ au.

18. Pianeta esterno: $1/T = 1/T_T - 1/S = 1/(365{,}25\text{ d}) - 1/(378{,}1\text{ d}) \Rightarrow T = 10\,747$ d $= 29{,}4$ anni (Tabella A.3: 29,46 anni). Il risultato è molto sensibile a S, perché la differenza fra i due reciproci è piccola.

19. La forza del Sole è centrale, quindi il momento angolare della cometa si conserva; al perielio e all'afelio la velocità è perpendicolare al raggio: $v_a = v_p r_p/r_a = 54{,}9$ km/s $\times\, 0{,}58/35{,}3 = 0{,}90$ km/s. Il rapporto è $v_p/v_a = r_a/r_p \approx 61$.

20. Sul grafico la quota 100 anni incontra la retta a poco più di 20 au. Calcolo: $a = 100^{2/3}$ au $= 21{,}5$ au.

21. $T = 2{,}5^{3/2}$ anni $= 4{,}0$ anni; $a = 8{,}0^{2/3}$ au $= 4{,}0$ au.

22. a) Terza legge con la costante dei pianeti: $a = 70^{2/3}$ au $= 17{,}0$ au. b) $r_a = 2a - r_p = 34{,}0$ au $- 0{,}50$ au $= 33{,}5$ au. c) $e = (a - r_p)/a = 16{,}48/16{,}98 = 0{,}97$. d) Per la conservazione del momento angolare $v_p/v_a = r_a/r_p = 33{,}5/0{,}50 \approx 67$.

23. a) Stessa costante per le lune dello stesso pianeta: $T_G = T_I(a_G/a_I)^{3/2} = 1{,}769$ d $\times\, (2{,}5377)^{3/2} = 7{,}151$ d. b) La differenza è di 0,004 d, cioè 0,05%. Con il periodo di Io dato a 4 cifre (1,769 d, incertezza ±0,0005 d, cioè 0,03%) e i raggi a 4–5 cifre (fino a ±0,012%), l'incertezza relativa della previsione è circa 0,03% + 1,5 × (0,012% + 0,005%) ≈ 0,06%: la differenza, 0,05%, è dello stesso ordine, quindi non è significativa. (Con dati ancora più precisi compaiono piccole deviazioni reali, dovute all'attrazione reciproca delle lune e allo schiacciamento di Giove.)

24. a) Composizione galileiana delle velocità: la velocità di Marte rispetto alla Terra è $\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{v}_M - \boldsymbol{v}_T$; con velocità parallele e concordi il modulo è 24,1 km/s − 29,8 km/s = −5,7 km/s: rispetto alla Terra Marte si muove all'indietro, cioè in verso opposto al moto orbitale. b) Sole, Terra e Marte sono allineati: d = 1,524 au − 1,000 au = 0,524 au = $0{,}784 \times 10^{11}$ m. c) La velocità relativa è perpendicolare alla linea di vista, quindi questa ruota con $\omega = v_{rel}/d = 5{,}7 \times 10^3$ m/s / $7{,}84 \times 10^{10}$ m = $7{,}3 \times 10^{-8}$ rad/s; in un giorno $6{,}28 \times 10^{-3}$ rad = 0,36°. Il verso di rotazione è opposto a quello del moto dei pianeti, cioè verso ovest rispetto alle stelle: il moto è retrogrado. Il principio usato è la composizione delle velocità del capitolo 2, applicata al sistema solidale con la Terra (che, per un tempo breve, trasla senza ruotare).

25. a) r_p = 0,387 au × 0,794 = 0,307 au; r_a = 0,387 au × 1,206 = 0,467 au. b) La forza che il Sole esercita su Mercurio è centrale, quindi ha momento nullo rispetto al Sole e il momento angolare di Mercurio si conserva; al perielio e all'afelio la velocità è perpendicolare al raggio, quindi $mv_p r_p = mv_a r_a$ e $v_p/v_a = (1 + e)/(1 - e)$ = 1,206/0,794 = 1,52. c) Con l'elongazione di 28° si è trovato 0,47 au, cioè la distanza all'afelio; con 18° si trova sen 18° = 0,31 au, la distanza al perielio. L'elongazione massima dipende dalla distanza del pianeta dal Sole nel momento in cui la si osserva, e per Mercurio, con un'orbita molto eccentrica, questa distanza varia del 50%.

26. a) Terza legge: $a = 2{,}0^{2/3}$ au = 1,59 au = $2{,}37 \times 10^{11}$ m. b) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 2{,}37 \times 10^{11}$ m / ($2{,}0 \times 3{,}156 \times 10^7$ s) = 23,6 km/s; per la Terra $2\pi \times 1{,}496 \times 10^{11}$ m / $3{,}156 \times 10^7$ s = 29,8 km/s. Il rapporto è 0,794 = $1/\sqrt{a}$ (con a in au), come previsto dalla terza legge. c) Pianeta esterno: $1/S = 1/T_T - 1/T = 1 - 1/2 = 1/2$ anni^{-1} ⇒ S = 2,0 anni: lo si vede in opposizione ogni due anni. Si sono usati la terza legge (con la costante dei pianeti, perché gira intorno al Sole) e la relazione fra periodo sinodico e siderale, valida per orbite circolari.

27. a = sen 46° au = 0,719 au; $T^2/a^3 = 0{,}615^2/0{,}719^3$ = 1,02 anni^2/au^3. Con 47° si ha a = 0,731 au e il rapporto vale 0,97. Un grado di differenza sull'elongazione cambia il rapporto di circa il 5%, perché l'incertezza relativa su a pesa tre volte: il valore 1 è compreso nell'intervallo, quindi la terza legge è confermata entro la precisione dei dati.

28. a) $a = (1{,}00 + 1{,}52)/2$ au = 1,26 au; $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p) = 0{,}52/2{,}52 = 0{,}206$. b) La sonda gira intorno al Sole: vale la terza legge con la costante dei pianeti, $T = 1{,}26^{3/2}$ anni = 1,41 anni; il viaggio dura metà periodo, 0,707 anni = 258 giorni, circa otto mesi e mezzo. c) La forza del Sole è centrale e il momento angolare della sonda si conserva; partenza al perielio, arrivo all'afelio, velocità perpendicolare al raggio in entrambi: $v_p/v_a = r_a/r_p = 1{,}52$.

29. Traccia di risposta. Avrebbe dovuto supporre che le stelle fossero così lontane che lo spostamento apparente dovuto al moto della Terra fosse più piccolo della precisione dei suoi strumenti, circa un primo d'arco: cioè almeno qualche migliaio di volte più lontane del Sole, con un enorme spazio vuoto fra Saturno e le stelle. Nel suo tempo era una supposizione senza prove, e il suo ragionamento (se non vedo la parallasse, la Terra è ferma) era coerente con i dati. Era sbagliato perché le stelle sono molto più lontane di quanto si pensasse: la parallasse, misurata nel 1838, è dell'ordine di una frazione di secondo d'arco, centinaia di volte sotto la precisione di Tycho.

30. Traccia di risposta. Fra l'equinozio di marzo e quello di settembre la Terra percorre la metà dell'orbita che contiene l'afelio (inizio di luglio): lì è più lontana dal Sole e, per la seconda legge, più lenta, quindi impiega più tempo a percorrere quella metà. Nell'altra metà, che contiene il perielio (inizio di gennaio), è più veloce. La differenza di circa una settimana è coerente con una velocità che varia di circa il 3% fra perielio e afelio.

31. Traccia di risposta. La distanza vera è $3{,}84 \times 10^8$ m: lo studente ha sbagliato di un fattore circa 69. L'errore è nell'aver usato la costante dei pianeti, che vale 1 anno^2/au^3 solo per i corpi che girano intorno al Sole: la Luna gira intorno alla Terra, e la costante della terza legge dipende dal corpo centrale. Per usarla servirebbe il valore di T^2/a^3 per un altro corpo che gira intorno alla Terra, per esempio un satellite artificiale di cui si conoscano periodo e

raggio dell'orbita; oppure, come vedrai nel capitolo 13, la massa della Terra.

32. Traccia di risposta. I due sistemi danno le stesse posizioni relative, quindi serve un effetto del moto della Terra rispetto alle stelle: la parallasse stellare annua (misurata dal 1838) o l'aberrazione della luce delle stelle; oppure un effetto della rotazione terrestre, come il pendolo di Foucault del capitolo 3 (che però prova la rotazione, non la rivoluzione). Ai tempi di Galileo la parallasse, di una frazione di secondo d'arco, era centinaia di volte più piccola della precisione degli strumenti.