CAPITOLO

11

La dinamica dei fluidi

Un fluido che scorre tiene i conti con cura: la massa che entra da una parte esce dall'altra, e l'energia che perde in pressione la ritrova in velocità.

OBIETTIVI

1. Descrivere il moto di un fluido con le linee di flusso e distinguere il moto stazionario, laminare e turbolento.
2. Definire la portata e applicare l'equazione di continuità a tubi, getti e circolazione del sangue.
3. Ricavare l'equazione di Bernoulli dal teorema dell'energia cinetica e riconoscere in essa la conservazione dell'energia e la legge di Stevino.
4. Applicare l'equazione di Bernoulli al teorema di Torricelli, al tubo di Venturi, al vento sui tetti e alla portanza di un'ala.
5. Descrivere la viscosità dei fluidi reali, usare la legge di Stokes per la velocità limite e il numero di Reynolds per riconoscere il moto laminare.
6. Verificare in laboratorio il teorema di Torricelli dalla gittata di un getto e confrontare previsione e misura.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 Ripartiamo da... i fluidi in quiete 2
11.2 Descrivere un fluido in movimento 2
11.3 La portata e l'equazione di continuità 3
11.4 L'equazione di Bernoulli 6
11.5 Le applicazioni dell'equazione di Bernoulli 10
11.6 I fluidi reali: la viscosità 16

Fisica 3 · Parte III · Il corpo rigido e i fluidi in movimento · versione 1.0
Capitolo 11: La dinamica dei fluidi · pagine 293–318 del volume completo · estratto per lo studio

Il getto di un rubinetto si assottiglia cadendo; con il pollice sulla bocca di un tubo da giardino l'acqua schizza lontano; un aereo di settanta tonnellate resta sospeso nell'aria; il sangue, veloce nell'aorta, nei capillari quasi si ferma. Sono fenomeni diversissimi, ma si spiegano con due sole idee: la massa di un fluido che scorre si conserva, e così l'energia.

In questo capitolo mettiamo in movimento i fluidi che finora hai studiato in quiete. Scriveremo l'equazione di continuità, che traduce la conservazione della massa, e ricaveremo dal teorema dell'energia cinetica l'equazione di Bernoulli: la conservazione dell'energia meccanica applicata al moto dei fluidi. Alla fine lasceremo il modello del fluido ideale per i fluidi reali, che hanno un attrito interno, la viscosità.

11.1 Ripartiamo da… i fluidi in quiete

Riassumiamo quello che useremo; se un punto non ti è chiaro, riprendi i capitoli indicati di *Fisica 1*.

La pressione (*Fisica 1*, capitolo 12). È il rapporto fra il modulo della forza perpendicolare a una superficie e l'area della superficie, $p = F_\perp/S$; si misura in pascal (1 Pa = 1 N/m^2). Per il principio di Pascal una variazione di pressione si trasmette inalterata in tutto il fluido. La pressione atmosferica al livello del mare vale in media 101 325 Pa.

La legge di Stevino (*Fisica 1*, capitolo 13). In un liquido di densità d in quiete, la pressione a profondità h sotto la superficie libera è $p = p_{\text{atm}} + dgh$: punti alla stessa quota hanno la stessa pressione. Molti testi indicano la densità con la lettera greca ρ; noi continuiamo a usare d, come nei volumi precedenti.

Il principio di Archimede (*Fisica 1*, capitolo 14). Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato, $F_A = d_f g V_{\text{imm}}$.

Infine, un fluido ideale (*Fisica 1*, capitolo 12) è un fluido incomprimibile e privo di viscosità. Ora lo useremo per i fluidi in movimento.

11.2 Descrivere un fluido in movimento

11.2.1 Moto stazionario e linee di flusso

Per descrivere il moto di un sasso basta seguirne la posizione nel tempo. Un fluido è fatto di un numero enorme di particelle, e seguirle una per una è impossibile. Conviene allora cambiare punto di vista: invece di inseguire ogni particella, guardiamo che cosa succede *in ogni punto* dello spazio, cioè con quale velocità passa il fluido in quel punto in ogni istante. Otteniamo così un vettore velocità per ogni punto: il **campo delle velocità** del fluido.

Il caso più semplice è quello in cui questo campo non cambia nel tempo. Si dice che un fluido è in **moto stazionario** quando la velocità in ogni punto è costante nel tempo: le particelle che passano per un certo punto hanno tutte la stessa velocità, anche se la velocità cambia da un punto all'altro. L'acqua in un tubo con il rubinetto aperto sempre allo stesso modo ne è una buona approssimazione; l'acqua di una vasca che si sta svuotando no.

In un moto stazionario ogni particella segue un percorso fisso, uguale a quello delle particelle che sono passate prima di lei dallo stesso punto. Questo percorso si chiama **linea di flusso**: in ogni suo punto la velocità del fluido è tangente alla linea. Due linee di flusso non possono incrociarsi, perché nel punto di incrocio il fluido dovrebbe avere due velocità diverse. Le linee di flusso si rendono visibili con un filo di inchiostro in un liquido, o con fili di fumo in una galleria del vento; dove le linee si avvicinano il fluido corre più veloce, dove si allontanano rallenta (lo dimostreremo fra poco). Un fascio di linee di flusso che passano per il contorno di una piccola superficie forma un **tubo di flusso** (Figura 11.1): poiché le linee non si incrociano, il fluido che entra in un tubo di flusso non ne esce dai lati, come se le pareti fossero reali.

11.2.2 Moto laminare e moto turbolento

Se apri appena un rubinetto, il getto è liscio e trasparente: l'acqua scorre a strati che scivolano l'uno sull'altro senza mescolarsi. È un **moto laminare** (dal latino *lamina*, «strato sottile»). Se apri il rubinetto al massimo il getto diventa opaco e irregolare: la velocità in ogni punto cambia in modo disordinato, si formano vortici di ogni dimensione e gli strati si mescolano. È un **moto turbolento**.

Il moto turbolento non è stazionario, e le leggi di questo capitolo non lo descrivono. Per tutto il capitolo, salvo l'ultimo paragrafo, faremo quindi tre ipotesi: il fluido è **ideale** (incomprimibile e non viscoso), il moto è **stazionario** e non ci sono vortici. Descrivono bene l'acqua nei tubi e nei getti e, finché la velocità è molto minore di quella del suono, anche l'aria attorno a un'ala, che a quelle velocità si comprime pochissimo.

11.3 La portata e l'equazione di continuità

11.3.1 La portata

Quanta acqua passa in un tubo? Si chiama **portata** q il volume di fluido che attraversa una sezione in un certo tempo, diviso per quel tempo:

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

Nella vita quotidiana la portata si esprime spesso in litri al minuto: 1 L/min = 10^{-3} m^3/60 s ≈ 1,67 × 10^{-5} m^3/s. Un rubinetto di cucina aperto bene eroga circa 10 L/min.

Se il fluido scorre con velocità v perpendicolare a una sezione di area S, e la velocità è la stessa in tutti i punti della sezione, in un intervallo Δt ogni particella avanza di $v\Delta t$: attraverso la sezione passa il volume di un cilindro di base S e altezza $v\Delta t$, cioè $\Delta V = Sv\Delta t$. Dividendo per Δt:

$$q = Sv$$

Se la velocità non è la stessa in tutta la sezione (e in un fluido reale non lo è mai: vicino alle pareti è minore), v è la velocità media sulla sezione.

11.3.2 L'equazione di continuità

Consideriamo ora un tubo che si restringe, come quello della Figura 11.1, percorso in moto stazionario da un fluido incomprimibile. Nell'intervallo Δt attraverso la sezione larga S_1 entra il volume $S_1 v_1 \Delta t$, e attraverso la sezione stretta S_2 esce il volume $S_2 v_2 \Delta t$. Fra le due sezioni il fluido non può accumularsi, perché è incomprimibile e occupa già tutto il tubo, e non può sparire, perché la massa si conserva: il volume che esce deve essere uguale a quello che entra. Quindi

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{cioè} \quad q = Sv = \text{costante}$$

È l'**equazione di continuità**: in un fluido incomprimibile in moto stazionario la portata è la stessa attraverso ogni sezione del tubo, e la velocità è **inversamente proporzionale alla sezione**. Se la sezione si dimezza la velocità raddoppia; se il diametro di un tubo si dimezza la sezione, che è proporzionale al quadrato del diametro, diventa un quarto, e la velocità quadruplica. Lo stesso ragionamento vale per un tubo di flusso: dove le linee di flusso si stringono la sezione del tubo diminuisce e la velocità aumenta, come avevamo anticipato.

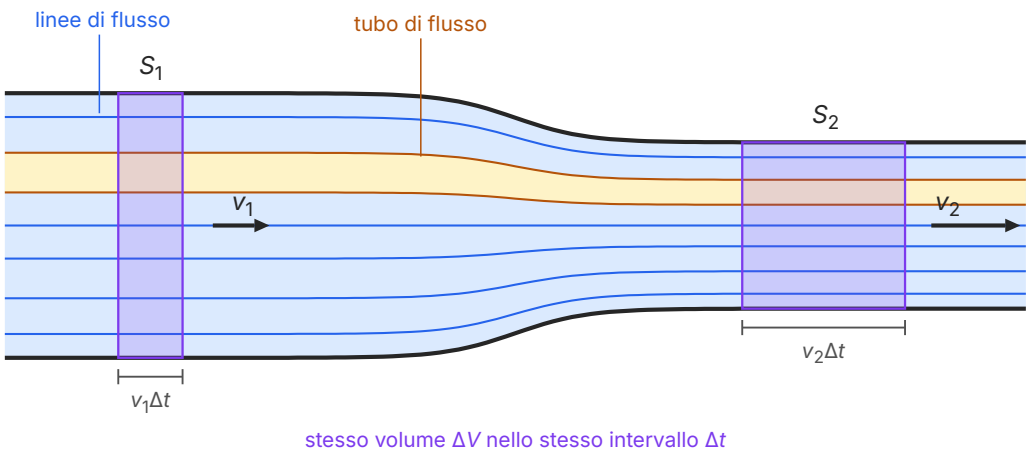

Figura 11.1 Un fluido incomprimibile in moto stazionario in un tubo che si restringe. Le linee di flusso (in blu) si avvicinano nella parte stretta; quelle in arancione delimitano un tubo di flusso. Nello stesso intervallo Δt attraverso le sezioni S_1 e S_2 passa lo stesso volume ΔV (i due cilindri in viola): poiché S_2 è minore, il cilindro è più lungo e $v_2 > v_1$. Qui $S_1/S_2 \approx 2{,}5$.

L'equazione spiega perché, mettendo il pollice sulla bocca di un tubo da giardino, l'acqua esce molto più veloce. Un tubo con diametro interno di 15 mm ha una sezione di $\pi(7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 \approx 1{,}77 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$; con una portata di 15 L/min = $2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s}$ l'acqua vi scorre a $v = q/S \approx 1{,}4$ m/s. Se il pollice riduce l'apertura a 0,40 cm^2, e la portata resta la stessa, l'acqua esce a $2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s} \div 0{,}40 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \approx 6{,}3$ m/s. (In realtà con il pollice la portata diminuisce un poco, ma l'effetto principale è questo.)

ESEMPIO SVOLTO

Il getto che si assottiglia

Il getto di un rubinetto ha un diametro di 1,2 cm appena uscito dalla bocca e di 0,80 cm 10 cm più in basso. Calcola la velocità dell'acqua all'uscita e la portata del rubinetto.

Il modello. L'acqua che cade è soggetta solo al proprio peso (trascuriamo l'aria): ogni particella si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione g, e la sua velocità dopo una caduta h è data da $v_2^2 = v_1^2 + 2gh$ (*Fisica 1*, capitolo 16). Il getto è un tubo di flusso con le pareti d'aria: la portata è la stessa a ogni quota, quindi $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Le sezioni. Le sezioni sono proporzionali al quadrato dei diametri: $S_1/S_2 = (1{,}2/0{,}80)^2 = 2{,}25$. Dall'equazione di continuità $v_2 = 2{,}25\, v_1$.

La caduta. Sostituendo nella relazione cinematica: $(2{,}25\, v_1)^2 = v_1^2 + 2gh$, cioè $(5{,}06 - 1)v_1^2 = 2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}10\ \text{m} = 1{,}96\ \text{m}^2/\text{s}^2$. Quindi $v_1^2 \approx 0{,}48\ \text{m}^2/\text{s}^2$ e $v_1 \approx 0{,}69$ m/s; più in basso $v_2 = 2{,}25 \times 0{,}69$ m/s $\approx 1{,}6$ m/s.

La portata. $q = S_1 v_1 = \pi(0{,}60 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 \times 0{,}69\ \text{m/s} \approx 7{,}9 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{s}$, cioè circa 4,7 L/min: un rubinetto aperto a metà.

Controllo. Più in basso il getto è più veloce e quindi più sottile: è proprio quello che si vede. Più in basso il getto si rompe in gocce, per un effetto (la tensione superficiale) che il modello non contiene.

COLLEGAMENTI

Perché il sangue rallenta nei capillari

Il cuore di un adulto a riposo pompa circa 5,0 L di sangue al minuto, cioè $q \approx 83\ \text{cm}^3/\text{s}$. Tutto passa per l'aorta, che ha un raggio di circa 1 cm e quindi una sezione di circa 3 cm^2: la velocità media del sangue nell'aorta è dell'ordine di $83\ \text{cm}^3/\text{s} \div 3{,}1\ \text{cm}^2 \approx 27\ \text{cm/s}$ (valori indicativi per un adulto a riposo; il flusso nell'aorta è pulsante e la velocità di picco è molto più alta).

Poi l'aorta si ramifica in arterie, arteriole e infine in miliardi di capillari, ciascuno con un diametro di pochi millesimi di millimetro. Un singolo capillare è strettissimo, eppure il sangue vi scorre **più lentamente** che nell'aorta, a qualche decimo di millimetro al secondo. Non è una violazione dell'equazione di continuità: la portata va divisa per la sezione **totale** di tutti i vasi percorsi in parallelo, e la somma delle sezioni di tutti i capillari, dell'ordine di 2000–3000 cm^2, è circa mille volte quella dell'aorta. Con 2500 cm^2, per esempio, si ottiene $v \approx 83\ \text{cm}^3/\text{s} \div 2500\ \text{cm}^2 \approx 0{,}03\ \text{cm/s} = 0{,}3\ \text{mm/s}$.

La lentezza è essenziale: è nei capillari che l'ossigeno e le sostanze nutritive passano dal sangue ai tessuti, e il passaggio richiede tempo.

11.4 L'equazione di Bernoulli

11.4.1 Pressione e velocità

Nel tubo della Figura 11.1 il fluido accelera passando dalla parte larga a quella stretta. Ma un'accelerazione richiede una forza risultante: su ogni porzione di fluido che entra nella strozzatura la spinta del fluido che sta dietro deve essere maggiore della spinta, opposta, del fluido che sta davanti. Quindi, in un tubo orizzontale, **la pressione nella parte larga, dove il fluido è lento, è maggiore della pressione nella parte stretta, dove è veloce**. Per renderla quantitativa usiamo il teorema dell'energia cinetica, che nel capitolo 5 abbiamo scritto nella forma $W_{\text{tot}} = \Delta K$.

ESEMPIO SVOLTO

Dal teorema dell'energia cinetica all'equazione di Bernoulli

La situazione. Un fluido ideale scorre in moto stazionario in un tubo di flusso che cambia sezione e quota (Figura 11.2). Nella sezione 1 il fluido ha pressione p_1, velocità v_1 e si trova alla quota h_1; nella sezione 2 ha p_2, v_2, h_2. Seguiamo la porzione di fluido compresa fra le due sezioni in un breve intervallo Δt.

1. Che cosa cambia. Nell'intervallo Δt la faccia posteriore della porzione avanza di $v_1\Delta t$ e quella anteriore di $v_2\Delta t$. La parte intermedia, nel moto stazionario, resta identica. Tutto va come se un piccolo volume $\Delta V = S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t$ (uguali per l'equazione di continuità), di massa $\Delta m = d\Delta V$, fosse stato portato dalla sezione 1 alla sezione 2.

2. Il lavoro delle forze di pressione. Sulla faccia posteriore il fluido che sta dietro spinge con la forza p_1S_1 nel verso del moto, che avanza di $v_1\Delta t$: lavoro $p_1S_1v_1\Delta t = p_1\Delta V$. Sulla faccia anteriore il fluido che sta davanti spinge all'indietro con la forza p_2S_2: lavoro $-p_2\Delta V$. Le pareti esercitano forze perpendicolari al moto del fluido (non c'è attrito, perché il fluido è ideale) e non compiono lavoro. Lavoro delle forze di pressione: $(p_1 - p_2)\Delta V$.

3. Il lavoro del peso. Il peso è una forza conservativa: il suo lavoro è l'opposto della variazione dell'energia potenziale, $-\Delta mg(h_2 - h_1) = -d\Delta Vg(h_2 - h_1)$.

4. Il teorema dell'energia cinetica. Il lavoro totale è uguale alla variazione di energia cinetica, $\frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}d\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$:

$$(p_1 - p_2)\Delta V - d\Delta Vg(h_2 - h_1) = \tfrac{1}{2}d\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

5. Il risultato. Dividiamo per ΔV e portiamo a sinistra tutto ciò che riguarda la sezione 1 e a destra ciò che riguarda la sezione 2:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}dv_1^2 + dgh_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}dv_2^2 + dgh_2$$

Controllo delle unità. Ogni termine si misura in pascal: per esempio dv^2 si misura in $(\text{kg/m}^3)(\text{m/s})^2 = \text{kg/(m}\cdot\text{s}^2) = (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)/\text{m}^2 = \text{N/m}^2$. Ma $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m/m}^3 = 1\ \text{J/m}^3$: una pressione è anche un'energia per unità di volume.

Poiché le sezioni 1 e 2 sono due sezioni qualsiasi, la somma ha lo stesso valore in tutti i punti di una linea di flusso:

$$p + \tfrac{1}{2}dv^2 + dgh = \text{costante}$$

È l'**equazione di Bernoulli**. Vale lungo una linea di flusso (o un tubo di flusso sottile) per un fluido ideale in moto stazionario. Il suo significato è quello del principio di conservazione dell'energia meccanica: $\frac{1}{2}dv^2$ è l'energia cinetica per unità di volume, dgh l'energia potenziale gravitazionale per unità di volume, e p è il lavoro che le forze di pressione possono compiere su

un'unità di volume del fluido. Il termine $\frac{1}{2}dv^2$, che ha le dimensioni di una pressione, si chiama **pressione dinamica**.

Per $v = 0$ l'equazione diventa $p_1 + dgh_1 = p_2 + dgh_2$, cioè $p_2 = p_1 + dg(h_1 - h_2)$: è la **legge di Stevino**, che ritroviamo come caso particolare. In un tubo orizzontale ($h_1 = h_2$) resta invece $p + \frac{1}{2}dv^2$ = costante: dove la velocità è maggiore, la pressione è minore, come avevamo intuito.

La Figura 11.2 mostra l'equazione al lavoro. In un tubo, nel punto A, sono inseriti verticalmente tubicini aperti in alto, detti piezometri: l'acqua vi sale fino all'altezza $p/(dg)$ che corrisponde, per la legge di Stevino, alla pressione nel tubo (meno quella atmosferica, che agisce anche sulla superficie della colonna). Nel tubo stretto e più alto B l'acqua è quattro volte più veloce e la colonna è più bassa. Dividendo l'equazione di Bernoulli per dg si vede che la somma $p/(dg) + v^2/(2g) + h$ è la stessa nei due punti: è la linea tratteggiata della figura.

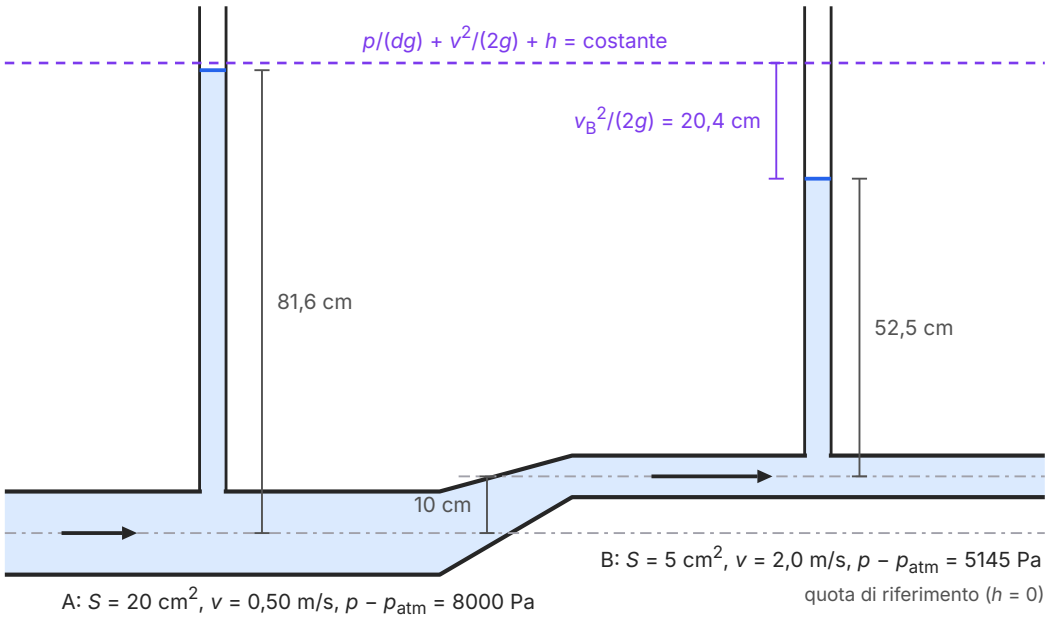

Figura 11.2 Acqua in moto stazionario in un tubo che si restringe e sale di 10 cm. Le altezze delle colonne nei piezometri e la quota di B sono in scala; i diametri del tubo no. In A la pressione (relativa a quella atmosferica) è 8000 Pa e la colonna è alta 81,6 cm; in B la velocità è 2,0 m/s e l'equazione di Bernoulli dà 5145 Pa, cioè una colonna di 52,5 cm. Sommando a ogni colonna la quota del tubo e $v^2/(2g)$ si ottiene sempre la stessa altezza, la linea tratteggiata: in A il termine $v^2/(2g)$ vale solo 1,3 cm.

ESEMPIO SVOLTO

L'acqua che sale al quarto piano

Al piano terra di un edificio l'acqua scorre in un tubo di diametro interno 2,4 cm con velocità 1,2 m/s e pressione assoluta $3{,}5 \times 10^5$ Pa. Il tubo sale fino al quarto piano, 12 m più in alto, dove il diametro interno è 1,2 cm. Calcola la portata, la velocità e la pressione al quarto piano, trattando l'acqua come un fluido ideale.

Portata. $q = S_1 v_1 = \pi(1{,}2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 \times 1{,}2\ \text{m/s} \approx 5{,}4 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s} \approx 33\ \text{L/min}$.

Velocità (continuità). Il diametro si dimezza, la sezione diventa un quarto: $v_2 = 4v_1 = 4{,}8$ m/s.

Pressione (Bernoulli). Con lo zero delle quote al piano terra:

$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2) - dgh_2$$

$p_2 = 3{,}5 \times 10^5\ \text{Pa} + \tfrac{1}{2} \times 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 \times (1{,}44 - 23{,}0)\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 12\ \text{m} = 3{,}5 \times 10^5\ \text{Pa} - 1{,}08 \times 10^4\ \text{Pa} - 1{,}18 \times 10^5\ \text{Pa} \approx 2{,}2 \times 10^5\ \text{Pa}$.

Commento. La perdita di pressione è dovuta quasi tutta alla salita ($1{,}18 \times 10^5$ Pa) e solo in piccola parte all'aumento di velocità ($1{,}1 \times 10^4$ Pa). Per questo gli edifici alti hanno pompe che aumentano la pressione. Nei tubi reali l'attrito interno dell'acqua abbassa ancora un po' la pressione.

ERRORE FREQUENTE

«Dove il tubo si stringe il fluido è schiacciato, quindi la pressione aumenta.» **No.** In un fluido incomprimibile in moto stazionario nella strozzatura la pressione **diminuisce**: il fluido vi accelera, e per accelerare deve essere spinto più da dietro che da davanti. Un liquido non si accalca come una folla davanti a una porta stretta: la sua densità resta la stessa, e il fluido semplicemente va più veloce. Attenzione anche al caso opposto: l'equazione di Bernoulli confronta punti della **stessa linea di flusso** in un fluido ideale in moto stazionario; non dice che un fluido veloce ha sempre una pressione bassa. L'aria che esce da un phon è veloce, ma appena fuori dal phon ha la pressione dell'aria ferma che la circonda.

APPROFONDIMENTO

Daniel Bernoulli e l'*Hydrodynamica*

Daniel Bernoulli (1700–1782), di una famiglia di matematici di Basilea (il padre Johann e lo zio Jakob), scrisse gran parte della sua opera sui fluidi negli anni trascorsi all'Accademia delle scienze di San Pietroburgo e la pubblicò a Strasburgo nel 1738 con il titolo *Hydrodynamica*: la parola «idrodinamica», che oggi usiamo per la dinamica dei liquidi, viene da lì.

Bernoulli non scrisse l'equazione nella forma che usiamo noi. Ragionava con la conservazione della «forza viva» (la grandezza mv^2 di Leibniz, il doppio della nostra energia cinetica), che esprimeva come l'uguaglianza fra la «discesa attuale» di un corpo e la sua «salita potenziale»: l'altezza da cui un corpo è sceso è quella a cui potrebbe risalire. Ne ricavava la pressione di un liquido in movimento sulle pareti di un tubo. Le equazioni generali del moto dei fluidi, da cui l'equazione si ottiene nella forma di oggi, furono scritte da Leonhard Euler negli anni Cinquanta del Settecento.

Nella stessa *Hydrodynamica* c'è un capitolo che anticipa di più di un secolo un'altra teoria di questo volume: Bernoulli immagina un gas come un insieme di particelle in moto rapidissimo che urtano le pareti del recipiente, e ne ricava che la pressione cresce quando il volume diminuisce. È l'idea della teoria cinetica dei gas, che studierai nel capitolo 15.

11.5 Le applicazioni dell'equazione di Bernoulli

11.5.1 Il teorema di Torricelli

Un recipiente largo è pieno d'acqua fino a un'altezza h sopra un piccolo foro praticato nella parete. Con quale velocità esce l'acqua? Applichiamo l'equazione di Bernoulli lungo una linea di flusso che parte dalla superficie libera (punto 1) e arriva nel getto, appena fuori dal foro (punto 2), con lo zero delle quote all'altezza del foro. In entrambi i punti il fluido è a contatto con l'aria: $p_1 = p_2 = p_{atm}$. Il recipiente è largo, quindi per l'equazione di continuità la superficie libera scende lentissimamente: $v_1 = v_2 S_2/S_1 \approx 0$. Resta $p_{atm} + dgh = p_{atm} + \frac{1}{2}dv_2^2$, cioè

$$v = \sqrt{(2gh)}$$

È il **teorema di Torricelli**: l'acqua esce dal foro con la velocità che acquisterebbe cadendo liberamente da un'altezza h, cioè dal livello della superficie libera fino al foro. Non dipende dalla densità del liquido (mercurio e acqua escono alla stessa velocità) né dalla direzione del foro. Evangelista Torricelli, il successore di Galileo a Firenze, presentò questo risultato nel *De motu gravium* (1644), quasi un secolo prima dell'*Hydrodynamica*, confrontando il getto con la caduta dei gravi.

Se il foro è a un'altezza H sopra il pavimento e il getto esce orizzontale, ogni goccia diventa un proiettile lanciato orizzontalmente con velocità $\sqrt{(2gh)}$ (*Fisica 2*, capitolo 2). Il tempo di cadu-

ta è $\sqrt{(2H/g)}$ e la gittata è

$$x = \sqrt{(2gh)} \cdot \sqrt{(2H/g)} = 2\sqrt{(hH)}$$

La Figura 11.3 mostra tre fori in un recipiente in cui l'acqua arriva a 90 cm dal pavimento. Il getto più basso è il più veloce, ma ha poco tempo per cadere. A parità di altezza totale $h + H$, il prodotto hH è massimo quando $h = H$: il getto che arriva più lontano esce dal foro a metà altezza, e fori simmetrici rispetto alla metà hanno la stessa gittata.

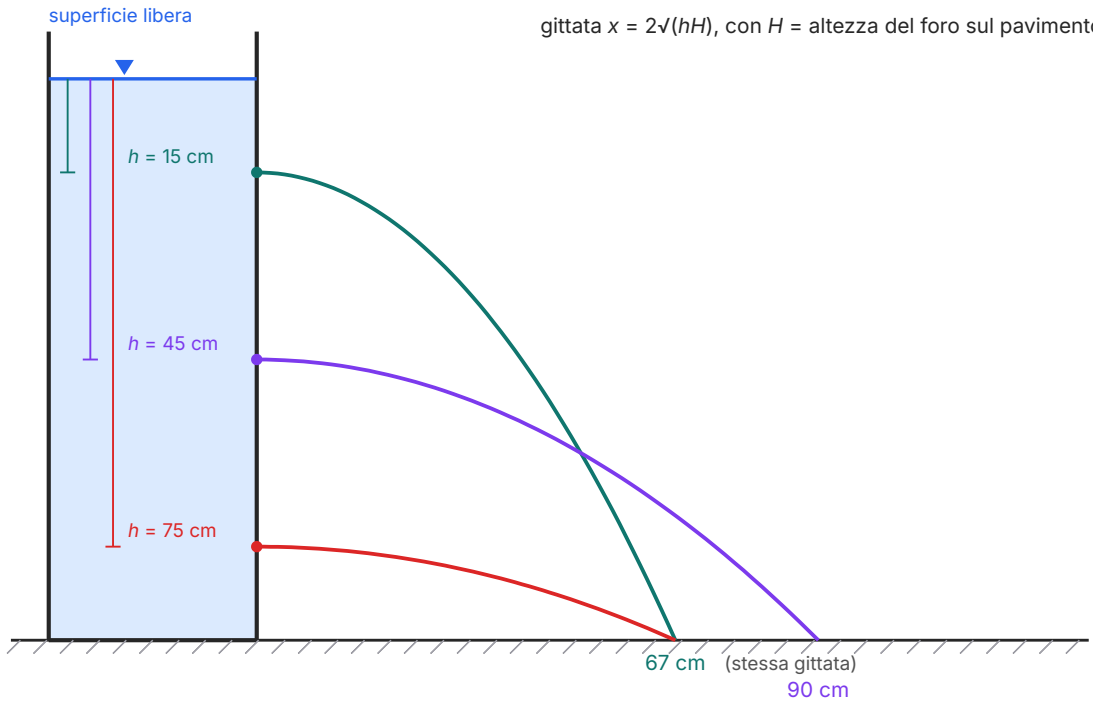

Figura 11.3 Getti d'acqua da tre fori di un recipiente largo, con la superficie libera a 90 cm dal pavimento. Le traiettorie sono parabole calcolate con $v = \sqrt{(2gh)}$ e il moto del proiettile. Il foro a metà altezza ($h = H = 45$ cm) dà la gittata massima, 90 cm; i fori a 15 cm e a 75 cm di profondità hanno la stessa gittata, $2\sqrt{(0{,}15\ \text{m} \times 0{,}75\ \text{m})} \approx 67$ cm.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la gittata di un getto e il teorema di Torricelli

Materiali. Una bottiglia di plastica da 1,5 L con un foro di circa 3 mm a 4 cm dal fondo, chiuso con nastro adesivo, e segni a 4, 8, 12, 16 e 20 cm sopra il foro; un supporto che tiene il foro a $H = (30{,}0 \pm 0{,}2)$ cm sopra il fondo di una vaschetta; un metro a nastro sul fondo, con lo zero sulla verticale del foro (filo a piombo); uno smartphone su un treppiede.

Procedimento. 1) Riempi la bottiglia, avvia il video (60 fotogrammi al secondo) inquadrando bottiglia e metro, togli il nastro. 2) Nei fotogrammi in cui la superficie passa per ciascun segno leggi dove il getto tocca il fondo; il getto è spesso qualche millimetro: leggi il centro, con incertezza 0,5 cm. 3) Per ogni livello calcola la previsione $x_{teo} = 2\sqrt{(hH)}$. Con incertezze di 0,2 cm su h e su H, l'incertezza relativa sulla previsione è la metà della somma delle incertezze relative di h e di H (la radice quadrata è una potenza di esponente ½: per la regola delle potenze di *Fisica 1*, capitolo 4, dimezza l'incertezza relativa).

Tabella 11.1 Gittata del getto per cinque livelli dell'acqua sopra il foro, con il foro a $H = (30{,}0 \pm 0{,}2)$ cm sopra il piano di arrivo (dati tipici di una prova).

h (cm)	x_{teo} (cm)	x_{mis} (cm)	x_{mis}/x_{teo}
20,0	49,0 ± 0,4	47,5 ± 0,5	0,970
16,0	43,8 ± 0,4	42,5 ± 0,5	0,970
12,0	37,9 ± 0,4	37,1 ± 0,5	0,978
8,0	31,0 ± 0,5	30,0 ± 0,5	0,968
4,0	21,9 ± 0,6	21,3 ± 0,5	0,972

Confronto teoria–esperimento. Per $h = 20{,}0$ cm la previsione è $(49{,}0 \pm 0{,}4)$ cm e la misura $(47{,}5 \pm 0{,}5)$ cm: la differenza, 1,5 cm, è maggiore della somma delle incertezze, 0,9 cm, quindi i due valori **non sono compatibili**. Per $h = 4{,}0$ cm, invece, la differenza (0,6 cm) è minore della somma delle incertezze (1,1 cm): previsione e misura sono compatibili. Ma il rapporto fra gittata misurata e prevista (ultima colonna) è sempre circa 0,97.

Che cosa concludere. La forma della legge è confermata: la gittata cresce come $\sqrt{h}$, perché il rapporto è costante. Ma tutte le misure sono più basse di circa il 3%: è un errore sistematico, non casuale. La gittata è proporzionale alla velocità di uscita, quindi l'acqua esce con una velocità di circa il 97% di $\sqrt{(2gh)}$. Il motivo è che l'acqua non è un fluido ideale: nel foro una piccola parte dell'energia è dissipata dall'attrito interno (i manuali di idraulica riportano, per fori a spigolo vivo, velocità di circa 0,97–0,98 volte quella di Torricelli). Per h piccolo l'effetto resta nascosto nelle incertezze.

Sicurezza. Il foro va praticato da un adulto (con un chiodo scaldato o un trapano). Tieni lo smartphone e le prese elettriche lontano dall'acqua e asciuga subito il pavimento bagnato.

Per la relazione. Riporta x_{mis} in funzione di $2\sqrt{(hH)}$ con le barre d'errore: i punti dovrebbero stare su una retta per l'origine. Ricava la pendenza e confrontala con il valore 1 previsto dal modello. Discuti altre cause sistematiche: un getto non esattamente orizzontale, il livello che scende durante il volo del getto, l'aria.

11.5.2 Il tubo di Venturi

In un tubo orizzontale con una strozzatura, come quello della Figura 11.4, il fluido accelera nella strozzatura e la sua pressione diminuisce. È l'**effetto Venturi**, dal nome di Giovanni Battista Venturi, il fisico emiliano che lo studiò sperimentalmente alla fine del Settecento. Dalle due equazioni fondamentali del capitolo, con $h_1 = h_2$:

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}d(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}) \qquad \text{con} \qquad v_2 = v_1 S_1/S_2$$

Misurando la differenza di pressione si ricava quindi la velocità, e da questa la portata. Lo strumento costruito su questo principio si chiama **venturimetro** (o misuratore di Venturi): un tubo con una strozzatura dolce e due prese di pressione. Nella Figura 11.4 il tubo ha diametro 4,0 cm e la strozzatura 2,0 cm, quindi $S_1/S_2 = 4$ e $v_2 = 4v_1$. I piezometri mostrano un dislivello di 15 cm, cioè $p_1 - p_2 = dg\Delta h = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}15\ \text{m} \approx 1{,}5 \times 10^3\ \text{Pa}$. Allora $\tfrac{1}{2}d(16 - 1)v_1^{\,2} = 1{,}47 \times 10^3\ \text{Pa}$, da cui $v_1 \approx 0{,}44\ \text{m/s}$, $v_2 \approx 1{,}8\ \text{m/s}$ e $q = \pi(0{,}020\ \text{m})^2 \times 0{,}44\ \text{m/s} \approx 5{,}6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3\text{/s} \approx 33\ \text{L/min}$. Con l'aria, lo stesso principio faceva funzionare il carburatore dei vecchi motori a scoppio.

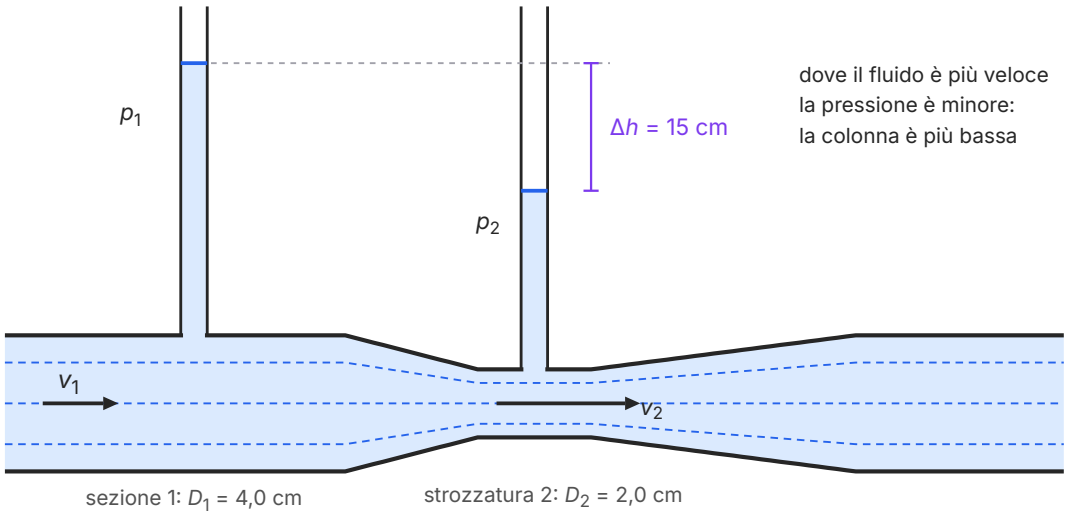

Figura 11.4 Un venturimetro. L'acqua scorre da sinistra a destra in un tubo di diametro 4,0 cm con una strozzatura di 2,0 cm. Nella strozzatura la velocità è quattro volte maggiore e la pressione è minore: la colonna nel piezometro è più bassa di Δh = 15 cm. Dal dislivello si ricava la portata, circa 33 L/min. Dopo la strozzatura il tubo si riallarga dolcemente, per non creare vortici.

Sull'effetto Venturi funziona anche il nebulizzatore dei profumi: un getto d'aria veloce passa sopra un tubicino immerso nel liquido, la pressione lì scende sotto quella atmosferica, e questa spinge il liquido su per il tubicino, dove il getto lo riduce in goccioline.

11.5.3 Il vento sui tetti e la portanza delle ali

Durante una tempesta un tetto può essere sollevato e portato via. L'aria che passa velocemente sopra il tetto ha una pressione minore di quella dell'aria quasi ferma che sta dentro la casa, e la differenza di pressione spinge il tetto verso l'alto. Una stima con l'equazione di Bernoulli: con vento a 30 m/s (108 km/h) e densità dell'aria 1,20 kg/m^3, $\Delta p \approx \frac{1}{2} \times 1{,}20\ \text{kg/m}^3 \times (30\ \text{m/s})^2 = 540$ Pa. Sembra poco, ma su un tetto di 100 m^2 fa una forza di $5{,}4 \times 10^4$ N, il peso di più di cinque tonnellate. È solo un ordine di grandezza (la differenza di pressione vera dipende dalla forma del tetto e dalla direzione del vento), ma basta a spiegare perché i tetti vanno ancorati saldamente alle pareti.

La forza verso l'alto che l'aria esercita su un'ala in movimento si chiama **portanza**. Un'ala ha un profilo curvo ed è leggermente inclinata rispetto alla direzione dell'aria (angolo d'attacco): per questo devia verso il basso l'aria che le scorre attorno (Figura 11.5). Per spingere in basso ogni secondo una grande massa d'aria l'ala deve esercitare su di essa una forza verso il basso;

l'aria esercita sull'ala una forza uguale e opposta, verso l'alto. Lo stesso fatto si può descrivere con le pressioni: le linee di flusso sopra l'ala si stringono e si incurvano, l'aria sopra l'ala è più veloce e ha una pressione minore di quella sotto l'ala. Le due descrizioni non sono in concorrenza: guardano lo stesso flusso, una con il terzo principio, l'altra con l'equazione di Bernoulli.

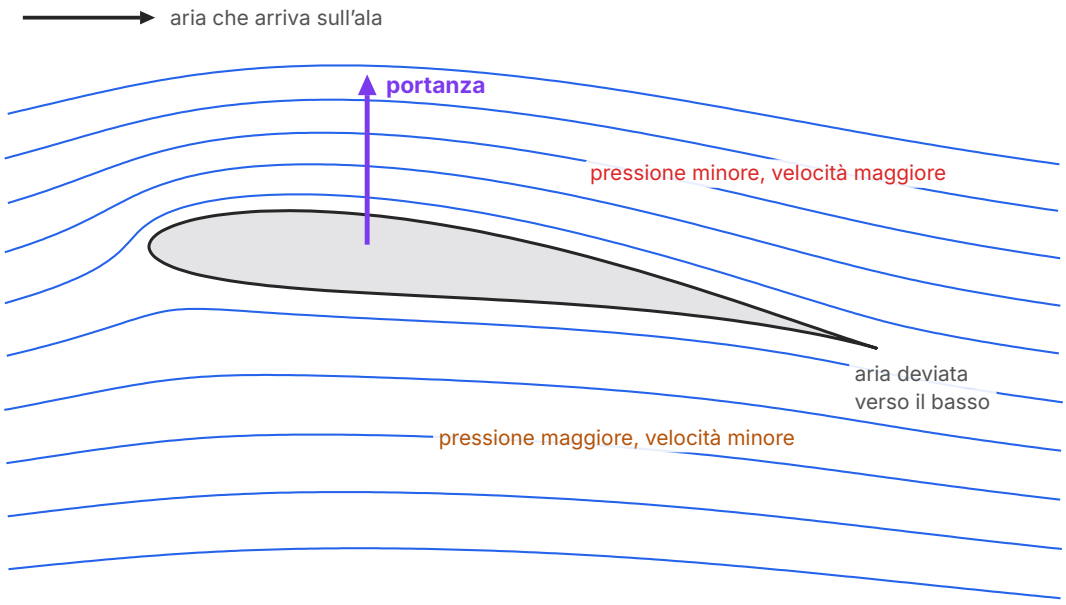

Figura 11.5 Linee di flusso attorno al profilo di un'ala, calcolate con un modello di fluido ideale (un profilo detto di Žukovskij, inclinato di 8° rispetto alla direzione dell'aria). Davanti all'ala l'aria sale, dietro il bordo d'uscita scende: l'ala la devia verso il basso. Sopra l'ala le linee di flusso si stringono: l'aria è più veloce e la pressione è minore. La risultante delle forze di pressione è la portanza.

ERRORE FREQUENTE

«L'aria che passa sopra l'ala deve fare una strada più lunga di quella che passa sotto, e le due arrivano insieme al bordo d'uscita: quindi sopra va più veloce.» È la spiegazione «dei tempi di transito uguali», ed è **sbagliata**. Nessuna legge obbliga due particelle d'aria a ritrovarsi: gli esperimenti nelle gallerie del vento, con impulsi di fumo, mostrano che l'aria che passa sopra arriva al bordo d'uscita **molto prima** di quella che passa sotto. Se poi la spiegazione fosse giusta, un aereo non potrebbe volare capovolto e un'ala a profilo simmetrico, o una semplice lastra piana inclinata, non avrebbe portanza; invece entrambe le cose succedono, perché ciò che conta è come l'ala devia il flusso, cioè la sua forma e il suo angolo d'attacco. Sopra l'ala l'aria è davvero più veloce e la pressione davvero minore: sbagliata è solo la ragione inventata per spiegarlo.

11.6 I fluidi reali: la viscosità

11.6.1 Il coefficiente di viscosità

Se l'acqua fosse davvero un fluido ideale, in un lungo tubo orizzontale di sezione costante la pressione sarebbe la stessa all'inizio e alla fine, e un fiume continuerebbe a scorrere anche in pianura, senza pendenza. Non succede: per far scorrere un fluido reale in un tubo serve una differenza di pressione, e un fiume scorre solo in discesa. Il motivo è la viscosità (*Fisica 1*, capitolo 12), l'attrito interno fra strati di fluido che scorrono l'uno sull'altro con velocità diverse. Ora la rendiamo quantitativa.

Immagina uno strato di fluido di spessore l (usiamo l perché d indica la densità). Lo strato è compreso fra due lastre parallele di area S (Figura 11.6a): quella inferiore è ferma, quella superiore si muove con velocità costante v. Il fluido aderisce alle lastre: lo strato a contatto con la lastra ferma è fermo, quello a contatto con la lastra mobile si muove con essa, e gli strati intermedi hanno velocità che crescono in modo lineare da 0 a v. Per mantenere la lastra in moto a velocità costante serve una forza, perché ogni strato frena quello che gli scorre sopra. L'esperienza mostra che, per molti fluidi come l'acqua, l'aria e gli oli, questa forza è proporzionale all'area delle lastre e alla velocità, e inversamente proporzionale allo spessore dello strato:

$$F = \eta \frac{Sv}{l}$$

La costante di proporzionalità η (la lettera greca «eta») si chiama **coefficiente di viscosità** del fluido; dalla formula si vede che si misura in $\mathrm{N\cdot s/m^2} = \mathrm{Pa\cdot s}$. Attenzione: nella Parte II la stessa lettera indicava il rendimento; qui è la viscosità, e non useremo mai i due significati nello stesso problema. La Tabella 11.2 riporta alcuni valori: fra l'aria e il miele ci sono sei ordini di grandezza. La viscosità dipende molto dalla temperatura: nei liquidi diminuisce quando la temperatura aumenta, nei gas invece aumenta.

Tabella 11.2 Coefficiente di viscosità di alcuni fluidi (valori indicativi a 20 °C, salvo il sangue, a 37 °C).

Fluido	η (Pa·s)
aria	$1{,}8 \times 10^{-5}$
acqua	$1{,}0 \times 10^{-3}$
sangue (a 37 °C)	circa $3\text{–}4 \times 10^{-3}$
olio d'oliva	circa 8×10^{-2}
glicerina	circa 1,4
miele	da circa 2 a più di 10

In un tubo il fluido aderisce alle pareti, dove è fermo, e scorre più veloce al centro: la velocità ha un profilo a forma di parabola (Figura 11.6b). Per mantenere il flusso, la pressione deve diminuire lungo il tubo: l'energia che il fluido perde si trasforma in energia interna, come quella dissipata dall'attrito radente. Per questo gli acquedotti hanno bisogno di pompe, e il cuore deve lavorare continuamente.

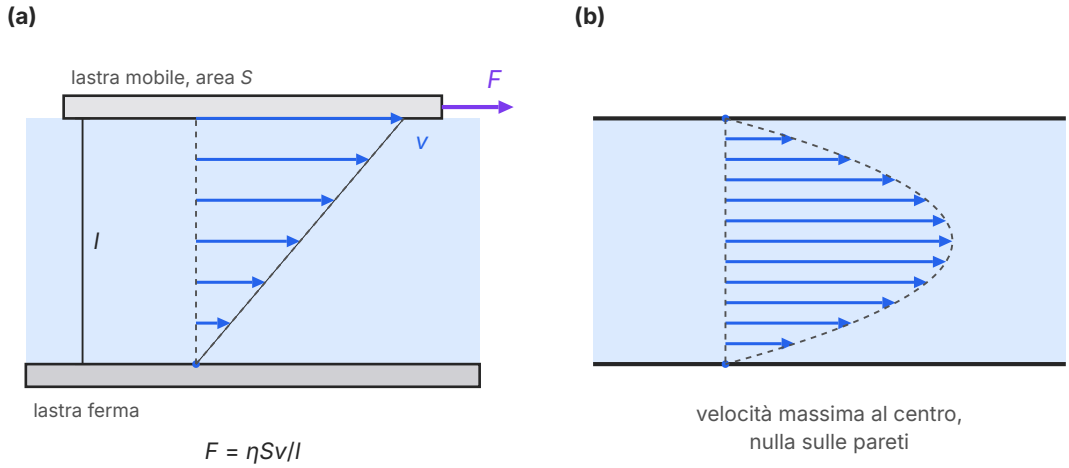

Figura 11.6 (a) Uno strato di fluido viscoso fra una lastra ferma e una lastra che si muove con velocità v: le velocità degli strati crescono in modo lineare, e per mantenere il moto serve la forza $F = \eta Sv/l$, dove l è lo spessore dello strato. (b) In un tubo, in moto laminare, la velocità è nulla sulle pareti e massima al centro: il profilo delle velocità è una parabola.

APPROFONDIMENTO

Il medico che studiava i tubi sottili

Verso il 1840 il medico francese Jean-Léonard-Marie Poiseuille, che voleva capire come il sangue scorre nei vasi più sottili, misurò con cura la portata dell'acqua in tubicini di vetro di diverso diametro e lunghezza; la stessa legge fu trovata indipendentemente, in quegli anni, dall'ingegnere tedesco Gotthilf Hagen. La **legge di Poiseuille** dice che, in moto laminare, la portata di un tubo è proporzionale alla differenza di pressione fra le sue estremità e alla **quarta potenza** del raggio, e inversamente proporzionale alla lunghezza del tubo e alla viscosità del fluido.

La quarta potenza ha conseguenze enormi. Se il raggio di un'arteria si riduce del 20% (per esempio per un deposito sulle pareti), a parità di differenza di pressione la portata si riduce a $0{,}8^4 \approx 0{,}41$ volte: meno della metà. Per mantenere la stessa portata, il cuore deve aumentare la differenza di pressione di circa 2,4 volte. In onore di Poiseuille l'unità di viscosità del vecchio sistema CGS si chiama poise (1 P = 0,1 Pa·s).

11.6.2 La legge di Stokes e la velocità limite

Un corpo che si muove in un fluido viscoso è frenato dalla resistenza del fluido, che hai incontrato nel volume dello scorso anno (*Fisica 2*, capitolo 7) nel modello $F_r = kv^2$, adatto per corpi grandi e veloci come un paracadutista. Per una piccola sfera di raggio r che si muove lentamente in un fluido di viscosità η, invece, il fluido le scorre attorno in moto laminare e la resistenza è proporzionale alla velocità:

$$F = 6\pi\eta r v$$

È la **legge di Stokes**, ricavata a metà Ottocento dal fisico irlandese George Gabriel Stokes. Non la dimostreremo, ma possiamo controllarne le dimensioni: $(\text{Pa}\cdot\text{s})\cdot\text{m}\cdot(\text{m/s}) = (\text{N/m}^2)\cdot\text{m}^2 = \text{N}$; il fattore 6π viene dalla teoria.

Una sferetta di densità d_s lasciata cadere in un liquido di densità d_f minore accelera finché la resistenza, che cresce con la velocità, insieme alla spinta di Archimede non bilancia il peso. Da quel momento la forza risultante è nulla e la sfera scende con velocità costante, la velocità limite. Sulla sfera, di volume $V = (4/3)\pi r^3$, agiscono il peso $d_s V g$ verso il basso, la spinta di Archimede $d_f V g$ verso l'alto e la resistenza $6\pi\eta r v$ verso l'alto. Imponendo che la risultante sia nulla:

$$d_s\cdot(4/3)\pi r^3 g = d_f\cdot(4/3)\pi r^3 g + 6\pi\eta r v_{\text{lim}} \quad\Longrightarrow\quad v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 g(d_s - d_f)}{9\eta}$$

La velocità limite cresce con il quadrato del raggio: una sfera di raggio doppio scende quattro volte più veloce. Le goccioline delle nuvole, con raggi di una decina di micrometri, cadono nell'aria a poco più di un centimetro al secondo, e qualunque debole corrente ascensionale le tiene sospese; le gocce di pioggia, molto più grandi, cadono a metri al secondo (per loro la legge di Stokes non vale più). Misurando la velocità limite di sfere note si ricava la viscosità di un liquido.

ESEMPIO SVOLTO

Misurare la viscosità della glicerina da un grafico

In un cilindro di vetro pieno di glicerina ($d_f = 1260$ kg/m^3) si lasciano cadere sfere d'acciaio ($d_s = 7800$ kg/m^3) di cinque diametri diversi, e si misura con un cronometro (incertezza 0,2 s) il tempo che impiegano a percorrere il tratto di (40,0 ± 0,2) cm fra due segni, scelti abbastanza in basso perché le sfere abbiano già raggiunto la velocità limite. I dati (tipici) sono nella Tabella 11.3. Ricava la viscosità della glicerina.

Tabella 11.3 Tempi di caduta di sfere d'acciaio in glicerina su un tratto di 40,0 cm (dati tipici).

diametro (mm)	r^2 (mm^2)	t (s)	v_{lim} (cm/s)
2,0	1,00	39,1	1,02 ± 0,01
3,0	2,25	17,5	2,29 ± 0,04
4,0	4,00	9,8	4,08 ± 0,10
5,0	6,25	6,3	6,35 ± 0,23
6,0	9,00	4,4	9,09 ± 0,46

Dalla teoria al grafico. La formula della velocità limite dice che v_{lim} è direttamente proporzionale a r^2, con costante di proporzionalità $k = 2g(d_s - d_f)/(9\eta)$. Se la legge di Stokes vale, il grafico di v_{lim} in funzione di r^2 è una retta per l'origine (Figura 11.7): i punti lo confermano, entro le barre d'errore.

La pendenza. La retta per l'origine che meglio si accorda con i punti ha pendenza $k \approx 1{,}01$ (cm/s)/mm^2, cioè, in unità SI, $1{,}01 \times 10^{-2}$ m/s ÷ 10^{-6} m^2 = $1{,}01 \times 10^4$ m^{-1}·s^{-1}. Le rette di massima e minima pendenza, tracciate attraverso gli estremi della barra d'errore dell'ultimo punto, hanno pendenze 1,06 e 0,96 (cm/s)/mm^2.

La viscosità. $\eta = 2g(d_s - d_f)/(9k) = 2 \times 9{,}8$ m/s^2 × 6540 kg/m^3 ÷ $(9 \times 1{,}01 \times 10^4$ m^{-1}·s$^{-1})$ ≈ 1,41 Pa·s. Con le pendenze estreme si ottengono 1,34 Pa·s e 1,48 Pa·s: η = (1,41 ± 0,07) Pa·s, compatibile con il valore della Tabella 11.2.

Il modello regge? La legge di Stokes vale solo se il moto attorno alla sfera è laminare. Lo verificheremo fra poco con il numero di Reynolds: per la sfera più grande vale circa 0,5, abbastanza piccolo. Le pareti del cilindro frenano un poco le sfere grandi: il cilindro deve essere molto più largo delle sfere.

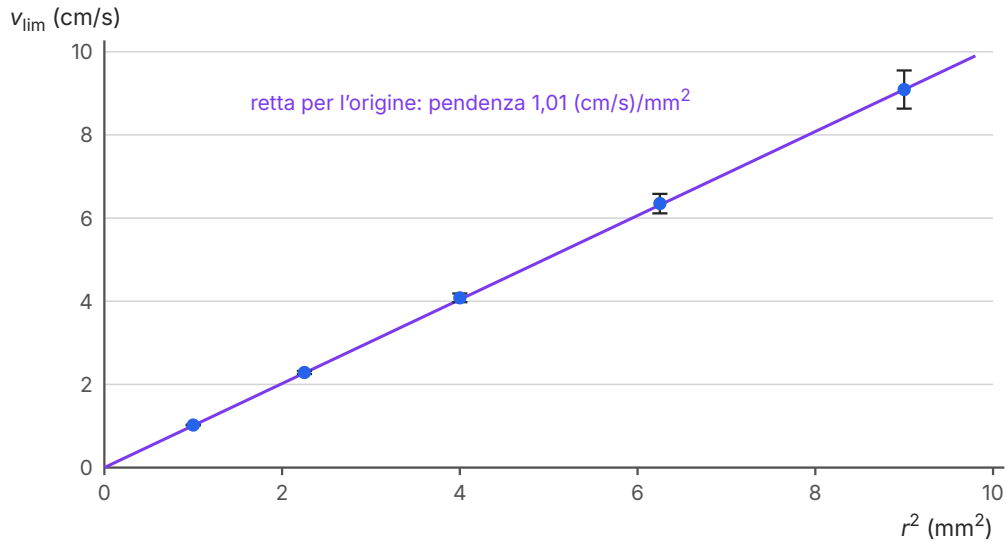

Figura 11.7 Velocità limite di sfere d'acciaio in glicerina in funzione del quadrato del raggio (dati della Tabella 11.3, con le barre d'errore). I punti stanno su una retta per l'origine, come prevede la legge di Stokes; dalla pendenza si ricava la viscosità.

11.6.3 Il numero di Reynolds

Quando un flusso laminare diventa turbolento? Alla fine dell'Ottocento l'ingegnere britannico Osborne Reynolds iniettò un filo d'inchiostro nell'acqua che scorreva in un tubo di vetro: a bassa velocità il filo restava dritto, oltre una certa velocità si spezzava in vortici. Reynolds trovò che il passaggio non dipende dalla sola velocità, ma da una combinazione di grandezze, oggi chiamata **numero di Reynolds**:

$$\mathrm{Re} = \frac{dvL}{\eta}$$

dove d e η sono la densità e la viscosità del fluido, v la sua velocità e L una lunghezza caratteristica (il diametro del tubo, o quello di un corpo immerso). Re è un **numero puro**. Misura il rapporto fra l'effetto dell'inerzia del fluido, che tende a formare vortici, e quello della viscosità, che li smorza. Per un liquido in un tubo il moto è laminare se Re è minore di circa 2000 e diventa turbolento per valori maggiori, passando per una zona di transizione. L'acqua di un tubo domestico di 2 cm che scorre a 1 m/s ha $\mathrm{Re} = 1000\ \mathrm{kg/m^3} \times 1\ \mathrm{m/s} \times 0{,}02\ \mathrm{m} \div 10^{-3}\ \mathrm{Pa{\cdot}s} = 2 \times 10^4$: il moto è turbolento. Le sfere della Tabella 11.3, invece, hanno Re minore di 1, e la legge di Stokes vale.

Per un batterio, con Re dell'ordine di 10^{-4} o meno, nuotare nell'acqua è come per noi nuotare nel miele: appena smette di spingere si ferma all'istante, perché non esiste un'inerzia che lo porti avanti.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$q = \Delta V/\Delta t = Sv$ — portata (m^3/s; 1 L/min ≈ $1{,}67 \times 10^{-5}$ m^3/s): volume che attraversa una sezione nell'unità di tempo; v è la velocità media sulla sezione.

$S_1v_1 = S_2v_2$ — equazione di continuità: per un fluido incomprimibile in moto stazionario la portata è la stessa in ogni sezione e la velocità è inversamente proporzionale alla sezione. Esprime la conservazione della massa.

$p + \frac{1}{2}dv^2 + dgh$ = costante — equazione di Bernoulli (ogni termine in Pa = J/m^3): vale lungo una linea di flusso, per un fluido ideale in moto stazionario. Esprime la conservazione dell'energia meccanica; per $v = 0$ dà la legge di Stevino.

$v = \sqrt{(2gh)}$ — teorema di Torricelli: velocità di uscita da un piccolo foro a profondità h sotto la superficie libera di un recipiente largo. Con il foro a quota H e getto orizzontale la gittata è $2\sqrt{(hH)}$.

$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}d(v_2^2 - v_1^2)$ — effetto Venturi in un tubo orizzontale: dove il fluido è più veloce la pressione è minore.

$F = \eta Sv/l$ — forza viscosa fra strati di fluido; η coefficiente di viscosità (Pa·s).

$F = 6\pi\eta rv$, $v_{lim} = 2r^2g(d_s - d_f)/(9\eta)$ — legge di Stokes e velocità limite di una piccola sfera in un liquido; valgono solo in moto laminare (Re piccolo).

$Re = dvL/\eta$ — numero di Reynolds, un numero puro: in un tubo il moto è laminare per Re minore di circa 2000.

SINTESI

- Un fluido è in **moto stazionario** se la velocità in ogni punto non cambia nel tempo; le **linee di flusso**, tangenti alla velocità, non si incrociano, e un fascio di linee forma un **tubo di flusso**.
- Il moto è **laminare** quando il fluido scorre a strati che non si mescolano, **turbolento** quando la velocità cambia in modo disordinato e si formano vortici.
- La **portata** $q = \Delta V/\Delta t = Sv$ è il volume che attraversa una sezione nell'unità di tempo (m^3/s).
- **Equazione di continuità**: in un fluido incomprimibile in moto stazionario $S_1 v_1 = S_2 v_2$; la velocità è inversamente proporzionale alla sezione (totale, se i condotti sono in parallelo).
- **Equazione di Bernoulli**: $p + \frac{1}{2}dv^2 + dgh$ è costante lungo una linea di flusso di un fluido ideale in moto stazionario; si ricava dal teorema dell'energia cinetica ed esprime la conservazione dell'energia per unità di volume.
- Per un fluido fermo l'equazione di Bernoulli si riduce alla legge di Stevino; in un tubo orizzontale, dove la velocità è maggiore la pressione è minore.
- **Teorema di Torricelli**: da un piccolo foro a profondità h sotto la superficie libera di un recipiente largo il liquido esce con velocità $\sqrt{(2gh)}$, indipendente dalla densità.
- **Effetto Venturi**: nella strozzatura di un tubo il fluido accelera e la pressione diminuisce; il venturimetro ricava la portata da una differenza di pressione.
- La **portanza** di un'ala nasce perché l'ala devia l'aria verso il basso; sopra l'ala l'aria è più veloce e la pressione è minore. La spiegazione dei «tempi di transito uguali» è sbagliata.
- Nei fluidi reali la **viscosità** dissipa energia: fra due lastre $F = \eta Sv/l$, con η in Pa·s; in un tubo la portata cresce con la quarta potenza del raggio (Poiseuille).
- **Legge di Stokes**: $F = 6\pi\eta r v$ per una piccola sfera lenta; la velocità limite in un liquido è $2r^2 g(d_s - d_f)/(9\eta)$ e cresce con r^2.
- Il **numero di Reynolds** $\mathrm{Re} = dvL/\eta$ distingue il moto laminare (Re piccolo; in un tubo, sotto circa 2000) da quello turbolento.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un fluido è in moto stazionario quando:
   - **A.** la sua velocità è la stessa in tutti i punti
   - **B.** la velocità in ogni punto non cambia nel tempo
   - **C.** il fluido è fermo rispetto al recipiente
   - **D.** le linee di flusso sono rette parallele

2. ● In un tubo percorso da un liquido in moto stazionario il diametro si dimezza. Nel tratto stretto la velocità del liquido:

   A. raddoppia
   B. si dimezza
   C. quadruplica
   D. resta la stessa, perché la portata è costante

3. ● Nel Sistema Internazionale la portata si misura in:

   A. m^3/s
   B. kg/s
   C. m/s
   D. Pa·s

4. ●● Nell'equazione di Bernoulli il termine $\frac{1}{2}dv^2$:

   A. è la forza con cui il fluido spinge sulle pareti
   B. è l'energia cinetica del fluido, in joule
   C. si misura in m^2/s^2
   D. è un'energia per unità di volume e si misura in $J/m^3 = Pa$

5. ● Un recipiente largo ha due piccoli fori, a 20 cm e a 80 cm sotto la superficie libera. La velocità di uscita dal foro più profondo, rispetto a quella dal foro meno profondo, è:

   A. doppia
   B. quadrupla
   C. uguale
   D. la metà

6. ●● Il coefficiente di viscosità si misura in:

   A. N/m^2
   B. J/s
   C. Pa·s
   D. kg/m^3

7. ●● Due sfere dello stesso materiale cadono in glicerina e raggiungono la velocità limite; il raggio della seconda è doppio di quello della prima. Se vale la legge di Stokes, la velocità limite della seconda è:

   A. uguale a quella della prima
   B. doppia
   C. la metà
   D. quadrupla

8. ●● Quale affermazione descrive correttamente l'origine della portanza di un'ala?
   - **A.** L'aria che passa sopra l'ala fa più strada e deve arrivare al bordo d'uscita insieme a quella che passa sotto
   - **B.** L'ala devia verso il basso l'aria che la investe; sopra l'ala l'aria è più veloce e la pressione è minore
   - **C.** La portanza è la spinta di Archimede dell'aria spostata dall'ala
   - **D.** La portanza è dovuta all'attrito dell'aria sulla faccia inferiore dell'ala

Vero o falso

9. ● In un fluido in moto stazionario due linee di flusso non possono incrociarsi. V / F

10. ● Il sangue scorre più veloce nei capillari che nell'aorta, perché ogni capillare è molto più stretto dell'aorta. V / F

11. ●● In un tubo orizzontale percorso da un fluido ideale in moto stazionario, la pressione è minore dove il tubo è più stretto. V / F

12. ● Dallo stesso foro, a parità di profondità sotto la superficie libera, il mercurio esce più lentamente dell'acqua, perché è più denso. V / F

13. ●● La legge di Stokes permette di calcolare la resistenza dell'aria su una pallina da tennis lanciata a 100 km/h. V / F

Applicare

14. ● Un rubinetto eroga 12 L/min. Esprimi la portata in m^3/s e calcola quanto tempo serve per riempire un secchio da 10 L.

15. ● In un tubo di diametro interno 2,0 cm l'acqua scorre con velocità media 1,5 m/s. Calcola la portata in m^3/s e in L/min.

16. ●● Il cilindro di una siringa ha sezione interna 1,5 cm^2 e lo stantuffo viene spinto a 0,20 cm/s. L'ago ha un diametro interno di 0,40 mm. Calcola la portata e la velocità con cui il liquido esce dall'ago.

17. ●● Usa i dati riportati nella Figura 11.2 (velocità e pressione in A, sezioni, dislivello). a) Verifica con l'equazione di continuità e con l'equazione di Bernoulli i valori indicati per B. b) Calcola in A e in B la somma $p/(dg) + v^2/(2g) + h$, con le pressioni relative a quella atmosferica e le quote misurate dall'asse di A, e confronta i due risultati.

18. ● Un grande serbatoio aperto è pieno d'acqua; un piccolo foro si trova 1,8 m sotto la superficie libera. Con quale velocità esce l'acqua?

19. ●● Completa. Nella strozzatura di un tubo di Venturi orizzontale la velocità del fluido _____ e la sua pressione _____ . Se l'acqua passa dalla velocità di 1,0 m/s nel tratto largo a 3,0 m/s nella strozzatura, la differenza di pressione fra il tratto largo e la strozzatura è _____ Pa.

20. ● Una lastra di area 0,20 m^2 scivola a 0,30 m/s su un velo di olio d'oliva (η = 0,080 Pa·s) spesso 0,50 mm, che la separa da un piano fermo. Quale forza serve per mantenerla in moto a velocità costante?

21. ●● Una gocciolina di nebbia è una sfera d'acqua di raggio 10 μm. Calcola la sua velocità limite nell'aria ferma ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa·s, densità dell'aria 1,20 kg/m^3), controlla che il numero di Reynolds sia piccolo e calcola quanto tempo impiegherebbe a scendere di 100 m.

Problemi

22. ●● Un tubo da giardino ha diametro interno 1,6 cm e porta 18 L/min. All'estremità è montata una lancia con un foro di diametro 0,50 cm. a) Calcola la velocità dell'acqua nel tubo e all'uscita della lancia. b) La lancia è tenuta orizzontale a 1,0 m dal suolo: a che distanza arriva il getto? Trascura la resistenza dell'aria.

23. ●● Una condotta orizzontale dell'acquedotto passa da un diametro interno di 10 cm a uno di 5,0 cm. Nel tratto largo l'acqua scorre a 0,90 m/s con pressione assoluta $2{,}40 \times 10^5$ Pa. a) Calcola la portata in L/min. b) Calcola la velocità e la pressione nel tratto stretto, trattando l'acqua come un fluido ideale.

24. ●●● Un venturimetro per acqua ha diametro 6,0 cm nel tratto largo e 3,0 cm nella strozzatura. Invece dei piezometri, le due prese di pressione sono collegate a un manometro a U contenente mercurio (d = 13 546 kg/m^3), con acqua sopra il mercurio in entrambi i rami: il dislivello del mercurio è 2,5 cm. In questa situazione la differenza di pressione fra le due prese vale $(d_{Hg} - d_{acqua})g\Delta h$. a) Calcola la differenza di pressione. b) Calcola le velocità nel tratto largo e nella strozzatura. c) Calcola la portata in L/min.

25. ●●● Un serbatoio cilindrico di diametro 60 cm contiene acqua; sulla parete c'è un foro di diametro 1,0 cm a 0,80 m dal suolo, e la superficie libera è 1,25 m sopra il foro. a) Calcola la velocità di uscita e la gittata del getto, che esce orizzontale. b) Calcola la portata iniziale in L/min. c) Con quale velocità scende la superficie libera? Giustifica l'approssimazione fatta in a). d) A che altezza dal suolo bisognerebbe praticare un secondo foro perché il suo getto arrivi nello stesso punto?

26. ●●● Una pompa solleva l'acqua di un pozzo, dalla superficie dell'acqua nel pozzo a un serbatoio aperto 25 m più in alto, con una portata di 30 L/min; l'acqua esce nel serbatoio con velocità 3,0 m/s. Sia nel pozzo sia all'uscita la pressione è quella atmosferica. a) Quanta energia riceve dalla pompa ogni metro cubo d'acqua? b) Calcola la potenza utile della pompa. c) Il rendimento della pompa è 0,60: quale potenza elettrica assorbe? (Collega con il capitolo 5.)

27. ●●● Una lancia antincendio di diametro 2,5 cm lancia un getto d'acqua orizzontale a 20 m/s contro un muro. L'acqua colpisce il muro perpendicolarmente e scivola via lungo il muro, perdendo tutta la velocità perpendicolare al muro. Trascura la gravità e l'aria nel breve tratto fra lancia e muro. a) Calcola la portata in L/min. b) Quanta massa d'acqua colpisce il muro ogni secondo? c) Con il teorema dell'impulso (capitolo 6) calcola la forza media che il getto esercita sul muro.

28. ●● Durante una burrasca il vento soffia a 90 km/h sopra il tetto piano di un capannone di 8,0 m × 12 m; l'aria dentro il capannone è ferma. Stima, con l'equazione di Bernoulli, la differenza di pressione fra le due facce del tetto e la forza verso l'alto (densità dell'aria 1,20 kg/m^3). A quale massa corrisponde un peso uguale a questa forza?

29. ●● Una perlina di vetro (d = 2500 kg/m^3) di raggio 0,50 mm cade in glicerina (d = 1260 kg/m^3, η = 1,4 Pa·s). a) Calcola la velocità limite. b) Quanto tempo impiega a scendere di 10 cm a velocità limite? c) Controlla con il numero di Reynolds che la legge di Stokes sia applicabile.

Ragionare e argomentare

30. ●● Spiega perché il getto d'acqua che scende da un rubinetto si assottiglia. Che cosa succederebbe se il getto fosse rivolto verso l'alto, come in una fontanella?

31. ●●● Un tubo da giardino orizzontale, lungo 20 m e di sezione costante, porta acqua in moto stazionario. Uno studente scrive: «Per l'equazione di continuità la velocità è la stessa in tutto il tubo, e il tubo è orizzontale: quindi, per l'equazione di Bernoulli, la pressione all'inizio e alla fine del tubo è la stessa». Due manometri mostrano invece che la pressione all'inizio è maggiore. Dov'è l'errore? Che cosa dice l'esperimento sul modello del fluido ideale?

32. ●●● Stima di Fermi. Stima il numero di Reynolds per una persona che nuota (velocità, dimensione tipica...) e per un batterio lungo pochi micrometri che nuota a qualche decina di micrometri al secondo. Che cosa ti dicono i due risultati sul modo in cui l'acqua «appare» ai due nuotatori?

33. ●●● Progetta un esperimento per misurare la viscosità del miele con il metodo delle sfere che cadono. Indica il materiale, le grandezze da misurare e con quali strumenti, come verificare che le sfere abbiano raggiunto la velocità limite e che la legge di Stokes sia applicabile, e le principali fonti di errore.

PER APPROFONDIRE

- [BER] D. Bernoulli, *Hydrodynamica* (1738): il libro che diede il nome all'idrodinamica, con le misure della pressione nei tubi e, in un capitolo, il primo modello cinetico di un gas.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*: i capitoli sul flusso dell'«acqua asciutta» (il fluido ideale) e dell'«acqua bagnata» (il fluido viscoso), con una discussione chiara dei limiti del modello ideale.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sui fluidi, con molti esercizi su continuità, Bernoulli e applicazioni.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sui fluidi, con spiegazioni senza formule dell'effetto Venturi, del volo e del vento sui tetti.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: le rette di massima e minima pendenza e il confronto fra un valore misurato e uno previsto, usati nel laboratorio e nell'esempio sulla glicerina.

Glossario del capitolo

Coefficiente di viscosità
Costante η che misura l'attrito interno di un fluido: fra due lastre di area S a distanza l, in moto relativo con velocità v, la forza è $\eta Sv/l$. Si misura in Pa·s.

Effetto Venturi
Diminuzione della pressione di un fluido nella strozzatura di un tubo, dove la sua velocità aumenta.

Equazione di Bernoulli
$p + \frac{1}{2}dv^2 + dgh$ = costante lungo una linea di flusso di un fluido ideale in moto stazionario; esprime la conservazione dell'energia.

Equazione di continuità
$S_1v_1 = S_2v_2$: in un fluido incomprimibile in moto stazionario la portata è la stessa in ogni sezione di un tubo.

Legge di Poiseuille
In moto laminare la portata di un tubo è proporzionale alla differenza di pressione e alla quarta potenza del raggio, inversamente proporzionale alla lunghezza e alla viscosità.

Legge di Stokes
Forza di resistenza su una piccola sfera di raggio r che si muove lentamente in un fluido viscoso: $F = 6\pi\eta rv$.

Linea di flusso
Percorso seguito dalle particelle di un fluido in moto stazionario; in ogni punto è tangente alla velocità del fluido. Due linee di flusso non si incrociano.

Moto laminare
Moto di un fluido che scorre a strati paralleli, senza mescolarsi e senza vortici.

Moto stazionario
Moto di un fluido in cui la velocità in ogni punto non cambia nel tempo (può cambiare da un punto all'altro).

Moto turbolento
Moto di un fluido in cui la velocità cambia in modo irregolare da un punto all'altro e da un istante all'altro, con vortici di ogni dimensione.

Numero di Reynolds
Numero puro $\mathrm{Re} = dvL/\eta$ che confronta inerzia e viscosità di un flusso: per valori piccoli il moto è laminare, per valori grandi turbolento.

Portanza
Componente perpendicolare alla direzione del moto della forza che un fluido esercita su un'ala (o su un altro corpo) in movimento.

Portata
Volume di fluido che attraversa una sezione nell'unità di tempo: $q = \Delta V/\Delta t = Sv$; si misura in $\mathrm{m^3/s}$.

Pressione dinamica
Il termine $\frac{1}{2}dv^2$ dell'equazione di Bernoulli: l'energia cinetica del fluido per unità di volume, che si misura in pascal.

Teorema di Torricelli
Un liquido esce da un piccolo foro, a profondità h sotto la superficie libera di un recipiente largo, con velocità $\sqrt{(2gh)}$.

Tubo di flusso
Fascio di linee di flusso che passano per il contorno di una piccola superficie; il fluido non ne attraversa le pareti.

Venturimetro
Strumento che misura la portata di un fluido dalla differenza di pressione fra il tratto largo di un tubo e una strozzatura.

Soluzioni

1. B. Moto stazionario significa che il campo delle velocità non cambia nel tempo; da un punto all'altro la velocità può essere diversa (per esempio in un tubo che si restringe).

2. C. La sezione è proporzionale al quadrato del diametro: diventa un quarto. Per l'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$, la velocità diventa 4 volte maggiore.

3. A. $q = \Delta V/\Delta t$: un volume diviso per un tempo.

4. D. $\frac{1}{2} d v^2$ è l'energia cinetica per unità di volume: $(\mathrm{kg/m^3})(\mathrm{m/s})^2 = \mathrm{J/m^3} = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$ (pressione dinamica).

5. A. $v = \sqrt{(2gh)}$: con h quadruplicata la velocità raddoppia ($\sqrt{4} = 2$).

6. C. Da $F = \eta S v / l$: $\eta = Fl/(Sv)$ si misura in $\mathrm{N \cdot m/(m^2 \cdot m/s)} = \mathrm{N \cdot s/m^2} = \mathrm{Pa \cdot s}$.

7. D. $v_{\mathrm{lim}} = 2r^2 g(d_s - d_f)/(9\eta)$ è proporzionale a r^2: raddoppiando il raggio la velocità limite quadruplica.

8. B. La spiegazione dei tempi di transito uguali (A) è sbagliata; la spinta di Archimede dell'aria (C) è trascurabile e l'attrito (D) frena l'ala, non la sostiene.

9. V. In ogni punto la velocità del fluido è tangente alla linea di flusso: in un punto di incrocio il fluido dovrebbe avere due velocità diverse nello stesso istante.

10. F. Conta la sezione totale dei vasi in parallelo: la somma delle sezioni dei capillari è circa mille volte quella dell'aorta, quindi il sangue nei capillari è molto più lento (qualche decimo di mm/s contro alcune decine di cm/s).

11. V. Con h costante, $p + \frac{1}{2} d v^2 =$ costante; nel tratto stretto, per la continuità, v è maggiore, quindi p è minore.

12. F. Per il teorema di Torricelli $v = \sqrt{(2gh)}$ non dipende dalla densità: il mercurio è più pesante, ma è anche più difficile da accelerare, e i due effetti si compensano come nella caduta libera.

13. F. La legge di Stokes vale per piccole sfere a bassa velocità, in moto laminare ($\mathrm{Re} \ll 1$). Per una pallina da tennis a 28 m/s nell'aria $\mathrm{Re} = 1{,}2 \times 28 \times 0{,}065/(1{,}8 \times 10^{-5}) \approx 10^5$: il moto è turbolento e la resistenza è descritta meglio dal modello kv^2 (*Fisica 2*, capitolo 7).

14. $q = 12 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}/60\ \mathrm{s} = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$. Tempo: $\Delta t = \Delta V/q = 10\ \mathrm{L} \div 12\ \mathrm{L/min} \approx 0{,}83\ \mathrm{min} = 50\ \mathrm{s}$.

15. $S = \pi(1{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = 3{,}14 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$; $q = Sv = 3{,}14 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2} \times 1{,}5\ \mathrm{m/s} \approx 4{,}7 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$; in L/min: $4{,}7 \times 10^{-4} \times 60 \times 10^3 \approx 28\ \mathrm{L/min}$.

16. $q = S_1 v_1 = 1{,}5\ \mathrm{cm^2} \times 0{,}20\ \mathrm{cm/s} = 0{,}30\ \mathrm{cm^3/s} = 3{,}0 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^3/s}$. Sezione dell'ago: $\pi(0{,}20\ \mathrm{mm})^2 \approx 0{,}126\ \mathrm{mm^2} = 1{,}26 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm^2}$. $v_2 = q/S_2 = 0{,}30\ \mathrm{cm^3/s} \div 1{,}26 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm^2} \approx 2{,}4 \times 10^2\ \mathrm{cm/s} = 2{,}4\ \mathrm{m/s}$.

17. a) Continuità: $v_B = v_A S_A/S_B = 0{,}50\ \mathrm{m/s} \times 20/5 = 2{,}0\ \mathrm{m/s}$. Bernoulli, con le quote dall'asse di A: $p_B = p_A + \frac{1}{2} d(v_A^2 - v_B^2) - dgh_B = 8000\ \mathrm{Pa} + \frac{1}{2} \times 1000\ \mathrm{kg/m^3} \times (0{,}25 - 4{,}0)\ \mathrm{m^2/s^2} - 1000\ \mathrm{kg/m^3} \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \times 0{,}10\ \mathrm{m} = 8000\ \mathrm{Pa} - 1875\ \mathrm{Pa} - 980\ \mathrm{Pa} = 5145\ \mathrm{Pa}$; colonna $p/(dg) = 5145\ \mathrm{Pa} \div 9800\ \mathrm{N/m^3} = 0{,}525\ \mathrm{m}$. b) A: $0{,}816\ \mathrm{m} + (0{,}50\ \mathrm{m/s})^2/(19{,}6\ \mathrm{m/s^2}) + 0 = 0{,}816\ \mathrm{m} + 0{,}013\ \mathrm{m} = 0{,}829\ \mathrm{m}$. B: $0{,}525\ \mathrm{m} + (2{,}0\ \mathrm{m/s})^2/(19{,}6\ \mathrm{m/s^2}) + 0{,}100\ \mathrm{m} = 0{,}525\ \mathrm{m} + 0{,}204\ \mathrm{m} + 0{,}100\ \mathrm{m} = 0{,}829\ \mathrm{m}$. Le due somme coincidono: è l'equazione di Bernoulli divisa per dg.

18. $v = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \times 1{,}8\ \mathrm{m})} \approx 5{,}9\ \mathrm{m/s}$.

19. aumenta; diminuisce; $\Delta p = \frac{1}{2} d(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 1{,}00 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times (9{,}0 - 1{,}0)\ \mathrm{m^2/s^2} = 4{,}0 \times 10^3\ \mathrm{Pa}$.

20. $F = \eta S v/l = 0{,}080\ \mathrm{Pa \cdot s} \times 0{,}20\ \mathrm{m^2} \times 0{,}30\ \mathrm{m/s} \div 5{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m} \approx 9{,}6\ \mathrm{N}$.

21. Sulla goccia agiscono il peso, la spinta di Archimede dell'aria e la resistenza viscosa; a velocità limite la risultante è nulla. $v_{\mathrm{lim}} = 2r^2 g(d_s - d_f)/(9\eta) = 2 \times (1{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m})^2 \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \times (1000 - 1{,}2)\ \mathrm{kg/m^3} \div (9 \times$

$1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa·s) ≈ $1{,}2 \times 10^{-2}$ m/s = 1,2 cm/s. Re = dvL/η con $L = 2r$: $1{,}20 \times 1{,}2 \times 10^{-2} \times 2{,}0 \times 10^{-5}/(1{,}8 \times 10^{-5}) \approx 0{,}016 \ll 1$: Stokes vale. Tempo: 100 m ÷ $1{,}21 \times 10^{-2}$ m/s ≈ $8{,}3 \times 10^{3}$ s, più di due ore: per questo la nebbia resta sospesa.

22. a) q = 18 L/min = $3{,}0 \times 10^{-4}$ m^3/s. Nel tubo $S_1 = \pi(0{,}80 \times 10^{-2}\ m)^2 \approx 2{,}01 \times 10^{-4}\ m^2$, $v_1 = q/S_1 \approx 1{,}5$ m/s. Nella lancia $S_2 = \pi(0{,}25 \times 10^{-2}\ m)^2 \approx 1{,}96 \times 10^{-5}\ m^2$, $v_2 \approx 15$ m/s (equazione di continuità: $v_2 = v_1(1{,}6/0{,}50)^2$). b) Ogni goccia è un proiettile lanciato orizzontalmente: tempo di caduta $t = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 1{,}0\ m \div 9{,}8\ m/s^2)} \approx 0{,}45$ s; gittata $x = v_2 t \approx 15{,}3$ m/s × 0,452 s ≈ 6,9 m.

23. a) $q = \pi(0{,}050\ m)^2 \times 0{,}90$ m/s ≈ $7{,}1 \times 10^{-3}$ m^3/s ≈ $4{,}2 \times 10^{2}$ L/min. b) Il diametro si dimezza: $v_2 = 4v_1 = 3{,}6$ m/s. Bernoulli con $h_1 = h_2$: $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2) = 2{,}40 \times 10^5$ Pa + ½ × 1,00 × 10^3 kg/m^3 × (0,81 − 12,96) $m^2/s^2 = 2{,}40 \times 10^5$ Pa − $6{,}1 \times 10^3$ Pa ≈ $2{,}34 \times 10^5$ Pa.

24. a) Per la legge di Stevino applicata ai due rami del manometro: Δp = (13 546 − 1000) kg/m^3 × 9,8 m/s^2 × 0,025 m ≈ $3{,}07 \times 10^3$ Pa. b) Principi: conservazione della massa (continuità) e dell'energia (Bernoulli, tubo orizzontale, acqua trattata come fluido ideale). $S_1/S_2 = (6{,}0/3{,}0)^2 = 4$, quindi $v_2 = 4v_1$. Bernoulli: $\Delta p = \frac{1}{2}d(16 - 1)v_1^2 \Longrightarrow v_1 = \sqrt{(2 \times 3{,}07 \times 10^3\ Pa \div (15 \times 1000\ kg/m^3))} \approx 0{,}64$ m/s; $v_2 \approx 2{,}6$ m/s. c) $q = \pi(0{,}030\ m)^2 \times 0{,}640$ m/s ≈ $1{,}81 \times 10^{-3}$ m^3/s ≈ $1{,}1 \times 10^2$ L/min (circa 109 L/min).

25. a) Principio: conservazione dell'energia lungo una linea di flusso dalla superficie libera al getto (Bernoulli), pressione atmosferica in entrambi i punti, superficie quasi ferma (verificato in c). $v = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times 1{,}25\ m)} \approx 4{,}9$ m/s. Poi moto del proiettile: $x = 2\sqrt{(hH)} = 2\sqrt{(1{,}25\ m \times 0{,}80\ m)} = 2{,}0$ m. b) $q = \pi(0{,}50 \times 10^{-2}\ m)^2 \times 4{,}95$ m/s ≈ $3{,}9 \times 10^{-4}$ m^3/s ≈ 23 L/min. c) Continuità: $v_{sup} = v(S_{foro}/S_{serb}) = 4{,}95$ m/s × $(1{,}0/60)^2 \approx 1{,}4 \times 10^{-3}$ m/s = 1,4 mm/s. Il suo contributo all'energia, $\frac{1}{2}dv_{sup}^2$, è più di dieci milioni di volte minore di quello del getto: trascurarlo non cambia il risultato. d) La gittata $2\sqrt{(hH)}$ resta la stessa scambiando h e H (altezza totale 2,05 m): un foro 0,80 m sotto la superficie, cioè 1,25 m dal suolo, dà ancora $x = 2\sqrt{(0{,}80\ m \times 1{,}25\ m)} = 2{,}0$ m.

26. a) Principio: la pompa fornisce all'acqua l'energia che serve per aumentarne l'energia potenziale e cinetica; la pressione è la stessa all'inizio e alla fine, quindi (equazione di Bernoulli con il termine della pompa) l'energia per unità di volume è $dgh + \frac{1}{2}dv^2 = 1000 \times 9{,}8 \times 25\ J/m^3 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 3{,}0^2\ J/m^3 = 2{,}45 \times 10^5$ $J/m^3 + 4{,}5 \times 10^3$ $J/m^3 \approx 2{,}50 \times 10^5$ J/m^3. b) In un secondo la pompa solleva q = 30 L/min = $5{,}0 \times 10^{-4}$ m^3/s: $P_{utile} = q \times 2{,}50 \times 10^5$ $J/m^3 \approx 1{,}2 \times 10^2$ W (125 W). c) $P_{ass} = P_{utile}/\eta = 125\ W \div 0{,}60 \approx 2{,}1 \times 10^2$ W (qui η è il rendimento della pompa, come nel capitolo 5). Nella realtà serve un po' di più, perché l'acqua perde energia anche per l'attrito nei tubi.

27. a) $S = \pi(1{,}25 \times 10^{-2}\ m)^2 \approx 4{,}91 \times 10^{-4}\ m^2$; $q = Sv \approx 9{,}8 \times 10^{-3}$ m^3/s ≈ $5{,}9 \times 10^2$ L/min. b) $\Delta m/\Delta t = dq \approx 9{,}8$ kg/s. c) Principio: teorema dell'impulso applicato all'acqua che arriva sul muro in un intervallo Δt. In Δt arriva la massa $\Delta m = 9{,}8$ kg/s × Δt, la cui quantità di moto perpendicolare al muro passa da Δmv a zero. La forza media del muro sull'acqua è $\Delta p/\Delta t = (\Delta m/\Delta t)v = 9{,}8$ kg/s × 20 m/s ≈ $2{,}0 \times 10^2$ N, opposta al getto; per il terzo principio l'acqua spinge il muro con $2{,}0 \times 10^2$ N. Una forza simile, in verso opposto, deve sostenere chi impugna la lancia.

28. v = 90 km/h = 25 m/s. $\Delta p \approx \frac{1}{2}dv^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}20$ kg/m^3 × (25 m/s)^2 = 375 Pa (sopra il tetto l'aria è veloce e la pressione è minore, dentro l'aria è ferma). $F = \Delta pS =$ 375 Pa × 96 $m^2 = 3{,}6 \times 10^4$ N, pari al peso di una massa di $3{,}6 \times 10^4$ N ÷ 9,8 m/s^2 ≈ $3{,}7 \times 10^3$ kg. È una stima: la differenza vera dipende dalla forma del tetto.

29. a) Sulla perlina agiscono il peso (in basso), la spinta di Archimede e la resistenza viscosa (in alto); a velocità limite la risultante è nulla. $v_{lim} = 2 \times (5{,}0 \times 10^{-4}\ m)^2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times (2500 - 1260)\ kg/m^3 \div (9 \times 1{,}4$ Pa·s) ≈ $4{,}8 \times 10^{-4}$ m/s ≈ 0,48 mm/s. b) t = 0,10 m ÷ $4{,}82 \times 10^{-4}$ m/s ≈ $2{,}1 \times 10^2$ s (circa 3 minuti e mezzo). c) Re = $1260 \times 4{,}8 \times 10^{-4} \times 1{,}0 \times 10^{-3}/1{,}4 \approx 4 \times 10^{-4} \ll 1$: moto laminare, la legge di Stokes vale.

30. Traccia. Cadendo, l'acqua accelera per effetto del peso (la sua velocità cresce come in caduta libera). La portata è la stessa a ogni quota (il getto è un tubo di flusso, l'acqua è incomprimibile), quindi dove la velocità è maggiore la sezione è minore: il

getto si assottiglia. In un getto rivolto verso l'alto l'acqua rallenta salendo, quindi il getto si allarga, fino ad aprirsi in cima, dove la velocità si annulla.

31. Traccia. La continuità è corretta: la sezione è costante, quindi la velocità media è la stessa in tutto il tubo. L'errore è applicare l'equazione di Bernoulli a un fluido reale: l'equazione vale per un fluido ideale, senza viscosità. L'acqua reale è viscosa: gli strati scorrono gli uni sugli altri e sulle pareti, e parte dell'energia meccanica si trasforma in energia interna. Poiché l'energia cinetica e quella potenziale non cambiano, la perdita si vede tutta nella pressione, che diminuisce lungo il tubo. L'esperimento mostra un limite del modello: per tubi lunghi e sottili, o per fluidi molto viscosi, il fluido ideale non basta e serve una legge come quella di Poiseuille.

32. Traccia. Nuotatore: $d \approx 10^3$ kg/m^3, $v \approx 1$ m/s, $L \approx 2$ m, $\eta \approx 10^{-3}$ Pa·s: $\mathrm{Re} \approx 10^3 \times 1 \times 2/10^{-3} = 2 \times 10^6$. Batterio: $v \approx 3 \times 10^{-5}$ m/s, $L \approx 2 \times 10^{-6}$ m: $\mathrm{Re} \approx 10^3 \times 3 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-6}/10^{-3} \approx 6 \times 10^{-5}$. Per il nuotatore domina l'inerzia: il moto attorno è turbolento, e smettendo di nuotare si scivola ancora per un tratto. Per il batterio domina la viscosità: l'acqua si comporta per lui come il miele per noi, e appena smette di spingere si ferma praticamente all'istante. Lo stesso liquido «appare» completamente diverso a scale diverse.

33. Traccia. Materiale: un cilindro alto e largo (diametro almeno 10 volte quello delle sfere) pieno di miele; sfere d'acciaio di diametri diversi (misurati con un calibro o un micrometro, massa con una bilancia per ricavare la densità); un cronometro o un video; un termometro, perché la viscosità del miele dipende molto dalla temperatura; un densimetro o bilancia e cilindro graduato per la densità del miele. Si segnano tre tratti uguali lungo il cilindro, abbastanza in basso: se i tempi di attraversamento dei tratti sono uguali, la sfera ha raggiunto la velocità limite. Si riporta la velocità limite in funzione di r^2 e si ricava η dalla pendenza, come nell'esempio svolto sulla glicerina. Per verificare Stokes: i punti devono stare su una retta per l'origine e il numero di Reynolds deve risultare molto minore di 1. Errori: effetto delle pareti (le sfere più grandi sono frenate di più), temperatura non costante, sfere lanciate con velocità iniziale, misura dei tempi (tempo di reazione), bolle d'aria attaccate alle sfere.