CAPITOLO

# 10

# Il rotolamento e il momento angolare

*«Le aree che i corpi fatti girare in orbita descrivono con i raggi condotti a un centro immobile delle forze giacciono in piani immobili e sono proporzionali ai tempi.» Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), libro I, proposizione I (traduzione della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Descrivere il rotolamento puro come traslazione più rotazione, con la condizione $v_{CM} = \omega R$, e calcolare l'energia cinetica di un corpo che rotola.
2. Prevedere con l'energia e con le forze l'accelerazione di corpi che rotolano lungo un piano inclinato, e spiegare perché conta solo la forma.
3. Definire il momento angolare di un punto materiale e di un corpo rigido e applicare il teorema $\boldsymbol{M}_{est} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t$.
4. Applicare la conservazione del momento angolare a piroette, tuffi, giostre e urti, distinguendola dalla conservazione dell'energia cinetica.
5. Collegare le forze centrali con le orbite piane e la legge delle aree, e spiegare qualitativamente il giroscopio e la precessione.
6. Misurare in laboratorio le accelerazioni di corpi che rotolano e confrontarle con la previsione teorica.

**INDICE DEL CAPITOLO**


10.1 Il rotolamento puro ..... 2
10.2 La gara di discesa sul piano inclinato ..... 5
10.3 Il momento angolare ..... 10
10.4 La conservazione del momento angolare ..... 13
10.5 Forze centrali e giroscopi ..... 16

Fisica 3 · Parte III · Il corpo rigido e i fluidi in movimento · versione 1.0
Capitolo 10: Il rotolamento e il momento angolare · pagine 267–292 del volume completo · estratto per lo studio

Metti in cima a una discesa una lattina di bibita piena e una lattina uguale ma vuota, e lasciale rotolare insieme: quale arriva prima? Fai girare una sedia da ufficio con un amico seduto sopra, a braccia larghe, e chiedigli di stringere le braccia al petto: la sedia accelera, senza che nessuno la spinga. Lancia una trottola: finché gira, resta in piedi su una punta sottile, e invece di cadere descrive lentamente un cono.

Il capitolo 9 ti ha insegnato la dinamica di un corpo che ruota attorno a un asse **fisso**; qui l'asse si muove, come quello di una ruota che avanza, o cambia direzione, come quello della trottola. Servono due idee nuove: il **rotolamento**, che unisce traslazione e rotazione, e il **momento angolare**, che per le rotazioni fa la parte della quantità di moto. Con esso arriva la terza grande legge di conservazione della meccanica, dopo quelle dell'energia e della quantità di moto: regola le piroette, i tuffi, le stelle che collassano e le orbite dei pianeti.

## 10.1 Il rotolamento puro

### 10.1.1 Traslazione più rotazione

Osserva la ruota di una bicicletta che avanza su una strada piana. Il suo centro si muove in linea retta, come un punto materiale; intanto la ruota gira attorno all'asse che passa per il centro. Il moto è dunque la somma di due moti che sai già descrivere: una traslazione del centro di massa (capitolo 8) e una rotazione attorno a un asse che passa per il centro di massa (capitolo 9). Per una ruota omogenea il centro di massa coincide con il centro geometrico.

Se la ruota non scivola, i due moti non sono indipendenti. Immagina di avvolgere un nastro sul bordo della ruota e di lasciarlo srotolare sulla strada: in un giro completo la ruota appoggia sull'asfalto tutta la sua circonferenza, $2\pi R$, e il suo centro avanza esattamente di $2\pi R$. In un periodo $T$, dunque, il centro percorre $2\pi R$, e la sua velocità è $v_{CM} = 2\pi R/T = \omega R$. Un corpo a sezione circolare (una ruota, un cilindro, una sfera) è in **rotolamento puro** quando rotola senza strisciare sulla superficie d'appoggio; la **condizione di rotolamento puro** lega la velocità del centro di massa alla velocità angolare:

$$v_{CM} = \omega R \qquad \text{e quindi} \qquad a_{CM} = \alpha R$$

La seconda relazione segue dalla prima: se $v_{CM}$ e $\omega$ restano proporzionali in ogni istante, anche le loro variazioni in un intervallo $\Delta t$ lo sono, e $\Delta v_{CM}/\Delta t = R\Delta\omega/\Delta t$. Attenzione: sono le stesse formule $v = \omega r$ e $a_t = \alpha r$ del capitolo 9, ma con un significato diverso. Là $v$ era la velocità di un punto del corpo attorno a un asse fermo; qui $v_{CM}$ è la velocità con cui l'asse stesso avanza.

Quanto vale la velocità dei vari punti della ruota? Ciascuno partecipa a entrambi i moti: la sua velocità è la somma vettoriale della velocità $\boldsymbol{v}_{CM}$, uguale per tutti, e della velocità di rotazio-

ne attorno al centro, tangente al bordo e di modulo $\omega R = v_{CM}$. La Figura 10.1 fa la somma per cinque punti. Nel punto più alto le due velocità hanno lo stesso verso e si sommano: $2v_{CM}$. Nel punto di contatto con il suolo hanno versi opposti e si annullano: **il punto di contatto è istantaneamente fermo**. Nei punti alla quota del centro le due velocità sono perpendicolari, e la somma ha modulo $\sqrt{2}\, v_{CM}$, inclinata di 45°.

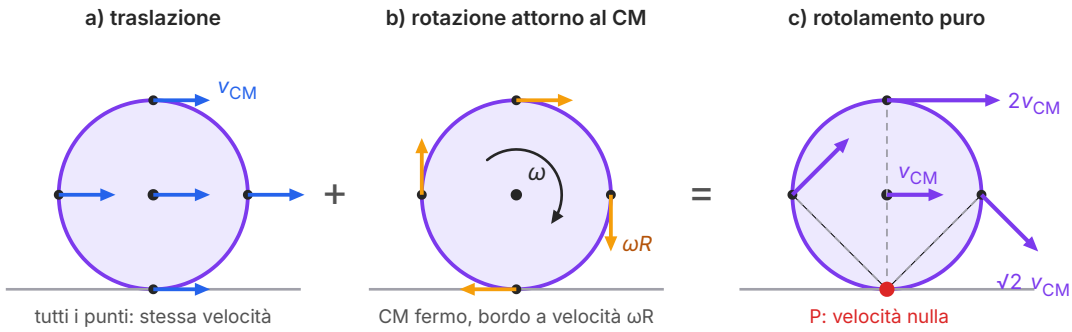



**Figura 10.1** Le velocità dei punti di una ruota in rotolamento puro verso destra (vettori in scala). a) Nella traslazione tutti i punti hanno la velocità del centro di massa, $\boldsymbol{v}_{CM}$. b) Nella rotazione attorno al centro di massa, in verso orario, i punti del bordo hanno velocità tangente di modulo $\omega R = v_{CM}$. c) Sommando: il punto più alto ha velocità $2v_{CM}$, il centro $v_{CM}$, i punti laterali $\sqrt{2}\, v_{CM}$, il punto di contatto P è fermo. Ogni velocità è perpendicolare al segmento (tratteggiato) che congiunge il punto con P.

La figura suggerisce un altro modo di vedere il rotolamento. In ogni istante ciascun punto della ruota si muove perpendicolarmente al segmento che lo congiunge con il punto di contatto P, con una velocità proporzionale alla sua distanza da P: il punto più alto, a distanza $2R$, va a $2\omega R$; i punti laterali, a distanza $\sqrt{2}\, R$, vanno a $\sqrt{2}\, \omega R$. È esattamente quello che accadrebbe se la ruota, in quell'istante, stesse ruotando con velocità angolare ω attorno a un asse fermo passante per P. Questo asse si chiama **asse istantaneo di rotazione**: è «istantaneo» perché un attimo dopo il contatto è passato a un altro punto del bordo, e l'asse con lui.

Una bicicletta a 18 km/h (5,0 m/s) ha ruote di raggio 0,35 m: $\omega = v_{CM}/R \approx 14$ rad/s. Il punto più alto dello pneumatico viaggia a 10 m/s, quello in basso è fermo: in una fotografia non istantanea i raggi in alto appaiono sfocati, quelli in basso nitidi.

Se $v_{CM} \neq \omega R$ il punto di contatto scivola e si ha **rotolamento con strisciamento**: una ruota che slitta sul ghiaccio gira in fretta e avanza poco, una ruota bloccata in frenata striscia senza girare. Agisce allora l'attrito dinamico, e l'energia meccanica si dissipa.

### 10.1.2 L'energia cinetica di un corpo che rotola

Quanta energia cinetica ha un corpo che rotola? Si può calcolare in due modi, e conviene vederli entrambi. Il primo usa l'asse istantaneo: in ogni istante il corpo ruota attorno a P con velocità angolare ω, quindi la sua energia cinetica è $\frac{1}{2} I_P \omega^2$, dove $I_P$ è il momento d'inerzia rispetto

all'asse per P. Il teorema di Huygens-Steiner (capitolo 9) dà $I_P = I_{CM} + MR^2$, perché l'asse per P è parallelo a quello per il centro di massa, a distanza $R$. Allora

$$K = \tfrac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}M(\omega R)^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

**L'energia cinetica di un corpo che rotola è la somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa, $\tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2$, e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, $\tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2$.** È il teorema di König del capitolo 8, $K = \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + K_{rel}$: per un corpo rigido l'energia relativa al centro di massa è quella della rotazione. La scomposizione vale per qualunque moto di un corpo rigido, anche con strisciamento; nel rotolamento puro, con $\omega = v_{CM}/R$, diventa

$$K = \tfrac{1}{2}(M + I_{CM}/R^2)\, v_{CM}^2$$

A parità di velocità, un corpo che rotola ha più energia cinetica di uno che scivola: una parte dell'energia è «impegnata» nella rotazione.

ESEMPIO SVOLTO

### Quanta energia c'è nella rotazione di una palla da bowling

**Problema.** Una palla da bowling, sfera piena omogenea di massa 7,0 kg e raggio 0,11 m, rotola senza strisciare a 6,0 m/s. a) Calcola la sua velocità angolare. b) Calcola l'energia cinetica di traslazione, quella di rotazione e quella totale. c) Che frazione dell'energia totale è di rotazione? d) Se la palla incontra una rampa e la risale rotolando, a che quota arriva? A che quota arriverebbe se, alla stessa velocità, scivolasse senza ruotare su una rampa liscia?

**Soluzione.** a) Dalla condizione di rotolamento puro: $\omega = v_{CM}/R = 6{,}0\ \text{m/s} / 0{,}11\ \text{m} \approx 55\ \text{rad/s}$. b) $K_{tr} = \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \tfrac{1}{2} \times 7{,}0\ \text{kg} \times (6{,}0\ \text{m/s})^2 = 126\ \text{J}$. Per la sfera piena $I_{CM} = (2/5)MR^2$ (Tabella A.4), quindi $K_{rot} = \tfrac{1}{2} \times (2/5)MR^2 \times (v_{CM}/R)^2 = (1/5)Mv_{CM}^2 = 50{,}4\ \text{J}$. Totale: $K \approx 176\ \text{J}$. Il raggio si è semplificato: non serviva. c) $K_{rot}/K = 50{,}4/176{,}4 = 2/7 \approx 29\%$. d) Sulla rampa il peso compie lavoro, l'attrito statico no (vedi il box che segue): l'energia meccanica si conserva e nel punto più alto tutta l'energia cinetica è diventata potenziale. $h = K/(Mg) = 176{,}4\ \text{J} / (7{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 2{,}6\ \text{m}$. Una palla che scivolasse senza ruotare avrebbe solo i 126 J di traslazione: $h = 126\ \text{J} / 68{,}6\ \text{N} \approx 1{,}8\ \text{m}$.

**Controllo.** La frazione 2/7 non dipende né dalla massa né dalla velocità: è una proprietà della forma sferica. Nel caso d) la palla che rotola sale più in alto perché porta con sé un «serbatoio» in più, l'energia della rotazione, che sulla rampa si trasforma anch'essa in energia potenziale.

**ERRORE FREQUENTE**

«Senza attrito la ruota non potrebbe rotolare; quindi l'attrito dissipa energia e l'energia meccanica non si conserva.» **No.** Nel rotolamento puro la forza d'attrito è applicata al punto di contatto, che è istantaneamente fermo: il punto di applicazione non si sposta, e il lavoro dell'attrito è nullo. L'attrito che agisce è quello **statico**, non quello dinamico: cambia il modo in cui l'energia si ripartisce fra traslazione e rotazione, ma non ne trasforma nessuna parte in energia interna. Per questo nei problemi di rotolamento puro si usa la conservazione dell'energia meccanica come se l'attrito non ci fosse.

Un corpo reale che rotola rallenta comunque un poco per l'attrito volvente (*Fisica 1*, capitolo 8), dovuto alla deformazione della ruota e del suolo: qui lo trascuriamo. E se la ruota **striscia**, agisce l'attrito dinamico e l'energia meccanica diminuisce davvero.

## 10.2 La gara di discesa sul piano inclinato

### 10.2.1 La previsione con l'energia

Torniamo alle lattine dell'inizio, e organizziamo una gara vera. Lungo lo stesso piano inclinato lasciamo rotolare, partendo da fermi, un anello, un disco (o un cilindro pieno) e una sfera piena; per confronto facciamo scivolare anche un blocco su un tratto di piano liscio. Chi vince?

Il momento d'inerzia di ciascun corpo rispetto al proprio asse si può scrivere $I_{CM} = \beta M R^2$, dove $\beta$ è un numero puro che dipende **soltanto dalla forma**: 1 per l'anello, ½ per il disco, 2/5 per la sfera piena, 2/3 per la sfera cava (Tabella A.4). Dopo una discesa di dislivello $h$, partendo da fermo, la conservazione dell'energia meccanica dà

$$Mgh = \tfrac{1}{2}(M + \beta M)v_{CM}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{CM} = \sqrt{(2gh/(1+\beta))}$$

La massa si semplifica, e con lei il raggio: **a decidere la gara è soltanto la forma**. Un cilindro pieno di piombo e uno di legno, grandi o piccoli, arrivano in fondo insieme; una biglia di vetro e una palla da bowling anche. Più grande è $\beta$, cioè più massa sta lontano dall'asse, più energia finisce nella rotazione e meno ne resta per la traslazione: l'anello arriva per ultimo. Il blocco che scivola senza attrito, con $\beta = 0$, vince su tutti.

Sul piano inclinato le forze sono costanti, quindi il moto del centro di massa è uniformemente accelerato. Lungo un tratto $s$ del piano, inclinato di $\alpha$, il dislivello è $h = s \operatorname{sen} \alpha$, e dalla relazione $v^2 = 2as$ si ricava l'accelerazione:

$$a_{CM} = g \operatorname{sen} \alpha \,/\, (1 + \beta) = g \operatorname{sen} \alpha \,/\, (1 + I_{CM}/(MR^2))$$

**Tabella 10.1** Corpi che rotolano senza strisciare: il fattore di forma $\beta = I_{CM}/(MR^2)$, la frazione dell'energia cinetica che è di rotazione e l'accelerazione lungo un piano inclinato di $\alpha$, in unità di $g$ sen $\alpha$.

| corpo | $\beta = I_{CM}/(MR^2)$ | $K_{rot}/K = \beta/(1+\beta)$ | $a_{CM}/(g \text{ sen } \alpha) = 1/(1+\beta)$ |
|---|---|---|---|
| blocco che scivola (senza attrito) | 0 | 0 | 1 |
| sfera piena | 2/5 | 2/7 ≈ 0,29 | 5/7 ≈ 0,71 |
| disco o cilindro pieno | 1/2 | 1/3 ≈ 0,33 | 2/3 ≈ 0,67 |
| sfera cava a parete sottile | 2/3 | 2/5 = 0,40 | 3/5 = 0,60 |
| anello o cilindro cavo a parete sottile | 1 | 1/2 = 0,50 | 1/2 = 0,50 |

La Tabella 10.1 riassume i risultati e la Figura 10.2 li mette in scena: su un piano lungo 1,50 m e inclinato di 15°, il blocco arriva dopo 1,09 s, la sfera dopo 1,29 s, il disco dopo 1,33 s, l'anello dopo 1,54 s. E le lattine? Nella piena il liquido, che non è un corpo rigido, in buona parte non ruota con la latta e scende quasi come un blocco; la vuota è praticamente un cilindro cavo, $\beta \approx 1$. Vince la piena.

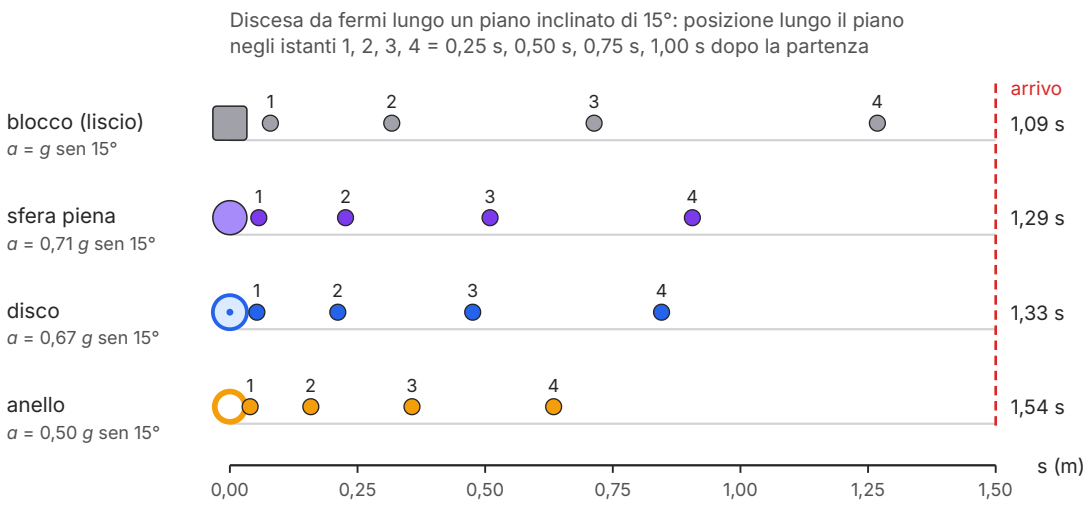



**Figura 10.2** La gara di discesa (posizioni calcolate). Quattro corpi partono da fermi sullo stesso piano inclinato di 15°, lungo 1,50 m: le posizioni lungo il piano sono segnate ogni 0,25 s, e a destra c'è il tempo di arrivo. L'ordine dipende solo dal fattore di forma $\beta$: non dalla massa né dal raggio.

### 10.2.2 La stessa previsione con le forze

La conservazione dell'energia dice **chi** vince, ma non spiega **perché** un corpo che rotola accelera meno. Per capirlo bisogna guardare le forze, come nell'esempio che segue. Useremo $M = I\alpha$

rispetto all'asse che passa per il centro di massa mentre questo accelera: come anticipato nel capitolo 9, è lecito purché l'asse non cambi direzione.

**ESEMPIO SVOLTO**

### Un cilindro che rotola: la dinamica passo per passo

**Problema.** Un corpo di massa $M$, raggio $R$ e momento d'inerzia $I_{CM} = \beta MR^2$ rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di $\alpha$. Ricava l'accelerazione del centro di massa e la forza d'attrito, e trova l'inclinazione massima per cui il rotolamento resta puro se il coefficiente di attrito statico è $\mu_s$.

**1. Le forze.** Sul corpo agiscono il peso $Mg$, applicato al centro di massa; la reazione normale $N$, perpendicolare al piano, applicata al punto di contatto; la forza d'attrito statico $F_s$, parallela al piano e applicata al punto di contatto. L'attrito è diretto verso la cima del piano: è lui che fa ruotare il corpo nel verso giusto. Asse $x$ lungo il piano, verso il basso.

**2. Traslazione del centro di massa** ($F_{est} = Ma_{CM}$, capitolo 8). Lungo il piano: $Mg \operatorname{sen}\alpha - F_s = Ma_{CM}$. Perpendicolarmente: $N = Mg\cos\alpha$.

**3. Rotazione attorno al centro di massa** ($M = I\alpha$). Il peso e la reazione normale hanno la retta d'azione che passa per il centro di massa: momento nullo. Solo l'attrito ha braccio $R$: $F_s R = I_{CM}\alpha$.

**4. Il vincolo.** Il rotolamento è puro: $\alpha = a_{CM}/R$. Allora $F_s = I_{CM}a_{CM}/R^2 = \beta Ma_{CM}$.

**5. Si combinano le equazioni.** Sostituendo in 2: $Mg \operatorname{sen}\alpha - \beta Ma_{CM} = Ma_{CM}$, cioè

$$a_{CM} = g \operatorname{sen}\alpha / (1 + \beta) \qquad F_s = Mg \operatorname{sen}\alpha \cdot \beta/(1 + \beta)$$

**6. La condizione di aderenza.** L'attrito statico non può superare $\mu_s N = \mu_s Mg\cos\alpha$. Dividendo per $Mg\cos\alpha$: $\tan\alpha \le \mu_s(1 + \beta)/\beta$. Per un disco, $\beta = ½$: $\tan\alpha \le 3\mu_s$; con $\mu_s = 0{,}20$, l'inclinazione massima è circa 31°. Oltre, il disco rotola strisciando.

**Controllo.** Il risultato coincide con quello ottenuto con l'energia. Con $\beta = 0$ si ritrova il blocco liscio, $a = g \operatorname{sen}\alpha$, e $F_s = 0$: non c'è nulla da far ruotare. Ora si vede il perché della gara: l'attrito statico, che punta verso l'alto, frena la traslazione quanto serve per far crescere la rotazione, e più grande è $\beta$, più grande è la frenata.

ESEMPIO SVOLTO

### Riconoscere un cilindro dai dati del moto

**Problema.** Un cilindro di cui non si conosce la struttura interna rotola da fermo, senza strisciare, lungo un piano inclinato di 10,0°. Un video dà le distanze percorse lungo il piano negli istanti indicati nella tabella (dati tipici). a) Verifica che il moto è uniformemente accelerato e ricava l'accelerazione. b) Ricava il fattore di forma β. c) Il cilindro è pieno, cavo a parete sottile o nessuno dei due?

**Tabella 10.2** Distanza $s$ percorsa lungo il piano dal cilindro misterioso all'istante $t$ (dati tipici) e rapporto $s/t^2$.

| $t$ (s) | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 |
|---|---|---|---|---|
| $s$ (m) | 0,12 | 0,47 | 1,06 | 1,89 |
| $s/t^2$ (m/s$^2$) | 0,48 | 0,47 | 0,47 | 0,47 |

**Soluzione.** a) Se il moto è uniformemente accelerato da fermo, $s = \tfrac{1}{2}at^2$: il grafico di $s$ in funzione di $t^2$ è una retta per l'origine con pendenza $a/2$, cioè il rapporto $s/t^2$ è costante. Lo è, entro la precisione dei dati: la retta dei minimi scarti per l'origine ha pendenza 0,472 m/s$^2$, quindi $a \approx 0{,}94$ m/s$^2$. b) Da $a = g \operatorname{sen}\alpha/(1+\beta)$: $\beta = g \operatorname{sen}\alpha/a - 1 = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 0{,}174 / 0{,}944 \text{ m/s}^2 - 1 \approx 0{,}80$. c) β è compreso fra ½ (cilindro pieno) e 1 (cilindro cavo a parete sottile): è un tubo con la parete spessa. Per un tubo di raggi $R_e$ ed $R_i$, $I_{CM} = \tfrac{1}{2}M(R_e^2 + R_i^2)$, cioè $\beta = \tfrac{1}{2}(1 + (R_i/R_e)^2)$; con $\beta = 0{,}80$ si ottiene $R_i/R_e = \sqrt{(2\beta - 1)} \approx 0{,}78$.

**Controllo.** β è un numero puro compreso fra 0 e 1, come deve essere per un cilindro. Attenzione però alla sensibilità: un errore del 2% su $a$ sposta β di circa 0,04. Per distinguere bene un tubo da un cilindro pieno servono misure accurate, come nel laboratorio che segue.

COLLEGAMENTI

### In laboratorio: la gara dei corpi che rotolano

**Materiali.** Un'asse di legno rigida e piana, lunga circa 1,5 m, rialzata a un estremo con alcuni spessori; una sfera piena d'acciaio; un cilindro pieno di alluminio; un anello ricavato da uno spezzone di tubo metallico (raggio esterno 30,0 mm, spessore della parete 1,5 mm); un metro a nastro (1 mm); un cronometro elettronico che parte quando si solleva la paletta che trattiene il corpo e si ferma quando il corpo interrompe il fascio di una fotocellula al traguardo (risoluzione 0,01 s); una scatola con un panno per fermare i corpi.

**Procedimento.** 1) Fissa partenza e traguardo e misura la distanza fra i due lungo il piano, $L$ = (1,200 ± 0,002) m. 2) Misura il dislivello fra partenza e traguardo, $h$ = (0,100 ± 0,001) m: sen $\alpha = h/L$. 3) Lascia partire ogni corpo da fermo cinque volte, senza spingerlo, e annota i tempi. 4) Calcola il tempo medio con la semidispersione massima e l'accelerazione $a_{mis} = 2L/t^2$, con incertezza relativa $\varepsilon_L + 2\varepsilon_t$. 5) Calcola la previsione $a_{prev} = g(h/L)/(1 + \beta)$, con incertezza relativa $\varepsilon_h + \varepsilon_L$.

**Tabella 10.3** La gara dei corpi che rotolano (dati tipici di una prova): tempi di discesa, accelerazioni misurate e previste (in m/s$^2$) e verifica di compatibilità. Per l'anello la previsione usa $\beta = 1$, cioè il modello di anello sottile.

| corpo | tempi (s) | $t$ (s) | $a_{mis}$ | $a_{prev}$ | compatibili? |
|---|---|---|---|---|---|
| sfera piena | 2,04; 2,05; 2,03; 2,05; 2,04 | 2,04 ± 0,01 | 0,577 ± 0,007 | 0,583 ± 0,007 | sì |
| disco (cilindro pieno) | 2,11; 2,13; 2,11; 2,11; 2,12 | 2,12 ± 0,01 | 0,534 ± 0,006 | 0,544 ± 0,006 | sì |
| anello (tubo sottile) | 2,42; 2,41; 2,41; 2,39; 2,40 | 2,41 ± 0,02 | 0,413 ± 0,008 | 0,408 ± 0,005 | sì |

**Che cosa concludere.** L'ordine di arrivo è quello previsto, e per tutti e tre i corpi la differenza $|a_{mis} - a_{prev}|$ è minore della somma delle incertezze: misure e previsioni sono compatibili. Guardando meglio, però, si nota una regolarità. Per la sfera e per il disco la misura è **un po' più bassa** della previsione, di circa l'1–2%: è l'effetto sistematico dell'attrito volvente e dell'aria, che il modello trascura. Per l'anello la misura è invece un po' **più alta**. Il motivo è nel modello: un tubo con la parete spessa 1,5 mm non è un anello sottile; la sua massa sta fra i raggi 28,5 mm e 30,0 mm e il suo momento d'inerzia, $\frac{1}{2}M(R_e^2 + R_i^2)$, vale circa 0,95 $MR_e^2$. Con $\beta = 0{,}95$ la previsione diventa 0,419 m/s$^2$, e anche l'anello risulta più lento della previsione dell'1% circa, come gli altri due corpi.

**Sicurezza.** La sfera d'acciaio, in fondo al piano, va fermata dalla scatola con il panno: non deve cadere dal banco.

**Per la relazione.** Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Riporta la tabella e il calcolo completo, con le incertezze, per un corpo. Discuti la compatibilità e il segno degli scarti: perché uno scarto sempre dello stesso segno indica un effetto sistematico? Proponi una prova per verificare che la massa non conta (due sfere di massa diversa).

## 10.3 Il momento angolare

### 10.3.1 Il momento angolare di un punto materiale

Per la traslazione hai a disposizione la quantità di moto $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, che una forza esterna fa variare secondo $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ e che, senza forze esterne, si conserva (capitolo 6). Per le rotazioni serve una grandezza analoga. Come il momento di una forza $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ si costruisce a partire dalla forza (capitolo 9), così si costruisce un «momento» della quantità di moto.

Dato un punto O, si chiama **momento angolare** di un punto materiale di quantità di moto $\boldsymbol{p}$, che si trova nella posizione $\boldsymbol{r}$ rispetto a O, il prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \qquad (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$$

Le proprietà del prodotto vettoriale (capitolo 1) dicono tutto il resto. Il modulo è $L = rp \operatorname{sen}\theta$, dove $\theta$ è l'angolo fra $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$; come per il momento di una forza, si può scrivere $L = p\, r_\perp$, dove $r_\perp = r \operatorname{sen}\theta$ è la distanza di O dalla retta su cui giace $\boldsymbol{p}$ (Figura 10.3a). La direzione di $\boldsymbol{L}$ è perpendicolare al piano che contiene $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$, il verso è dato dalla regola della mano destra. L'unità di misura è $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, che equivale a J·s.

Il caso più semplice è un punto in moto circolare attorno a O, su una circonferenza di raggio $r$: la velocità è sempre perpendicolare al raggio, $\operatorname{sen}\theta = 1$, e $L = mvr = mr^2\omega$. La Terra, nel suo moto attorno al Sole, ha rispetto al Sole un momento angolare $L \approx 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} \times 2{,}98 \times 10^{4}\ \text{m/s} \times 1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m} \approx 2{,}7 \times 10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ (approssimando l'orbita con una circonferenza).

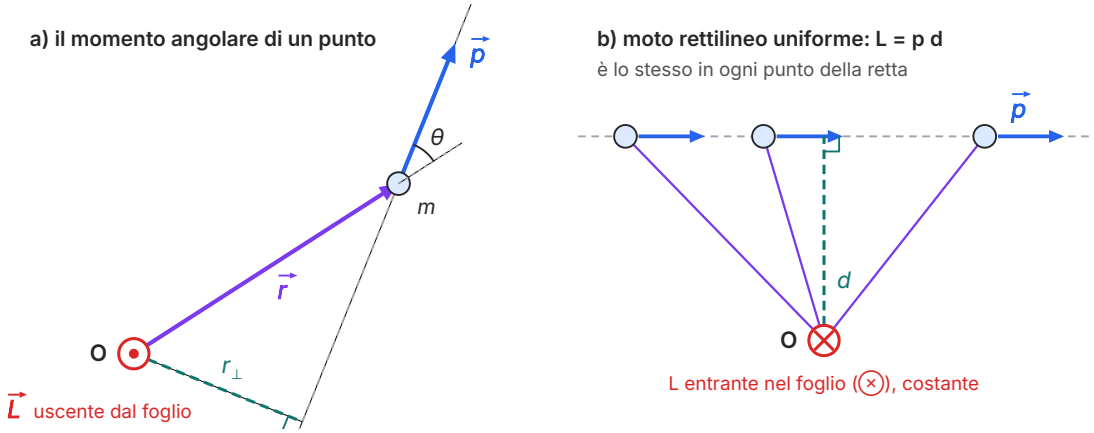



**Figura 10.3** Il momento angolare di un punto materiale rispetto al punto O. a) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ è perpendicolare al foglio (qui uscente, per la regola della mano destra) e ha modulo $L = rp \text{ sen } \theta = p\, r_\perp$, dove $r_\perp$ è la distanza di O dalla retta di $\boldsymbol{p}$. b) Un punto che si muove di moto rettilineo uniforme ha, rispetto a O, un momento angolare costante: la quantità di moto e la distanza $d$ della retta da O non cambiano.

Il momento angolare non richiede che il corpo «giri». Un punto materiale che si muove in linea retta a velocità costante ha, rispetto a un punto O fuori dalla sua retta, momento angolare $L = pd$, dove $d$ è la distanza di O dalla retta (Figura 10.3b): mentre il punto avanza, $\boldsymbol{r}$ e $\theta$ cambiano, ma il prodotto $r \text{ sen } \theta$ resta uguale a $d$. Rispetto a un punto O sulla retta, invece, il momento angolare è nullo. **Il momento angolare dipende dal punto scelto**, come il momento di una forza: va sempre detto rispetto a quale punto lo si calcola.

### 10.3.2 Il momento angolare di un corpo rigido

Un corpo rigido che ruota con velocità angolare $\omega$ attorno a un asse fisso è formato da tanti punti materiali, di masse $m_i$, che descrivono circonferenze di raggi $r_i$ attorno all'asse. Il punto $i$-esimo ha velocità $v_i = \omega r_i$, e il suo contributo al momento angolare lungo l'asse vale $m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$. Se il corpo è simmetrico rispetto all'asse di rotazione, come una ruota, un disco o una sfera, le altre componenti si annullano a due a due, perché a ogni punto ne corrisponde uno simmetrico. Sommando:

$$L = (\Sigma\, m_i r_i^2)\, \omega = I\omega$$

È il **momento angolare di un corpo rigido** che ruota attorno a un asse di simmetria. In forma vettoriale $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{L}$ ha la direzione e il verso del vettore velocità angolare del capitolo 9, lungo l'asse, con il pollice della mano destra quando le dita seguono la rotazione. La formula $L = I\omega$ ripete $p = mv$: alla massa corrisponde il momento d'inerzia, alla velocità la velocità angolare.

### 10.3.3 Il secondo principio per le rotazioni nella forma di Newton

Nel capitolo 6 hai scritto il secondo principio nella forma $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$. C'è una legge analoga per il momento angolare. In un breve intervallo $\Delta t$ la posizione del punto materiale diventa $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ e la sua quantità di moto $\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}$; il nuovo momento angolare è

$$\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{p}$$

Il secondo termine è nullo: $\Delta\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{v}\Delta t$ è parallelo a $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, e il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è zero. L'ultimo termine è il prodotto di due quantità piccole, trascurabile quando $\Delta t \to 0$. Resta $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\Delta t$, cioè $\Delta\boldsymbol{L}/\Delta t = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$. Per un sistema di punti si sommano i contributi: le forze interne vanno a coppie uguali e opposte, sulla stessa retta, e i loro momenti si annullano a due a due. Si ottiene il **teorema del momento angolare**:

$$\boldsymbol{M}_{\text{est}} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t \qquad (\Delta t \to 0)$$

**Il momento risultante delle forze esterne è uguale alla rapidità con cui varia il momento angolare del sistema**, con entrambi i momenti calcolati rispetto allo stesso punto fisso. Per un corpo rigido con asse fisso, $\Delta L = I\Delta\omega$, e si ritrova $M = I\alpha$ del capitolo 9. Ma la nuova forma è più generale: vale anche quando il momento d'inerzia cambia, come vedrai fra poco, e anche quando a cambiare è la direzione di $\boldsymbol{L}$.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Il tornio del vasaio**

**Problema.** Il piatto di un tornio da vasaio è un disco omogeneo di 12 kg e raggio 0,25 m. Il motore lo porta da fermo a 90 giri/min in 3,0 s. a) Calcola il momento angolare finale. b) Quale momento medio ha esercitato il motore? c) A motore spento, gli attriti esercitano sul piatto un momento frenante costante di 0,20 N·m: in quanto tempo si ferma?

**Soluzione.** Il piatto ruota attorno al suo asse di simmetria, che è fisso. a) $I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2} \times 12\ \text{kg} \times (0{,}25\ \text{m})^2 = 0{,}375\ \text{kg·m}^2$; $\omega = 90 \times 2\pi\ \text{rad} / 60\ \text{s} \approx 9{,}42\ \text{rad/s}$; $L = I\omega \approx 3{,}5\ \text{kg·m}^2/\text{s}$. b) Dal teorema del momento angolare, $M = \Delta L/\Delta t = 3{,}53\ \text{kg·m}^2/\text{s} / 3{,}0\ \text{s} \approx 1{,}2\ \text{N·m}$. c) Il momento frenante fa diminuire $L$ fino a zero: $\Delta t = \Delta L/M = 3{,}53\ \text{kg·m}^2/\text{s} / 0{,}20\ \text{N·m} \approx 18\ \text{s}$.

**Controllo.** $\text{N·m·s} = (\text{kg·m/s}^2)\text{·m·s} = \text{kg·m}^2/\text{s}$: il momento per il tempo è un momento angolare, come la forza per il tempo è una quantità di moto (l'impulso del capitolo 6).

## 10.4 La conservazione del momento angolare

### 10.4.1 Quando il momento angolare si conserva

Se il momento risultante delle forze esterne è nullo, il teorema del momento angolare dice che $\Delta \boldsymbol{L} = 0$: il momento angolare del sistema resta costante, in modulo, direzione e verso. È il **principio di conservazione del momento angolare**:

$$\boldsymbol{M}_{\text{est}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{L} = \text{costante}; \quad \text{per un corpo che ruota attorno a un asse fisso: } I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

La condizione riguarda il **momento** delle forze esterne, non le forze. Una forza diretta verso il punto O rispetto a cui si calcolano i momenti ha braccio nullo, e quindi momento nullo, anche se è intensa; al contrario, una coppia di forze ha risultante nulla e momento diverso da zero. Così la quantità di moto può conservarsi mentre il momento angolare cambia, e viceversa: sono due leggi distinte.

### 10.4.2 La pattinatrice e la sedia girevole

Una pattinatrice comincia una piroetta con le braccia aperte e una gamba distesa, poi stringe braccia e gamba attorno al corpo. Il ghiaccio esercita forze quasi solo verticali, e i pattini hanno attrito piccolissimo: rispetto all'asse verticale il momento delle forze esterne è praticamente nullo, e il momento angolare $L = I\omega$ si conserva. Raccogliendo le braccia, la pattinatrice porta massa vicino all'asse e il suo momento d'inerzia diminuisce: la velocità angolare deve aumentare nella stessa proporzione.

Con valori plausibili per un'atleta di circa 50 kg, stimati e non misurati (Figura 10.4): da $I_1 = 2{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, a 2,0 giri/s, a $I_2 = 0{,}80\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Il momento d'inerzia diventa un terzo, quindi la frequenza triplica: $f_2 = f_1 I_1/I_2 = 6{,}0$ giri/s.

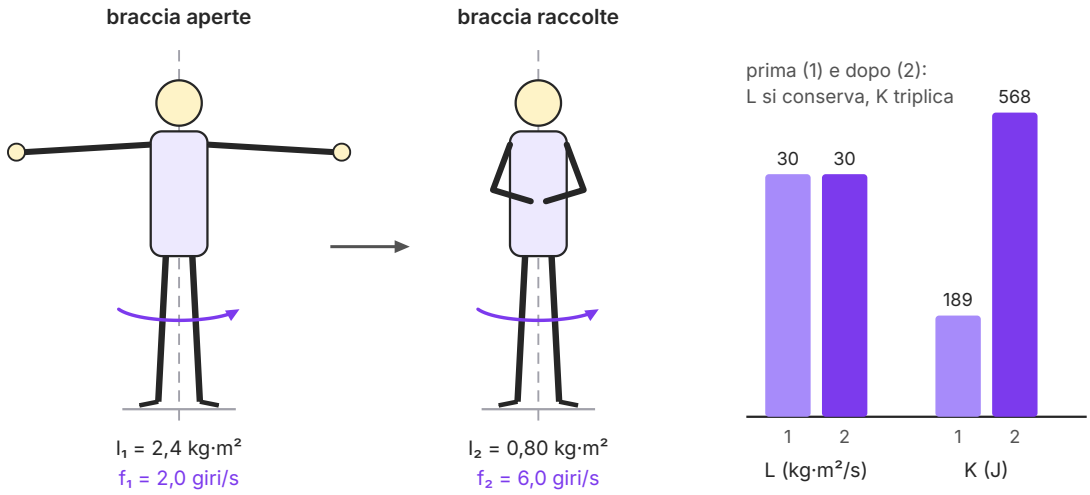



**Figura 10.4** Una piroetta (schema; i valori di *I* sono una stima plausibile per un'atleta di circa 50 kg). Raccogliendo le braccia la pattinatrice riduce il momento d'inerzia rispetto all'asse verticale da 2,4 a 0,80 kg·m$^2$: il momento angolare resta 30 kg·m$^2$/s, la frequenza passa da 2,0 a 6,0 giri/s, l'energia cinetica da 189 J a 568 J.

E l'energia? $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = L^2/(2I)$: a parità di $L$, se $I$ diventa un terzo l'energia cinetica triplica, da 189 J a 568 J. I 379 J in più li forniscono i **muscoli**. Le mani girano su una circonferenza e per farle muovere così le braccia devono tirarle verso l'asse; quando le braccia si accorciano, le mani si spostano proprio nel verso in cui sono tirate, e quella forza compie un lavoro positivo. Quando la pattinatrice riapre le braccia avviene il contrario: la rotazione rallenta e l'energia cinetica diminuisce.

Lo stesso accade su una sedia girevole con due manubri in mano, purché i piedi restino sollevati: appoggiati a terra, eserciterebbero un momento esterno.

**COLLEGAMENTI**

### Tuffi, salti e capriole

Un tuffatore riceve tutto il suo momento angolare nell'istante dello stacco, dalla spinta del trampolino. In volo agisce solo il peso, che è applicato al centro di massa e quindi ha momento nullo rispetto a esso: il momento angolare attorno al centro di massa resta costante fino all'ingresso in acqua. Il tuffatore non può cambiarlo, ma può cambiare il proprio momento d'inerzia. Nella posizione raggruppata, con le ginocchia al petto, il momento d'inerzia è parecchie volte più piccolo che a corpo disteso, e le capriole si susseguono in fretta; prima di entrare in acqua il corpo si distende, la rotazione rallenta e l'ingresso è pulito.

Lo stesso vale per le ginnaste e per i salti del pattinaggio, in cui l'atleta stringe le braccia al petto per completare tre o quattro rotazioni prima di atterrare.

### 10.4.3 Un urto che fa girare

**ESEMPIO SVOLTO**

**Il bambino che salta sulla giostra**

**Problema.** Una piccola giostra è una piattaforma a forma di disco, di 120 kg e raggio 1,5 m, libera di ruotare senza attrito attorno a un asse verticale. Gira a vuoto a 1,2 rad/s quando un bambino di 30 kg, correndo in direzione radiale (cioè verso l'asse), salta sul bordo e ci resta. a) Calcola la nuova velocità angolare. b) Che frazione dell'energia cinetica si è trasformata?

**Soluzione.** Sistema: giostra più bambino. Le forze esterne sono il peso e la reazione dell'asse, che hanno momento nullo rispetto all'asse verticale: il momento angolare del sistema si conserva. Il bambino corre in direzione radiale: la sua velocità passa per l'asse, quindi il suo momento angolare iniziale è nullo. a) $I_1 = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2} \times 120\ \text{kg} \times (1{,}5\ \text{m})^2 = 135\ \text{kg·m}^2$; dopo il salto il bambino, trattato come un punto materiale sul bordo, aggiunge $mR^2 = 30\ \text{kg} \times (1{,}5\ \text{m})^2 = 67{,}5\ \text{kg·m}^2$: $I_2 = 202{,}5\ \text{kg·m}^2$. Da $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$: $\omega_2 = 135 \times 1{,}2\ \text{rad/s} / 202{,}5 = 0{,}80\ \text{rad/s}$. b) $K_1 = \tfrac{1}{2} \times 135\ \text{kg·m}^2 \times (1{,}2\ \text{rad/s})^2 \approx 97\ \text{J}$; $K_2 = \tfrac{1}{2} \times 202{,}5\ \text{kg·m}^2 \times (0{,}80\ \text{rad/s})^2 \approx 65\ \text{J}$. Si è trasformato un terzo dell'energia cinetica, circa 32 J.

**Controllo.** È l'analogo rotazionale di un urto completamente anelastico (capitolo 7): i due corpi alla fine si muovono insieme, il momento angolare si conserva, l'energia cinetica no. L'energia mancante è diventata energia interna nelle gambe e nelle scarpe del bambino che si aggrappa e frena la sua corsa rispetto alla piattaforma.

**ERRORE FREQUENTE**

«Se il momento angolare si conserva, si conserva anche l'energia cinetica di rotazione.» **No.** $L = I\omega$ e $K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = L^2/(2I)$: con $L$ costante, l'energia cinetica cambia ogni volta che cambia il momento d'inerzia. Aumenta quando la pattinatrice raccoglie le braccia (lavoro dei muscoli), diminuisce quando il bambino salta sulla giostra (energia trasformata in energia interna). Per le rotazioni vale ciò che il capitolo 7 ha mostrato per gli urti: la legge di conservazione della quantità di moto, o del momento angolare, vale sempre per un sistema isolato; l'energia cinetica va controllata caso per caso.

Altro errore: usare la conservazione del momento angolare quando il momento esterno non è nullo, per esempio per una sedia girevole con i piedi a terra, o calcolare i momenti rispetto a punti diversi prima e dopo.

APPROFONDIMENTO

### Il gatto che cade sempre in piedi

Un gatto lasciato cadere a zampe in su, da fermo e senza essere fatto ruotare, atterra quasi sempre sulle zampe. Sembra una violazione della conservazione del momento angolare: il gatto parte con $L = 0$, nessun momento esterno agisce su di lui durante la caduta, eppure alla fine si è girato di mezzo giro.

Il gatto però non è un corpo rigido, e un corpo che cambia forma può cambiare orientazione anche con $L = 0$. Semplificando molto: il gatto stringe le zampe anteriori e distende le posteriori; ruota la parte anteriore, con il momento d'inerzia piccolo, di un angolo grande, mentre la parte posteriore, con il momento d'inerzia grande, ruota di poco nel verso opposto, così che i due momenti angolari si compensano. Poi inverte il ruolo delle zampe e ripete la manovra con la parte posteriore. Alla fine entrambe le metà si sono girate nello stesso verso, e il momento angolare totale è stato nullo in ogni istante. Il modello completo di questo **riflesso di raddrizzamento** è più complicato, ma l'idea è questa; anche un astronauta senza appigli può girarsi su sé stesso con movimenti simili.

APPROFONDIMENTO

### Le stelle di neutroni

Alla fine della sua vita il nucleo di una stella di grande massa può collassare fino a formare una **stella di neutroni**: una massa paragonabile a quella del Sole in un raggio di una decina di chilometri. Il collasso è così rapido che il momento angolare del nucleo resta, in prima approssimazione, quello di prima.

Un calcolo-giocattolo, con un'ipotesi forte: una sfera che si contrae restando omogenea, senza perdere massa né momento angolare. Allora $I \propto MR^2$ e $\omega_2/\omega_1 = (R_1/R_2)^2$. Comprimiamo, con la fantasia, il Sole (raggio $6{,}96 \times 10^5$ km, un giro su sé stesso in circa 25 giorni) fino a 12 km di raggio: il periodo diventa $25 \times 86\,400\ \text{s} \times (12/6{,}96 \times 10^5)^2 \approx 6{,}4 \times 10^{-4}$ s, oltre 1500 giri al secondo.

Il Sole non diventerà mai una stella di neutroni, perché ha troppo poca massa, e le stelle vere perdono parte del loro momento angolare; ma l'ordine di grandezza spiega un fatto osservato: le stelle di neutroni ruotano velocissime: la maggior parte di quelle osservate compie un giro in un tempo compreso fra pochi millesimi di secondo e qualche secondo.

## 10.5 Forze centrali e giroscopi

### 10.5.1 Forze centrali: orbite piane e aree uguali

Si chiama **forza centrale** una forza che, in ogni posizione del corpo su cui agisce, è diretta lungo la retta che congiunge il corpo con un punto fisso, il **centro di forza**. La forza di un filo

che fa girare un sasso attorno alla mano è centrale; lo è l'attrazione del Sole su un pianeta, come vedrai nel capitolo 13.

Rispetto al centro di forza O, una forza centrale ha momento nullo: $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$ sono paralleli, e $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$. Se è l'unica forza, il momento angolare del corpo rispetto a O si conserva, e questo ha due conseguenze geometriche.

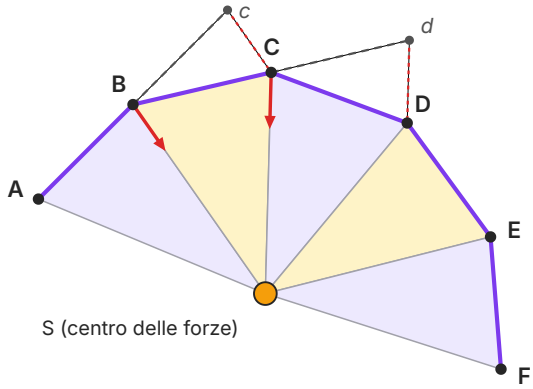
**1. L'orbita è piana.** La direzione di $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ è fissa, e $\boldsymbol{r}$ è sempre perpendicolare a $\boldsymbol{L}$: il corpo si muove sempre nel piano che passa per O ed è perpendicolare a $\boldsymbol{L}$.

**2. Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.** In un breve intervallo $\Delta t$ il segmento che va da O al corpo spazza un sottile triangolo, di lati $\boldsymbol{r}$ e $\Delta\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{v}\Delta t$. Come hai visto nel capitolo 1, il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma costruito sui due vettori; il triangolo ne è la metà: $\Delta A = \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|\Delta t = (L/2m)\Delta t$. Il rapporto fra l'area spazzata e il tempo impiegato si chiama **velocità areolare**, e per una forza centrale è costante:

$$\Delta A/\Delta t = L/(2m) = \text{costante}$$

Ne segue che il corpo va più veloce quando è vicino al centro e più lento quando è lontano. Nei punti dell'orbita più vicino e più lontano da O la velocità è perpendicolare al raggio, e da $L = mvr$ costante si ha $v_1 r_1 = v_2 r_2$. Nel capitolo 12 ritroverai questo risultato come **seconda legge di Keplero**, che Keplero trovò dalle osservazioni dei pianeti: la conservazione del momento angolare ne spiega il perché.

Newton dimostrò questo teorema all'inizio del primo libro dei *Principia* (1687), proposizione I: «*Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*» («Le aree che i corpi fatti girare in orbita descrivono con i raggi condotti a un centro immobile delle forze giacciono in piani immobili e sono proporzionali ai tempi», traduzione della redazione). La sua dimostrazione si segue con la geometria della Figura 10.5. Si divide il tempo in intervalli uguali e si immagina che la forza agisca a colpi, all'inizio di ogni intervallo. Fra un colpo e l'altro il corpo va in linea retta e percorre segmenti uguali, AB e Bc: i triangoli SAB e SBc hanno basi uguali sulla stessa retta e la stessa altezza, quindi la stessa area. In B l'impulso, diretto verso S, devia il corpo in C invece che in c; ma cC è parallelo a SB, e i triangoli SBc e SBC, con la base SB in comune e i vertici su una parallela a essa, hanno la stessa area. Di colpo in colpo, le aree restano uguali; rendendo i colpi sempre più fitti e deboli, la spezzata diventa una curva.




tratteggio grigio: dove andrebbe il corpo senza l'impulso (primo principio)
frecce rosse: impulsi diretti verso S; i triangoli colorati hanno la stessa area

**Figura 10.5** La dimostrazione di Newton della legge delle aree (costruzione calcolata). Il corpo, in intervalli di tempo uguali, percorre i segmenti AB, BC, CD...; all'inizio di ogni intervallo riceve un impulso diretto verso il centro S. Senza l'impulso, da B andrebbe in c; con l'impulso arriva in C, con cC parallelo a SB. I cinque triangoli colorati hanno tutti la stessa area.

### 10.5.2 Il giroscopio e la precessione

Fino a qui il momento angolare cambiava in modulo. Il teorema del momento angolare è però un'equazione fra vettori: se il momento esterno è perpendicolare a $\boldsymbol{L}$, la variazione $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\Delta t$ è perpendicolare a $\boldsymbol{L}$, e allora $\boldsymbol{L}$ cambia direzione senza cambiare modulo. È la stessa situazione del moto circolare uniforme, in cui la forza centripeta, perpendicolare a $\boldsymbol{p}$, fa ruotare la quantità di moto senza cambiarne il modulo.

Si chiama **giroscopio** un corpo a simmetria assiale, come una ruota o un disco pesante, che ruota velocemente attorno al proprio asse, montato in modo che l'asse possa orientarsi liberamente. Il suo momento angolare è grande, e un momento esterno modesto, che agisce per poco tempo, produce una variazione $\Delta\boldsymbol{L}$ piccola rispetto a $\boldsymbol{L}$: la direzione dell'asse cambia pochissimo. È la **stabilità giroscopica**. Per questo una trottola che gira non cade, un pallone ovale lanciato in rotazione attorno al suo asse lungo vola senza ribaltarsi, e i satelliti usano giroscopi per controllare il proprio orientamento. Anche le ruote di una bicicletta sono giroscopi, ma il loro contributo alla stabilità è solo una parte della storia: conta molto anche la geometria dello sterzo.

Che cosa succede alla trottola inclinata? Il suo peso $Mg$ è applicato al centro di massa, mentre la punta O è ferma sul pavimento: rispetto a O il peso ha momento $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times M\boldsymbol{g}$, orizzontale e perpendicolare al piano verticale che contiene l'asse (Figura 10.6). Se la trottola non girasse, quel momento la farebbe cadere. Ma la trottola ha un grande momento angolare $\boldsymbol{L}$ diretto lungo l'asse, e in ogni intervallo $\Delta t$ il momento del peso aggiunge un piccolo $\Delta\boldsymbol{L}$ orizzontale e perpen-

dicolare a $\boldsymbol{L}$: la punta del vettore $\boldsymbol{L}$ si sposta di lato, non verso il basso. L'asse della trottola descrive lentamente un cono attorno alla verticale: questo moto si chiama **precessione**.

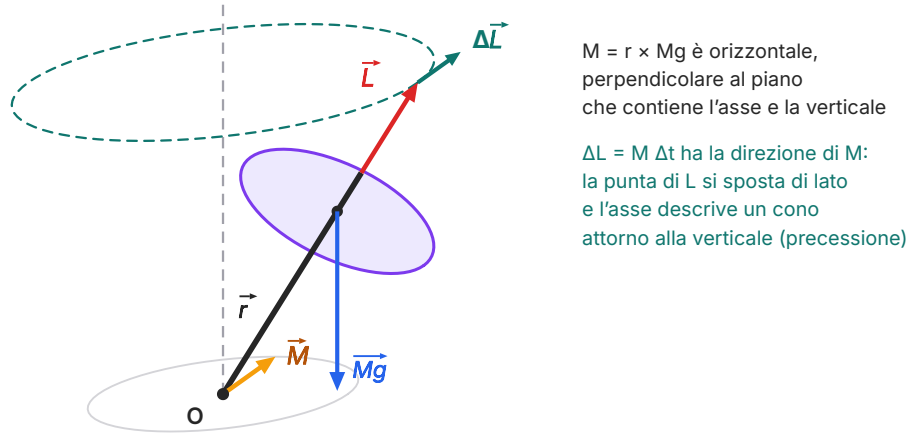



**Figura 10.6** La precessione di una trottola (schema in prospettiva). Il peso $Mg$, applicato al centro di massa, ha rispetto alla punta O il momento $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Mg}$, orizzontale. In un intervallo $\Delta t$ il momento angolare cambia di $\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\Delta t$, parallelo a $\boldsymbol{M}$ e perpendicolare a $\boldsymbol{L}$: l'asse non cade, ma ruota attorno alla verticale descrivendo un cono (circonferenza tratteggiata).

Anche la Terra è una trottola: è un po' schiacciata ai poli, e il Sole e la Luna, attirando il rigonfiamento equatoriale, esercitano su di essa un momento. Il suo asse compie così una lentissima precessione, con un periodo di circa 26 000 anni (precessione degli equinozi): fra qualche migliaio di anni la Stella Polare non sarà più vicina al polo celeste nord.

### 10.5.3 Un dizionario fra traslazioni e rotazioni

La Tabella 10.4 completa con la quantità di moto e il momento angolare il dizionario cominciato nel capitolo 9. Aiuta a ricordare, ma non sostituisce il ragionamento: il momento d'inerzia, a differenza della massa, dipende dall'asse e può cambiare durante il moto.

**Tabella 10.4** Le grandezze e le leggi della traslazione e le loro analoghe per le rotazioni attorno a un asse fisso.

| traslazione | rotazione | note |
|---|---|---|
| posizione $s$ (m) | angolo $\theta$ (rad) | |
| velocità $v$ (m/s) | velocità angolare $\omega$ (rad/s) | $v = \omega r$; nel rotolamento puro $v_{CM} = \omega R$ |
| accelerazione $a$ (m/s$^2$) | accelerazione angolare $\alpha$ (rad/s$^2$) | $a_t = \alpha r$ |
| massa $m$ (kg) | momento d'inerzia $I$ (kg·m$^2$) | $I$ dipende dall'asse |
| forza $\boldsymbol{F}$ (N) | momento di una forza $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ (N·m) | |
| quantità di moto $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ | momento angolare $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$; $L = I\omega$ | kg·m/s; kg·m$^2$/s |
| $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ | $M = I\alpha$; $\boldsymbol{M} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t$ | |
| $K = \frac{1}{2}mv^2$ | $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$ | |
| lavoro $W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ | lavoro $W = M\Delta\theta$ | forza e momento costanti |
| $\boldsymbol{F}_{est} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{p}$ costante | $\boldsymbol{M}_{est} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{L}$ costante | sistema isolato |

**IN SINTESI**

### Le formule del capitolo

$v_{CM} = \omega R$; $a_{CM} = \alpha R$ — condizione di rotolamento puro (nessuno strisciamento): il punto di contatto è istantaneamente fermo, il punto più alto va a $2v_{CM}$.

$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ — energia cinetica (J) di un corpo rigido: traslazione del centro di massa più rotazione attorno a esso. Nel rotolamento puro $K = \frac{1}{2}(M + I_{CM}/R^2)v_{CM}^2$, e l'attrito statico non compie lavoro.

$a_{CM} = g \operatorname{sen}\alpha/(1 + I_{CM}/(MR^2))$ — accelerazione (m/s$^2$) di un corpo che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di $\alpha$: dipende dalla forma, non dalla massa né dal raggio. Il rotolamento resta puro se $\tan\alpha \le \mu_s(1 + \beta)/\beta$.

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$; $L = rp \operatorname{sen}\theta = pr_\perp$ — momento angolare (kg·m$^2$/s) di un punto materiale rispetto a un punto O, perpendicolare al piano di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$ (regola della mano destra).

$L = I\omega$ — momento angolare di un corpo rigido che ruota attorno a un asse di simmetria fisso; è diretto lungo l'asse.

$\boldsymbol{M}_{est} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t$ ($\Delta t \to 0$) — teorema del momento angolare: momenti calcolati rispetto allo stesso punto fisso (o al centro di massa); contiene $M = I\alpha$ come caso particolare.

$\boldsymbol{M}_{est} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{L}$ costante; $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ — conservazione del momento angolare. L'energia cinetica $K = L^2/(2I)$ invece cambia se cambia $I$.

$\Delta A/\Delta t = L/(2m)$ — velocità areolare (m$^2$/s) di un corpo soggetto a una forza centrale: costante; l'orbita è piana e $v_1 r_1 = v_2 r_2$ nei punti di minima e massima distanza.

## SINTESI

- Un corpo in rotolamento puro trasla e ruota insieme, con $v_{CM} = \omega R$: il punto di contatto è istantaneamente fermo, il punto più alto ha velocità $2v_{CM}$; in ogni istante il corpo ruota attorno all'asse istantaneo che passa per il punto di contatto.
- L'energia cinetica di un corpo rigido è la somma di quella di traslazione del centro di massa e di quella di rotazione attorno al centro di massa: $K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$.
- Nel rotolamento puro l'attrito statico non compie lavoro, perché il punto di contatto è fermo: l'energia meccanica si conserva (trascurando l'attrito volvente).
- Lungo un piano inclinato un corpo che rotola ha accelerazione $g \text{ sen } \alpha/(1 + \beta)$, con $\beta = I_{CM}/(MR^2)$: l'ordine di arrivo dipende solo dalla forma; la sfera piena batte il disco, che batte l'anello.
- Il momento angolare di un punto materiale rispetto a O è $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$; il suo modulo è $pr_{\perp}$. Dipende dal punto scelto, ed è costante anche per un corpo in moto rettilineo uniforme.
- Per un corpo rigido che ruota attorno a un asse di simmetria fisso, $L = I\omega$, diretto lungo l'asse.
- Il teorema del momento angolare, $\boldsymbol{M}_{est} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t$, è l'analogo di $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$: le forze interne non cambiano il momento angolare di un sistema.
- Se il momento delle forze esterne è nullo, il momento angolare si conserva: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. La pattinatrice, il tuffatore e la giostra lo mostrano; l'energia cinetica, invece, cambia quando cambia il momento d'inerzia.
- Una forza centrale ha momento nullo rispetto al centro di forza: l'orbita è piana e il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali (velocità areolare $L/(2m)$); è la base della seconda legge di Keplero.
- Un momento esterno perpendicolare a $\boldsymbol{L}$ ne cambia la direzione e non il modulo: un giroscopio è stabile, e una trottola inclinata compie un moto di precessione invece di cadere.

## ESERCIZI

### Comprendere e ricordare

1. ● Una ruota rotola senza strisciare su una strada orizzontale; il suo centro si muove con velocità $v_{CM}$. Il punto della ruota a contatto con la strada ha velocità:
   - **A.** $v_{CM}$, diretta in avanti
   - **B.** $2v_{CM}$, diretta all'indietro
   - **C.** nulla
   - **D.** $v_{CM}$, diretta all'indietro

2. ● Nella stessa ruota, il punto più alto ha velocità di modulo:

   **A.** $v_{CM}$
   **B.** $2v_{CM}$
   **C.** $\sqrt{2}\, v_{CM}$
   **D.** zero

3. ●● Un anello, un disco pieno e una sfera piena, di uguale massa e uguale raggio, vengono lasciati rotolare da fermi, senza strisciare, dalla stessa quota dello stesso piano inclinato. L'ordine di arrivo è:

   **A.** arrivano tutti insieme
   **B.** anello, disco, sfera
   **C.** disco, sfera, anello
   **D.** sfera, disco, anello

4. ● L'unità di misura del momento angolare nel SI è:

   **A.** $kg \cdot m^2/s$
   **B.** $kg \cdot m/s$
   **C.** $N \cdot m$
   **D.** $kg \cdot m^2$

5. ●● Una pattinatrice in piroetta, senza momenti esterni, dimezza il suo momento d'inerzia. La sua velocità angolare e la sua energia cinetica:

   **A.** restano entrambe uguali
   **B.** raddoppiano entrambe
   **C.** la velocità angolare raddoppia, l'energia cinetica resta uguale
   **D.** la velocità angolare quadruplica, l'energia cinetica raddoppia

6. ●● Un pianeta si muove attorno al Sole sotto l'azione della sola attrazione solare. Rispetto al centro del Sole si conserva:

   **A.** la quantità di moto del pianeta
   **B.** la sua velocità
   **C.** la sua energia cinetica
   **D.** il suo momento angolare

7. ● Un cilindro rotola senza strisciare lungo un piano inclinato. La forza d'attrito statico che il piano esercita sul cilindro:

   **A.** non compie lavoro, perché il punto di contatto è fermo
   **B.** compie un lavoro negativo e dissipa energia
   **C.** compie un lavoro positivo e accelera il cilindro
   **D.** è nulla, perché il cilindro non striscia

8. ●● Su un giroscopio con momento angolare $\boldsymbol{L}$ agisce per un breve intervallo $\Delta t$ un momento esterno $\boldsymbol{M}$ perpendicolare a $\boldsymbol{L}$. La variazione $\Delta\boldsymbol{L}$ è:

   **A.** parallela a $\boldsymbol{L}$
   **B.** opposta a $\boldsymbol{L}$
   **C.** parallela a $\boldsymbol{M}$
   **D.** perpendicolare a $\boldsymbol{M}$

### Vero o falso

9. ●● Due dischi pieni con lo stesso raggio ma masse diverse rotolano senza strisciare lungo lo stesso piano inclinato, partendo da fermi: arriva prima il più pesante. V / F

10. ● Se il momento angolare di un sistema si conserva, si conserva anche la sua energia cinetica. V / F

11. ●● Un punto materiale in moto rettilineo uniforme ha momento angolare costante rispetto a qualunque punto fisso. V / F

12. ● Un corpo rigido può essere sottoposto a una forza risultante nulla e a un momento risultante diverso da zero. V / F

13. ●● Nel rotolamento puro la frazione dell'energia cinetica che è di rotazione dipende solo dalla forma del corpo, non dalla sua massa né dalla sua velocità. V / F

### Applicare

14. ● Un'auto viaggia a 108 km/h e le sue ruote, di raggio 0,30 m, rotolano senza strisciare. Calcola la velocità angolare delle ruote in rad/s e in giri al minuto e la velocità del punto più alto di uno pneumatico rispetto alla strada.

15. ● Un disco pieno di 2,0 kg e raggio 0,10 m rotola senza strisciare a 3,0 m/s. Calcola l'energia cinetica di traslazione, quella di rotazione e quella totale.

16. ● Una pallina di 0,50 kg, legata a un filo, gira su una circonferenza orizzontale di raggio 0,80 m a 2,0 m/s. Calcola il modulo del suo momento angolare rispetto al centro della circonferenza e indicane la direzione.

17. ●● Il momento d'inerzia della Terra rispetto al suo asse vale circa $0{,}33\,MR^2$ (meno di quello di una sfera omogenea, perché la densità cresce verso il centro). Con i dati della Tabella A.2 calcola il momento angolare della rotazione terrestre e confrontalo con quello del moto orbitale, circa $2{,}7 \times 10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

18. ●● Usa la Tabella 10.1. Una sfera cava a parete sottile rotola senza strisciare, partendo da ferma, lungo un piano inclinato di 30°. Calcola la sua accelerazione e la velocità dopo 2,0 m di discesa.

19. ●● Un volano con momento d'inerzia $0{,}40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ ruota a 30 rad/s e viene fermato in 5,0 s da un freno. Calcola il momento angolare iniziale e il momento frenante medio.

20. ● Completa. Se il momento risultante delle forze _____ è nullo, il momento angolare del sistema si _____ ; se in questo caso il momento d'inerzia diminuisce, la velocità angolare _____ e l'energia cinetica _____ .

21. ●● Una ragazza siede su uno sgabello girevole con un manubrio in ciascuna mano, a braccia tese; con lo sgabello, ha momento d'inerzia 3,6 kg·m$^2$ e gira a 0,50 giri/s. Portando i manubri al petto riduce il momento d'inerzia a 1,8 kg·m$^2$. Trascurando gli attriti, calcola la nuova frequenza di rotazione e l'energia cinetica prima e dopo.

**Problemi**

22. ●● Una sfera piena parte da ferma in cima a una rampa e rotola senza strisciare fino in fondo, 0,80 m più in basso. a) Con quale velocità arriva in fondo? b) Con quale velocità arriverebbe un blocco che scivola senza attrito lungo la stessa rampa? c) Dove è finita la differenza di energia cinetica?

23. ●●● Uno yo-yo è assimilabile a un disco pieno di massa 0,10 kg e raggio 3,0 cm; il filo è avvolto attorno a un perno di raggio 1,0 cm (massa del perno trascurabile). Si tiene ferma l'estremità del filo e si lascia cadere lo yo-yo, che scende srotolando il filo verticale senza strisciare. Calcola l'accelerazione del centro di massa e la tensione del filo.

24. ●●● Una biglia (sfera piena) rotola senza strisciare a 2,0 m/s sul pavimento, sale lungo una breve rampa su una pedana alta 0,15 m, la percorre e cade dal bordo opposto, che è verticale. Trascura l'attrito volvente e l'aria. a) Con quale velocità rotola sulla pedana? b) A quale distanza orizzontale dal bordo tocca il pavimento (*Fisica 2*, capitolo 2)? c) Con quale velocità del centro di massa tocca il pavimento?

25. ●●● Una pallina (sfera piena, di raggio molto piccolo rispetto all'anello) rotola senza strisciare lungo una pista che termina con un giro della morte di raggio 0,40 m. Da quale quota minima, misurata dal punto più basso dell'anello, deve partire da ferma per percorrere l'anello senza staccarsi? Confronta con la quota minima 2,5$R$ che hai trovato in *Fisica 2*, capitolo 10, per un corpo che scivola senza attrito.

26. ●●● Il coefficiente di attrito statico fra alcuni corpi e un piano inclinato vale 0,20. Calcola l'inclinazione massima per cui rotolano senza strisciare un disco pieno, una sfera piena e un anello. Spiega perché il corpo con il momento d'inerzia più grande inizia a strisciare per primo.

27. ●● Una giostra a disco, di 150 kg e raggio 2,0 m, ruota senza attrito a 0,80 rad/s con un bambino di 40 kg seduto sul bordo. Il bambino cammina fino al centro. a) Calcola la nuova velocità angolare (tratta il bambino come un punto materiale). b) Calcola la variazione di energia cinetica e spiega da dove viene.

28. ●●● Una pallina di plastilina di 50 g, lanciata orizzontalmente a 12 m/s perpendicolarmente a una porta, la colpisce sul bordo libero e resta attaccata. La porta, ferma, è una lastra di 15 kg larga 0,90 m, che ruota senza attrito attorno ai cardini ($I = ML^2/3$, con $L$ la larghezza). a) Quale grandezza si conserva nell'urto, e perché? b) Calcola la velocità angolare della porta subito dopo l'urto. c) Che frazione dell'energia cinetica si è trasformata? d) La quantità di moto si conserva? (Collega il risultato con il capitolo 7.)

29. ●●● Un dischetto di 0,20 kg scivola senza attrito su un tavolo, legato a un filo che passa per un foro al centro del tavolo, e descrive una circonferenza di raggio 0,50 m a 1,2 m/s. Da sotto il tavolo si tira lentamente il filo fino a ridurre il raggio a 0,20 m. a) Perché si conserva il momento angolare del dischetto rispetto al foro? b) Calcola la nuova velocità. c) Calcola la tensione del filo prima e dopo. d) Calcola il lavoro compiuto da chi tira il filo.

### Ragionare e argomentare

30. ●● Un tuffatore esegue un doppio salto mortale raggruppato. Spiega con il momento angolare perché raccoglie le ginocchia al petto e perché si distende prima di entrare in acqua. In volo può cambiare il suo momento angolare attorno al centro di massa? Motiva la risposta.

31. ●● Trova l'errore. Una piattaforma girevole con momento d'inerzia 200 kg·m$^2$ ruota a 1,0 rad/s; un ragazzo di 25 kg, correndo verso l'asse, salta sul bordo, a 2,0 m dall'asse. Luca scrive: «L'energia cinetica si conserva: $\frac{1}{2} \times 200 \times 1{,}0^2 = \frac{1}{2} \times (200 + 25 \times 2{,}0^2) \times \omega^2$, quindi $\omega \approx 0{,}82$ rad/s». Dov'è l'errore? Qual è il risultato corretto?

32. ●●● Progetta un esperimento. Hai due sfere esteriormente identiche, con la stessa massa e lo stesso raggio: una è piena, l'altra è cava, con la massa concentrata in un guscio sottile. Hai a disposizione soltanto un'asse di legno, alcuni spessori, un metro e un cronometro. Proponi un modo per distinguerle senza aprirle né danneggiarle, indicando che cosa misureresti, che cosa ti aspetti di trovare e come terresti conto delle incertezze.

## PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: nel libro I, la proposizione I con la dimostrazione «a colpi» della legge delle aree, che si legge con la sola geometria dei triangoli.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulle rotazioni nel piano e nello spazio, con il momento angolare, la trottola e il giroscopio.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sul rotolamento, sul momento angolare e sulla sua conservazione, con molti problemi risolti.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sul momento angolare spiegate quasi senza formule, dalla pattinatrice al gatto che cade.

# Glossario del capitolo

**Asse istantaneo di rotazione**
Asse fermo, passante per il punto di contatto, attorno al quale un corpo in rotolamento puro sta ruotando in un dato istante con velocità angolare $\omega$.

**Centro di forza**
Punto fisso verso cui (o da cui) è diretta una forza centrale.

**Condizione di rotolamento puro**
Relazione $v_{CM} = \omega R$ (e $a_{CM} = \alpha R$) fra la velocità del centro di massa e la velocità angolare di un corpo di raggio $R$ che rotola senza strisciare.

**Forza centrale**
Forza diretta, in ogni posizione del corpo, lungo la retta che congiunge il corpo con un punto fisso; ha momento nullo rispetto a quel punto.

**Giroscopio**
Corpo a simmetria assiale che ruota velocemente attorno al proprio asse, montato in modo che l'asse possa orientarsi liberamente.

**Momento angolare**
Grandezza vettoriale $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ di un punto materiale rispetto a un punto O; modulo $rp$ sen $\theta$, unità $\mathrm{kg \cdot m^2/s}$.

**Momento angolare di un corpo rigido**
Per un corpo che ruota attorno a un asse di simmetria fisso, $L = I\omega$, diretto lungo l'asse con il verso dato dalla regola della mano destra.

**Precessione**
Moto in cui l'asse di un corpo in rotazione descrive un cono attorno a una direzione fissa, perché un momento esterno perpendicolare a $\boldsymbol{L}$ ne cambia la direzione.

**Principio di conservazione del momento angolare**
Se il momento risultante delle forze esterne è nullo, il momento angolare di un sistema resta costante in modulo, direzione e verso.

**Riflesso di raddrizzamento**
Sequenza di movimenti con cui un gatto in caduta si gira e atterra sulle zampe pur avendo momento angolare sempre nullo.

**Rotolamento con strisciamento**
Moto in cui $v_{CM} \neq \omega R$: il punto di contatto scivola sulla superficie, agisce l'attrito dinamico e l'energia meccanica si dissipa.

**Rotolamento puro**
Moto di un corpo a sezione circolare che rotola senza strisciare: il punto di contatto con la superficie è istantaneamente fermo.

**Stabilità giroscopica**
Tendenza di un corpo con grande momento angolare a mantenere la direzione del proprio asse, perché un piccolo momento esterno produce una piccola variazione di $\boldsymbol{L}$.

**Stella di neutroni**
Corpo celeste formato dal collasso del nucleo di una stella di grande massa: massa simile a quella del Sole, raggio di una decina di chilometri, rotazione rapidissima.

**Teorema del momento angolare**
Il momento risultante delle forze esterne è uguale alla rapidità di variazione del momento angolare: $\boldsymbol{M}_{est} = \Delta\boldsymbol{L}/\Delta t$.

**Velocità areolare**
Area spazzata nell'unità di tempo dal segmento che congiunge un corpo con un punto fisso; per una forza centrale vale $L/(2m)$ ed è costante.

# Soluzioni

**1.** C. Nel rotolamento puro la velocità di traslazione e quella di rotazione del punto di contatto, entrambe di modulo $v_{CM}$, hanno versi opposti.

**2.** B. Nel punto più alto le due velocità hanno lo stesso verso: $v_{CM} + \omega R = 2v_{CM}$.

**3.** D. $a_{CM} = g \text{ sen } \alpha/(1 + \beta)$, con $\beta = 2/5$ per la sfera, 1/2 per il disco, 1 per l'anello: più piccolo è $\beta$, più grande è l'accelerazione.

**4.** A. $L = mvr$: kg · m/s · m = kg·m$^2$/s (equivalente a J·s).

**5.** B. $I\omega$ costante: $\omega$ raddoppia. $K = L^2/(2I)$: con $L$ costante e $I$ dimezzato, $K$ raddoppia.

**6.** D. La forza del Sole è centrale: ha momento nullo rispetto al centro del Sole. La quantità di moto e la velocità cambiano (la forza non è nulla), e l'energia cinetica cambia lungo un'orbita ellittica.

**7.** A. Il punto di applicazione dell'attrito, il punto di contatto, è istantaneamente fermo: lo spostamento è nullo e il lavoro anche. L'attrito però non è nullo: è lui che fa ruotare il cilindro.

**8.** C. $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\Delta t$: ha la direzione e il verso di $\boldsymbol{M}$, ed è quindi perpendicolare a $\boldsymbol{L}$.

**9.** F. $a_{CM} = g \text{ sen } \alpha/(1 + I_{CM}/(MR^2))$ e per un disco pieno $I_{CM}/(MR^2) = ½$ qualunque sia la massa: arrivano insieme.

**10.** F. $K = L^2/(2I)$: se cambia il momento d'inerzia, cambia l'energia cinetica anche a $L$ costante (la pattinatrice, la giostra).

**11.** V. Rispetto a un punto fuori dalla retta $L = pd$, con $p$ e $d$ costanti; rispetto a un punto della retta $L = 0$, costante anch'esso.

**12.** V. È il caso di una coppia di forze: due forze uguali e opposte con rette d'azione diverse hanno risultante nulla e momento non nullo.

**13.** V. $K_{rot}/K = \beta/(1 + \beta)$, con $\beta = I_{CM}/(MR^2)$ fissato dalla forma.

**14.** $v = 108$ km/h $= 30$ m/s; $\omega = v/R = 30$ m/s / 0,30 m $= 1{,}0 \times 10^2$ rad/s; in giri al minuto: $100 \times 60/(2\pi) \approx 9{,}5 \times 10^2$ giri/min. Il punto più alto va a $2v = 60$ m/s.

**15.** $K_{tr} = ½Mv^2 = ½ \times 2{,}0 \text{ kg} \times (3{,}0 \text{ m/s})^2 = 9{,}0$ J; $K_{rot} = ½ \times ½MR^2 \times (v/R)^2 = ¼Mv^2 = 4{,}5$ J; $K = 13{,}5$ J $\approx 14$ J.

**16.** $L = mvr = 0{,}50 \text{ kg} \times 2{,}0 \text{ m/s} \times 0{,}80 \text{ m} = 0{,}80$ kg·m$^2$/s, perpendicolare al piano della circonferenza (verticale), con il verso dato dalla regola della mano destra: verso l'alto se la pallina gira in verso antiorario vista dall'alto.

**17.** $I = 0{,}33 \times 5{,}97 \times 10^{24} \text{ kg} \times (6{,}37 \times 10^6 \text{ m})^2 \approx 8{,}0 \times 10^{37}$ kg·m$^2$; $\omega = 2\pi/(86\,164 \text{ s}) \approx 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s (giorno siderale); $L = I\omega \approx 5{,}8 \times 10^{33}$ kg·m$^2$/s. Il momento angolare orbitale è circa $4{,}6 \times 10^6$ volte più grande.

**18.** $a = (3/5)g \text{ sen } 30° = 0{,}60 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 0{,}50 \approx 2{,}9$ m/s$^2$; $v = \sqrt{(2as)} = \sqrt{(2 \times 2{,}94 \text{ m/s}^2 \times 2{,}0 \text{ m})} \approx 3{,}4$ m/s.

**19.** $L_0 = I\omega_0 = 0{,}40 \text{ kg·m}^2 \times 30 \text{ rad/s} = 12$ kg·m$^2$/s; $M = \Delta L/\Delta t = 12$ kg·m$^2$/s / 5,0 s $= 2{,}4$ N·m.

**20.** esterne; conserva; aumenta; aumenta ($K = L^2/(2I)$).

**21.** Il momento angolare si conserva (attriti trascurati, momento esterno nullo rispetto all'asse): $f_2 = f_1 I_1/I_2 = 0{,}50$ giri/s $\times\, 3{,}6/1{,}8 = 1{,}0$ giri/s. $K_1 = ½ \times 3{,}6$ kg·m$^2 \times (2\pi \times 0{,}50 \text{ s}^{-1})^2 \approx 18$ J; $K_2 = ½ \times 1{,}8$ kg·m$^2 \times (2\pi \times 1{,}0 \text{ s}^{-1})^2 \approx 36$ J: l'energia raddoppia, grazie al lavoro delle braccia.

**22.** Sulla sfera agiscono il peso, la reazione normale e l'attrito statico; questi ultimi due non compiono lavoro, e l'energia meccanica si conserva. a) $Mgh = ½(M + (2/5)M)v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{(10gh/7)} = \sqrt{(10 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 0{,}80 \text{ m} / 7)} \approx 3{,}3$ m/s. b) $v = \sqrt{(2gh)} \approx 4{,}0$ m/s. c) Nel caso della sfera 2/7 dell'energia cinetica sono di rotazione: la stessa energia potenziale si divide fra traslazione e rotazione.

**23.** Sullo yo-yo agiscono il peso $Mg$ verso il basso e la tensione $T$ verso l'alto, applicata al perno a distanza $r = 1{,}0$ cm dall'asse. Traslazione (secondo

principio, asse verso il basso): $Mg - T = Ma$. Rotazione attorno al centro di massa: $Tr = I\alpha$, con $I = \frac{1}{2}MR^2$. Vincolo: il filo si srotola senza strisciare, $\alpha = a/r$. Allora $T = Ia/r^2$ e $Mg = a(M + I/r^2)$: $a = g/(1 + \frac{1}{2}(R/r)^2) = 9{,}8\ \text{m/s}^2/(1 + 4{,}5) \approx 1{,}8\ \text{m/s}^2$. $T = M(g - a) = 0{,}10\ \text{kg} \times (9{,}8 - 1{,}78)\ \text{m/s}^2 \approx 0{,}80\ \text{N}$. Lo yo-yo «rotola» lungo il filo: con un perno sottile, quasi tutta l'energia va nella rotazione.

**24.** a) Durante la salita la biglia rotola senza strisciare: l'attrito statico non compie lavoro e l'energia meccanica si conserva. $(7/10)Mv_0^2 = (7/10)Mv^2 + Mgh \Longrightarrow v = \sqrt{(v_0^2 - 10gh/7)} = \sqrt{(4{,}0 - 2{,}1)}\ \text{m/s} \approx 1{,}4\ \text{m/s}$. b) In volo agisce solo il peso: moto di un proiettile lanciato orizzontalmente. $t = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 0{,}15\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 0{,}175\ \text{s}$; $x = vt \approx 1{,}38\ \text{m/s} \times 0{,}175\ \text{s} \approx 0{,}24\ \text{m}$. c) Componente verticale $gt \approx 1{,}71\ \text{m/s}$; $v = \sqrt{(1{,}38^2 + 1{,}71^2)}\ \text{m/s} \approx 2{,}2\ \text{m/s}$. In volo il peso ha momento nullo rispetto al centro di massa: la biglia continua a ruotare con la stessa $\omega$, ma la rotazione non cambia il moto del centro di massa. La velocità di traslazione all'arrivo, 2,2 m/s, supera quella iniziale: nella salita l'energia potenziale era stata presa sia alla traslazione sia alla rotazione, nella caduta va tutta nella traslazione.

**25.** Sulla pallina agiscono il peso, la reazione della pista e l'attrito statico; gli ultimi due non compiono lavoro: l'energia meccanica si conserva. Nel punto più alto la pallina non si stacca se la reazione è $\geq 0$, cioè se $v^2 \geq gR$ (*Fisica 2*, capitolo 7). Con $v^2 = gR$ nel punto più alto (quota $2R$): $Mgh = Mg(2R) + (7/10)M(gR) \Longrightarrow h = 2{,}7R = 2{,}7 \times 0{,}40\ \text{m} \approx 1{,}1\ \text{m}$. Per un corpo che scivola senza attrito $h = 2{,}5R = 1{,}0\ \text{m}$: la pallina deve partire più in alto perché una parte dell'energia va nella rotazione.

**26.** Dalla condizione $\tan\alpha \leq \mu_s(1 + \beta)/\beta$: disco ($\beta = \frac{1}{2}$): $\tan\alpha \leq 3 \times 0{,}20 = 0{,}60$, $\alpha \leq 31°$; sfera ($\beta = 2/5$): $\tan\alpha \leq 3{,}5 \times 0{,}20 = 0{,}70$, $\alpha \leq 35°$; anello ($\beta = 1$): $\tan\alpha \leq 2 \times 0{,}20 = 0{,}40$, $\alpha \leq 22°$. L'attrito necessario è $F_s = Mg\ \text{sen}\ \alpha \cdot \beta/(1 + \beta)$: cresce con $\beta$, perché un corpo con momento d'inerzia più grande ha bisogno di un momento più grande per accelerare la sua rotazione al ritmo imposto dal rotolamento; l'anello raggiunge per primo il limite $\mu_s N$.

**27.** a) Sistema giostra + bambino; le forze esterne (pesi, reazione dell'asse) hanno momento nullo rispetto all'asse; il bambino che cammina esercita sulla giostra solo forze interne: il momento angolare si conserva. $I_{\text{giostra}} = \frac{1}{2} \times 150\ \text{kg} \times (2{,}0\ \text{m})^2 = 300\ \text{kg·m}^2$; all'inizio $I_1 = 300 + 40 \times 2{,}0^2 = 460\ \text{kg·m}^2$, alla fine $I_2 = 300\ \text{kg·m}^2$. $\omega_2 = 460 \times 0{,}80\ \text{rad/s} / 300 \approx 1{,}2\ \text{rad/s}$. b) $K_1 = \frac{1}{2} \times 460 \times 0{,}80^2\ \text{J} \approx 147\ \text{J}$; $K_2 = \frac{1}{2} \times 300 \times 1{,}227^2\ \text{J} \approx 226\ \text{J}$; $\Delta K \approx +79\ \text{J}$. È il lavoro dei muscoli del bambino, che per avvicinarsi all'asse deve tirarsi verso il centro.

**28.** a) Si conserva il momento angolare del sistema pallina + porta rispetto all'asse dei cardini: durante l'urto i cardini esercitano forze intense, ma applicate sull'asse, con momento nullo rispetto a esso; il peso ha momento nullo rispetto all'asse verticale. La quantità di moto non si conserva, proprio per le forze dei cardini. b) $L = mvd = 0{,}050\ \text{kg} \times 12\ \text{m/s} \times 0{,}90\ \text{m} = 0{,}54\ \text{kg·m}^2\text{/s}$; $I = \frac{1}{3} \times 15\ \text{kg} \times (0{,}90\ \text{m})^2 + 0{,}050\ \text{kg} \times (0{,}90\ \text{m})^2 \approx 4{,}09\ \text{kg·m}^2$; $\omega = L/I \approx 0{,}13\ \text{rad/s}$. c) $K_i = \frac{1}{2} \times 0{,}050\ \text{kg} \times (12\ \text{m/s})^2 = 3{,}6\ \text{J}$; $K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx 0{,}036\ \text{J}$: si è trasformato circa il 99% dell'energia cinetica, come in un urto completamente anelastico con un corpo molto più pesante (capitolo 7). d) No: prima 0,60 kg·m/s; dopo, pallina (0,050 kg a $\omega \times 0{,}90$ m) più porta (15 kg con il centro di massa a $\omega \times 0{,}45$ m) $\approx 0{,}90\ \text{kg·m/s}$. La differenza è l'impulso dato dai cardini.

**29.** a) Sul dischetto agiscono il peso e la reazione del tavolo, che si equilibrano, e la tensione del filo, diretta sempre verso il foro: è una forza centrale, con momento nullo rispetto al foro. b) $v_2 = v_1 r_1/r_2 = 1{,}2\ \text{m/s} \times 0{,}50/0{,}20 = 3{,}0\ \text{m/s}$. c) La tensione è la forza centripeta: $T_1 = mv_1^2/r_1 = 0{,}20\ \text{kg} \times (1{,}2\ \text{m/s})^2/0{,}50\ \text{m} \approx 0{,}58\ \text{N}$; $T_2 = 0{,}20 \times 3{,}0^2/0{,}20\ \text{N} = 9{,}0\ \text{N}$. d) Per il teorema dell'energia cinetica $W = \Delta K = \frac{1}{2} \times 0{,}20\ \text{kg} \times (3{,}0^2 - 1{,}2^2)\ \text{m}^2\text{/s}^2 \approx 0{,}76\ \text{J}$.

**30.** Traccia. Dopo lo stacco l'unica forza è il peso, con momento nullo rispetto al centro di massa: il momento angolare attorno al centro di massa resta quello ricevuto dal trampolino e il tuffatore non può cambiarlo. Può però cambiare il momento d'inerzia: raggruppato, $I$ diminuisce di alcune volte, $\omega$ aumenta nella stessa proporzione e le due rota-

zioni si completano nel tempo del volo; disteso, $I$ aumenta e la rotazione rallenta, così il corpo entra in acqua quasi senza ruotare.

**31.** L'errore è usare la conservazione dell'energia cinetica: quando il ragazzo atterra sulla piattaforma e si ferma rispetto a essa, l'urto è completamente anelastico e una parte dell'energia cinetica diventa energia interna. Si conserva invece il momento angolare (momento esterno nullo rispetto all'asse; il ragazzo, correndo verso l'asse, ha momento angolare iniziale nullo): $\omega = 200 \times 1{,}0/(200 + 25 \times 2{,}0^2)$ rad/s = 200/300 rad/s ≈ 0,67 rad/s.

**32.** Traccia. Si costruisce un piano inclinato con l'asse e gli spessori, si fissano partenza e traguardo e si lasciano rotolare le due sfere, partendo da ferme, misurando il tempo di discesa (cinque prove per ciascuna: tempo medio e semidispersione). Rotolando senza strisciare, la sfera piena ($\beta = 2/5$) ha accelerazione $(5/7)g \operatorname{sen}\alpha \approx 0{,}71\, g \operatorname{sen}\alpha$, quella cava ($\beta = 2/3$) $(3/5)g \operatorname{sen}\alpha = 0{,}60\, g \operatorname{sen}\alpha$: arriva seconda. Il rapporto dei tempi è $\sqrt{(0{,}71/0{,}60)} \approx 1{,}09$: su un piano lungo 1 m e inclinato di qualche grado (tempi di 1–2 s) la differenza è di circa un decimo di secondo, ben più della semidispersione di qualche centesimo che si ottiene con un cronometro azionato a mano su più prove. Le due sfere devono partire dallo stesso punto e senza spinta; la massa e il raggio, uguali, non contano (Tabella 10.1). Si può anche ricavare $\beta$ di ciascuna da $a = 2L/t^2$, come nell'esempio svolto sul cilindro misterioso, e confrontarlo con 2/5 e 2/3.