CAPITOLO

9

La dinamica delle rotazioni

Per far girare un corpo non basta sapere quanto pesa: conta dove spingi, e dove sta la sua massa.

OBIETTIVI

1. Descrivere la rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso con θ, ω e α, e risolvere problemi di moto rotatorio uniformemente accelerato anche a partire da un grafico ω–t.
2. Collegare le grandezze angolari alla velocità, all'accelerazione tangenziale e all'accelerazione centripeta dei singoli punti.
3. Scrivere il momento di una forza come prodotto vettoriale $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ e trovarne modulo, direzione e verso.
4. Calcolare il momento d'inerzia di sistemi di punti, usare la Tabella A.4 e il teorema di Huygens-Steiner.
5. Ricavare e applicare il secondo principio per le rotazioni $M = I\alpha$ a ruote frenate, porte e carrucole dotate di massa.
6. Calcolare energia cinetica di rotazione, lavoro e potenza di un momento, e misurare in laboratorio il momento d'inerzia di un disco.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 La cinematica delle rotazioni 2
9.2 Il momento di una forza come vettore 6
9.3 Il momento d'inerzia 8
9.4 Il secondo principio della dinamica per le rotazioni 11
9.5 Energia e potenza nelle rotazioni 17

Fisica 3 · Parte III · Il corpo rigido e i fluidi in movimento · versione 1.0
Capitolo 9: La dinamica delle rotazioni · pagine 241–266 del volume completo · estratto per lo studio

Spingi una porta vicino alla maniglia: si apre docile. Spingila con la stessa forza a una spanna dai cardini: quasi non si muove. In casi come questo il corpo non trasla, ruota attorno a un asse fisso; e la sua risposta non dipende soltanto da quanto è grande la forza e da quanto è grande la massa, ma da **dove** è applicata la forza e da **dove** si trova la massa.

Nel primo volume hai studiato l'equilibrio del corpo rigido con il momento di una forza, $M = Fb$ (*Fisica 1*, capitolo 10): un corpo resta fermo se la somma delle forze e la somma dei momenti sono nulle. In questo capitolo togliamo la condizione «fermo» e costruiamo la **dinamica delle rotazioni**: le grandezze che descrivono una rotazione che accelera, il momento come vettore, il momento d'inerzia, cioè la «massa» delle rotazioni, e la legge che li collega, $M = I\alpha$, sorella di $F = ma$. Chiuderemo con l'energia e la potenza di un corpo che gira, dal volano al motore di un'automobile.

9.1 La cinematica delle rotazioni

9.1.1 Il corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso

Un corpo rigido è un corpo esteso le cui parti mantengono sempre le stesse distanze fra loro (*Fisica 1*, capitolo 1). Il suo moto più semplice, dopo la traslazione, è la rotazione attorno a un asse di rotazione fisso: la ruota di una bicicletta sollevata, una porta sui cardini, il cestello di una lavatrice, la Terra attorno al proprio asse. Ogni punto descrive una circonferenza con il centro sull'asse.

Poiché il corpo non si deforma, basta un numero per dire come è orientato: l'angolo θ di cui ha ruotato un suo raggio qualsiasi rispetto a una retta di riferimento, misurato in radianti e positivo in senso antiorario (Figura 9.1a). Tutti i raggi del corpo ruotano dello stesso angolo nello stesso tempo. È questo il vantaggio delle grandezze angolari: punti diversi del corpo percorrono archi diversi, ma lo spostamento angolare $\Delta\theta$, la velocità angolare ω e, come vedremo, l'accelerazione angolare sono **le stesse per tutto il corpo**.

9.1.2 Velocità angolare e accelerazione angolare

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 2*, capitolo 3) hai definito la velocità angolare media $\omega = \Delta\theta/\Delta t$, che si misura in rad/s. Con lo stesso passaggio al limite del capitolo 1, la velocità angolare **istantanea** è il valore a cui tende $\Delta\theta/\Delta t$ quando $\Delta t \to 0$: è la pendenza della retta tangente al grafico di θ in funzione di t.

Se la rotazione accelera o rallenta, ω cambia. Si chiama **accelerazione angolare media** nell'intervallo Δt il rapporto fra la variazione della velocità angolare e l'intervallo di tempo:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (\text{rad/s}^2)$$

e **accelerazione angolare istantanea** α il limite di questo rapporto per $\Delta t \to 0$, cioè la pendenza della tangente al grafico di ω in funzione di t. L'unità è il rad/s^2, o semplicemente s^{-2}, perché il radiante è un numero puro. Se α ha segno opposto a ω, la rotazione rallenta.

Nei problemi di questo capitolo l'asse è fisso, e il segno basta: positivo per le rotazioni antiorarie, negativo per quelle orarie, come per i momenti di *Fisica 1*. Ma la rotazione ha anche una direzione, quella dell'asse, e un verso. Per questo si definisce il **vettore velocità angolare** $\boldsymbol{\omega}$: ha modulo ω, è diretto lungo l'asse di rotazione e ha il verso dato dalla regola della mano destra (capitolo 1): se le dita chiuse seguono il verso della rotazione, il pollice indica il verso di $\boldsymbol{\omega}$. Ci servirà nel capitolo 10.

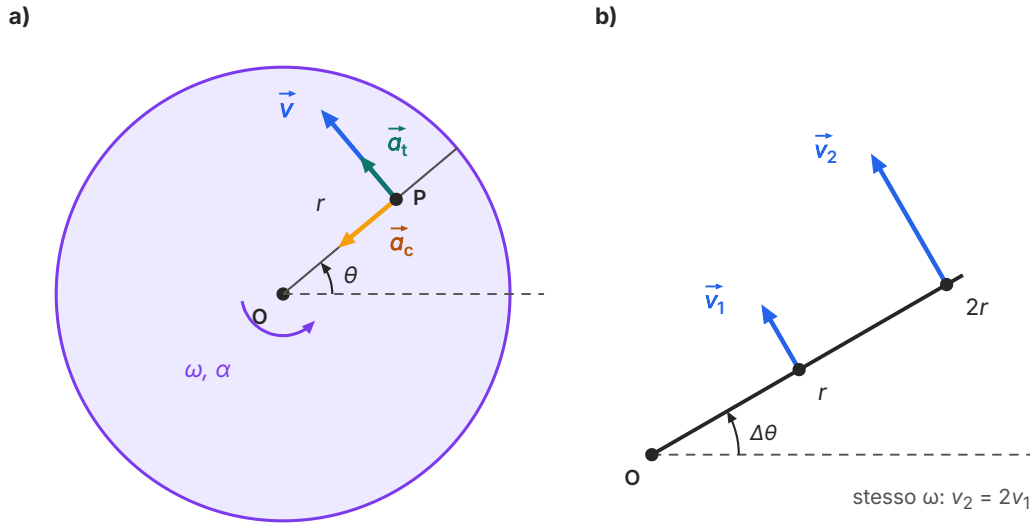


Figura 9.1 a) Un disco che ruota attorno a un asse fisso perpendicolare al foglio e passante per O. La posizione angolare θ del raggio OP è misurata in senso antiorario da una retta di riferimento (tratteggiata); ω e α, le stesse per tutti i punti del disco, sono indicate dalla freccia curva. Il punto P, a distanza r dall'asse, ha velocità $\boldsymbol{v}$ tangente alla sua circonferenza (in blu), accelerazione tangenziale $a_t = \alpha r$ (in verde) e accelerazione centripeta $a_c = \omega^2 r$ (in arancione), qui per una rotazione antioraria che accelera. b) Due punti dello stesso raggio, a distanza r e $2r$ dall'asse: nello stesso tempo ruotano dello stesso angolo, ma il secondo percorre un arco doppio e ha velocità doppia.

9.1.3 Il moto rotatorio uniformemente accelerato

Se ω è costante il corpo è in **moto rotatorio uniforme**: ogni punto è in moto circolare uniforme e l'angolo cresce in proporzione al tempo, $\theta = \theta_0 + \omega t$. Il caso successivo per semplicità è quello di accelerazione angolare costante, il **moto rotatorio uniformemente accelerato**: un motore

che si avvia, un cestello che prende giri, una ruota frenata con forza costante. Le sue leggi non vanno ricavate di nuovo. La definizione $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ e la relazione fra θ e ω hanno la stessa forma matematica di quelle fra s, v e a nel moto rettilineo; basta quindi riscrivere le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato (*Fisica 1*, capitolo 16) con le grandezze angolari, come nella Tabella 9.1.

Tabella 9.1 Le leggi del moto uniformemente accelerato: moto rettilineo e rotazione attorno a un asse fisso. Le formule si corrispondono termine a termine sostituendo s con θ, v con ω e a con α.

Grandezza o legge	Moto rettilineo	Rotazione attorno a un asse fisso
posizione	s (m)	θ (rad)
velocità	v (m/s)	ω (rad/s)
accelerazione	a (m/s^2)	α (rad/s^2)
legge della velocità	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
legge oraria	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
relazione senza il tempo	$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$
spostamento come area	Δs = area sotto il grafico v–t	$\Delta\theta$ = area sotto il grafico ω–t

ESEMPIO SVOLTO

La centrifuga della lavatrice

Problema. Nella fase di centrifuga il cestello di una lavatrice, di raggio 25 cm, passa da fermo a 1200 giri/min in 12 s. Supponi che l'accelerazione angolare sia costante. a) Calcola α. b) Quanti giri compie il cestello durante l'avvio? c) Calcola, dopo 1,0 s e alla fine dell'avvio, l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione centripeta di un punto della parete del cestello.

Soluzione. a) Convertiamo la velocità angolare finale in rad/s: ogni giro vale 2π rad e un minuto 60 s, quindi $\omega = 1200 \times 2\pi$ rad / 60 s $\approx$ 125,7 rad/s. Da $\omega = \omega_0 + \alpha t$ con $\omega_0 = 0$: α = 125,7 rad/s / 12 s $\approx$ 10,5 rad/s^2. b) $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 10{,}47$ rad/s$^2 \times$ (12 s)$^2 \approx 754$ rad, cioè 754/(2π) = 120 giri. Si ottiene lo stesso numero dalla velocità media: (0 + 1200 giri/min)/2 = 600 giri/min, per 0,20 min, fa 120 giri. c) L'accelerazione tangenziale è costante: $a_t = \alpha r = 10{,}47$ rad/s$^2 \times 0{,}25$ m $\approx 2{,}6$ m/s^2. Dopo 1,0 s ω = 10,47 rad/s e $a_c = \omega^2 r = (10{,}47$ rad/s$)^2 \times 0{,}25$ m ≈ 27 m/s^2; alla fine $a_c = (125{,}7$ rad/s$)^2 \times 0{,}25$ m $\approx 3{,}9 \times 10^3$ m/s^2, circa 400 volte g.

Controllo. (rad/s^2) · m = m/s^2: il radiante è un numero puro. L'accelerazione centripeta cresce con ω^2: a fine avvio i panni, premuti contro la parete, non riescono più a trattenere l'acqua, che sfugge dai fori (capitolo 3).

9.1.4 Grandezze angolari e grandezze lineari

Le grandezze angolari sono comuni a tutto il corpo; le grandezze lineari, invece, dipendono dalla distanza r del punto dall'asse. Un punto a distanza r, mentre il corpo ruota di $\Delta\theta$, percorre un arco $\Delta s = r\Delta\theta$ (è la definizione di radiante). Dividendo per Δt si ottiene la relazione che già conosci, $v = \omega r$; e se ω cambia di $\Delta\omega$, la velocità del punto cambia di $\Delta v = r\Delta\omega$. Dividendo ancora per Δt si trova l'accelerazione tangenziale del punto, che nel capitolo 1 avevi visto cambiare il modulo della velocità:

$$v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

La terza relazione è l'accelerazione centripeta di *Fisica 2*, capitolo 3, scritta con ω. Tutte e tre crescono in proporzione a r (Figura 9.1b): i punti sul bordo di una ruota sono i più veloci e i più accelerati, quelli vicino all'asse quasi non si muovono. Come nel moto circolare non uniforme del capitolo 1, l'accelerazione di un punto è la somma vettoriale di a_t e a_c, perpendicolari fra loro, e ha modulo $\sqrt{(a_t^2 + a_c^2)}$.

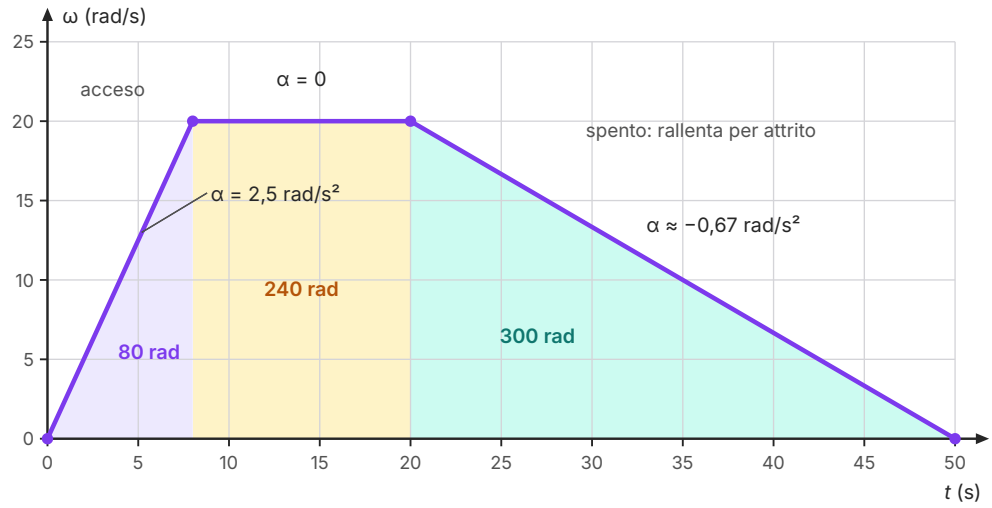


Figura 9.2 La velocità angolare delle pale del ventilatore dell'esempio svolto (dati schematizzati). La pendenza di ciascun tratto è l'accelerazione angolare; le aree colorate sotto il grafico sono gli angoli descritti nelle tre fasi, in totale 620 rad, circa 99 giri.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico ω–*t* di un ventilatore

Problema. La Figura 9.2 mostra la velocità angolare delle pale di un ventilatore da soffitto, misurata con un sensore ottico: il ventilatore viene acceso, gira a regime e poi viene spento. a) Calcola l'accelerazione angolare in ciascuna fase. b) Quanti giri compiono le pale in tutto? c) Le pale sono lunghe 65 cm, misurate dall'asse: qual è la velocità massima della loro estremità?

Soluzione. Il grafico è formato da tre segmenti, quindi in ogni fase α è costante ed è la pendenza del segmento. a) Fra 0 e 8 s: $\alpha = (20\ \text{rad/s} - 0)/8\ \text{s} = 2{,}5\ \text{rad/s}^2$; fra 8 e 20 s il grafico è orizzontale, $\alpha = 0$; fra 20 e 50 s: $\alpha = (0 - 20\ \text{rad/s})/30\ \text{s} \approx -0{,}67\ \text{rad/s}^2$, negativa perché le pale rallentano. b) L'angolo descritto è l'area sotto il grafico, somma di un triangolo, un rettangolo e un altro triangolo: $\Delta\theta = \tfrac{1}{2} \times 8\ \text{s} \times 20\ \text{rad/s} + 12\ \text{s} \times 20\ \text{rad/s} + \tfrac{1}{2} \times 30\ \text{s} \times 20\ \text{rad/s} = 80\ \text{rad} + 240\ \text{rad} + 300\ \text{rad} = 620\ \text{rad}$, cioè $620/(2\pi) \approx 99$ giri. c) $v_{\max} = \omega_{\max} r = 20\ \text{rad/s} \times 0{,}65\ \text{m} = 13\ \text{m/s}$.

Controllo. Dopo lo spegnimento le pale compiono circa 48 giri, quasi metà del totale: l'attrito frena molto meno di quanto il motore acceleri.

ERRORE FREQUENTE

«$\omega = 1200$ giri/min, quindi $a_c = \omega^2 r = 1200^2 \times 0{,}25$ m.» **No.** Le relazioni $v = \omega r$, $a_t = \alpha r$ e $a_c = \omega^2 r$ valgono soltanto con gli angoli in **radianti**: derivano dalla definizione di radiante, arco = raggio × angolo. Prima di usarle, converti i giri al minuto (giri/min) in rad/s, moltiplicando per $2\pi/60$, e i gradi in radianti, moltiplicando per $\pi/180$.

9.2 Il momento di una forza come vettore

9.2.1 Dal braccio al prodotto vettoriale

Nel primo volume il momento di una forza rispetto a un polo O era il prodotto del modulo della forza per il suo braccio, la distanza b di O dalla retta d'azione: $M = Fb$, con il segno positivo per le forze che tendono a far ruotare il corpo in senso antiorario. Con il prodotto vettoriale del capitolo 1 possiamo ora dare al momento la forma completa, valida anche quando le forze non stanno tutte in un piano.

Sia $\boldsymbol{r}$ il vettore che va dal polo O al punto di applicazione P della forza $\boldsymbol{F}$ (Figura 9.3). Si chiama **momento di una forza** rispetto al polo O il vettore

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (\text{N·m})$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale:

- il **modulo** è $M = rF \operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo fra $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$. Poiché $r \operatorname{sen}\theta$ è proprio la distanza di O dalla retta d'azione, $M = Fb$: il modulo è quello che conoscevi;

- la **direzione** è perpendicolare al piano che contiene $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$, cioè è la direzione dell'asse attorno al quale la forza tende a far ruotare il corpo;
- il **verso** segue la regola della mano destra: se le dita ruotano da $\boldsymbol{r}$ verso $\boldsymbol{F}$, il pollice indica il verso di $\boldsymbol{M}$. Una forza che, nel piano del foglio, tende a far ruotare il corpo in senso antiorario ha un momento che esce dal foglio; una che lo fa ruotare in senso orario, un momento che entra nel foglio.

La convenzione dei segni di *Fisica 1* non va dunque abbandonata: è la componente di $\boldsymbol{M}$ lungo un asse z che esce dal foglio. Nei problemi piani continueremo a usarla, con il verso antiorario positivo.

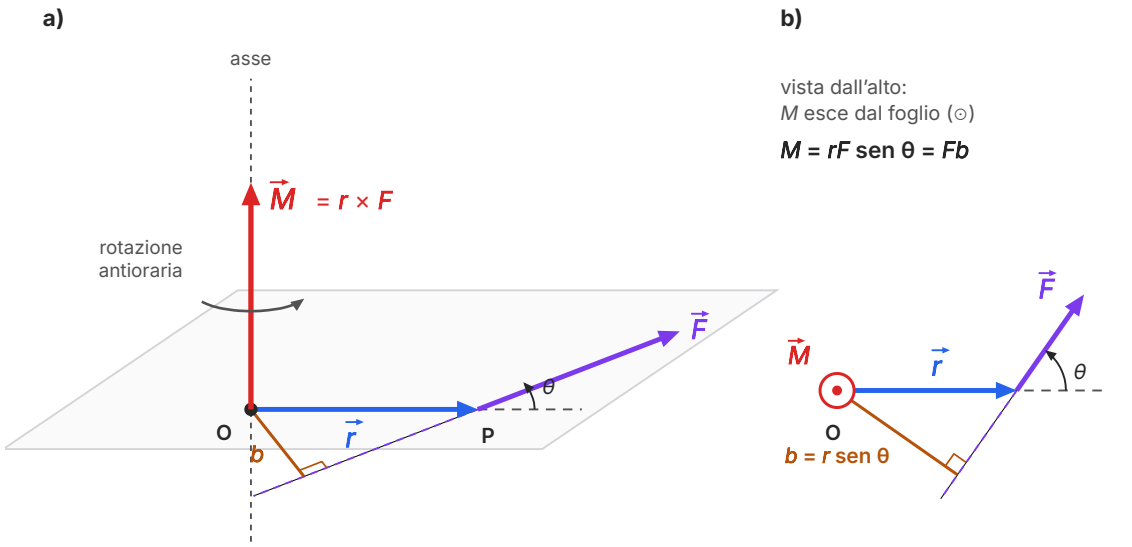


Figura 9.3 Il momento di una forza come prodotto vettoriale. a) La forza $\boldsymbol{F}$ è applicata nel punto P, individuato rispetto al polo O dal vettore $\boldsymbol{r}$; θ è l'angolo fra $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$. Il momento $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ è perpendicolare al piano di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$, lungo l'asse di rotazione tratteggiato, e il suo verso è dato dalla regola della mano destra, come per il prodotto vettoriale del capitolo 1. b) La stessa situazione vista dall'alto: il braccio $b = r \operatorname{sen} \theta$ è la distanza di O dalla retta d'azione (tratteggiata) della forza, e il momento, che esce dal foglio, si indica con il simbolo ⊙.

Un esempio numerico. Una chiave inglese lunga 25 cm, misurati dall'asse del bullone, viene tirata con una forza di 80 N che forma un angolo di 60° con il manico, nel piano perpendicolare al bullone. Il momento ha modulo $M = rF \operatorname{sen} \theta = 0{,}25 \text{ m} \times 80 \text{ N} \times \operatorname{sen} 60° \approx 17 \text{ N·m}$ ed è diretto lungo l'asse del bullone; se la forza tende a far girare la chiave in senso antiorario per chi guarda la testa del bullone, il momento punta verso chi guarda e, con una filettatura destra, svita il bullone. Tirando perpendicolarmente al manico si avrebbe il massimo, 20 N·m.

9.2.2 Il momento rispetto a un asse fisso

Quando il corpo è vincolato a ruotare attorno a un asse fisso, come una porta o una ruota, conta soltanto la componente del momento **lungo l'asse**; le altre componenti sono equilibrate dalle reazioni dei cardini o dei cuscinetti, che tengono l'asse al suo posto. Scomponendo la forza, la componente parallela all'asse non fa girare il corpo e quella radiale ha retta d'azione che passa per l'asse; resta la componente tangenziale F_t, perpendicolare sia all'asse sia al raggio, e il momento lungo l'asse vale $M = rF_t$, dove r è la distanza dall'asse del punto di applicazione.

DA RICORDARE

Il momento dipende dal polo. Lo stesso vettore $\boldsymbol{F}$ ha momenti diversi rispetto a poli diversi, perché cambia $\boldsymbol{r}$. Scrivi sempre rispetto a quale polo o a quale asse calcoli i momenti, e usa lo stesso per tutte le forze del problema.

Momento nullo. Il momento di una forza è nullo se la forza è nulla, se la sua retta d'azione passa per il polo ($\theta = 0°$ o $180°$) o, per un asse fisso, se la forza è parallela all'asse. Per questo le reazioni di un perno, applicate sull'asse, non compaiono nell'equazione dei momenti.

Momento risultante. Il momento risultante è la somma vettoriale dei momenti delle singole forze, calcolati rispetto allo stesso polo. Una coppia di forze ha risultante nulla ma momento risultante diverso da zero: è il modo di far ruotare un corpo senza spostarne il centro di massa, come fanno le due mani su un volante.

9.3 Il momento d'inerzia

9.3.1 L'inerzia di un corpo che ruota

La massa misura l'inerzia di un corpo, cioè la sua resistenza a cambiare velocità: con la stessa forza, un corpo di massa doppia accelera la metà. Che cosa misura la resistenza di un corpo a cambiare la sua velocità angolare? Un esperimento semplice risponde. Un'asta leggera imperniata al centro porta due masse uguali: con le masse vicine all'asse la stessa spinta la mette in rotazione subito, con le masse alle estremità molto più lentamente, anche se la massa totale non è cambiata.

Il motivo si capisce pensando a un solo punto materiale di massa m, fissato a un'asta di massa trascurabile a distanza r dall'asse. Per dargli un'accelerazione angolare α occorre un'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha r$, quindi una forza tangenziale $F_t = ma_t = m\alpha r$, che ha rispetto all'asse un momento $M = rF_t = mr^2\alpha$. La distanza dall'asse interviene due volte: una perché un punto più lontano deve accelerare di più per seguire la stessa rotazione, una perché il braccio della forza cresce. A parità di momento, l'accelerazione angolare è inversamente proporzionale a mr^2, non a m.

Per un corpo formato da molti punti di masse m_1, m_2, … a distanze r_1, r_2, … dall'asse, si chiama **momento d'inerzia** rispetto a quell'asse la somma

$$I = \Sigma\, m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots \qquad (\text{kg}\cdot\text{m}^2)$$

Il momento d'inerzia è una grandezza scalare, sempre positiva, e si misura in kg·m^2. Per un corpo continuo lo si calcola immaginandolo diviso in tanti pezzetti piccolissimi e sommando i contributi: è un calcolo che richiede l'analisi matematica, che studierai al quinto anno, e qui ne useremo i risultati.

9.3.2 Conta come è distribuita la massa

La Figura 9.4 mostra due manubri con la stessa massa, due sfere di 2,0 kg su un'asta leggera, che ruotano attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per il centro. Trattando le sfere come punti, se distano 0,20 m dall'asse $I = 2 \times 2{,}0\ \text{kg} \times (0{,}20\ \text{m})^2 = 0{,}16\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$; se distano 0,40 m, $I = 0{,}64\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Raddoppiando la distanza il momento d'inerzia quadruplica, e la stessa spinta produce un'accelerazione angolare quattro volte più piccola.

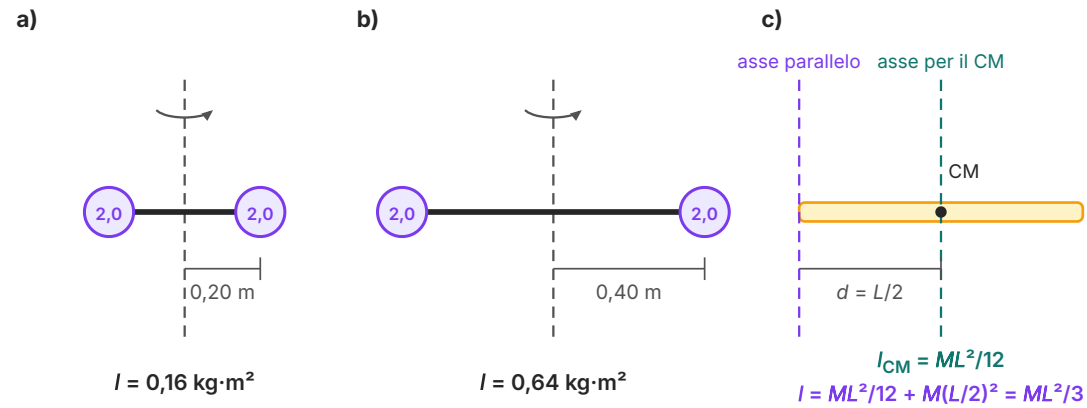


Figura 9.4 a), b) Due manubri con la stessa massa (due sfere di 2,0 kg su un'asta di massa trascurabile) che ruotano attorno all'asse tratteggiato. Allontanando le masse dall'asse da 0,20 m a 0,40 m il momento d'inerzia quadruplica. c) Il teorema di Huygens-Steiner per un'asta sottile di lunghezza L e massa M: rispetto a un asse parallelo a quello per il centro di massa e distante $d = L/2$, cioè passante per un estremo, il momento d'inerzia aumenta di Md^2.

Lo stesso ragionamento spiega i valori della Tabella A.4 dell'appendice, che useremo senza dimostrarli. In un **anello** sottile di massa M e raggio R, che ruota attorno al suo asse di simmetria, tutti i pezzetti stanno alla stessa distanza R dall'asse: la somma dà semplicemente $I = MR^2$. In un **disco** pieno della stessa massa e dello stesso raggio molta massa è vicina all'asse, e il momento d'inerzia è minore: $I = \frac{1}{2}MR^2$. In una **sfera** piena, che rispetto a un diametro ha ancora più massa vicina all'asse, $I = (2/5)MR^2$. Per questo un volano, la ruota pesante che serve a rendere

regolare la rotazione di una macchina, ha spesso la massa concentrata in una corona esterna, collegata al mozzo da raggi sottili.

Conta solo la distanza dall'asse, non la posizione lungo l'asse. Una porta di larghezza a che ruota sui cardini è come un'asta lunga a imperniata a un estremo: ogni striscia verticale della porta dista dall'asse dei cardini quanto il corrispondente pezzetto dell'asta, qualunque sia la sua altezza. Il suo momento d'inerzia è dunque $I = (1/3)Ma^2$, e non dipende dall'altezza della porta, se non attraverso la massa.

COLLEGAMENTI

Il funambolo e la sua asta

Un funambolo che cammina su un cavo porta spesso una lunga asta orizzontale. Quando si sbilancia, il peso gli applica rispetto al cavo un momento che tende a farlo ruotare di lato, e per un piccolo sbilanciamento questo momento cresce poco con l'asta. Cresce molto, invece, il momento d'inerzia. Schematizziamo una persona di 70 kg e alta 1,75 m come un'asta che ruota attorno ai piedi: $I \approx (1/3) \times 70\ \text{kg} \times (1{,}75\ \text{m})^2 \approx 71\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Un'asta di 10 kg lunga 8,0 m, tenuta all'altezza delle mani, circa 1,0 m sopra il cavo, ha rispetto al cavo (teorema di Huygens-Steiner, più avanti in questo paragrafo) $I \approx (1/12) \times 10\ \text{kg} \times (8{,}0\ \text{m})^2 + 10\ \text{kg} \times (1{,}0\ \text{m})^2 \approx 63\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$: il momento d'inerzia del sistema quasi raddoppia. L'accelerazione angolare con cui comincia la caduta diventa molto più piccola, e il funambolo ha il tempo di correggerla, spostando l'asta o il corpo.

Lo stesso principio, in piccolo, lo usi quando cammini su un muretto con le braccia aperte, e lo usano i ginnasti sulla trave.

9.3.3 Il teorema di Huygens-Steiner

Il momento d'inerzia dipende dall'asse: lo stesso corpo è più facile da far ruotare attorno a certi assi che ad altri. Fra tutti gli assi paralleli a una certa direzione ce n'è uno speciale, quello che passa per il centro di massa del corpo (capitolo 8), detto **asse baricentrico** perché, dove g è uniforme, il centro di massa coincide con il baricentro. Se si conosce il momento d'inerzia I_{CM} rispetto a questo asse, quello rispetto a qualsiasi asse parallelo si ottiene con il **teorema di Huygens-Steiner** (o degli assi paralleli):

$$I = I_{CM} + Md^2$$

dove M è la massa del corpo e d la distanza fra i due assi. Non lo dimostriamo, ma possiamo controllarlo su un caso della Tabella A.4: per un'asta sottile $I_{CM} = (1/12)ML^2$ e, rispetto a un asse parallelo per un estremo, $d = L/2$ (Figura 9.4c); il teorema dà $I = (1/12)ML^2 + (1/4)ML^2 = (1/3)ML^2$, proprio il valore della tabella. Poiché Md^2 è sempre positivo, **fra tutti gli assi paralleli il momento d'inerzia è minimo per quello che passa per il centro di massa**.

APPROFONDIMENTO

Da Huygens a Eulero

La grandezza che oggi chiamiamo momento d'inerzia è nata da un problema di orologeria. Nel suo *Horologium oscillatorium* (1673) Christiaan Huygens studiò il pendolo composto, un corpo rigido esteso che oscilla attorno a un asse orizzontale, e si chiese a quale pendolo semplice equivalga, cioè dove si trovi il suo «centro di oscillazione». Per rispondere dovette sommare, su tutte le parti del corpo, i prodotti delle masse per i quadrati delle distanze dall'asse: proprio la somma $\Sigma m_i r_i^2$, anche se non le diede un nome.

Il nome si deve a Leonhard Euler (Eulero), che nella *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765) costruì in modo sistematico la dinamica del corpo rigido. Eulero chiamò la somma *momentum inertiae*, un nome che richiama l'analogia che abbiamo seguito anche noi: come nel moto di traslazione l'aumento della velocità è proporzionale alla forza divisa per la massa, così nella rotazione l'aumento della velocità angolare è proporzionale al momento della forza diviso per il momento d'inerzia. Il teorema degli assi paralleli porta oggi i nomi di Huygens, che ne aveva usato l'idea nei calcoli sul pendolo composto, e del geometra svizzero Jakob Steiner, vissuto nell'Ottocento.

9.4 Il secondo principio della dinamica per le rotazioni

Abbiamo visto che per un solo punto materiale il momento della forza tangenziale è $mr^2\alpha$. Estendiamo ora il risultato a un corpo rigido qualsiasi che ruota attorno a un asse fisso.

ESEMPIO SVOLTO

Ricavare $M = I\alpha$ passo dopo passo

Problema. Un corpo rigido è formato da N punti materiali di masse m_i, a distanze r_i da un asse fisso, collegati da aste rigide di massa trascurabile. Dimostra che il momento risultante delle forze **esterne** rispetto all'asse è uguale a $I\alpha$.

Soluzione. 1) *Cinematica.* Il corpo è rigido: tutti i punti hanno la stessa accelerazione angolare α, e il punto i ha accelerazione tangenziale $a_{t,i} = \alpha r_i$.

2) *Secondo principio per ciascun punto.* Sul punto i agiscono forze esterne (il peso, la spinta di una mano...) e forze interne, esercitate dalle aste e quindi dagli altri punti. Per la componente tangenziale: $F_{t,i} = m_i a_{t,i} = m_i \alpha r_i$, dove $F_{t,i}$ è la componente tangenziale della forza totale, esterna più interna, che agisce sul punto. Le componenti radiali producono l'accelerazione centripeta ma hanno momento nullo rispetto all'asse.

3) *Momenti.* Moltiplichiamo per r_i: il momento rispetto all'asse della forza totale sul punto i è $M_i = r_i F_{t,i} = m_i r_i^2 \alpha$.

4) *Somma su tutti i punti.* $\Sigma M_i = (\Sigma m_i r_i^2)\,\alpha = I\alpha$. A sinistra compaiono i momenti di tutte le forze, interne ed esterne.

5) *Le forze interne si eliminano.* Per il terzo principio le forze interne vanno a coppie: la forza del punto j sul punto k è opposta a quella di k su j e, in un corpo rigido, agisce lungo la retta che li congiunge. Due forze opposte con la stessa retta d'azione hanno lo stesso braccio e momenti opposti: la loro somma è zero. Resta soltanto il momento risultante delle forze esterne:

$$M_{est} = I\alpha$$

Controllo. $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}} = (\mathrm{kg \cdot m/s^2}) \cdot \mathrm{m} = \mathrm{N \cdot m}$.

9.4.1 La legge $M = I\alpha$

Il risultato dell'esempio svolto si chiama **secondo principio della dinamica per le rotazioni**: per un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, il momento risultante delle forze esterne rispetto all'asse è uguale al prodotto del momento d'inerzia rispetto allo stesso asse per l'accelerazione angolare,

$$M_{est} = I\alpha$$

La legge vale per qualsiasi corpo rigido, anche continuo (e, come vedremo nel capitolo 10, anche per l'asse di una ruota che rotola). Il confronto con $F = ma$ è immediato: il momento prende il posto della forza, il momento d'inerzia quello della massa, l'accelerazione angolare quello dell'accelerazione. Se il momento risultante è nullo, $\alpha = 0$: è la condizione di equilibrio dei momenti di *Fisica 1*, e un corpo che già ruota continua con ω costante.

Il metodo per risolvere un problema è quello della dinamica del punto, con un passo in più: 1) disegna il diagramma di corpo libero di ogni corpo, segnando dove è applicata ciascuna forza; 2) per i corpi che traslano scrivi $F = ma$, per quelli che ruotano scrivi $M = I\alpha$ rispetto all'asse di rotazione, scegliendo un verso positivo coerente; 3) collega le incognite con i vincoli, per esempio $a = \alpha r$ per un filo che si svolge da una ruota senza slittare.

9.4.2 Una ruota frenata

Una mola da arrotino, un disco di pietra di 20 kg e raggio 15 cm, gira a 300 giri/min ($\omega_0 \approx 31{,}4$ rad/s). Spento il motore, si preme contro il bordo un attrezzo con una forza di 50 N; il coefficiente di attrito dinamico è 0,40. Peso, reazione del perno e forza premente, radiale, hanno momento nullo rispetto all'asse; l'attrito, $0{,}40 \times 50$ N $= 20$ N, è tangente al bordo e opposto al moto: il suo è un **momento frenante**, di modulo $M = 20\ \text{N} \times 0{,}15\ \text{m} = 3{,}0\ \text{N·m}$. Con $I = \tfrac{1}{2}MR^2 = 0{,}225\ \text{kg·m}^2$, $\alpha = -3{,}0\ \text{N·m} / 0{,}225\ \text{kg·m}^2 \approx -13\ \text{rad/s}^2$: la mola si ferma in $t = \omega_0/|\alpha| \approx 2{,}4$ s, dopo $\Delta\theta = \omega_0^2/(2|\alpha|) \approx 37$ rad, quasi sei giri.

9.4.3 Perché la maniglia è lontana dai cardini

Torniamo alla porta dell'inizio del capitolo: larga 0,80 m, di massa 20 kg, ha momento d'inerzia $I = (1/3) \times 20\ \text{kg} \times (0{,}80\ \text{m})^2 \approx 4{,}3\ \text{kg·m}^2$ rispetto ai cardini. Una spinta di 20 N perpendicolare alla porta, applicata alla maniglia a 0,75 m dai cardini, ha momento 15 N·m e le dà un'accelerazione angolare $\alpha = 15\ \text{N·m} / 4{,}27\ \text{kg·m}^2 \approx 3{,}5\ \text{rad/s}^2$. La stessa spinta a 10 cm dai cardini ha momento 2,0 N·m e produce $\alpha \approx 0{,}47\ \text{rad/s}^2$, più di sette volte meno.

9.4.4 La carrucola con massa

Nel volume dello scorso anno hai studiato la macchina di Atwood (*Fisica 2*, capitolo 6) con una carrucola ideale, priva di massa, e una conseguenza di quell'ipotesi era che la tensione della fune fosse la stessa ai due lati. Ora possiamo togliere l'ipotesi. Se la carrucola ha massa, per farla ruotare con accelerazione angolare α serve un momento risultante $I\alpha$: le tensioni ai due lati devono essere **diverse**, e la loro differenza moltiplicata per il raggio è proprio quel momento (Figura 9.5).

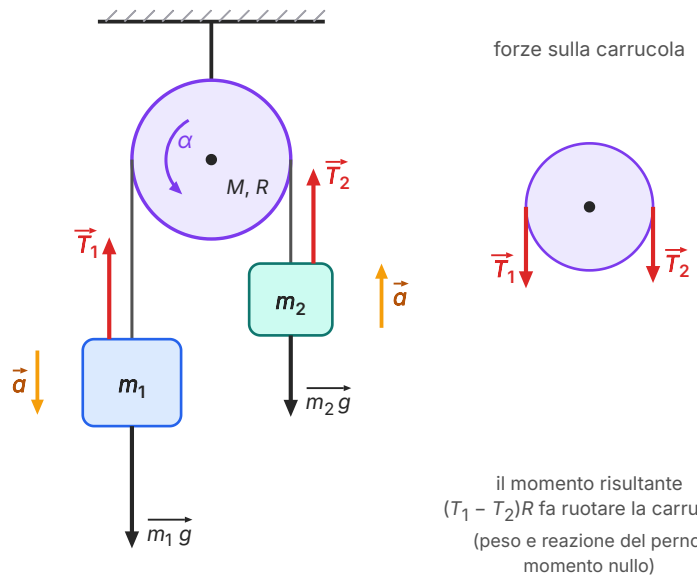


Figura 9.5 La macchina di Atwood dell'esempio svolto, con una carrucola a disco di massa M = 2,0 kg e raggio R = 10 cm. Le frecce delle forze sono in scala fra loro: sul blocco di 3,0 kg la tensione $T_1 \approx 24{,}5$ N è minore del peso (29,4 N), sul blocco di 2,0 kg la tensione $T_2 \approx 22{,}9$ N è maggiore del peso (19,6 N). A destra, le due tensioni che agiscono sulla carrucola: la loro differenza, moltiplicata per il raggio, è il momento risultante che produce l'accelerazione angolare α.

ESEMPIO SVOLTO

La macchina di Atwood con una carrucola vera

Problema. Due blocchi di masse $m_1 = 3{,}0$ kg e $m_2 = 2{,}0$ kg sono appesi ai capi di una fune leggera e inestensibile che passa su una carrucola a forma di disco pieno, di massa $M = 2{,}0$ kg e raggio $R = 10$ cm. La fune non slitta sulla carrucola e l'attrito nel perno è trascurabile. Il sistema parte da fermo. a) Calcola l'accelerazione dei blocchi. b) Calcola le tensioni dei due tratti di fune. c) Confronta con il caso di una carrucola di massa trascurabile.

Soluzione. Sul blocco 1 agiscono il peso $m_1 g$ verso il basso e la tensione T_1 verso l'alto; sul blocco 2 il peso $m_2 g$ e la tensione T_2; sulla carrucola le due tensioni, tirate verso il basso ai due lati, il peso e la reazione del perno, che hanno momento nullo rispetto all'asse. Il blocco 1 scende, il 2 sale e la carrucola ruota in senso antiorario: scegliamo questi versi come positivi. Le equazioni sono

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a \qquad (T_1 - T_2) R = I\alpha$$

e il vincolo del filo che non slitta è $a = \alpha R$. Con $I = \tfrac{1}{2} M R^2$ la terza equazione diventa $T_1 - T_2 = Ia/R^2 = \tfrac{1}{2} Ma$. a) Sommando le tre equazioni le tensioni si eliminano:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2} M} = \frac{1{,}0 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2}{6{,}0 \text{ kg}} \approx 1{,}6 \text{ m/s}^2$$

b) $T_1 = m_1 (g - a) = 3{,}0 \text{ kg} \times (9{,}8 - 1{,}63) \text{ m/s}^2 \approx 24{,}5$ N; $T_2 = m_2 (g + a) = 2{,}0 \text{ kg} \times (9{,}8 + 1{,}63) \text{ m/s}^2 \approx 22{,}9$ N. La differenza, 1,6 N, moltiplicata per il raggio dà il momento 0,16 N·m che accelera la carrucola. c) Con $M = 0$ si ritrova la formula dello scorso anno, $a = 1{,}0 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 / 5{,}0 \text{ kg} = 1{,}96 \text{ m/s}^2$, con un'unica tensione di 23,5 N.

Controllo. $I\alpha = (\tfrac{1}{2} \times 2{,}0 \text{ kg} \times 0{,}010 \text{ m}^2) \times (1{,}63 \text{ m/s}^2 / 0{,}10 \text{ m}) \approx 0{,}16$ N·m, uguale a $(T_1 - T_2) R$. La carrucola si comporta come una massa aggiuntiva $\tfrac{1}{2} M = 1{,}0$ kg che va accelerata ma non viene tirata dal peso: per questo il sistema accelera meno che con la carrucola ideale.

ERRORE FREQUENTE

«La tensione è la stessa in tutta la fune.» È vero soltanto se la carrucola ha massa trascurabile (o se non accelera). Con una carrucola dotata di massa, usare un'unica tensione T porta a scrivere $(T - T) R = I\alpha$, cioè $\alpha = 0$: un assurdo. Dai a ogni tratto di fune la sua tensione.

Un secondo errore è sommare la massa M della carrucola a quelle dei blocchi, come se traslasse con loro. La carrucola non trasla, ruota: nel denominatore compare I/R^2, che per un disco vale $\tfrac{1}{2} M$ e per un anello M. Il momento d'inerzia di un corpo «tondo» non è sempre $\tfrac{1}{2} MR^2$: dipende dalla forma (Tabella A.4).

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il momento d'inerzia di un disco

Materiali. Un disco di alluminio con un rocchetto coassiale, su un asse orizzontale con cuscinetti a sfere (Figura 9.6a); un filo sottile; masse da 50 g a 200 g; metro a nastro, calibro, cronometro, bilancia.

Procedimento. 1) Misura la massa del disco, $M = (1{,}500 \pm 0{,}001)$ kg, il suo raggio, $R = (15{,}00 \pm 0{,}05)$ cm, e il raggio del rocchetto, $r = (2{,}50 \pm 0{,}01)$ cm. 2) Avvolgi il filo sul rocchetto e appendi una massa m, ferma a un'altezza $h = (80{,}0 \pm 0{,}2)$ cm dal pavimento. 3) Lasciala andare e misura il tempo di caduta t (media di cinque prove, incertezza circa 0,05 s); ripeti per le altre masse. 4) Calcola l'accelerazione $a = 2h/t^2$ (moto uniformemente accelerato da fermo), l'accelerazione angolare $\alpha = a/r$, la tensione $T = m(g - a)$ e il suo momento $M_{\text{filo}} = Tr$.

Tabella 9.2 Disco con massa che scende appesa al rocchetto (dati tipici). I tempi sono medie di cinque prove; l'incertezza di α viene dalla propagazione delle incertezze su t, h e r.

m (g)	t (s)	a (m/s^2)	α (rad/s^2)	M_{filo} (mN·m)
50	11,48	0,0121	0,485 ± 0,007	12,2
100	7,25	0,0304	1,22 ± 0,02	24,4
150	5,77	0,0481	1,92 ± 0,05	36,6
200	4,91	0,0664	2,66 ± 0,07	48,7

Che cosa concludere. Sul disco agiscono il momento della tensione del filo e un piccolo momento d'attrito dei cuscinetti, M_{attr}, opposto al moto; il peso del disco e la reazione dell'asse hanno momento nullo. Il secondo principio per le rotazioni dà $M_{\text{filo}} - M_{\text{attr}} = I\alpha$, cioè $M_{\text{filo}} = I\alpha + M_{\text{attr}}$: se l'attrito è costante, i punti del grafico di M_{filo} in funzione di α stanno su una retta con pendenza I e intercetta M_{attr}. Il grafico (Figura 9.6b) è lineare; la retta di miglior accordo ha pendenza $I \approx 16{,}8 \times 10^{-3}$ kg·m^2 e intercetta $M_{\text{attr}} \approx 4{,}1 \times 10^{-3}$ N·m. Lo stesso valore si ottiene con il **metodo delle due masse**: sottraendo l'equazione della prima riga da quella dell'ultima, l'attrito si elimina e $I = \Delta M_{\text{filo}}/\Delta\alpha = (48{,}7 - 12{,}2)$ mN·m / $(2{,}66 - 0{,}485)$ rad/s$^2 \approx 16{,}8 \times 10^{-3}$ kg·m^2; propagando le incertezze di α si trova $I = (16{,}8 \pm 0{,}6) \times 10^{-3}$ kg·m^2. Trascurando l'attrito, dalla sola riga con 200 g si otterrebbe un valore sbagliato del 9% circa.

Confronto teoria–esperimento. Per un disco pieno la Tabella A.4 prevede $I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2} \times 1{,}500$ kg $\times$ $(0{,}1500\text{ m})^2 \approx 16{,}9 \times 10^{-3}$ kg·m^2, con un'incertezza relativa di 0,07% + 2 × 0,33% ≈ 0,7%, cioè $(16{,}9 \pm 0{,}1) \times 10^{-3}$ kg·m^2. L'intervallo della misura, da 16,2 a 17,4, contiene quello della previsione: i due valori sono compatibili. Il contributo del rocchetto, piccolo e vicino all'asse, è trascurabile.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze e il calcolo completo per una riga; traccia il grafico di M_{filo} in funzione di α con le barre d'errore, la retta di miglior accordo e le rette di massima e minima pendenza (*Fisica 1*, capitolo 5), e ricava I e M_{attr} con le loro incertezze. Confronta I con $\frac{1}{2}MR^2$. Discuti gli errori sistematici: il filo che si avvolge su più strati, l'attrito che cambia con la velocità.

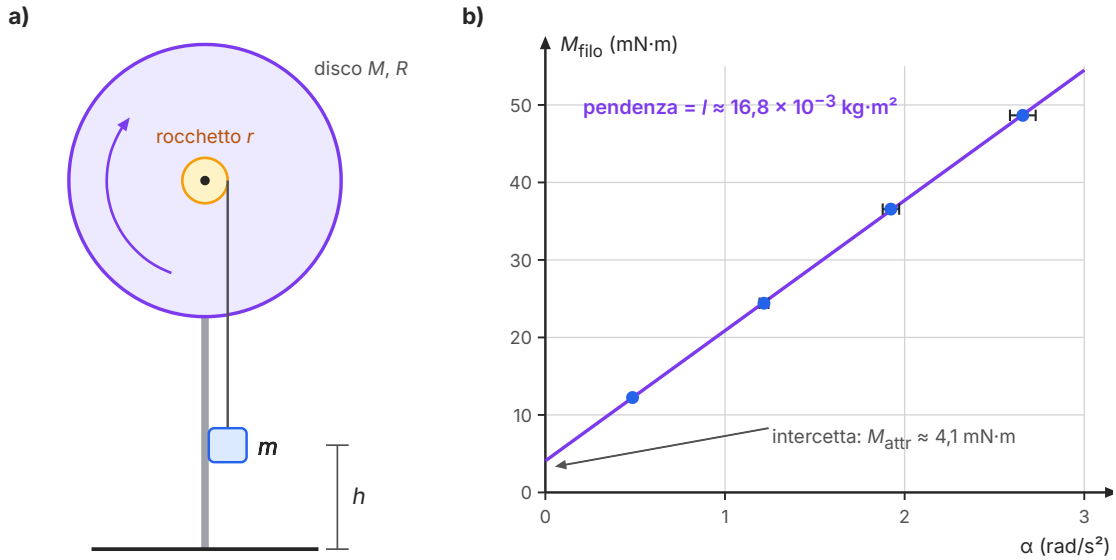


Figura 9.6 a) Schema dell'esperimento: la massa m, appesa a un filo avvolto sul rocchetto di raggio r, scende da ferma per un'altezza h e mette in rotazione il disco di massa M e raggio R. b) Il momento della tensione del filo in funzione dell'accelerazione angolare, con i dati della Tabella 9.2 e le barre d'incertezza su α. La pendenza della retta di miglior accordo è il momento d'inerzia del disco; l'intercetta è il momento delle forze d'attrito.

9.5 Energia e potenza nelle rotazioni

9.5.1 L'energia cinetica di rotazione

Un corpo che ruota ha energia cinetica anche se, nel complesso, non si sposta: ogni suo punto si muove. Per un corpo rigido che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse fisso, il punto i ha velocità $v_i = \omega r_i$ e quindi energia cinetica $\frac{1}{2}m_i\omega^2 r_i^2$. Sommando su tutti i punti, e raccogliendo ω^2, che è lo stesso per tutti, si trova l'**energia cinetica di rotazione**:

$$K_{rot} = \Sigma\, \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}(\Sigma m_i r_i^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(J)}$$

Ancora una volta il momento d'inerzia prende il posto della massa e ω quello di v. Non è una nuova forma di energia, ma l'energia cinetica ordinaria di tutti i punti del corpo, scritta in modo comodo.

Un corpo rotante può quindi immagazzinare energia. Si chiama **volano** una ruota con grande momento d'inerzia, montata sull'asse di una macchina per accumulare energia cinetica di rotazione e restituirla quando serve, rendendo la rotazione più regolare. Un volano d'acciaio a forma di disco pieno, di 50 kg e raggio 0,30 m, che gira a 3000 giri/min ($\omega \approx 314$ rad/s), ha $I = 2{,}25$ kg·m^2 e $K_{rot} = \tfrac{1}{2} \times 2{,}25$ kg·m$^2 \times (314$ rad/s$)^2 \approx 1{,}1 \times 10^5$ J: abbastanza per sollevare la sua stessa massa di più di 200 m. Nei motori a scoppio il volano rende regolare la rotazione fra uno scoppio e l'altro.

9.5.2 Il lavoro di un momento e la potenza

Consideriamo una forza tangenziale costante F_t, applicata al bordo di una ruota di raggio r, per esempio la tensione di un filo che si svolge. Mentre la ruota gira di un angolo $\Delta\theta$, il punto di applicazione percorre un arco $\Delta s = r\Delta\theta$, e la forza, sempre parallela allo spostamento, compie il lavoro $W = F_t \Delta s = F_t r \Delta\theta$. Ma $F_t r$ è il momento M della forza rispetto all'asse. Il **lavoro di un momento** costante è dunque

$$W = M\Delta\theta \qquad \text{(J, con } \Delta\theta \text{ in radianti)}$$

Il lavoro è positivo se il momento ha lo stesso verso della rotazione, negativo se è opposto, come per il momento frenante della mola. Per i momenti variabili vale lo stesso discorso fatto per le forze nel capitolo 5: il lavoro è l'area sotto il grafico di M in funzione di θ. Il teorema dell'energia cinetica si estende alle rotazioni: il lavoro totale dei momenti esterni è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione, $W_{tot} = \Delta K_{rot}$. Per la mola dell'esempio precedente, il lavoro dell'attrito è $-3{,}0$ N·m $\times$ 37 rad ≈ -111 J, uguale a $-\tfrac{1}{2} \times 0{,}225$ kg·m$^2 \times (31{,}4$ rad/s$)^2$: tutta l'energia cinetica della mola diventa energia interna della pietra e dell'attrezzo, che si scaldano.

Dividendo il lavoro per l'intervallo di tempo si ottiene la potenza. Poiché $\Delta\theta/\Delta t = \omega$, la **potenza di un momento** è

$$P = M\omega \qquad \text{(W, con } \omega \text{ in rad/s)}$$

È l'analoga di $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ del capitolo 5: un momento grande a bassa velocità angolare può fornire la stessa potenza di un momento piccolo ad alta velocità angolare.

COLLEGAMENTI

Coppia e potenza di un motore

Le schede tecniche delle automobili indicano due numeri per il motore: la potenza massima, in kilowatt (e spesso in cavalli), e la **coppia motrice** massima, in newton per metro, a un certo numero di giri al minuto. La «coppia» è il momento risultante che il motore esercita sul suo albero; il nome viene dal fatto che, come una coppia di forze, fa ruotare l'albero senza spingerlo da una parte.

Le due grandezze sono legate da $P = M\omega$. Un motore che eroga una coppia di 250 N·m a 4000 giri/min, cioè a $\omega = 4000 \times 2\pi/60$ rad/s $\approx$ 419 rad/s, sviluppa una potenza $P = 250$ N·m $\times$ 419 rad/s $\approx 1{,}05 \times 10^5$ W $\approx$ 105 kW, circa 142 CV. Il cambio non aumenta la potenza, ma riducendo la velocità angolare delle ruote rispetto a quella del motore aumenta in proporzione il momento che esse ricevono: per questo in salita si scala marcia.

9.5.3 L'energia nella macchina di Atwood

La conservazione dell'energia (capitolo 5) vale anche quando alcuni corpi ruotano, purché nel bilancio compaia l'energia cinetica di rotazione. Nella macchina di Atwood dell'esempio svolto, senza attriti, quando il blocco di 3,0 kg è sceso di 1,0 m e l'altro è salito di 1,0 m, l'energia potenziale è diminuita di $(m_1 - m_2)gh = 9{,}8$ J, che si divide fra i blocchi e la carrucola (con $\omega = v/R$):

$$(m_1 - m_2)gh = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}M)v^2$$

Si ricava $v = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ \text{J} / 6{,}0\ \text{kg})} \approx 1{,}8$ m/s, lo stesso valore che dà la cinematica, $\sqrt{(2ah)} = \sqrt{(2 \times 1{,}63\ \text{m/s}^2 \times 1{,}0\ \text{m})}$.

Tabella 9.3 Dinamica della traslazione e della rotazione attorno a un asse fisso: le grandezze e le leggi corrispondenti. Nel capitolo 10 la tabella si completerà con la quantità di moto e il momento angolare.

Traslazione	Rotazione attorno a un asse fisso
massa m (kg)	momento d'inerzia $I = \Sigma m_i r_i^2$ (kg·m^2)
forza $\vec{F}$ (N)	momento della forza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (N·m)
secondo principio $\vec{F} = m\vec{a}$	secondo principio $M_{\text{est}} = I\alpha$
energia cinetica $\tfrac{1}{2}mv^2$	energia cinetica di rotazione $\tfrac{1}{2}I\omega^2$
lavoro $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$	lavoro $W = M\Delta\theta$
potenza $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	potenza $P = M\omega$

Le corrispondenze della Tabella 9.3, come quelle della Tabella 9.1, non sono un caso: tutte le leggi della rotazione attorno a un asse fisso si ricavano dalle leggi di Newton applicate ai singoli

punti del corpo, come abbiamo fatto per $M = I\alpha$ e per K_{rot}.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ — accelerazione angolare (rad/s^2), media o, per $\Delta t \to 0$, istantanea; la stessa per tutti i punti di un corpo rigido.

$\omega = \omega_0 + \alpha t$; $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$; $\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha\Delta\theta$ — moto rotatorio uniformemente accelerato (α costante).

$v = \omega r$, $a_t = \alpha r$, $a_c = \omega^2 r$ — grandezze lineari di un punto a distanza r (m) dall'asse; valgono solo con gli angoli in radianti.

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, $M = rF$ sen $\theta = Fb$ — momento di una forza (N·m), perpendicolare al piano di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$, verso dato dalla regola della mano destra; dipende dal polo.

$I = \Sigma m_i r_i^2$ — momento d'inerzia (kg·m^2) rispetto a un asse: dipende dalla massa, dalla sua distribuzione e dall'asse; valori per i corpi omogenei nella Tabella A.4.

$I = I_{CM} + Md^2$ — teorema di Huygens-Steiner, per due assi paralleli a distanza d (m), il primo per il centro di massa.

$M_{est} = I\alpha$ — secondo principio per le rotazioni: momento risultante delle sole forze esterne, rispetto all'asse fisso di rotazione.

$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$; $W = M\Delta\theta$; $P = M\omega$ — energia cinetica di rotazione (J), lavoro di un momento costante (J), potenza (W); $W_{tot} = \Delta K_{rot}$.

SINTESI

- Un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso è descritto da un solo angolo θ; spostamento angolare, velocità angolare ω e accelerazione angolare $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ sono le stesse per tutti i suoi punti.
- Il moto rotatorio uniformemente accelerato ha le stesse leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato, con θ, ω, α al posto di s, v, a; l'angolo descritto è l'area sotto il grafico ω–t.
- Un punto a distanza r dall'asse ha $v = \omega r$, accelerazione tangenziale αr e accelerazione centripeta $\omega^2 r$, con gli angoli in radianti.
- Il momento di una forza rispetto a un polo è il vettore $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$: modulo rF sen $\theta = Fb$, direzione perpendicolare al piano di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$, verso dato dalla regola della mano destra. Per un asse fisso conta solo la componente tangenziale della forza.
- Il momento d'inerzia $I = \Sigma m_i r_i^2$ misura l'inerzia di un corpo nelle rotazioni: dipende dalla massa, da come è distribuita e dall'asse; un anello ha MR^2, un disco $\frac{1}{2}MR^2$.
- Il teorema di Huygens-Steiner, $I = I_{CM} + Md^2$, dà il momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo a quello per il centro di massa; quest'ultimo è il minimo.
- Il secondo principio per le rotazioni, $M_{est} = I\alpha$, si ricava dalle leggi di Newton per i singoli punti; i momenti delle forze interne si annullano a coppie.
- In una macchina di Atwood con carrucola dotata di massa le tensioni ai due lati sono diverse: la loro differenza per il raggio è il momento che fa accelerare la carrucola.
- Un corpo che ruota ha energia cinetica di rotazione $\frac{1}{2}I\omega^2$; un volano la immagazzina e la restituisce.
- Un momento costante compie il lavoro $M\Delta\theta$ e sviluppa la potenza $M\omega$; il lavoro totale dei momenti è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione.
- In laboratorio il momento d'inerzia di un disco si misura dalla caduta di una massa appesa a un filo avvolto sul suo asse; l'attrito si elimina confrontando due masse diverse.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'accelerazione angolare si misura in:
   - **A.** rad/s
   - **B.** rad/s^2
   - **C.** m/s^2
   - **D.** N·m

2. ● Un corpo rigido ruota attorno a un asse fisso. Tutti i suoi punti hanno la stessa:
   A. velocità
   B. accelerazione centripeta
   C. velocità angolare
   D. accelerazione tangenziale

3. ● Il momento $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ di una forza rispetto a un polo è diretto:
   A. lungo la forza
   B. lungo il vettore $\boldsymbol{r}$
   C. sempre verso il basso
   D. perpendicolarmente al piano che contiene $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$

4. ●● Due manubri hanno la stessa massa; nel secondo le masse sono a distanza doppia dall'asse di rotazione. Il momento d'inerzia del secondo, rispetto a quello del primo, è:
   A. doppio
   B. quadruplo
   C. uguale
   D. la metà

5. ● Il momento d'inerzia di un corpo rispetto a un asse:
   A. dipende dalla massa e da come è distribuita rispetto all'asse
   B. dipende soltanto dalla massa
   C. è lo stesso per tutti gli assi
   D. dipende dalla velocità angolare

6. ●● Fra tutti gli assi paralleli a una data direzione, il momento d'inerzia di un corpo è:
   A. minimo per l'asse che passa per il centro di massa
   B. massimo per l'asse che passa per il centro di massa
   C. lo stesso per tutti
   D. minimo per l'asse più lontano dal centro di massa

7. ●● In una macchina di Atwood con una carrucola dotata di massa, che accelera, la tensione della fune è:
   A. la stessa ai due lati
   B. nulla dal lato del corpo che sale
   C. maggiore dal lato del corpo che scende
   D. maggiore dal lato del corpo che sale

8. ●● Un motore eroga sempre la stessa coppia; se la sua velocità angolare raddoppia, la potenza sviluppata:
   A. resta la stessa
   B. si dimezza
   C. quadruplica
   D. raddoppia

Vero o falso

9. ● Tutti i punti di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso hanno la stessa accelerazione angolare. V / F

10. ●● Se la risultante delle forze che agiscono su un corpo rigido è nulla, il corpo non può avere accelerazione angolare. V / F

11. ● Il momento di una forza la cui retta d'azione passa per il polo è nullo. V / F

12. ●● Due corpi con la stessa massa e lo stesso raggio hanno sempre lo stesso momento d'inerzia rispetto al loro asse di simmetria. V / F

13. ●● Se la velocità angolare di una ruota raddoppia, la sua energia cinetica di rotazione raddoppia. V / F

Applicare

14. ● Un giradischi ruota a 33⅓ giri/min. Esprimi la sua velocità angolare in rad/s e calcola il periodo di rotazione.

15. ● Una ruota passa da 12 rad/s a 30 rad/s in 4,0 s con accelerazione angolare costante. Calcola l'accelerazione angolare e l'angolo descritto in questo intervallo.

16. ● Per stringere un bullone si applica una forza di 120 N all'estremità di una chiave, a 30 cm dall'asse del bullone. Calcola il modulo del momento se la forza è a) perpendicolare al manico; b) inclinata di 60° rispetto al manico.

17. ●● Il vettore $\boldsymbol{r} = (0{,}50\ \text{m})\mathbf{i}$ individua il punto di applicazione di una forza $\boldsymbol{F}$ di 30 N, che giace nel piano xy e forma un angolo di 120° con il verso positivo dell'asse x. Calcola il modulo del momento $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ e indicane direzione e verso.

18. ● Su un'asta leggera, imperniata a un estremo O, sono fissate tre masse puntiformi: 0,50 kg a 0,20 m da O, 0,50 kg a 0,40 m e 1,0 kg a 0,60 m. Calcola il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse per O perpendicolare all'asta.

19. ●● Un disco omogeneo di massa 2,0 kg e raggio 0,20 m ruota attorno a un asse perpendicolare al disco che passa per un punto del bordo. Calcola il suo momento d'inerzia con il teorema di Huygens-Steiner.

20. ● Un volano con momento d'inerzia 0,80 kg·m^2 gira a 600 giri/min. Calcola la sua energia cinetica di rotazione.

21. ●● Usa il grafico della Figura 9.2. a) Qual è la velocità angolare delle pale 5 s e 35 s dopo l'accensione? b) Di quanti radianti ruotano nei primi 10 s?

22. ●● La scheda tecnica di un motore diesel indica una coppia massima di 320 N·m a 2000 giri/min. Calcola la potenza sviluppata in quelle condizioni. Completa: a parità di coppia, a 4000 giri/min la potenza sarebbe _____ kW.

Problemi

23. ●● Una ruota di bicicletta, sollevata da terra, si può schematizzare come un anello di massa 1,2 kg e raggio 0,33 m. Gira a 4,0 giri/s quando si aziona il freno, che esercita sul cerchione una forza d'attrito costante di 2,0 N. a) Calcola il momento frenante e l'accelerazione angolare. b) Dopo quanto tempo la ruota si ferma? c) Quanti giri compie durante la frenata?

24. ●●● Una porta larga 0,90 m e di massa 25 kg è ferma. La si spinge con una forza di 15 N, sempre perpendicolare alla porta, applicata a 0,80 m dai cardini. a) Calcola il momento d'inerzia della porta rispetto ai cardini e la sua accelerazione angolare (trascura l'attrito). b) Quanto tempo impiega ad aprirsi di 90°? c) Quale forza servirebbe, applicata a 20 cm dai cardini, per ottenere la stessa accelerazione angolare?

25. ●●● Un secchio di 8,0 kg è appeso a una fune avvolta sul rullo di un pozzo, un cilindro pieno di massa 12 kg e raggio 10 cm che ruota senza attrito attorno al suo asse orizzontale. Il secchio viene lasciato scendere da fermo. a) Calcola l'accelerazione del secchio e la tensione della fune. b) Con quale velocità arriva sull'acqua, 6,0 m più in basso? c) Ricava la stessa velocità con la conservazione dell'energia (capitolo 5) e calcola la velocità angolare finale del rullo.

26. ●●● In una macchina di Atwood le masse sono 250 g e 200 g e la carrucola è un disco di 100 g e raggio 5,0 cm. La massa maggiore, partendo da ferma, scende di 1,00 m in 1,60 s. a) Calcola l'accelerazione prevista se l'attrito nel perno fosse trascurabile e quella misurata. b) Calcola le due tensioni con l'accelerazione misurata. c) Ricava il momento delle forze d'attrito nel perno, supposto costante.

27. ●●● Un'automobile di 1200 kg sale a velocità costante di 72 km/h lungo una strada inclinata di 6,0°. Oltre alla componente del peso lungo la strada, le forze resistenti (aria e rotolamento) valgono in tutto 400 N. Le ruote hanno raggio 0,30 m. a) Calcola la potenza che deve arrivare alle ruote (capitolo 5). b) Calcola la velocità angolare delle ruote e il momento complessivo che le spinge. c) Il motore gira a 3000 giri/min: trascurando le perdite nella trasmissione, quale coppia eroga?

28. ●● Un volano d'acciaio a forma di disco pieno ha massa 40 kg e raggio 0,25 m. a) A quanti giri al minuto deve girare per immagazzinare 50 kJ di energia cinetica? b) Se questa energia viene ceduta con una potenza media di 5,0 kW, quanto dura l'erogazione? c) Un momento frenante costante di 20 N·m, partendo da quella velocità, dopo quanti radianti lo ferma?

29. ●●● Un'asta omogenea di lunghezza 1,20 m e massa 2,0 kg è incernierata a un estremo e viene lasciata cadere da ferma dalla posizione orizzontale. a) Calcola il momento d'inerzia rispetto alla cerniera con il teorema di Huygens-Steiner. b) Calcola l'accelerazione angolare iniziale e l'accelerazione dell'estremo libero: perché è maggiore di g? c) Con la conservazione dell'energia calcola la velocità angolare dell'asta e la velocità dell'estremo libero quando l'asta passa per la verticale.

30. ●● Un genitore spinge una giostra a disco, di massa 150 kg e raggio 1,5 m, inizialmente ferma, con una forza di 60 N tangente al bordo, per 5,0 s. Trascura l'attrito. a) Calcola il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare. b) Calcola la velocità angolare finale e quanti giri compie la giostra. c) Calcola il lavoro del momento e verifica che è uguale all'energia cinetica finale della giostra.

Ragionare e argomentare

31. ●● Un anello e un disco hanno la stessa massa e lo stesso raggio e sono montati su assi uguali. Si avvolge su ciascuno un filo e lo si tira con la stessa forza. Quale dei due raggiunge prima 10 giri al secondo, e dopo quanto tempo rispetto all'altro? Spiega il perché senza fare calcoli dettagliati.

32. ●● Trova l'errore. Per una macchina di Atwood con carrucola a disco di massa M, Marco scrive: «Il sistema ha massa totale $m_1 + m_2 + M$, e la forza che lo muove è $(m_1 - m_2)g$, quindi $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2 + M)$». Spiega che cosa c'è di sbagliato e correggi la formula.

33. ●●● Stima di ordine di grandezza. Schematizza la Terra come una sfera omogenea, con i dati della Tabella A.2, e calcola la sua energia cinetica di rotazione attorno al proprio asse. In realtà la densità della Terra cresce verso il centro: il valore vero è maggiore o minore della tua stima? Perché?

34. ●●● Progetta un esperimento. Hai due cilindri con lo stesso aspetto, la stessa massa e lo stesso raggio; uno è pieno, l'altro è cavo, con la massa concentrata vicino alla superficie. Proponi un modo per riconoscerli senza romperli, usando un asse, un filo e una massa, e spiega che cosa ti aspetti di osservare.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla rotazione nel piano, sul centro di massa e sul momento d'inerzia.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla rotazione, con la tabella dei momenti d'inerzia, il teorema degli assi paralleli e molti problemi su carrucole e ruote.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sull'inerzia rotazionale e sul momento delle forze, spiegate quasi senza formule.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il capitolo sull'adattamento di una retta ai dati, per ricavare con le loro incertezze la pendenza e l'intercetta del grafico di laboratorio.

Glossario del capitolo

Accelerazione angolare istantanea
Valore a cui tende l'accelerazione angolare media quando $\Delta t \to 0$; è la pendenza della tangente al grafico ω–t. In un corpo rigido è la stessa per tutti i punti.

Accelerazione angolare media
Rapporto fra la variazione della velocità angolare di un corpo in rotazione e l'intervallo di tempo in cui avviene: $\alpha_m = \Delta\omega/\Delta t$; si misura in rad/s^2.

Asse baricentrico
Asse che passa per il centro di massa di un corpo (che coincide con il baricentro dove g è uniforme).

Coppia motrice
Momento risultante che un motore esercita sul proprio albero; insieme alla velocità angolare determina la potenza, $P = M\omega$.

Energia cinetica di rotazione
Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, somma di quelle dei suoi punti: $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Lavoro di un momento
Lavoro compiuto da un momento costante M mentre il corpo ruota di $\Delta\theta$ (in radianti): $W = M\Delta\theta$.

Momento d'inerzia
Grandezza scalare che misura l'inerzia di un corpo rispetto alle rotazioni attorno a un asse: $I = \Sigma m_i r_i^2$; dipende dalla massa, dalla sua distribuzione e dall'asse; si misura in kg·m^2.

Momento di una forza (come vettore)
Forma vettoriale, che estende quella di *Fisica 1*: rispetto a un polo O, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, dove $\boldsymbol{r}$ va da O al punto di applicazione della forza; modulo $rF \operatorname{sen}\theta = Fb$, verso dato dalla regola della mano destra; si misura in N·m.

Momento frenante
Momento di una forza opposto al verso di rotazione, che fa diminuire la velocità angolare di un corpo (per esempio quello dell'attrito di un freno).

Moto rotatorio uniforme
Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso con velocità angolare costante: $\theta = \theta_0 + \omega t$.

Moto rotatorio uniformemente accelerato
Rotazione attorno a un asse fisso con accelerazione angolare costante; segue le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato con θ, ω, α al posto di s, v, a.

Potenza di un momento
Rapidità con cui un momento compie lavoro su un corpo in rotazione: $P = M\omega$, con ω in rad/s.

Secondo principio della dinamica per le rotazioni
Per un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, il momento risultante delle forze esterne rispetto all'asse è uguale a $I\alpha$.

Teorema di Huygens-Steiner
Il momento d'inerzia rispetto a un asse è $I = I_{CM} + Md^2$, dove I_{CM} è quello rispetto all'asse parallelo per il centro di massa e d la distanza fra i due assi.

Vettore velocità angolare
Vettore $\boldsymbol{\omega}$ di modulo ω, diretto lungo l'asse di rotazione, con il verso dato dalla regola della mano destra.

Volano
Ruota con grande momento d'inerzia, montata sull'asse di una macchina per immagazzinare energia cinetica di rotazione e rendere regolare il moto.

Soluzioni

1. B. È la variazione della velocità angolare (rad/s) per unità di tempo (s): rad/s^2.

2. C. In un corpo rigido tutti i raggi ruotano dello stesso angolo nello stesso tempo; velocità e accelerazioni lineari crescono invece con la distanza dall'asse.

3. D. Il prodotto vettoriale è perpendicolare a entrambi i fattori; il verso si trova con la regola della mano destra.

4. B. Ogni massa contribuisce con mr^2: raddoppiando r il contributo diventa $2^2 = 4$ volte più grande.

5. A. $I = \Sigma m_i r_i^2$ dipende dalle masse e dalle loro distanze dall'asse, quindi anche dall'asse scelto; non dipende da ω.

6. A. Per il teorema di Huygens-Steiner $I = I_{CM} + Md^2 \geq I_{CM}$, con l'uguaglianza solo per $d = 0$.

7. C. La differenza delle tensioni, per il raggio, è il momento che fa accelerare la carrucola nel verso del corpo che scende: $T_1 - T_2 = I\alpha/R > 0$.

8. D. $P = M\omega$: con M costante la potenza è proporzionale a ω.

9. V. Lo spostamento angolare è lo stesso per tutti i punti in ogni intervallo, quindi anche ω e α.

10. F. Una coppia di forze ha risultante nulla ma momento diverso da zero, e produce un'accelerazione angolare (le due mani sul volante).

11. V. Il braccio è nullo ($\theta = 0°$ o $180°$, $\operatorname{sen}\theta = 0$), quindi $M = rF \operatorname{sen}\theta = 0$.

12. F. Dipende dalla distribuzione della massa: un anello ha MR^2, un disco pieno $\frac{1}{2}MR^2$.

13. F. $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$: raddoppiando ω l'energia quadruplica.

14. $\omega = 33{,}33 \times 2\pi$ rad / 60 s ≈ 3,49 rad/s; $T = 60$ s / 33,33 = 1,80 s (oppure $2\pi/\omega \approx 1{,}80$ s).

15. $\alpha = (30 - 12)$ rad/s / 4,0 s = 4,5 rad/s^2; $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2} \times (12 + 30)$ rad/s × 4,0 s = 84 rad (circa 13 giri).

16. a) $M = rF = 0{,}30$ m × 120 N = 36 N·m. b) $M = rF \operatorname{sen} 60° = 36$ N·m × 0,866 ≈ 31 N·m.

17. L'angolo fra $\boldsymbol{r}$ (lungo $+x$) e $\boldsymbol{F}$ è 120°: $M = rF \operatorname{sen} 120° = 0{,}50$ m × 30 N × 0,866 ≈ 13 N·m. Il momento è perpendicolare al piano xy, cioè lungo l'asse z; ruotando le dita da $\boldsymbol{r}$ verso $\boldsymbol{F}$ (in senso antiorario) il pollice indica $+z$: $\boldsymbol{M} \approx (13\ \text{N·m})\mathbf{k}$, esce dal foglio.

18. $I = 0{,}50\ \text{kg} \times (0{,}20\ \text{m})^2 + 0{,}50\ \text{kg} \times (0{,}40\ \text{m})^2 + 1{,}0\ \text{kg} \times (0{,}60\ \text{m})^2 = (0{,}020 + 0{,}080 + 0{,}36)\ \text{kg·m}^2 = 0{,}46\ \text{kg·m}^2$. La massa più lontana dà quasi tutto il contributo.

19. $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}0\ \text{kg} \times (0{,}20\ \text{m})^2 = 0{,}040\ \text{kg·m}^2$; $d = R$: $I = 0{,}040\ \text{kg·m}^2 + 2{,}0\ \text{kg} \times (0{,}20\ \text{m})^2 = 0{,}12\ \text{kg·m}^2$.

20. $\omega = 600 \times 2\pi/60$ rad/s ≈ 62,8 rad/s; $K_{rot} = \frac{1}{2} \times 0{,}80\ \text{kg·m}^2 \times (62{,}8\ \text{rad/s})^2 \approx 1{,}6 \times 10^3$ J.

21. a) Nei primi 8 s $\alpha = 2{,}5$ rad/s^2: $\omega(5\ \text{s}) = 2{,}5\ \text{rad/s}^2 \times 5\ \text{s} = 12{,}5$ rad/s. Dopo 20 s $\alpha \approx -0{,}667$ rad/s^2: $\omega(35\ \text{s}) = 20\ \text{rad/s} - 0{,}667\ \text{rad/s}^2 \times 15\ \text{s} = 10$ rad/s (il punto medio del tratto in discesa). b) Area sotto il grafico fra 0 e 10 s: triangolo $\frac{1}{2} \times 8\ \text{s} \times 20\ \text{rad/s} = 80$ rad più rettangolo $2\ \text{s} \times 20\ \text{rad/s} = 40$ rad, in tutto 120 rad.

22. $\omega = 2000 \times 2\pi/60$ rad/s ≈ 209 rad/s; $P = M\omega = 320\ \text{N·m} \times 209\ \text{rad/s} \approx 6{,}7 \times 10^4$ W = 67 kW. A 4000 giri/min la potenza raddoppia: 134 kW (circa $1{,}3 \times 10^2$ kW).

23. Sulla ruota agiscono il peso e la reazione del perno (momento nullo rispetto all'asse) e l'attrito del freno, tangente al cerchione. a) $M = 2{,}0\ \text{N} \times 0{,}33\ \text{m} = 0{,}66\ \text{N·m}$; $I = MR^2 = 1{,}2\ \text{kg} \times (0{,}33\ \text{m})^2 \approx 0{,}131\ \text{kg·m}^2$; $\alpha = -M/I \approx -5{,}1$ rad/s^2. b) $\omega_0 = 4{,}0 \times 2\pi$ rad/s ≈ 25,1 rad/s; $t = \omega_0/|\alpha| \approx 25{,}1/5{,}05$ s ≈ 5,0 s. c) $\Delta\theta = \omega_0^2/(2|\alpha|) \approx 62{,}5$ rad, cioè circa 10 giri.

24. Sulla porta agiscono il peso e le reazioni dei cardini (momento nullo rispetto all'asse dei cardini) e la spinta. a) $I = (1/3)Ma^2 = (1/3) \times 25\ \text{kg} \times (0{,}90\ \text{m})^2 = 6{,}75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \approx 6{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$; $M = 15\ \text{N} \times 0{,}80\ \text{m} = 12\ \text{N}\cdot\text{m}$; $\alpha = 12/6{,}75\ \text{rad/s}^2 \approx 1{,}8\ \text{rad/s}^2$. b) Moto rotatorio uniformemente accelerato da fermo: $\Delta\theta = \pi/2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{(\pi/\alpha)} \approx \sqrt{(3{,}14/1{,}78)}\ \text{s} \approx 1{,}3\ \text{s}$. c) Serve lo stesso momento: $F = 12\ \text{N}\cdot\text{m} / 0{,}20\ \text{m} = 60\ \text{N}$.

25. Principi: sul secchio agiscono il peso mg e la tensione T (secondo principio della dinamica); sul rullo la tensione, tangente, con momento TR, mentre peso e reazione dell'asse hanno momento nullo (secondo principio per le rotazioni); la fune non slitta, quindi $a = \alpha R$. a) $mg - T = ma$; $TR = (\frac{1}{2}MR^2)a/R \Longrightarrow T = \frac{1}{2}Ma$. Sommando: $a = mg/(m + \frac{1}{2}M) = 8{,}0 \times 9{,}8/(8{,}0 + 6{,}0)\ \text{m/s}^2 = 5{,}6\ \text{m/s}^2$; $T = \frac{1}{2} \times 12\ \text{kg} \times 5{,}6\ \text{m/s}^2 \approx 34\ \text{N}$ (33,6 N). b) $v = \sqrt{(2ah)} = \sqrt{(2 \times 5{,}6 \times 6{,}0)}\ \text{m/s} \approx 8{,}2\ \text{m/s}$. c) Non ci sono attriti e la tensione compie sul secchio un lavoro opposto a quello che compie sul rullo: l'energia meccanica del sistema secchio + rullo si conserva. $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ con $\omega = v/R$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$: $8{,}0 \times 9{,}8 \times 6{,}0\ \text{J} = \frac{1}{2}(8{,}0 + 6{,}0)\ \text{kg} \times v^2 \Longrightarrow 470\ \text{J} = (7{,}0\ \text{kg})v^2$, $v \approx 8{,}2\ \text{m/s}$. $\omega = 8{,}2\ \text{m/s} / 0{,}10\ \text{m} \approx 82\ \text{rad/s}$.

26. Principi: secondo principio per i due blocchi e per le rotazioni per la carrucola, con il momento d'attrito M_{attr} opposto alla rotazione; filo che non slitta, $a = \alpha R$. a) Senza attrito: $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M) = 0{,}050 \times 9{,}8/0{,}500\ \text{m/s}^2 = 0{,}98\ \text{m/s}^2$. Misurata: $a = 2h/t^2 = 2 \times 1{,}00\ \text{m}/(1{,}60\ \text{s})^2 \approx 0{,}781\ \text{m/s}^2$. b) $T_1 = m_1(g - a) = 0{,}250 \times (9{,}8 - 0{,}781)\ \text{N} \approx 2{,}25\ \text{N}$; $T_2 = m_2(g + a) = 0{,}200 \times (9{,}8 + 0{,}781)\ \text{N} \approx 2{,}12\ \text{N}$. c) $(T_1 - T_2)R - M_{attr} = Ia/R$, con $I = \frac{1}{2} \times 0{,}100\ \text{kg} \times (0{,}050\ \text{m})^2 = 1{,}25 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$: $(0{,}1384\ \text{N} \times 0{,}050\ \text{m}) - M_{attr} = 1{,}25 \times 10^{-4} \times 0{,}781/0{,}050\ \text{N}\cdot\text{m} \Longrightarrow M_{attr} \approx 6{,}92 \times 10^{-3} - 1{,}95 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m} \approx 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}$.

27. Principi: a velocità costante la forza motrice alle ruote equilibra le forze resistenti (primo principio); $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ (capitolo 5); $P = M\omega$ per le ruote e per il motore. a) $mg\ \text{sen}\ 6{,}0° = 1200 \times 9{,}8 \times 0{,}1045\ \text{N} \approx 1{,}23 \times 10^3\ \text{N}$; $F = 1229\ \text{N} + 400\ \text{N} \approx 1{,}63 \times 10^3\ \text{N}$; $v = 20\ \text{m/s}$; $P = Fv \approx 3{,}3 \times 10^4\ \text{W} = 33\ \text{kW}$. b) $\omega = v/r = 20/0{,}30\ \text{rad/s} \approx 67\ \text{rad/s}$; $M = P/\omega \approx 32\,585\ \text{W} / 66{,}7\ \text{rad/s} \approx 4{,}9 \times 10^2\ \text{N}\cdot\text{m}$ (lo stesso che $Fr = 1629\ \text{N} \times 0{,}30\ \text{m}$). c) $\omega_{motore} = 3000 \times 2\pi/60\ \text{rad/s} \approx 314\ \text{rad/s}$; senza perdite la potenza è la stessa: $M = 32\,585\ \text{W} / 314\ \text{rad/s} \approx 1{,}0 \times 10^2\ \text{N}\cdot\text{m}$. Il cambio riduce la velocità angolare di circa 4,7 volte e moltiplica il momento dello stesso fattore.

28. $I = \frac{1}{2} \times 40\ \text{kg} \times (0{,}25\ \text{m})^2 = 1{,}25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. a) $\omega = \sqrt{(2K/I)} = \sqrt{(2 \times 5{,}0 \times 10^4\ \text{J} / 1{,}25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)} \approx 283\ \text{rad/s}$, cioè $283 \times 60/(2\pi) \approx 2{,}7 \times 10^3$ giri/min. b) $\Delta t = 5{,}0 \times 10^4\ \text{J} / 5{,}0 \times 10^3\ \text{W} = 10\ \text{s}$. c) Il lavoro del momento frenante è uguale alla variazione dell'energia cinetica: $M\Delta\theta = K \Longrightarrow \Delta\theta = 5{,}0 \times 10^4\ \text{J} / 20\ \text{N}\cdot\text{m} = 2{,}5 \times 10^3\ \text{rad}$ (circa 400 giri).

29. Principi: sull'asta agiscono il peso, applicato nel centro, e la reazione della cerniera (momento nullo); secondo principio per le rotazioni attorno alla cerniera; poi conservazione dell'energia, perché la cerniera non compie lavoro. a) $I = (1/12)ML^2 + M(L/2)^2 = (1/3)ML^2 = (1/3) \times 2{,}0\ \text{kg} \times (1{,}20\ \text{m})^2 = 0{,}96\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. b) Il momento del peso rispetto alla cerniera vale $Mg(L/2) = 2{,}0 \times 9{,}8 \times 0{,}60\ \text{N}\cdot\text{m} \approx 11{,}8\ \text{N}\cdot\text{m}$; $\alpha = Mg(L/2)/I = 3g/(2L) \approx 12{,}3\ \text{rad/s}^2$; l'estremo libero ha $a_t = \alpha L = 3g/2 \approx 14{,}7\ \text{m/s}^2$. È maggiore di g perché il moto è vincolato: la parte vicina alla cerniera è «trattenuta» e, attraverso l'asta rigida, il peso di tutta l'asta accelera l'estremo, che sta al doppio della distanza del centro di massa. Una moneta appoggiata sull'estremo resterebbe indietro. c) Il centro di massa scende di $L/2$: $MgL/2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = (1/6)ML^2\omega^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{(3g/L)} = \sqrt{(3 \times 9{,}8/1{,}20)}\ \text{rad/s} \approx 4{,}9\ \text{rad/s}$; $v = \omega L \approx 5{,}9\ \text{m/s}$.

30. Sulla giostra agiscono il peso e la reazione dell'asse (momento nullo) e la spinta tangente al bordo. a) $I = \frac{1}{2} \times 150\ \text{kg} \times (1{,}5\ \text{m})^2 \approx 169\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$; $M = 60\ \text{N} \times 1{,}5\ \text{m} = 90\ \text{N}\cdot\text{m}$; $\alpha = 90/168{,}75\ \text{rad/s}^2 \approx 0{,}53\ \text{rad/s}^2$. b) $\omega = \alpha t \approx 0{,}533 \times 5{,}0\ \text{rad/s} \approx 2{,}7\ \text{rad/s}$; $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \approx 6{,}67\ \text{rad}$, cioè circa 1,1 giri. c) $W = M\Delta\theta = 90\ \text{N}\cdot\text{m} \times 6{,}67\ \text{rad} = 6{,}0 \times 10^2\ \text{J}$; $K_{rot} = \frac{1}{2} \times 168{,}75 \times (2{,}67)^2\ \text{J} \approx 6{,}0 \times 10^2\ \text{J}$: coincidono, come prevede il teorema dell'energia cinetica.

31. Traccia di risposta. L'anello ha tutta la massa sul bordo, $I = MR^2$, il disco ha molta massa vicina all'asse, $I = \frac{1}{2}MR^2$. Con la stessa forza sullo stesso raggio il momento è lo stesso, quindi $\alpha = M/I$ è doppia per il disco. Partendo da fermi, il tempo per rag-

giungere la stessa ω è ω/α: il disco arriva per primo, in metà tempo.

32. Traccia di risposta. La massa della carrucola non trasla con i blocchi: ruota, e non entra nella «massa totale» per intero. Il suo contributo si ottiene dal secondo principio per le rotazioni: $(T_1 - T_2)R = Ia/R$, cioè $T_1 - T_2 = (I/R^2)a = \frac{1}{2}Ma$ per un disco. La formula corretta è $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)$. Marco avrebbe ragione solo per una carrucola ad anello sottile, con $I = MR^2$.

33. $\omega = 2\pi/86\,164\text{ s} \approx 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s (giorno sidereale: la rotazione rispetto alle stelle). $I = (2/5)MR^2 = 0{,}4 \times 5{,}97 \times 10^{24}\text{ kg} \times (6{,}37 \times 10^6\text{ m})^2 \approx 9{,}7 \times 10^{37}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$; $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx 2{,}6 \times 10^{29}$ J. Il valore vero è minore: se la massa è più concentrata verso il centro, i pezzetti di materia sono in media più vicini all'asse e il momento d'inerzia è minore di quello della sfera omogenea (per la Terra è circa $0{,}33\,MR^2$ invece di $0{,}4\,MR^2$, e l'energia circa $2{,}1 \times 10^{29}$ J).

34. Traccia di risposta. Si monta ciascun cilindro, a turno, sullo stesso asse orizzontale con cuscinetti, si avvolge sull'asse (o sul cilindro) un filo e si appende la stessa massa, lasciandola scendere da ferma per la stessa altezza. Il momento della tensione è circa lo stesso, quindi l'accelerazione angolare è inversamente proporzionale a I: il cilindro cavo, con la massa lontana dall'asse e quindi momento d'inerzia maggiore, accelera più lentamente, e la massa impiega più tempo a scendere. Con le misure del laboratorio di questo capitolo (Figura 9.6) si può anche ricavare I per ciascuno e confrontarlo con $\frac{1}{2}MR^2$ e con MR^2; ripetendo le prove si controlla che la differenza superi le incertezze.