CAPITOLO

8

Il centro di massa e i sistemi di corpi

«La legge di un sistema di più corpi è dunque la stessa di un corpo solo, per quanto riguarda il perseverare nello stato di moto o di quiete.» — Isaac Newton, Principia (1687), corollario IV alle leggi del moto; traduzione della redazione

OBIETTIVI

1. Definire il centro di massa di un sistema di corpi e calcolarne la posizione per corpi puntiformi, simmetrici e composti.
2. Distinguere il centro di massa dal baricentro e riconoscere quando coincidono.
3. Collegare la velocità del centro di massa alla quantità di moto totale e ricavare il teorema del moto del centro di massa.
4. Usare il centro di massa per risolvere problemi su esplosioni, sistemi isolati e corpi che si spostano l'uno rispetto all'altro.
5. Spiegare perché le forze interne possono cambiare l'energia cinetica di un sistema ma non il moto del suo centro di massa.
6. Progettare una misura dello spostamento di un sistema isolato e confrontarla con la previsione teorica.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 Il centro di massa 2
8.2 Il moto del centro di massa 7
8.3 I sistemi isolati 13
8.4 L'energia di un sistema di corpi 18

Fisica 3 · Parte II · Le leggi di conservazione · versione 1.0
Capitolo 8: Il centro di massa e i sistemi di corpi · pagine 207–232 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda al rallentatore il lancio di una chiave inglese che scivola ruotando su un tavolo a cuscino d'aria, o il salto di una tuffatrice che si raggomitola e si distende: ogni punto del corpo descrive una curva complicata, piena di giri e di anse. Eppure c'è un punto, uno solo, che si muove con la semplicità di un corpo puntiforme: in linea retta sul tavolo, lungo una parabola nel tuffo. Quel punto è il **centro di massa**.

Nei capitoli precedenti hai studiato la quantità di moto e la sua conservazione, prima per due corpi che si spingono (capitolo 6), poi negli urti (capitolo 7). Ora guardi un sistema di corpi nel suo insieme, distinguendo come in *Fisica 2*, capitolo 6, le forze interne da quelle esterne. Scoprirai che il moto d'insieme di un sistema, comunque complicato, si riassume nel moto di un punto, e che la conservazione della quantità di moto non è altro che il primo principio della dinamica applicato a quel punto.

8.1 Il centro di massa

8.1.1 Dal baricentro a una definizione più generale

Nel primo volume (*Fisica 1*, capitolo 11) hai trovato la posizione del baricentro G di due corpi fissati su un'asta, cioè il punto di applicazione del loro peso: è la media delle posizioni pesata con le masse, $x_G = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$. Era nata da una condizione di equilibrio; ora la riprendiamo come **definizione**, valida per qualunque insieme di corpi, fermi o in moto, appoggiati o in volo, e anche dove il peso non c'entra affatto.

Considera un sistema di N corpi puntiformi di masse m_1, m_2, …, m_N, che in un certo istante occupano i punti di coordinate $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, … in un sistema di riferimento cartesiano. Indichiamo con $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ la **massa totale**. Si chiama **centro di massa** (CM) del sistema il punto di coordinate

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{M} \qquad y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_Ny_N}{M}$$

(nello spazio si aggiunge allo stesso modo la coordinata z_{CM}). Le due formule si riassumono in una sola relazione vettoriale. Se $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, … sono i vettori posizione dei corpi, cioè i vettori che vanno dall'origine a ciascun corpo, il **vettore posizione del centro di massa** è

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{r}_N}{M} = \frac{\Sigma\, m_i\boldsymbol{r}_i}{M}$$

La somma Σ si legge «somma su tutti i corpi»; le componenti di $\boldsymbol{r}_{CM}$ sono x_{CM} e y_{CM} (capitolo 1). Il centro di massa è dunque la **media delle posizioni pesata con le masse**: ogni corpo «tira» il

CM verso di sé tanto più quanto più è massiccio. Per due corpi il CM sta sul segmento che li congiunge e lo divide in parti inversamente proporzionali alle masse: se $m_2 = 3m_1$, il CM è tre volte più vicino a m_2 che a m_1.

La posizione del CM rispetto ai corpi **non dipende dal sistema di riferimento**: spostando l'origine cambiano i numeri, non il punto. Conviene quindi mettere l'origine dove i conti sono più semplici, per esempio su uno dei corpi.

ESEMPIO SVOLTO

Il centro di massa di tre corpi

Problema. Tre piccole sfere sono fissate a un telaio leggero, di massa trascurabile, che giace su un piano. Una sfera di 2,0 kg è nell'origine, una di 3,0 kg nel punto (40 cm; 0), una di 1,0 kg nel punto (10 cm; 30 cm) (Figura 8.1). Trova il centro di massa del sistema.

Soluzione. La massa totale è M = 2,0 kg + 3,0 kg + 1,0 kg = 6,0 kg. Le coordinate si possono lasciare in centimetri: il CM risulterà in centimetri.

$$x_{CM} = \frac{2{,}0\ \text{kg} \times 0 + 3{,}0\ \text{kg} \times 40\ \text{cm} + 1{,}0\ \text{kg} \times 10\ \text{cm}}{6{,}0\ \text{kg}} = \frac{130\ \text{kg·cm}}{6{,}0\ \text{kg}} \approx 21{,}7\ \text{cm}$$

$$y_{CM} = \frac{2{,}0\ \text{kg} \times 0 + 3{,}0\ \text{kg} \times 0 + 1{,}0\ \text{kg} \times 30\ \text{cm}}{6{,}0\ \text{kg}} = \frac{30\ \text{kg·cm}}{6{,}0\ \text{kg}} = 5{,}0\ \text{cm}$$

Controllo. Il CM sta dentro il triangolo dei tre corpi, come deve essere per una media pesata, e più vicino alla sfera di 3,0 kg che alle altre. La sfera di 1,0 kg è l'unica fuori dall'asse x: con un sesto della massa totale, solleva il CM a un sesto della sua quota, 30 cm / 6 = 5,0 cm.

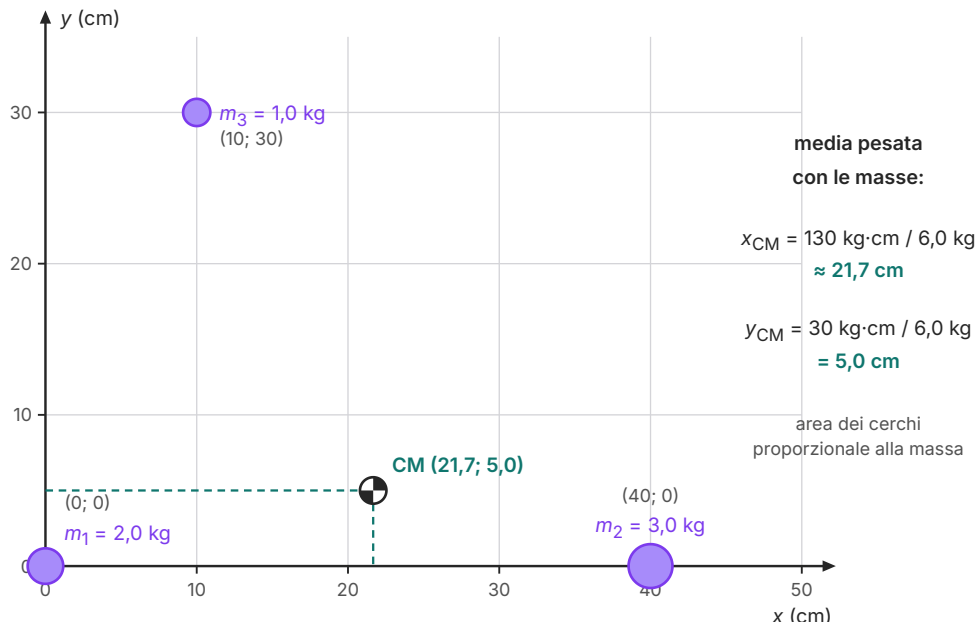


Figura 8.1 Il centro di massa (simbolo ◐) delle tre sfere dell'esempio svolto. Il CM sta nel punto (21,7 cm; 5,0 cm): le sue coordinate sono le medie delle coordinate delle sfere, pesate con le masse. L'area di ciascun cerchio è proporzionale alla massa della sfera.

8.1.2 Corpi estesi, simmetrici e composti

Un corpo esteso si può pensare diviso in moltissimi pezzetti, ciascuno trattabile come un punto; sommarli davvero richiederebbe l'analisi matematica, ma spesso basta la **simmetria**. Se un corpo è omogeneo e ha un centro di simmetria, a ogni pezzetto ne corrisponde uno uguale in posizione opposta rispetto al centro, e le loro posizioni pesate si compensano: il CM coincide con il centro di simmetria. Sta quindi al centro di una sfera, di un cubo, di un disco, di un anello, a metà di un'asta omogenea; se il corpo ha soltanto un asse o un piano di simmetria, il CM si trova su quell'asse o su quel piano.

Per un **corpo composto**, formato da parti di cui sai trovare il CM, il procedimento è sempre lo stesso: si sostituisce ogni parte con un punto, posto nel suo CM, che porta tutta la massa della parte; poi si calcola il CM di questi punti. Il metodo funziona perché la media pesata si può fare «a gruppi»: sommando prima dentro ogni gruppo e poi fra i gruppi si ottiene lo stesso risultato. In una **lamina omogenea**, cioè di spessore costante e fatta dello stesso materiale in ogni punto, la massa di ogni parte è proporzionale alla sua area, e nelle formule si possono usare le aree al posto delle masse.

Lo stesso ragionamento si applica a un corpo con un foro: la lamina forata è la lamina intera **meno** il pezzo mancante. Si tratta il foro come una parte di massa negativa, con il suo segno meno nelle somme: è il **metodo della massa negativa**. Ne trovi un esempio negli esercizi.

Un esempio è la lamina di acciaio a forma di L della Figura 8.2, formata da un rettangolo A di 60 cm × 10 cm, steso sull'asse x a partire dall'origine, e da un rettangolo B di 10 cm × 40 cm appoggiato sopra il suo estremo sinistro. Per simmetria i centri dei due pezzi sono C_A = (30 cm; 5 cm) e C_B = (5 cm; 30 cm); le aree sono 600 cm^2 e 400 cm^2. Quindi x_{CM} = (600 × 30 cm + 400 × 5 cm)/1000 = 20 cm e y_{CM} = (600 × 5 cm + 400 × 30 cm)/1000 = 15 cm. Il punto sta sul segmento C_AC_B, che divide in parti inversamente proporzionali alle aree (2 : 3), ed è **fuori dal materiale**: sopra il rettangolo A e a destra del rettangolo B.

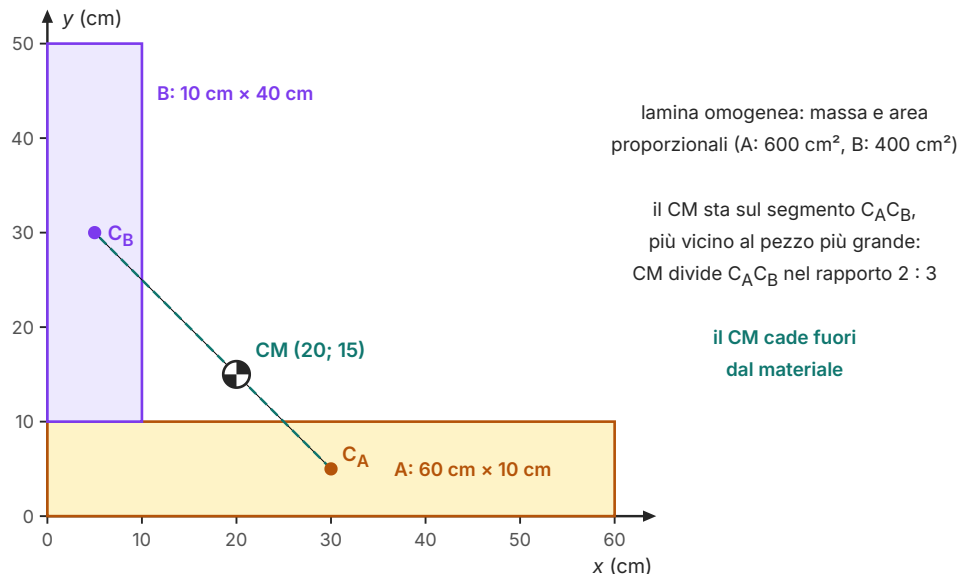


Figura 8.2 La lamina a L divisa in due rettangoli. Il CM si trova sul segmento che congiunge i centri C_A e C_B dei due pezzi, più vicino al pezzo più grande, nel punto (20 cm; 15 cm), che non appartiene alla lamina.

8.1.3 Centro di massa e baricentro

Il CM e il baricentro sono lo stesso punto? Quasi sempre, ma non per definizione. Il baricentro è il punto di applicazione della forza-peso; il CM è definito soltanto dalle masse e dalle posizioni. Se tutti i pezzetti del corpo si trovano nello stesso campo gravitazionale, cioè se g ha lo stesso valore e la stessa direzione in tutto il corpo, i pesi m_ig sono proporzionali alle masse e la media pesata con i pesi coincide con quella pesata con le masse: **CM e baricentro coincidono dove il campo gravitazionale è uniforme**. È il caso di tutti gli oggetti di dimensioni ordinarie. In un corpo molto alto, come una montagna, g diminuisce un poco salendo e il baricentro risulta leggermente più in basso del CM. Il CM, inoltre, esiste anche dove il peso non conta, per esempio per un sistema di corpi in una stazione spaziale in orbita, che è in caduta libera.

In astronomia, per tradizione, il centro di massa di due corpi celesti si chiama spesso «baricentro» (in inglese *barycenter*): quando lo incontrerai in questo senso, ricorda che si tratta del

CM.



Figura 8.3 Tre corpi con il CM fuori dal materiale. a) In un anello omogeneo il CM è nel centro. b) Due bracci uguali e omogenei di 30 cm, uniti con un'apertura di 100° (un boomerang schematico): il CM sta sulla bisettrice, 9,6 cm sotto il vertice, nello spazio fra i bracci. c) Modello di un saltatore in alto con lo stile dorsale: il corpo è approssimato con un arco omogeneo lungo 1,85 m, curvato su un arco di circonferenza di 138°, con il colmo 3 cm sopra l'asticella; il CM passa 14 cm **sotto** l'asticella.

Il CM non è necessariamente un punto del corpo: in un anello, in una L, in un boomerang, in una persona piegata ad arco cade nel vuoto (Figura 8.3). Attenzione anche al segno: nelle formule le masse vanno moltiplicate per le **coordinate**; un corpo a sinistra dell'origine ha x negativa.

COLLEGAMENTI

Sport: passare sopra l'asticella con il centro di massa sotto

Nel salto in alto conta l'altezza a cui il saltatore riesce a portare il proprio centro di massa: una volta staccati i piedi da terra, sul corpo agisce soltanto il peso (la resistenza dell'aria è trascurabile), e il CM descrive una parabola che nessun movimento in volo può cambiare. La quota massima del CM è fissata dalla velocità verticale allo stacco, come per un sasso lanciato verso l'alto: $h = v_y^2/(2g)$.

Il gesto tecnico decide invece **quanto in alto deve arrivare il CM** per superare l'asticella. Con lo **stile dorsale** (o *Fosbury flop*, dal nome dello statunitense Dick Fosbury, che vinse con questo stile l'oro olimpico a Città del Messico nel 1968) l'atleta passa di schiena e inarca il corpo come un ponte: le parti del corpo scavalcano l'asticella una dopo l'altra. La Figura 8.3c mostra un modello molto semplificato, il corpo come un arco omogeneo: con il colmo appena sopra l'asticella, il CM passa una quindicina di centimetri **sotto**. A parità di slancio, l'atleta che sa piegarsi meglio salta più in alto: non perché vola più in alto, ma perché il suo CM deve salire meno.

8.2 Il moto del centro di massa

8.2.1 La velocità del centro di massa e la quantità di moto totale

Se i corpi del sistema si muovono, si muove anche il loro CM. In un intervallo Δt ogni corpo si sposta di $\Delta \boldsymbol{r}_i$, e dalla definizione la posizione del CM cambia di $\Delta \boldsymbol{r}_{CM} = \Sigma\, m_i \Delta \boldsymbol{r}_i / M$ (le masse non cambiano). Dividendo per Δt e facendo tendere Δt a zero, come hai fatto nel capitolo 1 per definire la velocità istantanea, si ottiene la **velocità del centro di massa**:

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_N \boldsymbol{v}_N}{M}$$

Il numeratore è una vecchia conoscenza: la somma delle quantità di moto dei singoli corpi, cioè la quantità di moto totale $\boldsymbol{p}_{tot}$ del sistema (capitolo 6). Abbiamo quindi una relazione semplice e importante:

$$\boldsymbol{p}_{tot} = M \boldsymbol{v}_{CM}$$

La quantità di moto totale di un sistema è uguale a quella di un unico corpo che avesse tutta la massa del sistema e si muovesse con il centro di massa. Un sistema con $\boldsymbol{p}_{tot} = 0$ ha il CM fermo, anche se i suoi corpi si muovono in tutte le direzioni.

Ripetendo il ragionamento con le variazioni di velocità si trova l'**accelerazione del centro di massa**, $\boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{a}_i / M$: anche questa è una media pesata, delle accelerazioni dei corpi.

ESEMPIO SVOLTO

Il centro di massa di due carrelli che si urtano

Problema. Su una rotaia a cuscino d'aria il carrello A (0,300 kg) va verso il carrello B (0,200 kg), fermo; i due hanno respingenti magnetici. Un video ripreso dall'alto dà le posizioni dei centri dei due carrelli ogni 0,1 s (Tabella 8.1, dati tipici; tutti i punti sono nella Figura 8.4). a) Calcola la posizione del CM negli istanti della tabella. b) Ricava dal grafico la velocità del CM e confrontala con p_{tot}/M. c) Che cosa succede al CM durante l'urto?

Tabella 8.1 Posizioni dei due carrelli lungo la rotaia (dati tipici, incertezza ±1 mm) e posizione del CM calcolata.

t (s)	x_A (m)	x_B (m)	x_{CM} (m)
0,0	0,100	0,601	0,300
0,2	0,219	0,600	0,371
0,4	0,340	0,599	0,444
0,6	0,413	0,671	0,516
0,8	0,435	0,816	0,587
1,0	0,460	0,961	0,660

Soluzione. a) Per ogni riga $x_{CM} = (0{,}300\ \text{kg} \times x_A + 0{,}200\ \text{kg} \times x_B) / 0{,}500\ \text{kg}$; per $t = 0$, per esempio, $(0{,}300 \times 0{,}100 + 0{,}200 \times 0{,}601)\ \text{m} / 0{,}500 = 0{,}300\ \text{m}$. I risultati sono nell'ultima colonna. b) Nel grafico i punti del CM stanno su una retta, senza alcun gomito in corrispondenza dell'urto. La retta di regressione di tutti gli 11 punti ha pendenza 0,360 m/s: è la velocità del CM, costante. Prima dell'urto A percorre 0,299 m in 0,5 s, cioè va a circa 0,60 m/s, e B è fermo: $p_{tot} = 0{,}300\ \text{kg} \times 0{,}60\ \text{m/s} = 0{,}18\ \text{kg·m/s}$ e $p_{tot}/M = 0{,}18\ \text{kg·m/s} / 0{,}500\ \text{kg} = 0{,}36\ \text{m/s}$, in accordo con la pendenza. c) Durante l'urto A rallenta bruscamente e B parte, ma il CM prosegue indisturbato: le forze dei respingenti sono interne al sistema.

Controllo. Nella tabella x_{CM} cresce di circa 0,072 m ogni 0,2 s, prima e dopo l'urto: $0{,}072\ \text{m} / 0{,}2\ \text{s} = 0{,}36\ \text{m/s}$.

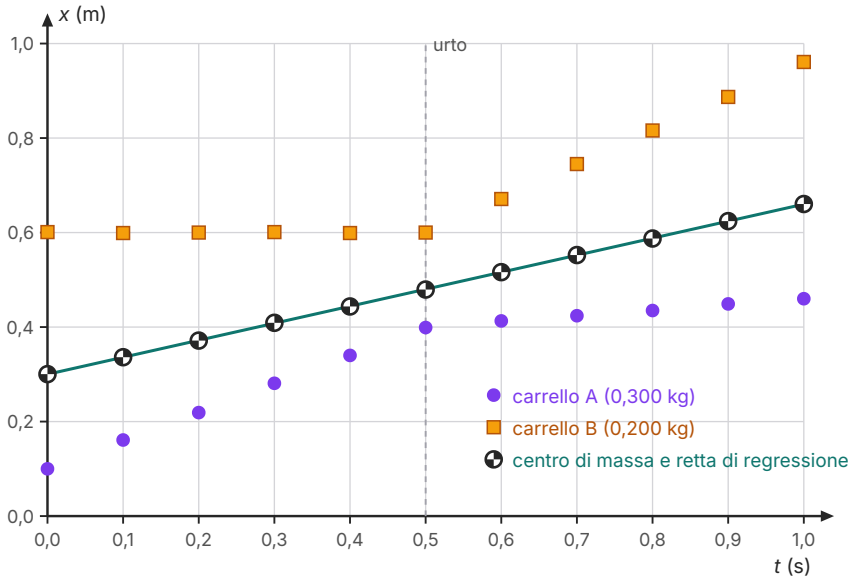


Figura 8.4 Posizione in funzione del tempo per i due carrelli dell'esempio svolto (dati tipici, uno ogni 0,1 s) e per il loro centro di massa. Le posizioni dei carrelli cambiano pendenza nell'urto, a t = 0,5 s; il CM sta su una sola retta, di pendenza 0,360 m/s.

8.2.2 Il teorema del moto del centro di massa

Quali forze decidono il moto del CM? Per rispondere scriviamo il secondo principio per ogni corpo del sistema e sommiamo. È il risultato più importante del capitolo: lo ricaviamo passo per passo.

ESEMPIO SVOLTO

Dal secondo principio al moto del CM

Passo 1. Su ogni corpo agiscono forze interne, esercitate dagli altri corpi del sistema, e forze esterne. Il secondo principio per il corpo i-esimo dice $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_{i,int} + \boldsymbol{F}_{i,est}$, dove le due forze sono le risultanti delle forze interne e delle forze esterne che agiscono su quel corpo.

Passo 2. Sommiamo su tutti i corpi. A sinistra compare $\Sigma\, m_i\boldsymbol{a}_i$, che per la definizione di accelerazione del CM vale $M\boldsymbol{a}_{CM}$. A destra compaiono la somma di tutte le forze interne e la somma di tutte le forze esterne.

Passo 3. Le forze interne vengono a coppie: se il corpo 1 esercita sul corpo 2 la forza $\boldsymbol{F}_{12}$, il corpo 2 esercita sul corpo 1 la forza $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ (terzo principio). Nella somma ogni coppia dà zero: **la somma di tutte le forze interne è nulla**.

Passo 4. Resta soltanto la risultante delle forze esterne, $\boldsymbol{F}_{est}$:

$$\boldsymbol{F}_{est} = M\boldsymbol{a}_{CM}$$

Controllo. Per un sistema di un corpo solo la relazione è il secondo principio. Per corpi che si muovono insieme con la stessa accelerazione è il «metodo del sistema intero» di *Fisica 2*, capitolo 6: lì l'accelerazione era comune a tutti i corpi; qui i corpi possono muoversi ciascuno a modo suo, e la relazione vale per il loro CM.

È il **teorema del moto del centro di massa**: **il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale che avesse tutta la massa del sistema e su cui agisse la risultante delle sole forze esterne**. Le forze interne, per quanto intense, non possono cambiare il moto del CM: possono soltanto spostare i corpi l'uno rispetto all'altro. Il teorema si scrive anche con la quantità di moto: poiché $\boldsymbol{p}_{tot} = M\boldsymbol{v}_{CM}$, la risultante delle forze esterne è uguale a $\Delta\boldsymbol{p}_{tot}/\Delta t$, la forma del secondo principio che hai incontrato nel capitolo 6.

Questo teorema giustifica una scelta che hai fatto fin dal primo volume: trattare un'automobile, un pallone o un pianeta come un punto materiale. Il punto che studiavi era, senza dirlo, il centro di massa del corpo.

ERRORE FREQUENTE

«L'automobile accelera grazie al motore; il motore è dentro l'auto, quindi le forze interne possono muovere il centro di massa.» No. Il motore fa girare le ruote, e le forze fra motore, albero e ruote sono interne all'auto. Ma la ruota motrice spinge l'asfalto all'indietro e l'asfalto, con l'**attrito statico**, spinge la ruota in avanti: è questa forza esterna ad accelerare il CM dell'auto. Su una lastra di ghiaccio perfettamente liscio il motore farebbe girare le ruote a vuoto e l'auto resterebbe dov'è.

Allo stesso modo cammini perché il pavimento ti spinge in avanti, e un razzo accelera perché il sistema «razzo» non comprende i gas espulsi, che esercitano su di esso una forza esterna; il CM del sistema razzo + gas espulsi, nello spazio vuoto, non accelera affatto.

8.2.3 Il fuoco d'artificio che esplode in volo

Un proiettile viene lanciato in aria e, a metà volo, esplode in vari frammenti. Le forze dell'esplosione, enormi ma brevissime, sono interne. Se la resistenza dell'aria è trascurabile, prima e dopo l'esplosione l'unica forza esterna è il peso totale Mg, e quindi $\boldsymbol{a}_{\mathrm{CM}} = g$, verso il basso: **il CM dei frammenti continua a percorrere la stessa parabola** che avrebbe percorso il proiettile intero, almeno finché nessun frammento tocca il suolo (da quel momento il terreno esercita una nuova forza esterna).

ESEMPIO SVOLTO

Dove cade il secondo frammento?

Problema. Un proiettile di 1,20 kg viene lanciato da terra a 25,0 m/s, con un angolo di 60,0° sopra l'orizzontale. Nel punto più alto della traiettoria esplode in due frammenti: uno di 0,40 kg, che subito dopo l'esplosione è fermo, e uno di 0,80 kg. Trascura la resistenza dell'aria e la massa dell'esplosivo. a) A che quota e a che distanza orizzontale dal lancio avviene l'esplosione? b) Dove cadono i due frammenti? c) Con quale velocità parte il secondo frammento?

Soluzione. a) Componenti della velocità iniziale (*Fisica 2*, capitolo 2): $v_x = 25{,}0\ \text{m/s} \times \cos 60{,}0° = 12{,}5\ \text{m/s}$, $v_y = 25{,}0\ \text{m/s} \times \text{sen}\ 60{,}0° \approx 21{,}65\ \text{m/s}$. Nel punto più alto v_y si annulla dopo $t = 21{,}65\ \text{m/s} / 9{,}8\ \text{m/s}^2 \approx 2{,}21\ \text{s}$, alla quota $h = v_y^2/(2g) \approx 23{,}9\ \text{m}$ e alla distanza $12{,}5\ \text{m/s} \times 2{,}21\ \text{s} \approx 27{,}6\ \text{m}$.

b) Il frammento di 0,40 kg parte fermo dal punto più alto e cade in verticale: tocca terra a 27,6 m dal lancio. L'altro frammento, subito dopo l'esplosione, ha velocità orizzontale (lo vedremo in c), quindi anche lui parte con velocità verticale nulla dalla stessa quota: i due frammenti cadono nello stesso tempo, altri 2,21 s, e toccano terra **insieme**. In quell'istante il CM, che segue la parabola, arriva dove sarebbe arrivato il proiettile intero, alla gittata $R = 2 \times 27{,}6\ \text{m} \approx 55{,}2\ \text{m}$. Dalla definizione di CM:

$$55{,}2\ \text{m} = \frac{0{,}40\ \text{kg} \times 27{,}6\ \text{m} + 0{,}80\ \text{kg} \times x_2}{1{,}20\ \text{kg}}$$

$$x_2 = \frac{1{,}20\ \text{kg} \times 55{,}2\ \text{m} - 0{,}40\ \text{kg} \times 27{,}6\ \text{m}}{0{,}80\ \text{kg}} \approx 69{,}0\ \text{m}$$

c) Durante l'esplosione la quantità di moto si conserva, perché le forze esterne (il peso) sono trascurabili rispetto a quelle interne in un intervallo così breve. Prima: $1{,}20\ \text{kg} \times 12{,}5\ \text{m/s} = 15{,}0\ \text{kg·m/s}$, orizzontale. Dopo, il primo frammento è fermo: $0{,}80\ \text{kg} \times v_2 = 15{,}0\ \text{kg·m/s}$, $v_2 \approx 18{,}8\ \text{m/s}$, orizzontale.

Controllo. Con la cinematica: $27{,}6\ \text{m} + 18{,}75\ \text{m/s} \times 2{,}21\ \text{s} \approx 69{,}0\ \text{m}$. Il CM dà lo stesso risultato senza calcolare traiettorie (Figura 8.5).

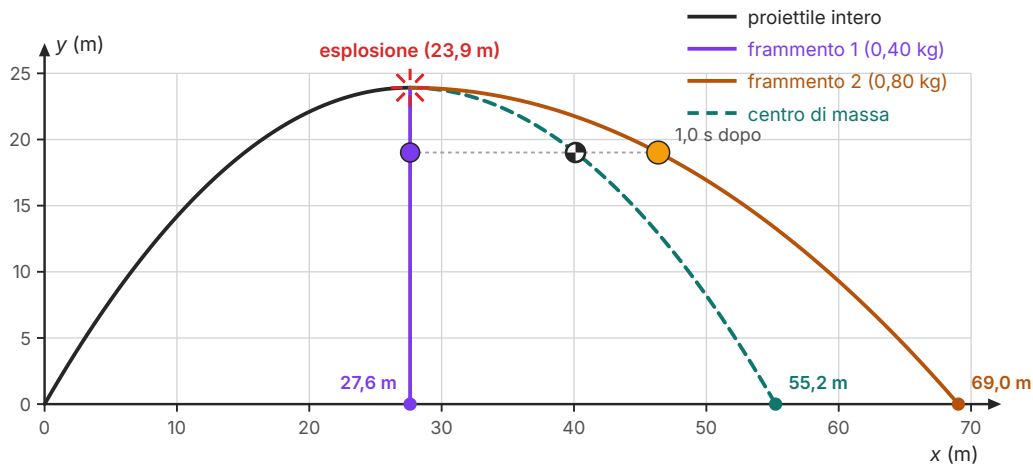


Figura 8.5 Il proiettile dell'esempio svolto (1,20 kg, lanciato a 25,0 m/s con un angolo di 60,0°, resistenza dell'aria trascurabile) esplode nel punto più alto. Il frammento di 0,40 kg cade in verticale, quello di 0,80 kg parte in orizzontale a 18,8 m/s; il CM (tratteggio) prosegue sulla parabola del proiettile intero. In ogni istante, come in quello mostrato 1,0 s dopo l'esplosione, il CM sta sul segmento che unisce i frammenti, due volte più vicino a quello più pesante; i frammenti toccano terra insieme, a 27,6 m e a 69,0 m, e il CM a 55,2 m.

8.3 I sistemi isolati

8.3.1 Il centro di massa di un sistema isolato

Nel capitolo 6 hai chiamato isolato un sistema su cui la risultante delle forze esterne è nulla (o trascurabile), e hai visto che la sua quantità di moto totale si conserva. Il teorema del moto del CM dice la stessa cosa con un'altra immagine: se $\boldsymbol{F}_{\text{est}} = 0$, allora $\boldsymbol{a}_{\text{CM}} = 0$, e **il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme, o resta fermo**.

È la stessa legge vista due volte: «$\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ si conserva» e «$\boldsymbol{v}_{\text{CM}}$ è costante» si equivalgono, perché $\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = M\boldsymbol{v}_{\text{CM}}$. La conservazione della quantità di moto è il primo principio applicato al centro di massa. Vale anche per componenti: se le forze esterne sono tutte verticali, la componente orizzontale della velocità del CM resta costante.

Da qui viene un metodo utilissimo: **se un sistema isolato parte da fermo, il suo CM resta dove si trova**, qualunque cosa facciano i corpi al suo interno. Due pattinatori fermi sul ghiaccio, uno di 45 kg e uno di 60 kg, distanti 10 m, tengono i capi di una fune e tirano. Dove si incontrano? L'attrito con il ghiaccio liscio è trascurabile, le forze della fune sono interne: si incontrano nel CM, che non si muove. Mettendo l'origine sul pattinatore di 45 kg, $x_{\text{CM}} = 60\ \text{kg} \times 10\ \text{m} / 105\ \text{kg} \approx 5{,}7\ \text{m}$. Il più leggero percorre 5,7 m, il più pesante 4,3 m, e non importa chi dei due tiri di più o con che ritmo.

8.3.2 Camminare su una barca

Una persona a poppa di una barca ferma cammina verso prua, e la barca si sposta all'indietro: lo sa chi è sceso da un canotto, che scivola via proprio mentre si cerca di raggiungere il pontile. Durante la camminata le forze fra i piedi e il fondo della barca sono interne al sistema persona + barca; le forze esterne sono il peso e la spinta dell'acqua, verticali, e la resistenza dell'acqua al moto orizzontale della barca, che per spostamenti lenti è piccola e la trascuriamo. Il CM del sistema, in orizzontale, resta fermo.

ESEMPIO SVOLTO

Quanto si sposta la barca?

Problema. Una persona di 75 kg si trova a poppa di una barca di 175 kg, lunga 5,0 m, ferma sull'acqua calma. La persona cammina fino a prua, percorrendo 4,0 m sulla barca, e si ferma. Di quanto si sposta la barca rispetto all'acqua? Quanto si sposta la persona rispetto all'acqua? (Figura 8.6)

Soluzione. Sul sistema persona + barca agiscono in orizzontale soltanto forze interne (resistenza dell'acqua trascurabile): il sistema parte da fermo, quindi il suo CM non si sposta. Prendiamo l'asse x verso prua, fisso rispetto all'acqua. Se la barca si sposta di Δx_b e la persona di Δx_p, la condizione $\Delta x_{CM} = 0$ diventa

$$m_p \Delta x_p + m_b \Delta x_b = 0$$

La persona si sposta di 4,0 m **rispetto alla barca**, che intanto si è spostata di Δx_b: rispetto all'acqua, $\Delta x_p = 4{,}0\ \text{m} + \Delta x_b$. Sostituendo, $75\ \text{kg} \times (4{,}0\ \text{m} + \Delta x_b) + 175\ \text{kg} \times \Delta x_b = 0$, da cui

$$\Delta x_b = -\frac{75\ \text{kg} \times 4{,}0\ \text{m}}{75\ \text{kg} + 175\ \text{kg}} = -1{,}2\ \text{m} \qquad \Delta x_p = 4{,}0\ \text{m} - 1{,}2\ \text{m} = 2{,}8\ \text{m}$$

La barca arretra di 1,2 m e la persona avanza di 2,8 m rispetto all'acqua.

Controllo. $75\ \text{kg} \times 2{,}8\ \text{m} = 210\ \text{kg·m}$ e $175\ \text{kg} \times 1{,}2\ \text{m} = 210\ \text{kg·m}$: gli spostamenti sono inversamente proporzionali alle masse, come le velocità di due corpi che si spingono a partire da fermi. Il risultato non dipende da come cammina la persona, purché alla fine tutto sia di nuovo fermo.

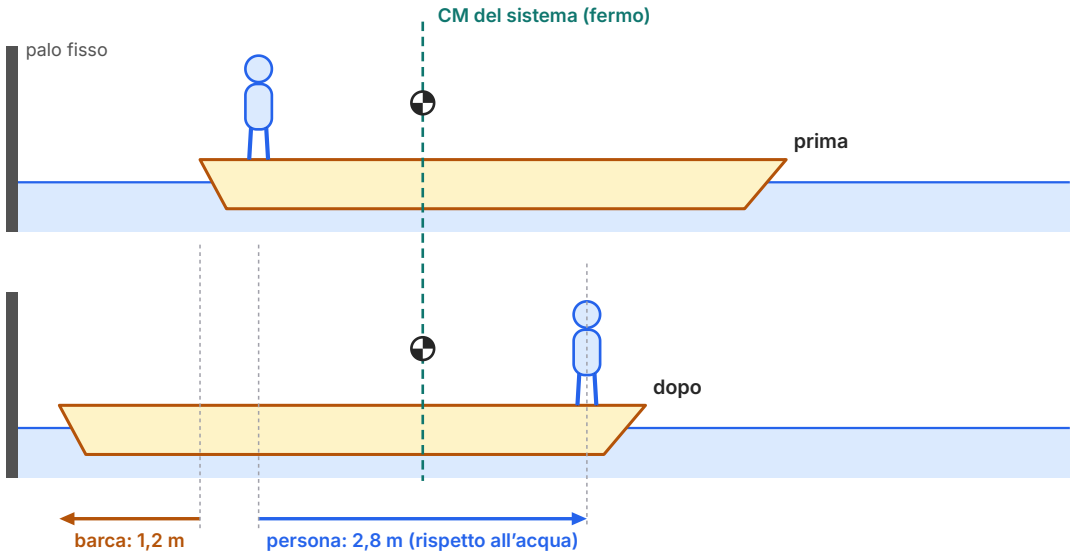


Figura 8.6 La persona (75 kg) e la barca (175 kg, lunga 5,0 m) dell'esempio svolto, prima e dopo che la persona ha camminato per 4,0 m dalla poppa alla prua. Il CM del sistema resta sulla stessa verticale (tratteggio): la barca arretra di 1,2 m rispetto al palo fisso, la persona avanza di 2,8 m.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la barca su rotaia

Materiali. Una rotaia a basso attrito; un carrello leggero («la barca») con il piano superiore orizzontale; una macchinina giocattolo a batteria che corra sul carrello; una bilancia (1 g); un righello fissato alla rotaia (1 mm) e un indice sul carrello; uno smartphone su treppiede.

Procedimento. 1) Misura la massa del carrello, $M = (0{,}500 \pm 0{,}001)$ kg, e quella della macchinina, $m = (0{,}150 \pm 0{,}001)$ kg. 2) Appoggia la macchinina ferma su un estremo del carrello, fermo, e leggi la posizione dell'indice sul righello. 3) Accendi la macchinina, lasciala correre di un tratto d fino a un fermo fissato sul carrello, e aspetta che tutto si sia fermato. 4) Rileggi la posizione dell'indice: la differenza è lo spostamento Δx del carrello. 5) Ripeti spostando il fermo, per quattro valori di d (incertezza 0,2 cm), e fai tre prove per ogni valore.

La previsione. Le forze fra ruote e carrello sono interne; se l'attrito della rotaia è trascurabile, il CM del sistema non si sposta, e come per la barca $\Delta x = m\,d/(m + M) = 0{,}2308\,d$. L'incertezza della previsione viene quasi tutta da quella di d: $0{,}2308 \times 0{,}2$ cm $\approx 0{,}05$ cm.

Tabella 8.2 Spostamento del carrello: previsione e misura (dati tipici; la misura è la media di tre prove, con incertezza 0,2 cm).

d (cm)	Δx previsto (cm)	Δx misurato (cm)	differenza (cm)	compatibili?
20,0	4,62 ± 0,05	4,5 ± 0,2	0,12	sì
30,0	6,92 ± 0,05	6,8 ± 0,2	0,12	sì
40,0	9,23 ± 0,05	9,0 ± 0,2	0,23	sì
50,0	11,54 ± 0,05	11,3 ± 0,2	0,24	sì

Che cosa concludere. Come in *Fisica 1*, capitolo 4, due valori sono compatibili se la loro differenza non supera la somma delle incertezze, qui 0,05 cm + 0,2 cm = 0,25 cm: in tutte e quattro le righe la misura è compatibile con la previsione del CM fermo. Lo scarto, però, ha sempre lo stesso segno e cresce con d: il carrello si sposta sempre un po' meno del previsto. È il segno di un effetto sistematico: l'attrito delle ruote del carrello sulla rotaia è una forza esterna, piccola ma non nulla, che frena il carrello mentre arretra. Il rapporto $\Delta x/d$ medio misurato, circa 0,226, è infatti di poco minore di 0,231.

Per la relazione. Riporta la tabella completa con le tre prove per ogni d. Traccia il grafico di Δx in funzione di d con le barre d'errore, insieme alla retta prevista $\Delta x = 0{,}231\,d$, e confronta la pendenza della retta che meglio approssima i punti con quella prevista. Proponi un modo per ridurre l'effetto dell'attrito e un controllo con il video: la posizione del CM, calcolata fotogramma per fotogramma, deve restare costante anche **durante** la corsa.

8.3.3 Il sistema Terra–Luna

Anche la Terra e la Luna formano un sistema di due corpi legati da una forza interna, l'attrazione gravitazionale reciproca. Il Sole attira entrambe quasi allo stesso modo: curva il moto d'insieme del sistema attorno a sé, ma conta poco per il moto dell'una rispetto all'altra. Non è la Luna a girare attorno al centro della Terra: **entrambe girano attorno al loro CM**. Con i dati della Tabella A.2, mettendo l'origine nel centro della Terra:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{7{,}35 \times 10^{22}\ \mathrm{kg} \times 3{,}84 \times 10^{8}\ \mathrm{m}}{5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg} + 7{,}35 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}} \approx 4{,}67 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$$

Il CM del sistema Terra–Luna si trova a circa 4670 km dal centro della Terra, cioè **dentro** la Terra, a circa 1700 km sotto la superficie (Figura 8.7). In un mese il centro della Terra percorre un piccolo cerchio attorno a questo punto, mentre la Luna ne percorre uno grande dalla parte opposta; ed è il CM, non il centro della Terra, a descrivere l'orbita attorno al Sole.

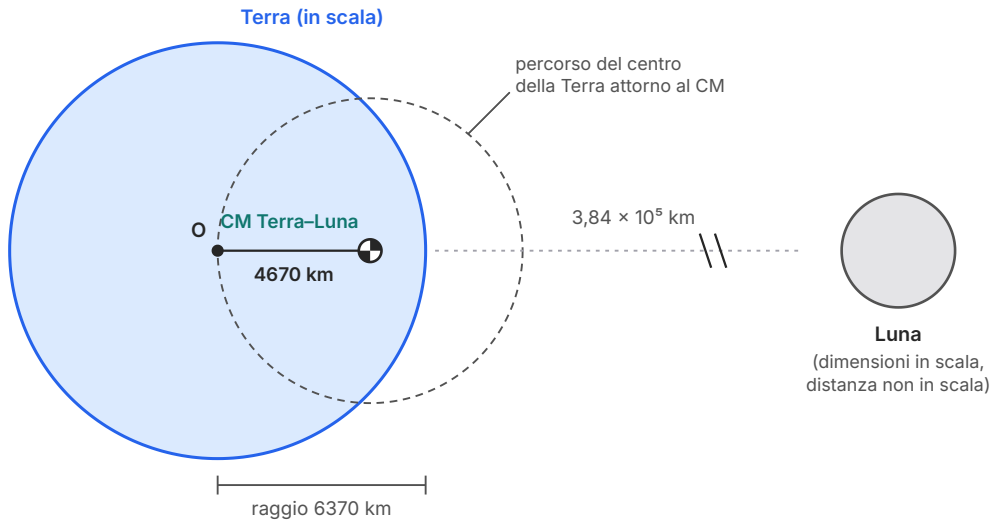


Figura 8.7 Il centro di massa del sistema Terra–Luna, a 4670 km dal centro O della Terra: è dentro la Terra, a circa tre quarti del raggio. Il cerchio tratteggiato è il percorso del centro della Terra attorno al CM in un mese (27,3 giorni). La Terra e la Luna sono disegnate nella stessa scala; la distanza fra le due no.

COLLEGAMENTI

Astronomia: le stelle che oscillano

Lo stesso ragionamento vale per una stella e i suoi pianeti. Nel Sistema solare il pianeta che pesa di più nel bilancio è Giove, con una massa di circa $1{,}90 \times 10^{27}$ kg, a 5,20 au dal Sole (Tabelle A.2 e A.3). Il CM del sistema Sole–Giove si trova a $5{,}20 \times 1{,}496 \times 10^{11}$ m $\times$ $1{,}90 \times 10^{27}$ / $(1{,}99 \times 10^{30} + 1{,}90 \times 10^{27}) \approx 7{,}4 \times 10^{8}$ m dal centro del Sole: un po' più del raggio del Sole, $6{,}96 \times 10^{8}$ m. Il CM è appena **fuori** dal Sole, che gli gira attorno in un periodo di Giove, 11,86 anni.

Per effetto del solo Giove, il Sole si muove dunque, rispetto al CM, a circa $(2\pi \times 7{,}4 \times 10^{8}$ m$)/(11{,}86 \times 3{,}156 \times 10^{7}$ s$) \approx 12$ m/s, la velocità di una bicicletta veloce. Visto da un'altra stella, il Sole si avvicinerebbe e si allontanerebbe periodicamente. Gli astronomi misurano questo effetto nelle stelle vicine, attraverso la loro luce: la componente della velocità della stella lungo la linea di vista si chiama **velocità radiale**. Un'oscillazione periodica della velocità radiale tradisce un compagno invisibile, e dagli anni Novanta del Novecento il **metodo delle velocità radiali** ha permesso di scoprire moltissimi pianeti attorno ad altre stelle. Un pianeta come la Terra fa oscillare il Sole a meno di 0,1 m/s, ed è molto più difficile da rivelare.

8.4 L'energia di un sistema di corpi

8.4.1 Le forze interne possono compiere lavoro

Le forze interne non cambiano la quantità di moto totale. Cambiano però l'**energia cinetica** totale? Sì, e lo hai già visto: due pattinatori fermi che si spingono partono in versi opposti, con $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ sempre nullo ma con un'energia cinetica che prima non c'era. La differenza fra le due grandezze sta nel lavoro. Le forze interne di una coppia sono opposte, quindi i loro **impulsi** sono opposti e si cancellano; ma i **lavori** dipendono dagli spostamenti dei punti di applicazione, che in generale sono diversi. Quando i due pattinatori si allontanano, ciascuna forza ha lo stesso verso dello spostamento del corpo su cui agisce: entrambi i lavori sono positivi e si sommano.

La variazione dell'energia cinetica totale è uguale al lavoro di **tutte** le forze, interne ed esterne (teorema dell'energia cinetica, corpo per corpo). L'energia messa in gioco dalle forze interne viene da una forma di energia del sistema: chimica nei muscoli o nell'esplosivo, elastica in una molla compressa fra due carrelli. Viceversa, negli urti anelastici del capitolo 7 le forze interne compiono un lavoro totale negativo e una parte dell'energia cinetica diventa energia interna dei corpi che si deformano e si scaldano.

Un esempio. Un'astronauta di 80 kg, ferma rispetto alla stazione spaziale, spinge via una cassa di 20 kg, che parte a 1,2 m/s. La spinta è interna al sistema astronauta + cassa, e la quantità di moto totale resta nulla: 80 kg $\times$ v_a + 20 kg $\times$ 1,2 m/s = 0, quindi l'astronauta arretra a 0,30 m/s, e il CM dei due resta fermo. Le energie cinetiche, invece, passano da zero a $\frac{1}{2} \times 20$ kg $\times$ $(1{,}2$ m/s$)^2 \approx 14$ J per la cassa e $\frac{1}{2} \times 80$ kg $\times$ $(0{,}30$ m/s$)^2 = 3{,}6$ J per l'astronauta: 18 J forniti dai muscoli.

Le due energie stanno nel rapporto 4 : 1, l'inverso delle masse, perché i due corpi hanno quantità di moto di modulo uguale p e $K = p^2/(2m)$. **Quando due corpi partono da fermi spingendosi, il più leggero si prende la parte maggiore dell'energia**: in uno sparo quasi tutta va al proiettile, non all'arma che rincula.

8.4.2 Energia del centro di massa ed energia relativa

L'energia cinetica di un sistema si può dividere in due parti con un significato fisico preciso. La prima è l'energia cinetica che avrebbe tutta la massa M se si muovesse con il CM, $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$: è l'**energia cinetica del centro di massa**, legata al moto d'insieme. La seconda è l'energia cinetica dei corpi calcolata con le loro velocità **rispetto al CM**: è l'**energia cinetica relativa al centro di massa**, legata al moto dei corpi l'uno rispetto all'altro, e la indichiamo con K_{rel}. Si dimostra che l'energia cinetica totale è sempre la somma delle due:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + K_{rel}$$

È il **teorema di König** (dal nome del matematico Johann Samuel König). Verificalo su un caso: un carrello di 2,0 kg a 3,0 m/s va contro un carrello di 1,0 kg fermo. Il CM ha velocità v_{CM} = 6,0 kg·m/s / 3,0 kg = 2,0 m/s, e $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ = 6,0 J. Rispetto al CM il primo carrello va a 3,0 − 2,0 = 1,0 m/s e il secondo a 0 − 2,0 = −2,0 m/s: $K_{rel} = \frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 1{,}0^2$ J + $\frac{1}{2} \times 1{,}0 \times 2{,}0^2$ J = 3,0 J. La somma, 9,0 J, è proprio l'energia cinetica totale, $\frac{1}{2} \times 2{,}0$ kg × (3,0 m/s)^2 = 9,0 J.

La divisione chiarisce che cosa possono fare le forze interne. La prima parte, $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, dipende soltanto da v_{CM}, che le forze interne non possono cambiare: **le forze interne possono cambiare soltanto K_{rel}**. In un urto completamente anelastico i due corpi finiscono con la stessa velocità, quella del CM, e K_{rel} si annulla: l'energia cinetica persa è esattamente K_{rel}, cioè 3,0 J nell'esempio, un terzo del totale. È la perdita massima possibile in un urto, come hai visto nel capitolo 7; i 6,0 J del CM non si possono dissipare, perché il CM deve continuare a muoversi con p_{tot}/M.

APPROFONDIMENTO

Il sistema del centro di massa

Il **sistema del centro di massa** è il sistema di riferimento che ha l'origine nel CM e trasla con esso; se il sistema di corpi è isolato, il CM si muove di moto rettilineo uniforme e questo riferimento è inerziale (capitolo 2). Per costruzione, in questo sistema la quantità di moto totale è **nulla** prima, durante e dopo l'urto.

Visti dal CM, gli urti diventano simmetrici: i corpi arrivano e ripartono con quantità di moto uguali e opposte. In un urto elastico frontale ciascun corpo riparte con la stessa velocità con cui è arrivato, ma in verso opposto, perché deve conservarsi anche K_{rel}; in un urto completamente anelastico entrambi si fermano. Per esempio, i carrelli del paragrafo precedente, visti dal CM, arrivano a +1,0 m/s e −2,0 m/s: se l'urto è elastico ripartono a −1,0 m/s e +2,0 m/s, e tornando al riferimento della rotaia (aggiungendo 2,0 m/s) si trovano 1,0 m/s e 4,0 m/s, gli stessi valori che danno le formule del capitolo 7. Per questo negli acceleratori di particelle si fanno scontrare due fasci con quantità di moto opposte: il laboratorio **è** allora il sistema del CM, e tutta l'energia cinetica può trasformarsi.

APPROFONDIMENTO

Il centro comune di gravità nei *Principia*

Il teorema del moto del centro di massa è già nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton (1687), come quarto corollario delle leggi del moto. Newton non usa il termine «centro di massa», che è più tardo: parla di *commune gravitatis centrum*, il centro di gravità comune dei corpi, che per lui coincide con il nostro CM. Il corollario comincia così (testo della prima edizione):

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis.

«Il centro di gravità comune non cambia il proprio stato di moto o di quiete per le azioni dei corpi l'uno sull'altro» (traduzione della redazione). Newton aggiunge che, escluse le azioni e gli impedimenti esterni, il centro comune di corpi che agiscono gli uni sugli altri «o è in quiete o si muove uniformemente in linea retta», e conclude: *Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis*, «la legge di un sistema di più corpi è dunque la stessa di un corpo solo, per quanto riguarda il perseverare nello stato di moto o di quiete» (traduzione della redazione). È esattamente il contenuto del paragrafo sui sistemi isolati: il primo principio, scritto per un corpo, vale per il centro di massa di un sistema intero.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$x_{CM} = \Sigma\, m_i x_i / M$, $y_{CM} = \Sigma\, m_i y_i / M$; $\boldsymbol{r}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{r}_i / M$ — posizione del centro di massa (m): media delle posizioni pesata con le masse; M (kg) è la massa totale. Per un corpo composto si sostituisce ogni parte con il suo CM; un foro conta come massa negativa.

$\boldsymbol{v}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{v}_i / M$ e $\boldsymbol{p}_{tot} = M\boldsymbol{v}_{CM}$ — la velocità del CM (m/s) è la media pesata delle velocità; la quantità di moto totale (kg·m/s) è quella di tutta la massa che si muove con il CM.

$\boldsymbol{F}_{est} = M\boldsymbol{a}_{CM}$ — teorema del moto del CM: la risultante delle sole forze esterne (N) determina l'accelerazione del CM (m/s^2); le forze interne si cancellano a coppie per il terzo principio. Vale per qualunque sistema, anche deformabile o che si divide in pezzi.

$\boldsymbol{F}_{est} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_{CM}$ costante $\Longleftrightarrow \boldsymbol{p}_{tot}$ costante — sistema isolato: il CM si muove di moto rettilineo uniforme o resta fermo. Se il sistema parte da fermo: $\Sigma\, m_i \Delta x_i = 0$.

$K = \tfrac{1}{2} M v_{CM}^{\,2} + K_{rel}$ — teorema di König (J): le forze interne possono cambiare soltanto l'energia cinetica relativa al CM; l'energia che forniscono o dissipano viene da (o diventa) energia interna del sistema.

CM e baricentro coincidono se il campo gravitazionale è uniforme nella regione occupata dal sistema.

SINTESI

- Il centro di massa di un sistema di corpi è il punto le cui coordinate sono le medie delle coordinate dei corpi pesate con le masse: $\boldsymbol{r}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{r}_i / M$.
- Per due corpi il CM sta sul segmento che li unisce e lo divide in parti inversamente proporzionali alle masse; in un corpo omogeneo con un centro (un asse, un piano) di simmetria sta nel centro (sull'asse, sul piano).
- Il CM di un corpo composto si trova sostituendo ogni parte con un punto, nel suo CM, che ne porta la massa; un foro si tratta come una massa negativa.
- Il CM è un punto geometrico e può trovarsi fuori dal materiale: anelli, corpi a L, un saltatore inarcato.
- CM e baricentro coincidono se il campo gravitazionale è uniforme sul sistema; il CM è definito anche in assenza di gravità.
- La quantità di moto totale di un sistema è $\boldsymbol{p}_{tot} = M\boldsymbol{v}_{CM}$.
- Teorema del moto del centro di massa: $\boldsymbol{F}_{est} = M\boldsymbol{a}_{CM}$. Il CM si muove come un punto con tutta la massa del sistema, soggetto alle sole forze esterne; le forze interne non possono cambiarne il moto.
- Un proiettile che esplode in volo: il CM dei frammenti prosegue sulla parabola del proiettile intero finché nessun frammento tocca terra.
- In un sistema isolato il CM si muove di moto rettilineo uniforme o resta fermo: è la conservazione della quantità di moto vista come primo principio per il CM. Se il sistema parte da fermo, il CM non si sposta (persona sulla barca, pattinatori che tirano una fune).
- Il CM del sistema Terra–Luna è dentro la Terra, a 4670 km dal suo centro; quello del sistema Sole–Giove è appena fuori dal Sole. Le oscillazioni delle stelle attorno al CM rivelano i loro pianeti.
- Le forze interne possono compiere lavoro e cambiare l'energia cinetica del sistema anche se $\boldsymbol{p}_{tot}$ non cambia; per il teorema di König possono cambiare soltanto l'energia cinetica relativa al CM.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Due corpi puntiformi, di masse m e $3m$, sono a distanza d. Il loro centro di massa si trova:

   A. a metà strada fra i due

   B. a $3d/4$ dal corpo di massa m

   C. a $d/4$ dal corpo di massa m

   D. a $d/3$ dal corpo di massa $3m$

2. ● Il centro di massa e il baricentro di un corpo coincidono:

   A. sempre, per definizione

   B. soltanto nei corpi omogenei e simmetrici

   C. quando il campo gravitazionale è uniforme nella regione occupata dal corpo

   D. mai, perché il baricentro dipende dal peso

3. ● Le forze interne di un sistema di corpi:

   A. non possono cambiare la velocità del centro di massa

   B. non possono cambiare la velocità di nessun corpo del sistema

   C. non compiono mai lavoro

   D. sono sempre trascurabili rispetto alle forze esterne

4. ●● Una granata esplode in volo in tre frammenti; la resistenza dell'aria è trascurabile. Subito dopo l'esplosione il centro di massa dei frammenti:

   A. si ferma e poi cade in verticale

   B. prosegue in linea retta con la velocità che aveva

   C. segue la traiettoria del frammento più pesante

   D. continua a percorrere la parabola della granata, finché nessun frammento tocca il suolo

5. ●● Un sistema isolato di due corpi ha massa totale 3,0 kg e quantità di moto totale 6,0 kg·m/s. La velocità del suo centro di massa:

   A. vale 18 m/s e cambia durante un urto fra i due corpi

   B. vale 2,0 m/s e resta costante anche durante un urto

   C. vale 0,50 m/s e resta costante

   D. non si può calcolare senza le velocità dei due corpi

6. ●● Un'asta omogenea lunga 1,0 m e di massa 2,0 kg porta fissata a un estremo una piccola sfera di 2,0 kg. A che distanza da quell'estremo si trova il centro di massa?

   A. 0,50 m

   B. 0,33 m

   C. 0,25 m

   D. 0,75 m

7. ●● Due pattinatori, fermi sul ghiaccio liscio, si spingono e partono in versi opposti. Per il sistema dei due pattinatori:

   A. la quantità di moto totale resta nulla, mentre l'energia cinetica totale aumenta

   B. la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale restano nulle

   C. la quantità di moto totale aumenta, mentre l'energia cinetica totale resta nulla

   D. il centro di massa si sposta verso il pattinatore più pesante

8. ●●● Nel sistema di riferimento del centro di massa di due corpi che si urtano:
   A. l'energia cinetica totale è sempre nulla
   B. i due corpi hanno sempre velocità uguali e opposte
   C. la quantità di moto totale è nulla soltanto dopo l'urto
   D. la quantità di moto totale è nulla prima, durante e dopo l'urto

Vero o falso

9. ● Il centro di massa di un corpo si trova sempre in un punto occupato dal materiale del corpo. V / F

10. ●● Se la risultante delle forze esterne su un sistema è nulla, ogni corpo del sistema si muove di moto rettilineo uniforme. V / F

11. ●● In un'esplosione si conserva la quantità di moto totale (le forze esterne sono trascurabili durante l'esplosione), ma l'energia cinetica totale aumenta. V / F

12. ●● Il centro di massa del sistema Terra–Luna si trova all'interno della Terra. V / F

Applicare

13. ● Una sfera di 1,5 kg e una sfera di 0,50 kg sono fissate alle estremità di un'asticella leggera lunga 80 cm. A che distanza dalla sfera di 1,5 kg si trova il centro di massa?

14. ● Tre corpi puntiformi hanno masse 1,0 kg, 2,0 kg e 1,0 kg e si trovano nei punti (0; 0), (3,0 m; 0) e (3,0 m; 4,0 m). Calcola le coordinate del centro di massa.

15. ● Completa. Un carrello di 1,5 kg si muove a +4,0 m/s e un carrello di 2,5 kg a −2,0 m/s sulla stessa rotaia. La quantità di moto totale vale _____ kg·m/s e la velocità del centro di massa vale _____ m/s.

16. ●● Da una lamina quadrata omogenea di lato 30 cm, con un vertice nell'origine e i lati sugli assi, si ritaglia il quadrato di lato 10 cm nell'angolo opposto all'origine (fra 20 cm e 30 cm su entrambi gli assi). Con il metodo della massa negativa trova il centro di massa della lamina forata.

17. ●● Usa il grafico della Figura 8.4. a) Ricava dalle pendenze la velocità del carrello A prima e dopo l'urto e quella del carrello B dopo l'urto. b) Calcola la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale prima e dopo l'urto. Che tipo di urto è?

18. ●● Usando i dati della Tabella A.2, calcola a che distanza dal centro del Sole si trova il centro di massa del sistema Sole–Terra e confrontala con il raggio del Sole.

19. ●● Su un sistema di tre corpi, di massa totale 12 kg, agiscono forze esterne con risultante di 30 N. Quanto vale l'accelerazione del centro di massa? Serve conoscere le forze interne?

20. ●● Due astronauti, di 90 kg e 60 kg con le tute, fluttuano fermi a 12 m di distanza nella stazione spaziale e tirano i capi di una fune. a) In che punto si incontrano? b) In un istante il primo si muove a 0,20 m/s: quanto è veloce il secondo?

Problemi

21. ●● Due blocchi, di 2,0 kg e 3,0 kg, collegati da una molla, scivolano su un piano orizzontale liscio. Sul blocco di 2,0 kg agisce una forza orizzontale costante di 10 N; la molla si allunga e si accorcia mentre i blocchi avanzano. a) Quanto vale l'accelerazione del centro di massa? b) In un certo istante il blocco di 2,0 kg ha accelerazione 4,0 m/s^2 nel verso della forza: quanto vale in quell'istante l'accelerazione del blocco di 3,0 kg?

22. ●●● Un proiettile di 0,90 kg viene lanciato da terra a 30 m/s con un angolo di 45° sull'orizzontale. Nel punto più alto esplode in due frammenti uguali; subito dopo l'esplosione uno dei due è fermo. Trascura l'aria. a) A che distanza dal punto di lancio cade ciascun frammento? b) Con quale velocità parte il secondo frammento? c) Quanta energia ha fornito l'esplosione ai frammenti?

23. ●●● Un disco di 0,60 kg scivola verso est a 4,0 m/s su una lastra di ghiaccio liscio, quando una piccola carica lo fa esplodere in due frammenti che continuano a scivolare lungo la stessa retta. 2,0 s dopo l'esplosione il frammento di 0,20 kg si trova 4,0 m a ovest del punto dell'esplosione. a) Dove si trova in quell'istante il centro di massa? E l'altro frammento? b) Calcola le velocità dei due frammenti e verifica la conservazione della quantità di moto. c) Quanta energia ha fornito l'esplosione? Verifica che è uguale all'energia cinetica relativa al CM dopo l'esplosione.

24. ●● Su un'autostrada un'auto di 1200 kg che viaggia a 30 m/s tampona un camion di 3000 kg che viaggia nello stesso verso a 20 m/s; i due veicoli restano incastrati. a) Calcola la velocità del centro di massa dei due veicoli prima dell'urto. b) Con quale velocità si muove il rottame subito dopo l'urto? c) Quanta energia cinetica si è trasformata nell'urto, e quale frazione del totale? Spiega con il teorema di König perché la frazione è così piccola.

25. ●●● Due blocchi, di 2,0 kg e 3,0 kg, sono fermi su un piano liscio e tengono compressa fra loro una molla leggera, che contiene 15 J di energia elastica. Si brucia il filo che li tiene uniti e la molla li spinge via. a) Calcola le velocità finali dei due blocchi. b) Come si divide l'energia fra i due blocchi? c) Dove si trova il CM quando i blocchi sono a 1,0 m l'uno dall'altro, misurando dalla posizione iniziale del blocco di 2,0 kg (la molla era lunga 10 cm)?

26. ●● Un saltatore in alto ha il centro di massa a 1,05 m da terra al momento dello stacco, e si stacca con una velocità verticale di 4,6 m/s. a) Fino a che altezza sale il suo CM? (Trascura l'aria.) b) Con lo stile dorsale il suo CM può passare circa 10 cm sotto l'asticella: quale asticella può superare, al massimo?

27. ●●● Una ragazza di 50 kg si trova all'estremo di una zattera di 150 kg, lunga 6,0 m, ferma sull'acqua; l'estremo opposto della zattera dista 1,0 m dal pontile. La ragazza cammina verso il pontile fino all'altro estremo della zattera. Trascura la resistenza dell'acqua. a) Di quanto si sposta la zattera, e in che verso? b) A che distanza dal pontile si trova la ragazza alla fine? Riesce a saltare a terra con un balzo di 2,0 m?

28. ●●● Il centro della Terra percorre in 27,3 giorni un cerchio attorno al centro di massa Terra–Luna, a 4670 km da esso. a) Con quale velocità si muove il centro della Terra rispetto al CM? b) Con quale velocità si muove la Luna rispetto al CM (usa la distanza Terra–Luna della Tabella A.2)? c) Verifica che il rapporto fra le due velocità è uguale al rapporto fra le masse della Luna e della Terra, e spiega perché deve essere così.

Ragionare e argomentare

29. ●● Nelle avventure del barone di Münchhausen il barone, sprofondato con il cavallo in una palude, si tira fuori tirandosi per il codino. Spiega con il teorema del moto del centro di massa perché l'impresa è impossibile, e che cosa servirebbe davvero per uscire dalla palude.

30. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Un tuffatore che si raggomitola in volo ruota più in fretta e così riesce ad arrivare più lontano dal trampolino».

31. ●●● Stima di ordine di grandezza. Supponi che tutte le persone della Terra, circa 8 miliardi con una massa media di 60 kg, saltino nello stesso istante, sollevando il proprio centro di massa di 0,5 m. Di quanto si sposta la Terra nel frattempo? Confronta il risultato con il diametro di un atomo (circa 10^{-10} m).

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: il quarto corollario alle leggi del moto, sul centro di gravità comune di un sistema di corpi.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla conservazione della quantità di moto e sul centro di massa, con molti esempi ragionati.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sul centro di massa e sui sistemi di particelle, con esercizi graduati.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sul centro di massa e sulla stabilità, con esempi tratti dallo sport e dalla vita quotidiana.

Glossario del capitolo

Accelerazione del centro di massa
Media delle accelerazioni dei corpi di un sistema pesata con le masse: $\boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{a}_i / M$.

Centro di massa
Punto le cui coordinate sono le medie delle coordinate dei corpi di un sistema pesate con le masse: $\boldsymbol{r}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{r}_i / M$. Può trovarsi fuori dal materiale.

Corpo composto
Corpo formato da parti di cui si conosce il centro di massa; il suo CM si trova sostituendo ogni parte con un punto, nel suo CM, che ne porta la massa.

Energia cinetica del centro di massa
L'energia $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ che avrebbe tutta la massa del sistema muovendosi con il CM; le forze interne non la possono cambiare.

Energia cinetica relativa al centro di massa
Energia cinetica K_{rel} dei corpi di un sistema calcolata con le loro velocità rispetto al CM; è la parte che le forze interne possono cambiare.

Lamina omogenea
Corpo piano di spessore costante, fatto dello stesso materiale in ogni punto: la massa di ogni sua parte è proporzionale all'area.

Metodo della massa negativa
Calcolo del centro di massa di un corpo con un foro, trattato come il corpo intero più una parte di massa negativa al posto del foro.

Metodo delle velocità radiali
Ricerca di pianeti attorno ad altre stelle attraverso le oscillazioni periodiche della velocità radiale della stella.

Sistema del centro di massa
Sistema di riferimento con l'origine nel CM, che trasla con esso; la quantità di moto totale vi è sempre nulla. È inerziale se il sistema di corpi è isolato.

Stile dorsale
Tecnica del salto in alto (*Fosbury flop*) in cui l'atleta supera l'asticella di schiena, inarcato: il suo CM può passare sotto l'asticella.

Teorema del moto del centro di massa
$\boldsymbol{F}_{est} = M\boldsymbol{a}_{CM}$: il CM di un sistema si muove come un punto materiale con tutta la massa del sistema, soggetto alla risultante delle sole forze esterne.

Teorema di König
L'energia cinetica di un sistema è la somma dell'energia cinetica del CM e dell'energia cinetica relativa al CM: $K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K_{rel}$.

Velocità del centro di massa
Media delle velocità dei corpi di un sistema pesata con le masse: $\boldsymbol{v}_{CM} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{v}_i / M = \boldsymbol{p}_{tot} / M$.

Velocità radiale
Componente della velocità di una stella lungo la linea di vista dell'osservatore; le sue oscillazioni periodiche rivelano i pianeti che fanno ruotare la stella attorno al CM comune.

Vettore posizione del centro di massa
Il vettore $\boldsymbol{r}_{CM}$ che va dall'origine al centro di massa; le sue componenti sono x_{CM}, y_{CM} (e z_{CM}).

Soluzioni

1. B. Il CM divide la distanza in parti inversamente proporzionali alle masse: a $3d/4$ dal corpo di massa m e a $d/4$ da quello di massa $3m$.

2. C. Se g è lo stesso in tutto il corpo, i pesi sono proporzionali alle masse e le due medie pesate coincidono; la simmetria non c'entra.

3. A. Per il teorema $\boldsymbol{F}_{\text{est}} = M\boldsymbol{a}_{\text{CM}}$ il moto del CM dipende solo dalle forze esterne; le forze interne cambiano le velocità dei singoli corpi e possono compiere lavoro.

4. D. Le forze dell'esplosione sono interne; la sola forza esterna è il peso totale, quindi il CM ha ancora accelerazione g. Quando un frammento tocca terra, il suolo esercita una nuova forza esterna.

5. B. $v_{\text{CM}} = p_{\text{tot}}/M = 6{,}0\ \text{kg·m/s} / 3{,}0\ \text{kg} = 2{,}0\ \text{m/s}$; in un sistema isolato resta costante, urti compresi.

6. C. L'asta equivale a 2,0 kg nel suo centro, a 0,50 m dall'estremo: $(2{,}0\ \text{kg} \times 0 + 2{,}0\ \text{kg} \times 0{,}50\ \text{m})/4{,}0\ \text{kg} = 0{,}25\ \text{m}$.

7. A. Le forze della spinta sono interne: la quantità di moto totale resta zero. I muscoli compiono lavoro positivo su entrambi, e l'energia cinetica passa da zero a un valore positivo.

8. D. Il CM è fermo nel proprio sistema, quindi $p_{\text{tot}} = M\,v_{\text{CM}} = 0$ in ogni istante. Sono uguali e opposte le quantità di moto, non le velocità (tranne a masse uguali).

9. F. Il CM è un punto geometrico: in un anello o in una lamina a L cade fuori dal materiale.

10. F. È il CM a muoversi di moto rettilineo uniforme; i singoli corpi possono accelerare per effetto delle forze interne (per esempio due corpi che si urtano).

11. V. Le forze dell'esplosione sono interne: p_{tot} resta invariato, mentre l'energia chimica dell'esplosivo diventa in parte energia cinetica dei frammenti.

12. V. È a 4670 km dal centro della Terra, il cui raggio è 6370 km.

13. Origine sulla sfera di 1,5 kg: $x_{\text{CM}} = 0{,}50\ \text{kg} \times 80\ \text{cm} / 2{,}0\ \text{kg} = 20\ \text{cm}$ (il CM è più vicino alla sfera più pesante).

14. $M = 4{,}0$ kg; $x_{\text{CM}} = (1{,}0 \times 0 + 2{,}0 \times 3{,}0 + 1{,}0 \times 3{,}0)\ \text{kg·m} / 4{,}0\ \text{kg} \approx 2{,}3\ \text{m}$ (2,25 m); $y_{\text{CM}} = 1{,}0\ \text{kg} \times 4{,}0\ \text{m} / 4{,}0\ \text{kg} = 1{,}0\ \text{m}$.

15. $p_{\text{tot}} = 1{,}5\ \text{kg} \times 4{,}0\ \text{m/s} + 2{,}5\ \text{kg} \times (-2{,}0\ \text{m/s}) = 1{,}0\ \text{kg·m/s}$; $v_{\text{CM}} = 1{,}0\ \text{kg·m/s} / 4{,}0\ \text{kg} = 0{,}25\ \text{m/s}$.

16. Lamina intera: area 900 cm^2, CM in (15 cm; 15 cm); quadrato tolto: area 100 cm^2, CM in (25 cm; 25 cm), con segno meno. $x_{\text{CM}} = (900 \times 15\ \text{cm} - 100 \times 25\ \text{cm})/(900 - 100) \approx 13{,}8\ \text{cm}$ (13,75 cm); per simmetria $y_{\text{CM}} = x_{\text{CM}}$. Il CM si sposta dalla parte opposta al foro.

17. a) A: da 0,100 m a 0,399 m in 0,5 s, circa 0,60 m/s; dopo l'urto da 0,399 m a 0,460 m in 0,5 s, circa 0,12 m/s. B: fermo, poi da 0,600 m a 0,961 m in 0,5 s, circa 0,72 m/s. b) Prima: $p_{\text{tot}} = 0{,}300\ \text{kg} \times 0{,}60\ \text{m/s} = 0{,}18\ \text{kg·m/s}$; dopo: $0{,}300 \times 0{,}12 + 0{,}200 \times 0{,}72 = 0{,}036 + 0{,}144 = 0{,}18\ \text{kg·m/s}$. Energia cinetica prima: $\frac{1}{2} \times 0{,}300 \times 0{,}60^2\ \text{J} = 0{,}054\ \text{J}$; dopo: $\frac{1}{2} \times 0{,}300 \times 0{,}12^2\ \text{J} + \frac{1}{2} \times 0{,}200 \times 0{,}72^2\ \text{J} \approx 0{,}0022\ \text{J} + 0{,}0518\ \text{J} = 0{,}054\ \text{J}$. Si conservano entrambe: l'urto è (con buona approssimazione) elastico.

18. Origine nel centro del Sole: $x_{\text{CM}} = 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} \times 1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m} / (1{,}99 \times 10^{30} + 5{,}97 \times 10^{24})\ \text{kg} \approx 4{,}49 \times 10^5\ \text{m} \approx 449\ \text{km}$. È circa 1/1500 del raggio del Sole ($6{,}96 \times 10^5$ km): il CM è praticamente nel centro del Sole.

19. $a_{\text{CM}} = F_{\text{est}}/M = 30\ \text{N} / 12\ \text{kg} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$, nella direzione e nel verso della risultante. Le forze interne non servono: si cancellano a coppie.

20. Le forze della fune sono interne e il sistema parte da fermo: il CM resta fermo. a) Si incontrano nel CM, a $12\ \text{m} \times 60\ \text{kg} / 150\ \text{kg} = 4{,}8\ \text{m}$ dal primo

astronauta (7,2 m dal secondo). b) La quantità di moto totale resta nulla: 90 kg × 0,20 m/s = 60 kg × v, v = 0,30 m/s, in verso opposto.

21. Sul sistema dei due blocchi agiscono in orizzontale solo la forza di 10 N (esterna) e le forze della molla (interne); peso e reazione normale si equilibrano. a) a_{CM} = 10 N / 5,0 kg = 2,0 m/s^2. b) $Ma_{CM} = m_1a_1 + m_2a_2$: 10 N = 2,0 kg × 4,0 m/s^2 + 3,0 kg × a_2, $a_2 \approx$ 0,67 m/s^2 nel verso della forza.

22. Dopo l'esplosione la sola forza esterna è il peso: il CM prosegue sulla parabola. a) Gittata del proiettile intero: $R = v_0^2 \text{ sen } 90°/g$ = (30 m/s)^2/(9,8 m/s^2) ≈ 91,8 m; il punto più alto è a $R/2 \approx$ 45,9 m. Il frammento fermo cade in verticale a 46 m. L'altro parte in orizzontale dalla stessa quota, quindi i due toccano terra insieme e in quell'istante $x_{CM} = R$: R = (45,9 m + x_2)/2 $\Rightarrow$ $x_2 = 2R - R/2 = 1{,}5R \approx 1{,}4 \times 10^2$ m (138 m). b) Nell'esplosione si conserva la quantità di moto (il peso è trascurabile in un tempo così breve): v_x = 30 m/s × cos 45° ≈ 21,2 m/s; 0,90 kg × 21,2 m/s = 0,45 kg × v_2, $v_2 \approx$ 42 m/s, orizzontale. c) Prima: ½ × 0,90 kg × (21,2 m/s)^2 ≈ 203 J; dopo: ½ × 0,45 kg × (42,4 m/s)^2 ≈ 405 J. L'esplosione ha fornito circa 2,0 × 10^2 J (l'energia potenziale non cambia nell'istante dell'esplosione).

23. Sul ghiaccio liscio peso e reazione normale si equilibrano: in orizzontale il sistema è isolato e il CM continua a muoversi a 4,0 m/s verso est (le forze dell'esplosione sono interne). Asse x verso est, origine nel punto dell'esplosione. a) Dopo 2,0 s x_{CM} = 4,0 m/s × 2,0 s = 8,0 m. Dalla definizione: 8,0 m = (0,20 kg × (−4,0 m) + 0,40 kg × x_2)/0,60 kg, x_2 = (4,8 + 0,80) kg·m / 0,40 kg = 14 m a est. b) I frammenti si muovono di moto uniforme: v_1 = −4,0 m / 2,0 s = −2,0 m/s (verso ovest), v_2 = 14 m / 2,0 s = 7,0 m/s (verso est). Controllo: 0,20 kg × (−2,0 m/s) + 0,40 kg × 7,0 m/s = 2,4 kg·m/s = 0,60 kg × 4,0 m/s. c) Prima: ½ × 0,60 × 4,0^2 J = 4,8 J; dopo: ½ × 0,20 × 2,0^2 J + ½ × 0,40 × 7,0^2 J = 0,40 J + 9,8 J = 10,2 J; l'esplosione ha fornito 5,4 J. Rispetto al CM (4,0 m/s) i frammenti vanno a −6,0 m/s e +3,0 m/s: K_{rel} = ½ × 0,20 × 6,0^2 J + ½ × 0,40 × 3,0^2 J = 3,6 J + 1,8 J = 5,4 J. Prima dell'esplosione K_{rel} era zero: l'esplosione, interna, ha cambiato solo l'energia relativa al CM, come prevede il teorema di König.

24. a) Asse nel verso del moto: v_{CM} = (1200 × 30 + 3000 × 20) kg·m/s / 4200 kg ≈ 22,9 m/s (22,86 m/s). b) Durante l'urto le forze fra i veicoli sono interne e molto più intense delle forze esterne (attriti con la strada): si conserva la quantità di moto, e il rottame si muove con il CM, a 22,9 m/s. c) Prima: K = ½ × 1200 × 30^2 J + ½ × 3000 × 20^2 J = 1,14 × 10^6 J; dopo: ½ × 4200 kg × (22,86 m/s)^2 ≈ 1,10 × 10^6 J. Si sono trasformati circa 4,3 × 10^4 J, meno del 4% del totale. Per il teorema di König le forze interne possono dissipare al massimo K_{rel}, l'energia cinetica relativa al CM: rispetto al CM, prima dell'urto, l'auto va a +7,14 m/s e il camion a −2,86 m/s, e K_{rel} = ½ × 1200 × 7,14^2 J + ½ × 3000 × 2,86^2 J ≈ 4,3 × 10^4 J, proprio l'energia trasformata. L'energia cinetica del CM non si può dissipare nell'urto: per questo un tamponamento fra veicoli con velocità simili è molto meno distruttivo di uno scontro frontale, in cui il CM è quasi fermo e quasi tutta l'energia è relativa al CM.

25. Sul piano liscio il sistema è isolato in orizzontale e parte da fermo: p_{tot} resta nullo; la forza elastica è conservativa e l'energia meccanica si conserva (capitolo 5). a) 2,0 kg × v_1 = 3,0 kg × v_2 (in moduli), e ½ × 2,0 × v_1^2 + ½ × 3,0 × v_2^2 = 15 J. Con v_1 = 1,5 v_2: 3,75 v_2^2 = 15 m^2/s^2, v_2 = 2,0 m/s e v_1 = 3,0 m/s, in versi opposti. b) 9,0 J al blocco di 2,0 kg e 6,0 J a quello di 3,0 kg: le energie stanno nel rapporto inverso delle masse. c) Il CM non si sposta. All'inizio, con l'origine sul blocco di 2,0 kg e il blocco di 3,0 kg a 0,10 m: x_{CM} = 3,0 × 0,10 m / 5,0 = 0,06 m. Quando la distanza è 1,0 m il blocco di 2,0 kg è in x_1 e quello di 3,0 kg in x_1 + 1,0 m: (2,0 x_1 + 3,0(x_1 + 1,0 m))/5,0 = 0,06 m $\Rightarrow$ x_1 = −0,54 m e x_2 = 0,46 m; il CM è sempre a 0,06 m dall'origine.

26. Dopo lo stacco sul saltatore agisce solo il peso: il CM sale come un punto lanciato verso l'alto, e si conserva l'energia meccanica. a) $\Delta h = v^2/(2g)$ = (4,6 m/s)^2/(2 × 9,8 m/s^2) ≈ 1,08 m; quota massima ≈ 1,05 m + 1,08 m ≈ 2,1 m (2,13 m). b) Circa 2,13 m + 0,10 m ≈ 2,2 m. (Qui la velocità orizzontale, che resta costante, non conta per la quota.)

27. Sul sistema ragazza + zattera agiscono in orizzontale solo forze interne; parte da fermo, quindi il CM resta fermo. a) La ragazza percorre 6,0 m rispetto alla zattera verso il pontile; come nell'esempio della barca la zattera si sposta in verso opposto di 50 kg × 6,0 m / (50 kg + 150 kg) = 1,5 m, allontanandosi dal pontile. b) L'estremo della zattera verso il pontile è ora a 1,0 m + 1,5 m = 2,5 m dal pontile, ed è lì che si trova la ragazza. Con un balzo di 2,0 m non arriva a terra; per di più, saltando, spingerebbe la zattera ancora più lontano.

28. a) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 4{,}67 \times 10^6$ m / (27,3 × 86 400 s) ≈ 12,4 m/s. b) La Luna dista dal CM $3{,}84 \times 10^8$ m − $4{,}67 \times 10^6$ m ≈ $3{,}79 \times 10^8$ m: $v = 2\pi \times 3{,}79 \times 10^8$ m / (27,3 × 86 400 s) ≈ $1{,}01 \times 10^3$ m/s. c) 12,4 / 1010 ≈ 0,0123 e $7{,}35 \times 10^{22}$ / $5{,}97 \times 10^{24}$ ≈ 0,0123. Il CM del sistema isolato Terra–Luna è fermo nel suo riferimento, quindi le quantità di moto della Terra e della Luna sono uguali e opposte: le velocità stanno nel rapporto inverso delle masse. (Equivalentemente, i due corpi girano nello stesso periodo su cerchi di raggi inversamente proporzionali alle masse.)

29. Traccia. Barone e cavallo formano un sistema; la forza della mano sul codino e quella del codino sulla mano sono interne, uguali e opposte, e non cambiano il moto del CM del sistema. Il CM può salire solo se una forza esterna verso l'alto supera il peso: per esempio la forza di un ramo afferrato con le mani, o della terraferma su cui fare leva.

30. Traccia. Dopo lo stacco l'unica forza esterna rilevante è il peso: il CM del tuffatore percorre la parabola fissata dalla velocità allo stacco, e nessun movimento del corpo in volo la può cambiare. Raggomitolarsi cambia la rotazione attorno al CM (lo studierai nel capitolo 10), non la traiettoria del CM né il punto di ingresso in acqua.

31. Traccia. Massa delle persone ≈ $8 \times 10^9 \times 60$ kg ≈ 5×10^{11} kg. Il sistema Terra + persone è, per quanto riguarda queste forze, isolato e fermo: il CM non si sposta, quindi $m\Delta h = M_T \Delta H$, $\Delta H \approx 5 \times 10^{11}$ kg × 0,5 m / 6×10^{24} kg ≈ 4×10^{-14} m, verso il basso: alcune migliaia di volte meno del diametro di un atomo, paragonabile alle dimensioni di un nucleo atomico. (Quando le persone ricadono, la Terra torna dov'era.)