CAPITOLO

7

Gli urti

«Le palle tornavano sempre a separarsi con una velocità relativa che stava alla velocità relativa d'incontro come 5 a 9 circa.» — Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), scolio alle leggi del moto (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Spiegare perché in un urto si conserva la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne ordinarie (approssimazione impulsiva).
2. Classificare gli urti in elastici, anelastici e completamente anelastici in base al bilancio dell'energia cinetica.
3. Risolvere urti elastici centrali con la conservazione della quantità di moto e l'inversione della velocità relativa, e riconoscere i casi particolari.
4. Calcolare la velocità comune e l'energia trasformata in un urto completamente anelastico, e analizzare il pendolo balistico in due fasi.
5. Usare il coefficiente di restituzione per descrivere gli urti anelastici e i rimbalzi.
6. Risolvere urti in due dimensioni per componenti e dimostrare la regola dei 90° per masse uguali.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Che cos'è un urto 2
7.2 Gli urti elastici in una dimensione 4
7.3 Gli urti completamente anelastici 9
7.4 Gli urti anelastici e la loro misura 12
7.5 Gli urti in due dimensioni 15

Fisica 3 · Parte II · Le leggi di conservazione · versione 1.0
Capitolo 7: Gli urti · pagine 181–206 del volume completo · estratto per lo studio

Una boccia lanciata con precisione colpisce in pieno il pallino: la boccia si ferma quasi sul posto e il pallino schizza via. Una palla da tennis rimbalza sul campo, un'auto ne tampona un'altra al semaforo. In tutti questi casi due corpi si incontrano per un istante, si scambiano forze molto intense e poi proseguono con velocità diverse da quelle che avevano. Che cosa si può prevedere di quello che succede dopo, senza sapere quasi nulla di quello che succede durante?

Moltissimo, grazie alle leggi di conservazione. Nel capitolo 6 hai visto che la quantità di moto totale di un sistema isolato non cambia: in questo capitolo la applicherai agli urti, insieme a un bilancio dell'energia cinetica che distingue un tipo di urto dall'altro. Scoprirai perché nel pendolo di Newton esce sempre una sola biglia, come si misura la velocità di un proiettile con un blocco di legno appeso a due fili, perché due palle da biliardo uguali si separano ad angolo retto e come si ricostruisce un incidente stradale dalle tracce sull'asfalto.

7.1 Che cos'è un urto

7.1.1 Forze intense e brevi

In fisica si chiama **urto** un'interazione fra due o più corpi che dura un intervallo di tempo molto breve rispetto ai tempi del moto che osserviamo, durante il quale i corpi si scambiano forze molto intense. Sono le forze impulsive del capitolo 6: hanno un modulo grande e agiscono per un tempo Δt piccolo, e il loro effetto si misura con l'impulso che trasmettono, cioè con la variazione di quantità di moto che producono (capitolo 6).

Non serve che i corpi si tocchino davvero. Due carrelli con magneti affacciati si respingono prima di venire a contatto; una sonda spaziale che passa vicino a un pianeta ne esce deviata. Anche questi sono urti: quello che conta è che l'interazione sia limitata a un breve intervallo di tempo, prima e dopo il quale i corpi si muovono liberamente. Del corpo che arriva diremo che è il **corpo incidente**; del corpo che viene colpito, spesso fermo, che è il **bersaglio**.

7.1.2 Perché nell'urto si conserva la quantità di moto

Durante l'urto ciascuno dei due corpi esercita una forza sull'altro. Per il terzo principio le due forze sono uguali e opposte in ogni istante, quindi anche i loro impulsi sono uguali e opposti: quanta quantità di moto guadagna un corpo, tanta ne perde l'altro. Le forze interne, da sole, non possono cambiare la quantità di moto totale del sistema dei due corpi.

Sui corpi agiscono però anche forze esterne: il peso, la reazione del tavolo, l'attrito. Il punto decisivo è che queste forze hanno valori ordinari, mentre l'urto dura pochissimo. Facciamo una stima con due palle da biliardo di 0,17 kg, supponendo che il contatto duri circa 1 ms e che la

palla colpita parta a 2,0 m/s. La forza media che la mette in moto è $F = \Delta p/\Delta t$ = (0,17 kg × 2,0 m/s)/(1 × 10^{-3} s) ≈ 340 N, duecento volte il peso della palla (1,7 N). L'attrito del panno, che vale una frazione del peso, nello stesso millisecondo trasmette un impulso dell'ordine di 3 × 10^{-4} N·s, contro gli 0,34 N·s dell'urto: un millesimo. Il peso, poi, è equilibrato dalla reazione del tavolo.

Possiamo quindi trascurare le forze esterne **durante** l'urto e trattare i due corpi come un sistema isolato per quel breve intervallo: è l'approssimazione impulsiva già incontrata nel capitolo 6. Ne segue la legge che useremo in tutto il capitolo: **la quantità di moto totale subito dopo l'urto è uguale a quella subito prima**,

$$\boldsymbol{p}_{\text{tot}}\ \text{prima} = \boldsymbol{p}_{\text{tot}}\ \text{dopo} \qquad \text{cioè} \qquad m_1\boldsymbol{v}_{1\text{i}} + m_2\boldsymbol{v}_{2\text{i}} = m_1\boldsymbol{v}_{1\text{f}} + m_2\boldsymbol{v}_{2\text{f}}$$

dove gli indici 1 e 2 indicano i corpi, i e f gli istanti subito prima e subito dopo l'urto. «Subito prima» e «subito dopo» sono parole importanti: un attimo dopo l'urto le forze esterne tornano a contare, e il pendolo colpito sale contro il peso.

7.1.3 Che cosa succede all'energia cinetica

La quantità di moto si conserva sempre; l'energia cinetica, invece, no. Durante l'urto i corpi si deformano: se la deformazione è perfettamente elastica, come in una molla ideale, l'energia immagazzinata viene restituita tutta quando i corpi si separano; se invece i corpi si ammaccano, si scaldano, vibrano o producono un rumore, una parte dell'energia cinetica diventa energia interna (capitolo 5) e non torna più in forma di moto. Gli urti si classificano proprio in base a questo bilancio:

- in un **urto elastico** l'energia cinetica totale dopo l'urto è uguale a quella prima: $K_\text{f} = K_\text{i}$;
- in un **urto anelastico** una parte dell'energia cinetica viene trasformata: $K_\text{f} < K_\text{i}$;
- in un **urto completamente anelastico** i corpi restano uniti dopo l'urto e proseguono con la stessa velocità: è il caso in cui si trasforma la quota più grande di energia cinetica.

La Figura 7.1 confronta i tre tipi di urto a parità di condizioni iniziali: un carrello A di 1,0 kg che viaggia a 2,0 m/s urta un carrello B uguale, fermo. La barra della quantità di moto è la stessa prima e dopo in tutti e tre i casi; la barra dell'energia cinetica resta uguale solo nell'urto elastico e si dimezza in quello completamente anelastico.

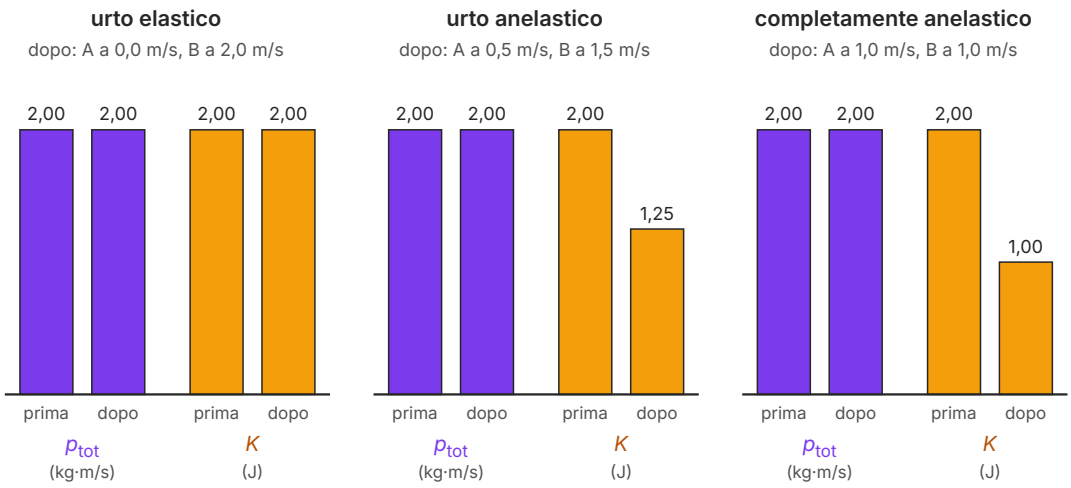


Figura 7.1 Quantità di moto totale (in viola) ed energia cinetica totale (in arancio) prima e dopo l'urto di un carrello A di 1,0 kg a 2,0 m/s contro un carrello B uguale e fermo, per tre urti diversi. Valori calcolati con le leggi di conservazione; nell'urto anelastico le velocità finali sono un esempio.

L'urto perfettamente elastico è un modello ideale. Si avvicinano molto a questo modello gli urti fra biglie d'acciaio o palle da biliardo, che perdono soltanto qualche percento dell'energia cinetica; nel modello del gas perfetto (capitolo 15) si assume che gli urti delle molecole contro le pareti siano elastici. Esiste anche il caso opposto: se nell'urto si libera energia immagazzinata, per esempio quella di una molla compressa che scatta al contatto o di un piccolo petardo, l'energia cinetica finale può superare quella iniziale. Si parla allora di **urto superelastico**; la quantità di moto, ancora una volta, si conserva.

DA RICORDARE

Due leggi, due ambiti diversi. In ogni urto di un sistema isolato si conserva la quantità di moto totale, qualunque cosa succeda ai corpi. L'energia cinetica totale si conserva soltanto negli urti elastici. Prima di scrivere un'equazione chiediti sempre: «Quali forze esterne agiscono, e durante quanto tempo?» e «L'urto è elastico?». L'energia totale, inclusa quella interna, si conserva sempre: è l'energia **cinetica** che può diminuire.

7.2 Gli urti elastici in una dimensione

7.2.1 Due equazioni per due incognite

Consideriamo prima l'**urto centrale** (o frontale): quello in cui le velocità dei due corpi, prima e dopo l'urto, sono tutte dirette lungo la stessa retta, la retta che congiunge i loro centri. Il proble-

ma è allora unidimensionale: fissiamo un verso positivo sulla retta e trattiamo le velocità come numeri con segno, positivi se concordi con quel verso e negativi se opposti.

Se l'urto è elastico, abbiamo a disposizione due leggi di conservazione:

$$m_1 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{2\mathrm{i}} = m_1 v_{1\mathrm{f}} + m_2 v_{2\mathrm{f}} \qquad \tfrac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{f}}^2$$

Note le masse e le velocità iniziali, le incognite sono le due velocità finali: due equazioni per due incognite, l'esito è determinato. La seconda equazione, però, è di secondo grado; c'è una strada più elegante, che passa per una differenza di quadrati.

ESEMPIO SVOLTO

La velocità relativa si inverte

Problema. Ricava dalle due leggi di conservazione una relazione di primo grado fra le velocità di un urto elastico centrale, e da questa le formule per le velocità finali quando il bersaglio è inizialmente fermo.

Passo 1: separare i due corpi. Portiamo a sinistra i termini del corpo 1 e a destra quelli del corpo 2, e semplifichiamo il fattore ½:

$$m_1(v_{1\mathrm{i}} - v_{1\mathrm{f}}) = m_2(v_{2\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{i}}) \qquad (1)$$

$$m_1(v_{1\mathrm{i}}^2 - v_{1\mathrm{f}}^2) = m_2(v_{2\mathrm{f}}^2 - v_{2\mathrm{i}}^2) \qquad (2)$$

Passo 2: la differenza di quadrati. Scomponiamo i due membri della (2): $m_1(v_{1\mathrm{i}} - v_{1\mathrm{f}})(v_{1\mathrm{i}} + v_{1\mathrm{f}}) = m_2(v_{2\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{i}})(v_{2\mathrm{f}} + v_{2\mathrm{i}})$. Se c'è davvero un urto, il corpo 1 cambia velocità, quindi $v_{1\mathrm{i}} - v_{1\mathrm{f}} \neq 0$ e possiamo dividere membro a membro la (2) per la (1). Restano soltanto le somme:

$$v_{1\mathrm{i}} + v_{1\mathrm{f}} = v_{2\mathrm{f}} + v_{2\mathrm{i}} \quad \Longrightarrow \quad v_{1\mathrm{i}} - v_{2\mathrm{i}} = -(v_{1\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{f}}) \qquad (3)$$

La differenza $v_{1\mathrm{i}} - v_{2\mathrm{i}}$ è la velocità relativa del corpo 1 rispetto al corpo 2 prima dell'urto (*Fisica 2*, capitolo 1); $v_{1\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{f}}$ è la stessa velocità relativa dopo l'urto. La (3) dice che **in un urto elastico centrale la velocità relativa si inverte**: i corpi si allontanano con la stessa rapidità con cui si erano avvicinati.

Passo 3: il sistema lineare. Con il bersaglio fermo ($v_{2\mathrm{i}} = 0$), la (3) dà $v_{2\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}} + v_{1\mathrm{f}}$. Sostituendo nella (1): $m_1 v_{1\mathrm{i}} - m_1 v_{1\mathrm{f}} = m_2 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{1\mathrm{f}}$, da cui $v_{1\mathrm{f}}(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2) v_{1\mathrm{i}}$. Infine $v_{2\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}} + v_{1\mathrm{f}}$:

$$v_{1\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}} \qquad v_{2\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}}$$

Controllo. I due rapporti fra masse sono numeri puri, quindi le formule sono dimensionalmente corrette. Se $m_2 = 0$, cioè se non c'è nessun bersaglio, troviamo $v_{1\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}}$ e il corpo 1 prosegue indisturbato, come deve.

La (3) vale anche quando entrambi i corpi si muovono prima dell'urto. In pratica, per risolvere un urto elastico centrale qualsiasi conviene scrivere la conservazione della quantità di moto insieme alla regola dell'**inversione della velocità relativa**: si ottiene un sistema di due equazioni di primo grado, che sostituisce la conservazione dell'energia cinetica senza bisogno di quadrati.

ESEMPIO SVOLTO

Due carrelli sulla rotaia

Problema. Su una rotaia a basso attrito un carrello di 0,25 kg viaggia a 1,20 m/s e urta frontalmente un carrello di 0,75 kg fermo; i respingenti magnetici rendono l'urto elastico. Calcola le velocità dei due carrelli dopo l'urto e verifica i bilanci.

Soluzione. Prendiamo come positivo il verso del moto iniziale. Durante l'urto le forze esterne (peso e reazione della rotaia) si equilibrano, e l'attrito è trascurabile: si conserva la quantità di moto; l'urto è elastico, quindi si conserva anche l'energia cinetica e valgono le formule appena ricavate:

$$v_{1f} = \frac{0{,}25\ \text{kg} - 0{,}75\ \text{kg}}{1{,}00\ \text{kg}} \times 1{,}20\ \text{m/s} = -0{,}60\ \text{m/s}$$

$$v_{2f} = \frac{2 \times 0{,}25\ \text{kg}}{1{,}00\ \text{kg}} \times 1{,}20\ \text{m/s} = 0{,}60\ \text{m/s}$$

Il carrello leggero torna indietro a 0,60 m/s, quello pesante parte in avanti a 0,60 m/s.

Controllo. Quantità di moto: prima $0{,}25 \times 1{,}20$ kg·m/s = 0,30 kg·m/s; dopo $0{,}25 \times (-0{,}60) + 0{,}75 \times 0{,}60 = (-0{,}15 + 0{,}45)$ kg·m/s = 0,30 kg·m/s. Energia cinetica: prima $\tfrac{1}{2} \times 0{,}25 \times 1{,}20^2$ J = 0,18 J; dopo $\tfrac{1}{2} \times 0{,}25 \times 0{,}60^2$ J + $\tfrac{1}{2} \times 0{,}75 \times 0{,}60^2$ J = (0,045 + 0,135) J = 0,18 J. Velocità relativa: prima 1,20 m/s, dopo −0,60 − 0,60 = −1,20 m/s: invertita, come prevede la (3).

7.2.2 I casi particolari

Le formule contengono le masse solo attraverso il loro rapporto. La Figura 7.2 mostra, disegnati in scala, tre casi che conviene conoscere a memoria.

Masse uguali. Con $m_1 = m_2$ si ottiene $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v_{1i}$: il corpo incidente si ferma e il bersaglio parte con la sua velocità. È lo **scambio delle velocità** che si osserva nel colpo di biliardo in pieno, quando la palla bianca si ferma sul posto, e nella bocciata ben riuscita dell'inizio del capitolo.

Corpo leggero contro corpo pesante. Se m_1 è molto minore di m_2, la frazione $(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ è quasi −1 e il corpo incidente torna indietro con velocità quasi uguale in modulo a quella di arrivo, mentre il bersaglio si muove appena. Al limite c'è la pallina che rimbalza contro una parete: la sua quantità di moto cambia di $2mv$ (capitolo 6) e la parete, con la Terra a cui è attaccata, riceve tutta questa quantità di moto, ma una velocità, e quindi un'energia cinetica, del tutto trascurabili.

Corpo pesante contro corpo leggero. Se m_1 è molto maggiore di m_2, il corpo pesante prosegue quasi indisturbato ($v_{1f} \approx v_{1i}$) e il bersaglio parte con una velocità vicina a $\mathbf{2}\boldsymbol{v_{1i}}$, il valore limite che non si può superare. Una palla da golf colpita dalla testa del bastone, molto più pesante, si allontana più veloce della testa che l'ha colpita.

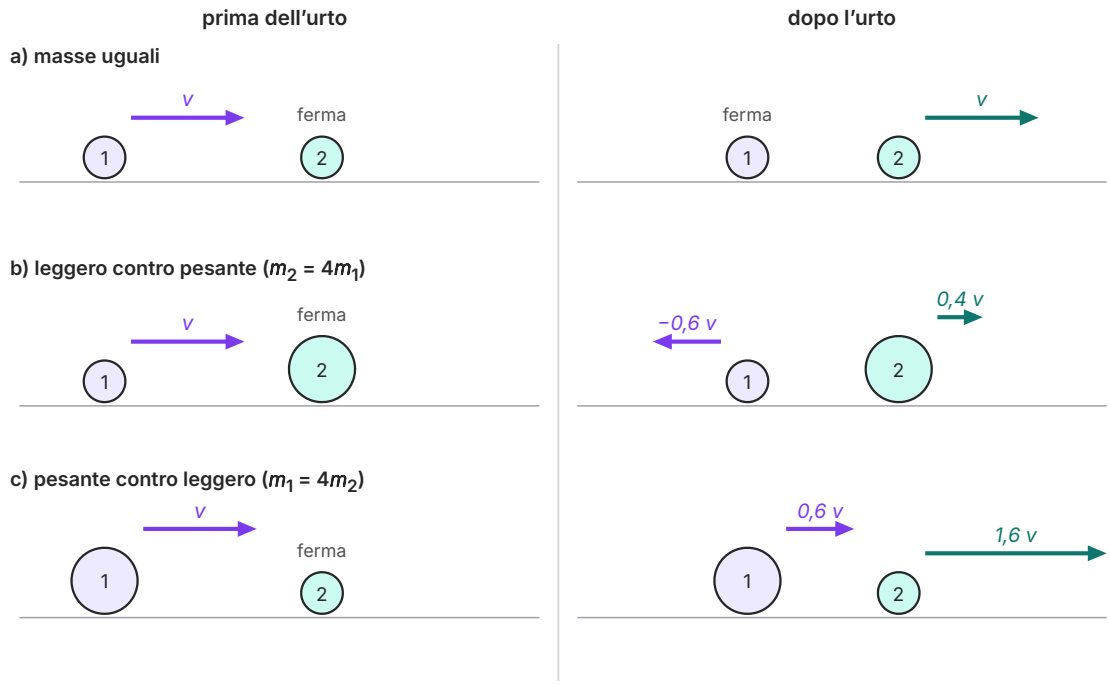


Figura 7.2 Urti elastici centrali con il bersaglio 2 fermo, prima e dopo l'urto. Le frecce sono in scala con la velocità iniziale v del corpo 1; le dimensioni delle sfere crescono con la massa. a) Masse uguali: scambio delle velocità. b) $m_2 = 4m_1$: il corpo 1 rimbalza a $-0{,}6v$, il bersaglio parte a $0{,}4v$. c) $m_1 = 4m_2$: il corpo 1 prosegue a $0{,}6v$, il bersaglio parte a $1{,}6v$.

La Figura 7.3 riassume tutti i casi in un unico grafico, che riporta le due velocità finali, divise per v_{1i}, in funzione del rapporto m_1/m_2. La curva del corpo incidente parte da −1 (rimbalzo contro una parete), passa per zero quando le masse sono uguali e si avvicina a +1 quando il corpo incidente è molto pesante; quella del bersaglio cresce da 0 verso il limite 2.

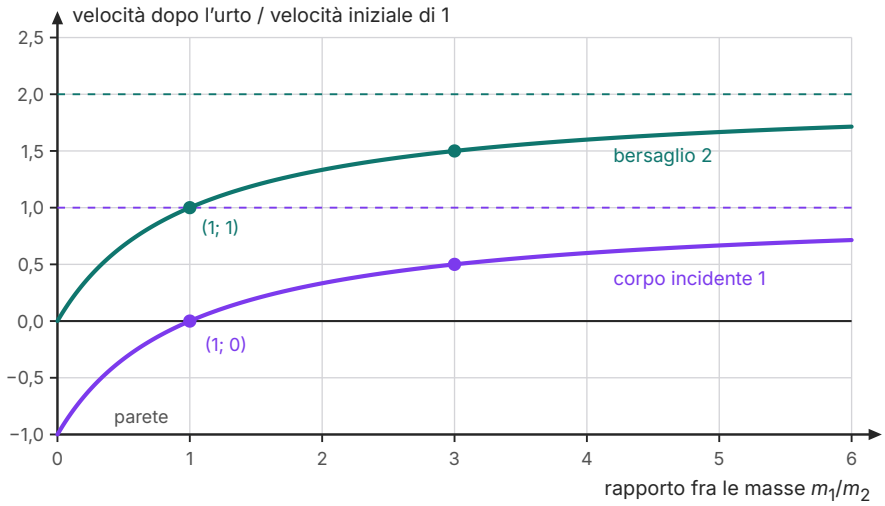


Figura 7.3 Velocità finali di un urto elastico centrale con il bersaglio fermo, divise per la velocità iniziale del corpo incidente, in funzione del rapporto fra le masse: $v_{1f}/v_{1i} = (m_1/m_2 - 1)/(m_1/m_2 + 1)$ e $v_{2f}/v_{1i} = 2(m_1/m_2)/(m_1/m_2 + 1)$, calcolate per m_1/m_2 da 0 a 6. Le rette tratteggiate sono i valori limite 1 e 2; i punti segnano i rapporti 1 e 3.

ESEMPIO SVOLTO

Quanta energia passa al bersaglio

Problema. Un corpo urta elasticamente e frontalmente un bersaglio fermo. a) Usando il grafico della Figura 7.3, trova le velocità finali quando $m_1/m_2 = 3$. b) Che frazione dell'energia cinetica iniziale passa al bersaglio in quel caso? c) Per quale rapporto fra le masse il bersaglio riceve tutta l'energia cinetica?

Soluzione. a) In corrispondenza dell'ascissa 3 si leggono 0,5 sulla curva del corpo incidente e 1,5 su quella del bersaglio: $v_{1f} = 0{,}5\ v_{1i}$ e $v_{2f} = 1{,}5\ v_{1i}$. Le formule danno esattamente $(3 - 1)/(3 + 1) = 0{,}5$ e $2 \times 3/(3 + 1) = 1{,}5$. b) L'energia iniziale è $\frac{1}{2}(3m_2)v_{1i}^2 = 1{,}5m_2v_{1i}^2$, quella del bersaglio $\frac{1}{2}m_2(1{,}5v_{1i})^2 = 1{,}125m_2v_{1i}^2$: il rapporto è 0,75. Il corpo incidente, con metà della sua velocità, conserva un quarto della sua energia. c) Il corpo incidente cede tutta la sua energia soltanto se si ferma, cioè se la sua curva passa per zero: succede per $m_1/m_2 = 1$, a masse uguali.

Controllo. 0,75 + 0,25 = 1, come deve essere in un urto elastico. Conseguenza di c): per rallentare un corpo con urti elastici, i bersagli migliori hanno massa simile alla sua.

7.2.3 Il pendolo di Newton

Il **pendolo di Newton** è una fila di biglie d'acciaio uguali, appese a fili in modo da toccarsi appena. Se si solleva e si lascia andare la prima biglia, dall'altra parte parte soltanto l'ultima, con la stessa velocità, mentre le biglie in mezzo restano quasi ferme; se se ne sollevano due, ne parto-

no due. Perché non potrebbe uscire, per esempio, una sola biglia con velocità doppia, o due con velocità dimezzata?

Due biglie di massa m che partono a $v/2$ avrebbero la quantità di moto giusta, $2m \times v/2 = mv$; ma la loro energia cinetica sarebbe $\tfrac{1}{2}(2m)(v/2)^2 = \tfrac{1}{4}mv^2$, la metà di quella iniziale. Una biglia a $2v$ avrebbe invece la quantità di moto doppia. Soltanto l'uscita di una biglia con la velocità v rispetta **insieme** le due leggi di conservazione. Il pendolo reale non è perfettamente elastico: a ogni urto si sente il «clic» delle biglie, e dopo un po' anche le biglie centrali cominciano a dondolare.

7.3 Gli urti completamente anelastici

7.3.1 Una sola velocità finale

In un urto completamente anelastico i due corpi restano uniti: un vagone che si aggancia a un altro, un dardo che si pianta nel bersaglio, due auto che si incastrano. Dopo l'urto c'è una sola incognita, la **velocità comune** V dei corpi uniti, e basta la conservazione della quantità di moto per trovarla:

$$m_1 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{2\mathrm{i}} = (m_1 + m_2)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{m_1 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{2\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}$$

Quanta energia cinetica si trasforma? Se il bersaglio è fermo, $V = m_1 v_{1\mathrm{i}}/(m_1 + m_2)$ e l'energia cinetica finale vale $\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \tfrac{1}{2}m_1^2 v_{1\mathrm{i}}^2/(m_1 + m_2)$. Dividendo per l'energia iniziale $\tfrac{1}{2}m_1 v_{1\mathrm{i}}^2$:

$$\frac{K_\mathrm{f}}{K_\mathrm{i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{(bersaglio fermo)}$$

Con masse uguali si conserva metà dell'energia cinetica, come nella Figura 7.1; un proiettile leggero che si pianta in un blocco pesante ne conserva una frazione minima. In generale, fra tutti gli urti che partono dalle stesse velocità, quello completamente anelastico è quello che trasforma più energia cinetica: la quantità di moto totale non può cambiare, e i corpi la portano con la minima energia cinetica quando si muovono insieme. Se le quantità di moto iniziali sono uguali e opposte, la quantità di moto totale è nulla, i corpi uniti restano fermi e **tutta** l'energia cinetica viene trasformata.

COLLEGAMENTI

Sicurezza stradale: perché la massa conta

Un'auto di 1000 kg e un fuoristrada di 2000 kg si scontrano frontalmente, viaggiando entrambi a 50 km/h (13,9 m/s), e restano incastrati. Con il verso positivo nel senso di marcia del fuoristrada, la velocità comune subito dopo l'urto è $V = (2000 \times 13{,}9 - 1000 \times 13{,}9)/3000$ m/s $\approx 4{,}6$ m/s, nel verso del fuoristrada. La velocità del fuoristrada cambia di circa 9,3 m/s; quella dell'auto di $13{,}9 + 4{,}6 \approx 18{,}5$ m/s, il doppio, e per di più cambia verso.

Gli occupanti, trattenuti dalle cinture, subiscono la stessa variazione di velocità del loro abitacolo, nello stesso breve tempo: per il teorema dell'impulso (capitolo 6) la forza media su di loro è proporzionale a Δv. A parità di tutto il resto, chi viaggia nell'auto più leggera subisce in questo esempio una forza media doppia. L'energia cinetica passa da circa 289 kJ a circa 32 kJ: quasi il 90% deforma le carrozzerie, le cui zone di deformazione programmata allungano la durata dell'urto. A 50 km/h, del resto, un'auto ha l'energia cinetica di una caduta libera da circa 10 m, un terzo piano.

7.3.2 Il pendolo balistico

Come si misura la velocità di un proiettile, che percorre centinaia di metri al secondo? Un metodo storico, ancora usato nei laboratori didattici, è il **pendolo balistico**: un blocco di legno di massa M, appeso a due fili paralleli, in cui il proiettile di massa m si conficca. Il fenomeno si divide in **due fasi**, governate da leggi diverse (Figura 7.4).

Fase 1: l'urto. Il proiettile si pianta nel blocco in un tempo brevissimo, durante il quale il blocco non ha il tempo di spostarsi in modo apprezzabile: i fili restano verticali, e la tensione e il peso non hanno componenti orizzontali. Nella direzione orizzontale si conserva la quantità di moto: $mv = (m + M)V$. Non si conserva l'energia cinetica: l'urto è completamente anelastico, e quasi tutta l'energia del proiettile se ne va nel legno lacerato e scaldato.

Fase 2: l'oscillazione. Il blocco con il proiettile parte con velocità V e sale lungo l'arco di circonferenza. Ora agiscono soltanto il peso, che è conservativo, e la tensione dei fili, che è perpendicolare allo spostamento e non compie lavoro: si conserva l'energia meccanica, $\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$, e quindi $V = \sqrt{(2gh)}$. Non si conserva più la quantità di moto, perché il peso e la tensione hanno ora una risultante non nulla. Combinando le due fasi:

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{(2gh)}$$

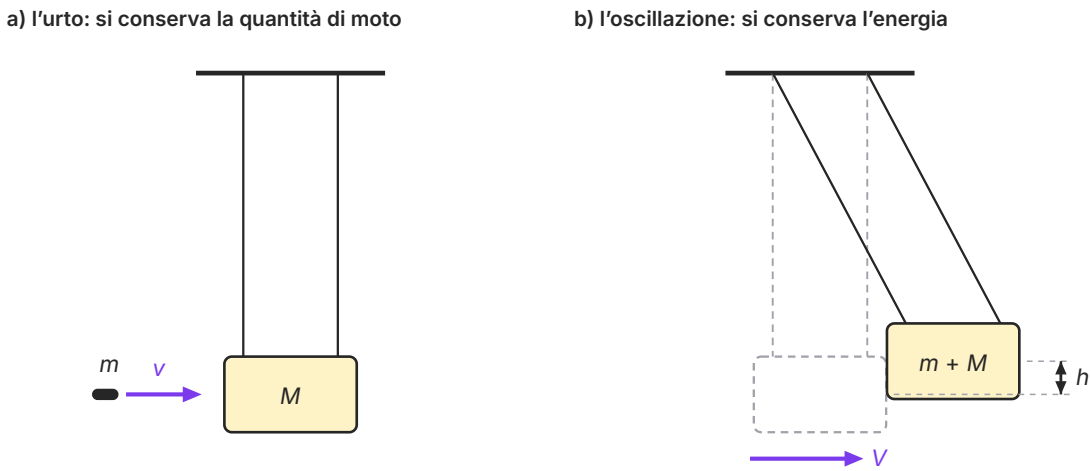


Figura 7.4 Il pendolo balistico. a) Nell'urto il proiettile di massa m si pianta nel blocco di massa M: si conserva la quantità di moto orizzontale. b) Nell'oscillazione il blocco, appeso a due fili paralleli, sale senza ruotare di un'altezza h (misurata fra le posizioni del suo centro): si conserva l'energia meccanica.

ESEMPIO SVOLTO

La velocità di un proiettile

Problema. Un proiettile di 10,0 g si conficca in un blocco di 2,00 kg appeso come in Figura 7.4; il blocco sale di 11,4 cm. a) Quanto valeva la velocità del proiettile? b) Che frazione della sua energia cinetica si è trasformata nell'urto?

Soluzione. a) Procediamo a ritroso. Nella fase 2 sul blocco agiscono il peso e la tensione dei fili, che non compie lavoro: si conserva l'energia meccanica, e la velocità del blocco subito dopo l'urto è $V = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}114\ \text{m})} \approx 1{,}49$ m/s. Nella fase 1 le forze esterne non hanno componenti orizzontali: si conserva la quantità di moto orizzontale, e

$$v = \frac{m + M}{m} V = \frac{2{,}01\ \text{kg}}{0{,}0100\ \text{kg}} \times 1{,}49\ \text{m/s} \approx 3{,}0 \times 10^2\ \text{m/s}$$

b) Prima dell'urto $K_\text{i} = \frac{1}{2} \times 0{,}0100\ \text{kg} \times (300\ \text{m/s})^2 = 450$ J; subito dopo $K_\text{f} = \frac{1}{2} \times 2{,}01\ \text{kg} \times (1{,}49\ \text{m/s})^2 \approx 2{,}24$ J. Si conserva lo 0,5% dell'energia cinetica: il 99,5% si è trasformato in energia interna. Lo stesso valore si ottiene da $K_\text{f}/K_\text{i} = m/(m + M) = 0{,}0100/2{,}01 \approx 0{,}005$.

Controllo. (kg/kg) × m/s = m/s. Il blocco, 200 volte più pesante del proiettile, parte con una velocità circa 200 volte minore: è proprio la proporzione fra le masse che rende misurabile una velocità altrimenti troppo grande per un cronometro scolastico.

ERRORE FREQUENTE

«Il proiettile ha energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$, che diventa l'energia potenziale $(m + M)gh$ del blocco.» **No.** Questo bilancio salta l'urto, in cui quasi tutta l'energia cinetica si trasforma in energia interna. Con i dati dell'esempio svolto darebbe $v = \sqrt{(2 \times 2{,}01 \times 9{,}8 \times 0{,}114/0{,}0100)}$ m/s ≈ 21 m/s, un valore 14 volte troppo piccolo. Regola: **quantità di moto nell'urto, energia meccanica nell'oscillazione**, mai l'energia attraverso l'urto. E mai la quantità di moto durante l'oscillazione, quando le forze esterne non sono più trascurabili.

7.4 Gli urti anelastici e la loro misura

7.4.1 Fra i due estremi

La maggior parte degli urti reali non è né elastica né completamente anelastica: i corpi si separano, ma con meno energia cinetica di prima, come una palla da tennis che rimbalza. In questi casi le leggi di conservazione non bastano a prevedere l'esito: la quantità di moto fornisce una sola equazione per due velocità incognite, e il bilancio dell'energia cinetica non è un'uguaglianza. Serve un'informazione in più, che dipende dai materiali e va misurata: per esempio la velocità finale di uno dei due corpi, come nell'urto anelastico della Figura 7.1, in cui il carrello A prosegue a 0,50 m/s e quindi il carrello B parte a 1,5 m/s.

Per caratterizzare un urto anelastico si usa un numero che riassume il comportamento dei materiali.

APPROFONDIMENTO

Il coefficiente di restituzione

Nell'urto elastico la velocità relativa si inverte senza cambiare modulo; nell'urto completamente anelastico, dopo l'urto, è nulla. Negli urti intermedi si inverte e si riduce. Si chiama **coefficiente di restituzione** il rapporto fra il modulo della velocità relativa dopo l'urto e quello prima:

$$e = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}} \qquad (0 \le e \le 1)$$

Per un urto elastico $e = 1$, per un urto completamente anelastico $e = 0$. Se il bersaglio è il pavimento, che resta fermo, la definizione si semplifica: $e = v_f/v_i$, il rapporto fra la velocità con cui la palla rimbalza e quella con cui arriva. Una palla lasciata cadere da un'altezza h_1 arriva a terra con $v_i = \sqrt{(2gh_1)}$ e risale fino a h_2, con $v_f = \sqrt{(2gh_2)}$ (trascurando l'aria). Quindi

$$e = \sqrt{(h_2/h_1)} \qquad \text{cioè} \qquad h_2 = e^2 h_1$$

A ogni rimbalzo l'altezza si riduce dello stesso fattore e^2 (Figura 7.5): con $e = 0{,}80$ la palla risale ogni volta al 64% dell'altezza precedente. Basta un metro a nastro per misurare il coefficiente di restituzione di una palla.

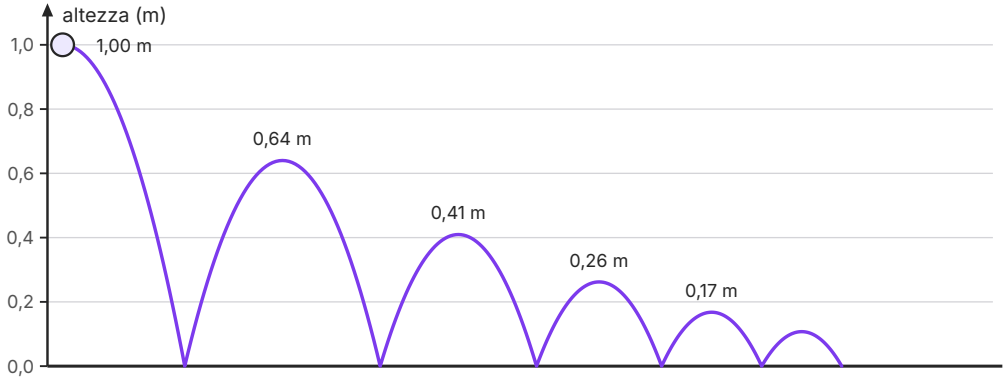


Figura 7.5 Traiettoria di una palla lanciata in orizzontale da 1,00 m di altezza, con coefficiente di restituzione $e = 0{,}80$ e resistenza dell'aria trascurabile (calcolata). A ogni rimbalzo l'altezza massima si riduce del fattore $e^2 = 0{,}64$; la velocità orizzontale, in questo modello, non cambia.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: urti di carrelli sulla rotaia

Materiali. Una rotaia a basso attrito con due carrelli; respingenti magnetici e strisce di velcro; due fotocellule collegate a un cronometro elettronico (risoluzione 0,1 ms); una bandierina di larghezza $d = (25{,}0 \pm 0{,}1)$ mm su ciascun carrello; una bilancia (1 g); una barra di ferro per appesantire un carrello.

Procedimento. 1) Livella la rotaia. 2) Misura le masse: carrello 1, $m_1 = (0{,}512 \pm 0{,}001)$ kg; carrello 2 con la barra, $m_2 = (1{,}015 \pm 0{,}001)$ kg. 3) Metti il carrello 2 fermo fra le due fotocellule e lancia il carrello 1 con una piccola spinta, in modo che attraversi la prima fotocellula prima dell'urto. 4) Le fotocellule misurano i tempi di oscuramento; ogni velocità è $v = d/\Delta t$, con incertezza relativa pari alla somma di quelle di d e di Δt (*Fisica 1*, capitolo 4). 5) Esegui l'urto prima con i respingenti magnetici affacciati, poi con il velcro, che fa restare uniti i carrelli. 6) Calcola la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale prima e dopo, con le loro incertezze.

Tabella 7.1 Urti del carrello 1 contro il carrello 2 fermo (dati tipici). Le velocità sono positive nel verso del moto iniziale; con il velcro i due carrelli proseguono insieme.

urto	v_{1i} (m/s)	v_{1f} (m/s)	v_{2f} (m/s)	p_{tot} prima (kg·m/s)	p_{tot} dopo (kg·m/s)	K prima (mJ)	K dopo (mJ)
magneti	0,600 ± 0,004	−0,194 ± 0,001	0,398 ± 0,002	0,307 ± 0,003	0,305 ± 0,003	92 ± 1	90 ± 1
velcro	0,580 ± 0,004	0,193 ± 0,001	0,193 ± 0,001	0,297 ± 0,003	0,295 ± 0,002	86 ± 1	28,5 ± 0,3

Che cosa concludere. In entrambi gli urti gli intervalli della quantità di moto prima e dopo si sovrappongono: la quantità di moto si conserva entro le incertezze. Con i magneti anche l'energia cinetica si conserva entro le incertezze (gli intervalli 91–93 mJ e 89–91 mJ si toccano), anche se il valore dopo è sistematicamente un po' più basso: l'urto è quasi elastico. Con il velcro resta circa un terzo dell'energia cinetica: l'urto è completamente anelastico.

Confronto teoria–esperimento. Per l'urto con i magneti, la teoria dell'urto elastico prevede $v_{2f} = 2m_1v_{1i}/(m_1 + m_2) = (0{,}402 \pm 0{,}004)$ m/s; la misura, $(0{,}398 \pm 0{,}002)$ m/s, cade nell'intervallo: compatibili. Per il velcro la teoria prevede $V = m_1v_{1i}/(m_1 + m_2) = (0{,}194 \pm 0{,}002)$ m/s, contro $(0{,}193 \pm 0{,}001)$ m/s misurati: compatibili; la frazione di energia cinetica conservata prevista è $m_1/(m_1 + m_2) = 0{,}335$, quella misurata $28{,}5/86 \approx 0{,}33$.

Sicurezza. Non spingere i carrelli con violenza e tieni le dita lontane dai respingenti magnetici, che si attraggono e si chiudono di scatto se avvicinati dal lato sbagliato.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze e il calcolo di un valore per ogni colonna. Calcola il coefficiente di restituzione dell'urto con i magneti, $e = (v_{2f} - v_{1f})/v_{1i} \approx 0{,}99$. Discuti

come un attrito residuo della rotaia possa far apparire «persa» un po' di quantità di moto, e come ridurre questo effetto (avvicinando le fotocellule al punto d'urto).

7.5 Gli urti in due dimensioni

7.5.1 La quantità di moto per componenti

Se le velocità non sono tutte lungo la stessa retta, l'urto è un **urto obliquo**: due palle da biliardo che si colpiscono di striscio, due auto che si scontrano a un incrocio, un disco da hockey che colpisce un altro disco fuori centro. La quantità di moto si conserva come **vettore**, quindi si conservano separatamente le sue componenti su due assi perpendicolari x e y:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

In un urto obliquo completamente anelastico le incognite sono le due componenti della velocità comune, e le due equazioni bastano. In un urto obliquo elastico le incognite sono quattro (due moduli e due direzioni) e le equazioni tre (aggiungendo l'energia cinetica): l'esito dipende da quanto di striscio i corpi si colpiscono, e serve un dato in più, per esempio la direzione in cui parte uno dei due.

ESEMPIO SVOLTO

●●● L'incidente all'incrocio

Problema. A un incrocio un'auto A di 1500 kg, che viaggia verso est a 14 m/s, si scontra con un'auto B di 1000 kg, che viaggia verso nord a 18 m/s. Le auto restano incastrate. a) Con quale velocità, e in quale direzione, si muovono i rottami subito dopo l'urto? b) Quanta energia cinetica si è trasformata? c) Se il coefficiente di attrito dinamico fra le gomme bloccate e l'asfalto è 0,70, quanto strisciano i rottami prima di fermarsi?

Soluzione. a) Asse x verso est, asse y verso nord. Nell'urto, brevissimo, l'attrito con l'asfalto è trascurabile rispetto alle forze fra le auto e il peso è equilibrato dalla reazione della strada: si conserva la quantità di moto totale, per componenti (Figura 7.6):

$p_x = 1500\ \text{kg} \times 14\ \text{m/s} = 21\,000\ \text{kg·m/s} \qquad p_y = 1000\ \text{kg} \times 18\ \text{m/s} = 18\,000\ \text{kg·m/s}$

Il modulo della quantità di moto totale è $p_{\text{tot}} = \sqrt{(21\,000^2 + 18\,000^2)}\ \text{kg·m/s} \approx 27\,700\ \text{kg·m/s}$, quindi $V = p_{\text{tot}}/(2500\ \text{kg}) \approx 11\ \text{m/s}$. La direzione forma con l'est l'angolo θ per cui $\tan\theta = 18\,000/21\,000 \approx 0{,}857$: $\theta \approx 40{,}6°$, verso nord-est.

b) Prima: $K_i = \tfrac{1}{2} \times 1500 \times 14^2\ \text{J} + \tfrac{1}{2} \times 1000 \times 18^2\ \text{J} = (147\,000 + 162\,000)\ \text{J} = 309\ \text{kJ}$. Dopo: $K_f = \tfrac{1}{2} \times 2500\ \text{kg} \times (11{,}06\ \text{m/s})^2 \approx 153\ \text{kJ}$. Si sono trasformati circa 156 kJ, la metà dell'energia cinetica iniziale.

c) Dopo l'urto sui rottami agiscono il peso, la reazione normale e l'attrito dinamico, l'unica forza che compie lavoro. Per il teorema dell'energia cinetica (capitolo 5), il lavoro dell'attrito, $-\mu_d(m_1 + m_2)gd$, è uguale a $-K_f$: $d = V^2/(2\mu_d g) = (11{,}06\ \text{m/s})^2/(2 \times 0{,}70 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 8{,}9\ \text{m}$.

Controllo. $p_B < p_A$, quindi i rottami vanno più verso est che verso nord: $40{,}6° < 45°$. Rovesciando il metodo, dalla strisciata i periti ricostruiscono le velocità prima dell'urto.

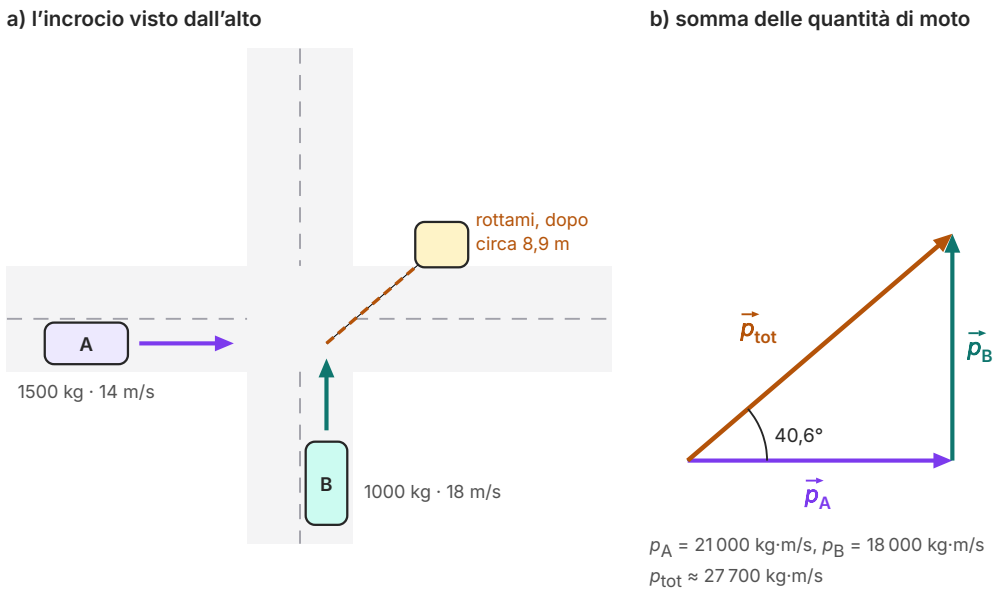


Figura 7.6 a) L'incidente dell'esempio svolto visto dall'alto, con la strisciata dei rottami (lunghezza in scala con gli altri dati, non con la strada). b) La quantità di moto totale come somma vettoriale di quelle delle due auto, in scala: p_{tot} forma 40,6° con la direzione est.

7.5.2 Masse uguali: novanta gradi

Il biliardo offre una regola sorprendente: quando una palla urta di striscio una palla uguale ferma, le due si allontanano lungo direzioni **perpendicolari**. Lo si dimostra in poche righe con il prodotto scalare del capitolo 1.

Con masse uguali la massa si semplifica, e le due conservazioni diventano

$$\boldsymbol{v}_{1i} = \boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f} \qquad v_{1i}^{\,2} = v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2}$$

Eleviamo al quadrato (scalare) la prima: $\boldsymbol{v}_{1i} \cdot \boldsymbol{v}_{1i} = (\boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f}) \cdot (\boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f})$, cioè $v_{1i}^{\,2} = v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2} + 2\,\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f}$. Confrontando con la seconda resta $\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$: se nessuna delle due velocità finali è nulla, il loro prodotto scalare è zero soltanto se sono **perpendicolari**. Geometricamente, i tre vettori formano un triangolo (la somma vettoriale) che soddisfa il teorema di Pitagora (l'energia), e quindi è rettangolo (Figura 7.7). L'unica eccezione è l'urto frontale, in cui la palla incidente si ferma e l'angolo non è definito.

Nella figura la palla bianca arriva a 2,0 m/s e la palla colpita parte a 30° dalla direzione iniziale. La palla colpita parte sempre lungo la retta dei centri al momento del contatto, perché la forza dell'urto (senza attrito fra le superfici) è diretta lungo quella retta; la palla bianca devia allora di 60° dall'altra parte. Le velocità sono i cateti del triangolo rettangolo di ipotenusa 2,0 m/s: v_{2f} = 2,0 m/s × cos 30° ≈ 1,7 m/s e v_{1f} = 2,0 m/s × cos 60° = 1,0 m/s. Verifica: componente x, 1,73 ×

cos 30° + 1,0 × cos 60° = 1,5 + 0,5 = 2,0 m/s; componente y, 1,73 × sen 30° − 1,0 × sen 60° ≈ 0,87 − 0,87 = 0.

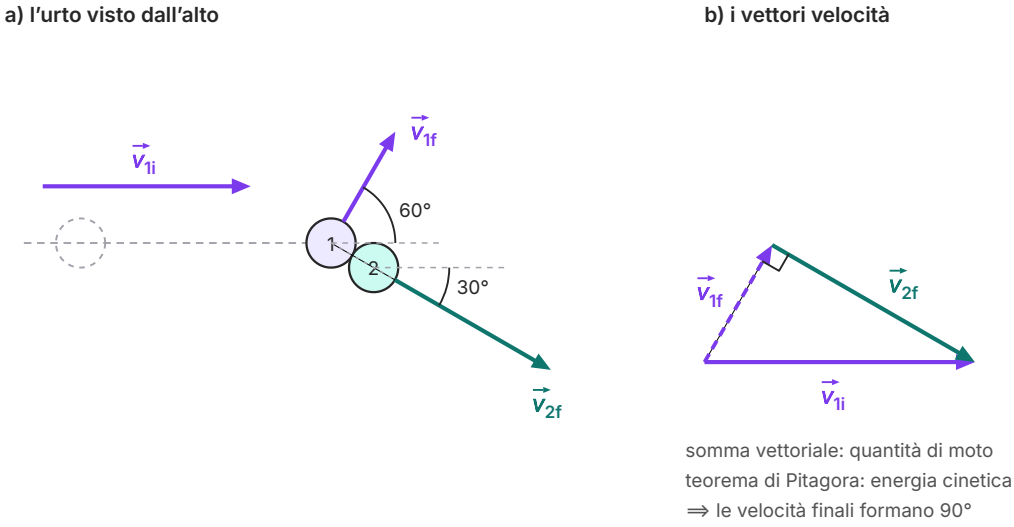


Figura 7.7 Urto elastico obliquo fra due palle uguali, la seconda ferma. a) Vista dall'alto all'istante del contatto: la palla 2 parte lungo la retta dei centri, a 30° dalla direzione iniziale, la palla 1 devia di 60° dall'altra parte. b) I vettori velocità, in scala (2,0 m/s; 1,0 m/s; 1,7 m/s), formano un triangolo rettangolo.

Le palle da biliardo vere rotolano sul panno e possono avere un effetto impresso dalla stecca: l'angolo misurato è spesso un po' diverso da 90°, e i giocatori esperti lo sanno. La regola, però, vale con ottima precisione per i dischi che scivolano su un tavolo a cuscino d'aria, che non rotolano e non subiscono attrito.

APPROFONDIMENTO

Le regole degli urti, da Cartesio a Newton

Cartesio, nei *Principia philosophiae* (1644), aveva proposto un insieme di regole per gli urti fondato sulla sua quantità di moto, un prodotto di massa e velocità preso senza segno (capitolo 6). Molte di quelle regole erano in contrasto con l'esperienza. Verso la fine degli anni Sessanta del Seicento la Royal Society di Londra invitò i matematici a studiare la questione, e tre di loro, John Wallis, Christopher Wren e Christiaan Huygens, ricavarono indipendentemente regole corrette.

Il ragionamento di Huygens è un capolavoro di uso del principio di relatività (capitolo 2). Immaginò un urto fra due corpi uguali osservato da un uomo su una barca che scivola lungo un canale a velocità costante, e da un altro fermo sulla riva: le leggi devono essere le stesse per entrambi. Partendo dal caso più semplice, due corpi uguali che si scontrano con velocità opposte e rimbalzano, e cambiando sistema di riferimento, ottenne gli altri casi. La sua opera *De motu corporum ex percussione* fu pubblicata soltanto nel 1703, dopo la sua morte.

Newton, nello scolio alle leggi del moto dei *Principia* (1687), riconobbe i tre come scopritori delle regole, ricordò che Wren le aveva verificate davanti alla Royal Society con un esperimento di pendoli, e descrisse le proprie misure con pendoli lunghi dieci piedi, corrette per la resistenza dell'aria. Trovò che il rapporto fra le velocità relative dopo e prima dell'urto, il nostro e, era circa 5/9 per palle di lana compressa e per l'acciaio, un po' minore per il sughero, circa 15/16 per il vetro:

Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter.
«Le palle tornavano sempre a separarsi con una velocità relativa che stava alla velocità relativa d'incontro come 5 a 9 circa.» (I. Newton, *Principia*, 1687, scolio alle leggi del moto; testo latino della prima edizione, traduzione della redazione)

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i} = m_1\boldsymbol{v}_{1f} + m_2\boldsymbol{v}_{2f}$ — conservazione della quantità di moto (kg·m/s) fra subito prima e subito dopo l'urto: vale in **ogni** urto in cui le forze esterne sono trascurabili durante l'urto; negli urti obliqui si scrive per componenti.

$K_f = K_i$ (urto elastico), $K_f < K_i$ (urto anelastico), corpi uniti (urto completamente anelastico) — classificazione in base all'energia cinetica (J).

$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$ — urto elastico centrale: la velocità relativa si inverte; insieme alla conservazione della quantità di moto sostituisce il bilancio dell'energia.

$v_{1f} = (m_1 - m_2)v_{1i}/(m_1 + m_2)$, $v_{2f} = 2m_1v_{1i}/(m_1 + m_2)$ — urto elastico centrale con il bersaglio fermo (m/s). Masse uguali: scambio delle velocità; il bersaglio non supera mai $2v_{1i}$.

$V = (m_1v_{1i} + m_2v_{2i})/(m_1 + m_2)$ — velocità comune dopo un urto completamente anelastico centrale; con il bersaglio fermo $K_f/K_i = m_1/(m_1 + m_2)$.

$v = (m + M)\sqrt{(2gh)}/m$ — pendolo balistico: quantità di moto nell'urto, energia meccanica nell'oscillazione.

$e = -(v_{1f} - v_{2f})/(v_{1i} - v_{2i})$, con $0 \le e \le 1$ — coefficiente di restituzione (numero puro); rimbalzo su un pavimento: $h_2 = e^2h_1$.

$\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$ — urto elastico obliquo fra masse uguali, una ferma: le velocità finali sono perpendicolari.

SINTESI

- Un urto è un'interazione breve fra due o più corpi, durante la quale agiscono forze impulsive molto intense; i corpi non devono per forza toccarsi.
- Durante l'urto le forze esterne ordinarie trasmettono un impulso trascurabile (approssimazione impulsiva): la quantità di moto totale subito dopo l'urto è uguale a quella subito prima, in ogni tipo di urto.
- L'energia cinetica totale si conserva soltanto negli urti elastici; negli urti anelastici una parte diventa energia interna; negli urti completamente anelastici i corpi restano uniti e la perdita è la massima possibile. In un urto superelastico l'energia cinetica aumenta a spese di energia immagazzinata.
- In un urto elastico centrale la velocità relativa si inverte: $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$.
- Con il bersaglio fermo: $v_{1f} = (m_1 - m_2)v_{1i}/(m_1 + m_2)$ e $v_{2f} = 2m_1v_{1i}/(m_1 + m_2)$. A masse uguali le velocità si scambiano; un corpo leggero rimbalza su uno pesante; uno pesante prosegue e lancia il bersaglio quasi a velocità doppia.
- Nel pendolo di Newton esce soltanto il numero di biglie che rispetta insieme la conservazione della quantità di moto e quella dell'energia cinetica.
- In un urto completamente anelastico la velocità comune segue dalla sola quantità di moto; con il bersaglio fermo si conserva la frazione $m_1/(m_1 + m_2)$ dell'energia cinetica.
- Nel pendolo balistico si usa la quantità di moto nell'urto e l'energia meccanica nell'oscillazione: $v = (m + M)\sqrt{(2gh)}/m$.
- Il coefficiente di restituzione e misura quanto si riduce la velocità relativa: $e = 1$ negli urti elastici, 0 in quelli completamente anelastici; per una palla che rimbalza $h_2 = e^2h_1$.
- Negli urti obliqui la quantità di moto si conserva per componenti; in un urto elastico fra masse uguali, una ferma, le velocità finali sono perpendicolari.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un urto fra due corpi che formano un sistema isolato si conserva sempre:
   A. l'energia cinetica totale
   B. la quantità di moto totale
   C. la velocità di ciascun corpo
   D. sia l'energia cinetica totale sia la quantità di moto totale

2. ● Un urto si dice completamente anelastico quando:

   A. i corpi rimbalzano con la stessa velocità relativa di prima

   B. l'energia cinetica totale si conserva

   C. dopo l'urto i corpi restano uniti e si muovono insieme

   D. la quantità di moto totale non si conserva

3. ● Una palla da biliardo urta frontalmente ed elasticamente una palla uguale ferma. Subito dopo l'urto:

   A. la prima palla è ferma e la seconda si muove con la velocità che aveva la prima

   B. le due palle si muovono insieme a metà della velocità iniziale

   C. la prima palla torna indietro con la sua velocità iniziale

   D. le due palle si muovono in versi opposti con la stessa velocità

4. ● In un urto elastico centrale la velocità relativa dei due corpi, dopo l'urto:

   A. è nulla

   B. è la stessa di prima, con lo stesso verso

   C. è ridotta di un fattore che dipende dai materiali

   D. ha lo stesso modulo di prima e verso opposto

5. ●● Una pallina leggera urta elasticamente e frontalmente una boccia molto più pesante e ferma. Dopo l'urto la pallina:

   A. torna indietro con velocità quasi uguale in modulo a quella di arrivo

   B. si ferma

   C. prosegue con velocità quasi doppia

   D. prosegue insieme alla boccia

6. ●● Nel pendolo balistico non si può uguagliare l'energia cinetica del proiettile all'energia potenziale finale del blocco perché:

   A. durante l'oscillazione la tensione dei fili compie lavoro

   B. la quantità di moto non si conserva nell'urto

   C. nell'urto quasi tutta l'energia cinetica del proiettile si trasforma in energia interna

   D. l'energia potenziale del blocco dipende dalla lunghezza dei fili

7. ●● Una palla lasciata cadere su un pavimento rigido risale al 64% dell'altezza da cui è caduta. Il coefficiente di restituzione dell'urto è:

   A. 0,36

   B. 0,41

   C. 0,64

   D. 0,80

8. ●●● Una palla urta di striscio, con un urto elastico, una palla uguale ferma. L'angolo fra le direzioni in cui si muovono dopo l'urto è:
   A. 0°
   B. 90°
   C. 45°
   D. dipende dalla velocità iniziale

Vero o falso

9. ● Se dopo un urto i due corpi restano uniti, l'energia cinetica totale si è conservata. V / F

10. ● In un urto completamente anelastico può succedere che tutta l'energia cinetica iniziale venga trasformata. V / F

11. ●● In un tamponamento fra due auto il peso e l'attrito delle gomme con l'asfalto rendono inutilizzabile la conservazione della quantità di moto fra l'istante subito prima e quello subito dopo l'urto. V / F

12. ●●● In un urto elastico centrale contro un bersaglio fermo, il corpo incidente non può mai uscire con una velocità di modulo maggiore di quella con cui è arrivato. V / F

13. ●● Una palla che rimbalza elasticamente su un muro ha, subito dopo il rimbalzo, la stessa quantità di moto che aveva subito prima. V / F

Applicare

14. ● Su una rotaia un carrello di 0,40 kg che viaggia a 0,90 m/s urta un carrello di 0,60 kg fermo e si aggancia a esso. Calcola la velocità comune dopo l'urto e la percentuale di energia cinetica trasformata.

15. ● Una sfera di 0,20 kg che si muove a 3,0 m/s urta elasticamente e frontalmente una sfera di 0,30 kg ferma. Calcola le velocità delle due sfere dopo l'urto e verifica che l'energia cinetica totale si conserva.

16. ● Completa. In un urto _____ si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica; in un urto _____ i corpi proseguono con la stessa velocità; in ogni urto di un sistema isolato si conserva la _____ .

17. ●● Usa il grafico della Figura 7.3: leggi le velocità finali, in rapporto a v_{1i}, per $m_1/m_2 = 3$ e verifica il risultato con le formule. Che cosa si legge per m_1/m_2 tendente a zero, e che situazione fisica rappresenta?

18. ●● Una palla lasciata cadere da 2,0 m risale fino a 1,28 m. Trascurando l'aria, calcola il coefficiente di restituzione e l'altezza a cui la palla risale dopo il secondo rimbalzo.

19. ●● In un pendolo balistico un proiettile di 8,0 g si conficca in un blocco di 1,50 kg, che sale di 6,4 cm. Calcola la velocità del blocco subito dopo l'urto e quella del proiettile.

20. ●● Due carrelli uguali si muovono uno contro l'altro sulla stessa rotaia, a 2,0 m/s e a 1,0 m/s, e restano agganciati. Calcola la velocità comune e la percentuale di energia cinetica trasformata.

21. ● Una pallina di plastilina di 50 g che si muove verso est a 4,0 m/s urta una pallina uguale che si muove verso nord a 3,0 m/s; le due palline restano attaccate. Calcola il modulo e la direzione della loro velocità comune.

Problemi

22. ●●● Newton, nello scolio dei *Principia*, riporta questo esempio: un corpo A urta un corpo B fermo con «nove parti di moto» (di quantità di moto); dopo l'urto A prosegue con due parti e B parte con sette. a) Verifica che la quantità di moto si conserva. b) Supponi che le masse siano uguali e che A arrivi a 9,0 m/s: calcola le velocità finali e il coefficiente di restituzione. c) Che percentuale dell'energia cinetica si è trasformata? Confronta e con il valore che Newton trovò per le palle di lana.

23. ●● Un carrello di 0,50 kg che viaggia a 0,80 m/s raggiunge un carrello di 1,0 kg che viaggia nello stesso verso a 0,20 m/s; l'urto è elastico. Usando la conservazione della quantità di moto e l'inversione della velocità relativa, calcola le velocità dopo l'urto.

24. ●●● Un proiettile di 12 g si conficca in un blocco di 3,0 kg appeso a un filo lungo 1,6 m; dopo l'urto il filo forma con la verticale un angolo massimo di 25°. a) Di quanto è salito il blocco? b) Qual era la velocità del proiettile? c) Che frazione dell'energia cinetica del proiettile si è trasformata nell'urto?

25. ●●● Ricostruire un incidente. Un'auto A di 1300 kg che viaggiava verso nord e un'auto B di 1600 kg che viaggiava verso est si scontrano a un incrocio e restano incastrate. La strisciata dei rottami è lunga 12,0 m e forma un angolo di 35° con la direzione est; il coefficiente di attrito dinamico è 0,75. a) Con quale velocità si muovevano i rottami subito dopo l'urto? b) Quali erano le velocità delle due auto prima dell'urto, in km/h? Il limite era 50 km/h.

26. ●●● Un fuoristrada di 2400 kg che viaggia a 36 km/h e un'auto di 1000 kg che viaggia a 54 km/h in verso opposto si scontrano frontalmente e restano incastrati. a) Calcola la velocità comune subito dopo l'urto. b) Calcola la variazione di velocità di ciascun veicolo e spiega quale dei due conducenti subisce la forza media maggiore. c) Che frazione dell'energia cinetica viene trasformata?

27. ●●● Un blocchetto di 0,30 kg parte da fermo e scende lungo una guida liscia da un'altezza di 45 cm; in fondo, sul tratto orizzontale, urta elasticamente un blocchetto di 0,60 kg fermo, che poi comprime una molla di costante elastica 150 N/m. Calcola: a) la velocità del primo blocchetto prima dell'urto; b) le velocità dopo l'urto; c) la compressione massima della molla; d) l'altezza a cui risale il primo blocchetto.

28. ●●● Nei reattori nucleari i neutroni vengono rallentati con urti contro i nuclei di un moderatore. Considera un urto elastico frontale di un neutrone contro un nucleo di carbonio fermo, di massa 12 volte quella del neutrone. a) Che frazione dell'energia cinetica del neutrone passa al nucleo? b) Che frazione gli resta? c) Perché l'acqua, che contiene nuclei di idrogeno di massa quasi uguale a quella del neutrone, è un moderatore più efficace per urto?

29. ●● Una palla da tennis di 58 g viene lasciata cadere da 2,0 m su un pavimento; il coefficiente di restituzione è 0,75 e il contatto con il pavimento dura 5,0 ms. a) Fino a che altezza risale? b) Calcola il modulo della variazione della quantità di moto nel rimbalzo. c) Calcola la forza media esercitata dal pavimento durante il contatto.

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Due carrelli uguali si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità, si urtano, restano agganciati e si fermano. Giulia conclude: «La quantità di moto non si è conservata: prima i carrelli si muovevano, dopo sono fermi». Ha ragione?

31. ●● Stima. Un'auto di circa 1200 kg che viaggia a 30 m/s colpisce una zanzara di circa 2,5 mg ferma nell'aria, che resta schiacciata sul parabrezza. Stima la variazione di velocità dell'auto e quella della zanzara, e spiega perché la conservazione della quantità di moto non è in contrasto con l'enorme differenza fra i due effetti.

32. ●●● Progetta un esperimento per verificare che, in un urto elastico obliquo fra due corpi uguali di cui uno fermo, le velocità finali sono perpendicolari. Indica gli strumenti, le grandezze da misurare e i motivi per cui l'angolo misurato potrebbe risultare diverso da 90°.

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: lo scolio che segue le leggi del moto, con il racconto degli esperimenti di urto fra pendoli e i rapporti misurati per palle di lana, d'acciaio, di sughero e di vetro.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla conservazione della quantità di moto, che ricava gli urti dal principio di relatività con un ragionamento simile a quello di Huygens.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sugli urti, con molti problemi in una e in due dimensioni.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulla quantità di moto, con gli urti spiegati senza formule e molti esempi tratti dallo sport e dalla sicurezza stradale.

Glossario del capitolo

Bersaglio
In un urto, il corpo che viene colpito, spesso inizialmente fermo.

Coefficiente di restituzione
Rapporto fra il modulo della velocità relativa dei due corpi dopo un urto centrale e quello prima: $e = -(v_{1f} - v_{2f})/(v_{1i} - v_{2i})$; vale 1 negli urti elastici e 0 in quelli completamente anelastici.

Corpo incidente
In un urto, il corpo che arriva sul bersaglio.

Inversione della velocità relativa
Proprietà degli urti elastici centrali: la velocità relativa dei due corpi dopo l'urto è opposta a quella prima, $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$.

Pendolo balistico
Blocco appeso in cui si conficca un proiettile: dalla quota a cui il blocco sale si ricava la velocità del proiettile, applicando la conservazione della quantità di moto all'urto e quella dell'energia meccanica all'oscillazione.

Pendolo di Newton
Fila di biglie d'acciaio uguali appese a fili e a contatto: lanciando una o più biglie a un'estremità, dall'altra parte ne partono altrettante con la stessa velocità, come richiedono insieme la conservazione della quantità di moto e quella dell'energia cinetica.

Scambio delle velocità
Esito di un urto elastico centrale fra corpi di massa uguale: ciascun corpo esce con la velocità che aveva l'altro; se il bersaglio era fermo, il corpo incidente si ferma.

Urto
Interazione fra due o più corpi che dura un tempo molto breve rispetto ai tempi del moto osservato, durante il quale i corpi si scambiano forze intense; non richiede necessariamente il contatto.

Urto anelastico
Urto in cui si conserva la quantità di moto totale, mentre una parte dell'energia cinetica si trasforma, soprattutto in energia interna.

Urto centrale
Urto in cui le velocità dei corpi, prima e dopo, sono dirette lungo la retta che congiunge i loro centri; è un problema unidimensionale. Si dice anche urto frontale.

Urto completamente anelastico
Urto dopo il quale i corpi restano uniti e proseguono con la stessa velocità; è l'urto in cui si trasforma la quota maggiore di energia cinetica.

Urto elastico
Urto in cui si conservano sia la quantità di moto totale sia l'energia cinetica totale.

Urto obliquo
Urto in cui le velocità dei corpi non sono tutte dirette lungo la stessa retta; la quantità di moto si conserva separatamente per ciascuna componente.

Urto superelastico
Urto in cui l'energia cinetica totale dopo l'urto è maggiore di quella prima, perché si libera energia immagazzinata (per esempio in una molla compressa); la quantità di moto si conserva.

Velocità comune
Velocità con cui proseguono insieme i corpi rimasti uniti dopo un urto completamente anelastico: $V = (m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i})/(m_1 + m_2)$.

Soluzioni

1. B. Durante l'urto le forze interne sono uguali e opposte (terzo principio) e le forze esterne sono assenti o trascurabili: la quantità di moto totale non cambia. L'energia cinetica si conserva solo negli urti elastici.

2. C. È la definizione: i corpi proseguono uniti, con la stessa velocità.

3. A. A masse uguali, con il bersaglio fermo, $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v_{1i}$: le velocità si scambiano.

4. D. Dalla (3): $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$.

5. A. Con $m_1 \ll m_2$, $v_{1f} = (m_1 - m_2)v_{1i}/(m_1 + m_2) \approx -v_{1i}$.

6. C. Nell'urto, completamente anelastico, si conserva la quantità di moto ma quasi tutta l'energia cinetica diventa energia interna; l'energia meccanica si conserva solo nella fase di oscillazione.

7. D. $e = \sqrt{(h_2/h_1)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}80$.

8. B. Le due conservazioni, con masse uguali, danno $\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$: le velocità finali sono perpendicolari (se l'urto non è frontale).

9. F. Se i corpi restano uniti l'urto è completamente anelastico: è proprio il caso in cui si trasforma la quota maggiore di energia cinetica.

10. V. Succede quando la quantità di moto totale iniziale è nulla (per esempio due corpi uguali con velocità opposte): i corpi uniti restano fermi e tutta l'energia cinetica viene trasformata.

11. F. L'urto dura pochissimo: il peso è equilibrato dalla reazione della strada e l'impulso dell'attrito in quel breve intervallo è trascurabile rispetto a quello delle forze fra le auto (approssimazione impulsiva).

12. V. $v_{1f}/v_{1i} = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ ha sempre modulo minore o uguale a 1 (uguale a 1 solo nel limite $m_2 \to 0$ o $m_1 \to 0$); è il bersaglio che può raggiungere quasi $2v_{1i}$. Del resto il corpo incidente non può guadagnare energia cinetica in un urto elastico con un bersaglio fermo.

13. F. La quantità di moto è un vettore: cambia verso, e la sua variazione ha modulo $2mv$. Si conserva l'energia cinetica della palla, non la sua quantità di moto (la differenza va al muro e alla Terra).

14. $V = 0{,}40\ \text{kg} \times 0{,}90\ \text{m/s} / 1{,}00\ \text{kg} = 0{,}36\ \text{m/s}$. $K_i = ½ \times 0{,}40 \times 0{,}90^2\ \text{J} = 0{,}162\ \text{J}$; $K_f = ½ \times 1{,}00 \times 0{,}36^2\ \text{J} \approx 0{,}0648\ \text{J}$. Si trasforma il 60% dell'energia cinetica (verifica: $1 - m_1/(m_1 + m_2) = 0{,}60$).

15. $v_{1f} = (0{,}20 - 0{,}30)/0{,}50 \times 3{,}0\ \text{m/s} = -0{,}60\ \text{m/s}$ (torna indietro); $v_{2f} = 2 \times 0{,}20/0{,}50 \times 3{,}0\ \text{m/s} = 2{,}4\ \text{m/s}$. Energia: prima $½ \times 0{,}20 \times 3{,}0^2\ \text{J} = 0{,}90\ \text{J}$; dopo $½ \times 0{,}20 \times 0{,}60^2\ \text{J} + ½ \times 0{,}30 \times 2{,}4^2\ \text{J} = (0{,}036 + 0{,}864)\ \text{J} = 0{,}90\ \text{J}$.

16. elastico; completamente anelastico; quantità di moto (totale).

17. Per $m_1/m_2 = 3$ si leggono 0,5 e 1,5; le formule danno $(3 - 1)/(3 + 1) = 0{,}5$ e $2 \times 3/4 = 1{,}5$. Per $m_1/m_2 \to 0$ le curve tendono a −1 e a 0: il corpo incidente rimbalza con la stessa velocità in modulo e il bersaglio resta fermo, come una pallina contro una parete.

18. $e = \sqrt{(1{,}28\ \text{m}/2{,}0\ \text{m})} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}80$. Dopo il secondo rimbalzo: $1{,}28\ \text{m} \times 0{,}64 \approx 0{,}82\ \text{m}$.

19. Oscillazione (energia meccanica): $V = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}064\ \text{m})} \approx 1{,}12\ \text{m/s}$. Urto (quantità di moto): $v = (1{,}508\ \text{kg}/0{,}0080\ \text{kg}) \times 1{,}12\ \text{m/s} \approx 2{,}1 \times 10^2\ \text{m/s}$.

20. Positivo il verso del carrello a 2,0 m/s: $V = m(2{,}0 - 1{,}0)\ \text{m/s}/(2m) = 0{,}50\ \text{m/s}$, nel verso del carrello più veloce. $K_i = ½m(4{,}0 + 1{,}0)\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 2{,}5m\ \text{m}^2/\text{s}^2$; $K_f = ½(2m)(0{,}50)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 0{,}25m\ \text{m}^2/\text{s}^2$: si trasforma il 90%.

21. $p_x = 0{,}050 \times 4{,}0\ \text{kg·m/s} = 0{,}20\ \text{kg·m/s}$; $p_y = 0{,}050 \times 3{,}0\ \text{kg·m/s} = 0{,}15\ \text{kg·m/s}$; $p_{tot} = 0{,}25\ \text{kg·m/s}$ e $V = 0{,}25/0{,}100\ \text{m/s} = 2{,}5\ \text{m/s}$, a 37° a nord della direzione est ($\tan\theta = 0{,}15/0{,}20 = 0{,}75$).

22. a) Prima 9 parti; dopo 2 + 7 = 9 parti: si conserva. b) Con masse uguali le parti di moto sono proporzionali alle velocità: $v_{1f} = 2{,}0\ \text{m/s}$, $v_{2f} = 7{,}0\ \text{m/s}$. $e = (7{,}0 - 2{,}0)/9{,}0 \approx 0{,}56$. c) $K_i = ½m \times 81\ \text{m}^2/\text{s}^2$, $K_f =$

$\frac{1}{2}m \times 81\ m^2/s^2$, $K_f = \frac{1}{2}m(4 + 49)\ m^2/s^2 = \frac{1}{2}m \times 53\ m^2/s^2$: si trasforma 28/81 ≈ 35% dell'energia cinetica. Il coefficiente coincide con il «5 a 9» (≈ 0,56) misurato da Newton per le palle di lana: l'esempio descrive un urto anelastico, in cui la quantità di moto si conserva ma l'energia cinetica no.

23. Sui carrelli il peso è equilibrato dalla reazione della rotaia e l'attrito è trascurabile: si conserva la quantità di moto. L'urto è elastico: la velocità relativa si inverte. Quantità di moto: $0{,}50 \times 0{,}80 + 1{,}0 \times 0{,}20 = 0{,}60$ kg·m/s = $0{,}50v_{1f} + 1{,}0v_{2f}$. Velocità relativa: $v_{2f} - v_{1f} = 0{,}80 - 0{,}20 = 0{,}60$ m/s. Sostituendo $v_{2f} = v_{1f} + 0{,}60$: $1{,}5v_{1f} + 0{,}60 = 0{,}60$, quindi $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = 0{,}60$ m/s. Controllo: K prima $\frac{1}{2} \times 0{,}50 \times 0{,}64 + \frac{1}{2} \times 1{,}0 \times 0{,}04 = 0{,}18$ J; dopo $\frac{1}{2} \times 1{,}0 \times 0{,}36 = 0{,}18$ J.

24. a) Geometria del pendolo (*Fisica 2*, capitolo 10): $h = l(1 - \cos 25°) = 1{,}6\ \text{m} \times 0{,}0937 \approx 0{,}15$ m. b) Nell'oscillazione agiscono il peso e la tensione, che non compie lavoro: si conserva l'energia meccanica, $V = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 0{,}150)}$ m/s ≈ 1,71 m/s. Nell'urto i fili sono verticali e le forze esterne non hanno componenti orizzontali: si conserva la quantità di moto orizzontale, $v = (3{,}012\ \text{kg}/0{,}012\ \text{kg}) \times 1{,}71$ m/s ≈ $4{,}3 \times 10^2$ m/s. c) Urto completamente anelastico con bersaglio fermo: $K_f/K_i = m/(m + M) = 0{,}012/3{,}012 \approx 0{,}004$; si trasforma il 99,6%.

25. a) Dopo l'urto sui rottami agiscono peso, reazione normale e attrito dinamico, che è l'unica forza a compiere lavoro: per il teorema dell'energia cinetica $\mu_d Mgd = \frac{1}{2}MV^2$, $V = \sqrt{(2 \times 0{,}75 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 12{,}0\ \text{m})} \approx 13{,}3$ m/s. b) Nell'urto, breve, si conserva la quantità di moto (approssimazione impulsiva): $p_{tot} = 2900\ \text{kg} \times 13{,}3\ \text{m/s} \approx 3{,}85 \times 10^4$ kg·m/s. Componente est (solo B): $1600\ \text{kg} \times v_B = p_{tot} \cos 35° \approx 3{,}16 \times 10^4$ kg·m/s, $v_B \approx 19{,}7$ m/s ≈ 71 km/h. Componente nord (solo A): $1300\ \text{kg} \times v_A = p_{tot}\ \text{sen}\ 35° \approx 2{,}21 \times 10^4$ kg·m/s, $v_A \approx 17{,}0$ m/s ≈ 61 km/h. Entrambe le auto superavano il limite.

26. a) Positivo il verso del fuoristrada; 36 km/h = 10 m/s, 54 km/h = 15 m/s. Nell'urto si conserva la quantità di moto (approssimazione impulsiva): $V = (2400 \times 10 - 1000 \times 15)/3400$ m/s ≈ 2,6 m/s, nel verso del fuoristrada. b) Δv fuoristrada = 2,6 − 10 ≈ −7,4 m/s; Δv auto = 2,6 − (−15) ≈ 17,6 m/s. Per il teorema dell'impulso la forza media su ciascun conducente è $m\Delta v/\Delta t$; con durate dell'urto simili, il conducente dell'auto subisce una forza media circa 2,4 volte maggiore. c) $K_i = \frac{1}{2} \times 2400 \times 10^2$ J + $\frac{1}{2} \times 1000 \times 15^2$ J = 232,5 kJ; $K_f = \frac{1}{2} \times 3400 \times 2{,}65^2$ J ≈ 11,9 kJ: si trasforma circa il 95%.

27. a) Sulla guida liscia agiscono peso e reazione normale, che non compie lavoro: si conserva l'energia meccanica, $v = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 0{,}45)}$ m/s ≈ 2,97 m/s. b) Nell'urto elastico si conservano quantità di moto ed energia cinetica: $v_{1f} = (0{,}30 - 0{,}60)/0{,}90 \times 2{,}97$ m/s ≈ −0,99 m/s, $v_{2f} = 2 \times 0{,}30/0{,}90 \times 2{,}97$ m/s ≈ 1,98 m/s. c) Durante la compressione agisce solo la forza elastica (conservativa): $\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}kx^2$, $x = 1{,}98\ \text{m/s} \times \sqrt{(0{,}60/150)}$ s ≈ 0,13 m. d) Il primo blocchetto risale con energia meccanica conservata: $h = (0{,}99\ \text{m/s})^2/(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 0{,}050$ m = 5,0 cm.

28. a) Si conservano quantità di moto ed energia cinetica (urto elastico): $v_{2f} = 2m_1v_{1i}/(m_1 + m_2)$ con $m_2 = 12m_1$, quindi $v_{2f} = (2/13)v_{1i}$. Frazione trasferita: $\frac{1}{2}(12m_1)(2/13)^2v_{1i}^2/(\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2) = 48/169 \approx 0{,}28$. b) Resta $(11/13)^2 \approx 0{,}72$, il 72%. c) A masse quasi uguali l'urto frontale scambia le velocità: il neutrone può cedere in un solo urto quasi tutta la sua energia, mentre contro il carbonio ne cede al massimo il 28%.

29. a) $h_2 = e^2h_1 = 0{,}5625 \times 2{,}0$ m ≈ 1,1 m. b) $v_i = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 2{,}0)}$ m/s ≈ 6,26 m/s verso il basso; $v_f = 0{,}75 \times 6{,}26$ m/s ≈ 4,70 m/s verso l'alto. Poiché la velocità cambia verso, $|\Delta \boldsymbol{p}| = m(v_i + v_f) = 0{,}058\ \text{kg} \times 10{,}96\ \text{m/s} \approx 0{,}64$ kg·m/s, verso l'alto. c) Sulla palla agiscono il peso e la forza del pavimento: per il teorema dell'impulso (capitolo 6) $(F - mg)\Delta t = \Delta p$, quindi $F = 0{,}636\ \text{kg·m/s} / 0{,}0050\ \text{s} + 0{,}058 \times 9{,}8$ N ≈ 127 N + 0,6 N ≈ $1{,}3 \times 10^2$ N. Il peso è trascurabile, come prevede l'approssimazione impulsiva.

30. No. La quantità di moto è un vettore: prima dell'urto le quantità di moto dei carrelli sono uguali e opposte, quindi la quantità di moto totale è già zero, e resta zero dopo. Si conserva. Quella che non si conserva è l'energia cinetica, che viene tutta trasformata in energia interna (urto completamente anelastico con quantità di moto totale nulla).

31. Nell'urto si conserva la quantità di moto: la zanzara passa da 0 a circa 30 m/s, cioè $\Delta v \approx 30$ m/s;

l'auto perde la stessa quantità di moto, $2{,}5 \times 10^{-6}$ kg $\times$ 30 m/s = $7{,}5 \times 10^{-5}$ kg·m/s, e la sua velocità cambia di $7{,}5 \times 10^{-5}/1200$ m/s $\approx 6 \times 10^{-8}$ m/s, una quantità non misurabile. Le forze (e gli impulsi) sono uguali e opposte, ma le variazioni di velocità sono inversamente proporzionali alle masse, che differiscono di un fattore 5×10^{8}.

32. Traccia di risposta: si usano due dischi uguali su un tavolo a cuscino d'aria (o due monete uguali su un tavolo liscio, oppure due biglie d'acciaio) e una videocamera fissa sopra il tavolo, con un righello in vista per la scala. Si lancia un disco contro l'altro fermo, colpendolo fuori centro, e si ricavano dai fotogrammi le posizioni dei centri prima e dopo l'urto; si misurano le direzioni delle due traiettorie finali con un goniometro (o dalle coordinate) e si calcola l'angolo fra loro, ripetendo con urti più o meno di striscio. Si confronta il valore medio, con la sua incertezza, con 90°. Cause di scarto: urto non perfettamente elastico (con $e < 1$ l'angolo risulta minore di 90°), attrito con il piano e rotazione dei corpi (le monete strisciano, le biglie rotolano e acquistano rotazione), masse non esattamente uguali, errori nella lettura delle posizioni.