CAPITOLO

6

La quantità di moto e l'impulso

His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum. «Con queste azioni si producono cambiamenti uguali non delle velocità, ma dei moti.» — Isaac Newton, Principia (1687), commento alla legge III (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la quantità di moto come vettore e distinguerla dall'energia cinetica.
2. Leggere la seconda legge di Newton nella sua formulazione originale, come legge del cambiamento del moto, scriverla nella forma moderna $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ e collegarla a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.
3. Calcolare l'impulso di una forza costante e di una forza variabile, come area sotto il grafico forza-tempo, e usare il teorema dell'impulso per ricavare forze medie.
4. Spiegare con l'impulso il funzionamento di airbag, caschi e atterraggi a ginocchia piegate.
5. Ricavare dal terzo principio la conservazione della quantità di moto e riconoscere quando si può applicare, anche per componenti.
6. Risolvere problemi di rinculo, di esplosioni e di propulsione a razzo, e verificare in laboratorio la conservazione della quantità di moto.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 La quantità di moto 2
6.2 Il secondo principio nella forma di Newton 3
6.3 L'impulso di una forza 4
6.4 Allungare il tempo per ridurre la forza 8
6.5 La conservazione della quantità di moto 10
6.6 Rinculo, esplosioni e razzi 13

Fisica 3 · Parte II · Le leggi di conservazione · versione 1.0
Capitolo 6: La quantità di moto e l'impulso · pagine 155–180 del volume completo · estratto per lo studio

Un camion che avanza a passo d'uomo contro il muro di un magazzino e un proiettile sparato da un fucile: quale dei due è più difficile da fermare? Il proiettile è molto più veloce, il camion molto più massiccio; e la domanda «quanto è difficile fermarlo» si può intendere in due modi. Puoi chiederti quanto **lavoro** serve, e la risposta la conosci già: la variazione dell'energia cinetica. Oppure puoi chiederti per quanto **tempo** devi spingere con una certa forza, e allora ti serve una grandezza nuova, che mette insieme la massa e la velocità in un altro modo: la quantità di moto.

In questo capitolo definisci la quantità di moto e scopri che Newton aveva enunciato il suo secondo principio proprio come legge del cambiamento della quantità di moto. Il prodotto di una forza per la durata della sua azione, l'impulso, ti dirà perché un airbag salva la vita e perché si piegano le ginocchia atterrando da un salto. Il terzo principio, infine, ti porterà a una delle leggi di conservazione più generali della fisica: in un sistema isolato la quantità di moto totale non cambia. È la legge che fa rinculare un fucile, allontana due pattinatori che si spingono e fa salire un razzo nel vuoto; nel capitolo 7 la userai per studiare gli urti.

6.1 La quantità di moto

6.1.1 Massa e velocità insieme

Si chiama **quantità di moto** di un corpo di massa m che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ il prodotto della massa per la velocità:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \qquad (\text{kg·m/s})$$

Poiché la massa è uno scalare positivo, la quantità di moto è un **vettore** con la stessa direzione e lo stesso verso della velocità; il suo modulo è $p = mv$. Nel Sistema Internazionale si misura in chilogrammi per metro al secondo, kg·m/s; l'unità non ha un nome proprio. Come ogni vettore si può scomporre: nel piano, $p_x = mv_x$ e $p_y = mv_y$. Due corpi hanno la stessa quantità di moto solo se si muovono nella stessa direzione, nello stesso verso e con lo stesso prodotto mv: un'auto che va verso nord a 50 km/h e un'auto identica che va verso sud alla stessa velocità hanno quantità di moto **opposte**.

Torniamo alla domanda iniziale con qualche numero. Un camion di 12 t che avanza a 1,4 m/s (circa 5 km/h, il passo di una persona) ha quantità di moto $p = 12\,000\ \text{kg} \times 1{,}4\ \text{m/s} \approx 1{,}7 \times 10^4$ kg·m/s. Un proiettile di 10 g a 400 m/s ha $p = 0{,}010\ \text{kg} \times 400\ \text{m/s} = 4{,}0$ kg·m/s: più di quattromila volte meno. Le energie cinetiche raccontano un'altra storia: per il camion $\tfrac{1}{2} \times 12\,000\ \text{kg} \times (1{,}4\ \text{m/s})^2 \approx 1{,}2 \times 10^4$ J, per il proiettile $\tfrac{1}{2} \times 0{,}010\ \text{kg} \times (400\ \text{m/s})^2 = 800$ J, appena quindici volte meno. Quale dei due è «più difficile da fermare» dipende dalla domanda: per fermare il camion con

una forza data devi spingere per un tempo quattromila volte più lungo, mentre il lavoro da compiere è solo quindici volte maggiore.

6.1.2 Quantità di moto ed energia cinetica

Quantità di moto ed energia cinetica dipendono entrambe dalla massa e dalla velocità, ma sono grandezze diverse. L'energia cinetica è uno scalare, sempre positivo o nullo, e cresce con il **quadrato** della velocità; la quantità di moto è un vettore e cresce in proporzione alla velocità. Dalle due definizioni, eliminando $v = p/m$, si ricava un legame utile fra i moduli:

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad \Longleftrightarrow \quad p = \sqrt{(2mK)}$$

A parità di quantità di moto, quindi, il corpo più leggero ha più energia cinetica: un corpo di massa m e uno di massa $4m$ con la stessa p hanno energie cinetiche nel rapporto $4 : 1$. A parità di energia cinetica, invece, ha più quantità di moto il corpo più pesante.

Il nome è antico. Nei *Principia* (1687) Newton definisce la *quantitas motus*, letteralmente «quantità di moto», come «la misura del moto che nasce dalla velocità e dalla quantità di materia prese insieme» (definizione II; traduzione della redazione); e chiarisce subito con un esempio: in un corpo doppio con la stessa velocità il moto è doppio, e con velocità doppia è quadruplo. Per Newton la «quantità di materia» è la massa, e il «moto» di un corpo è ciò che oggi chiamiamo quantità di moto. In inglese si dice *momentum*, e il simbolo p è entrato nell'uso internazionale.

6.2 Il secondo principio nella forma di Newton

6.2.1 Il cambiamento del moto

Nel volume dello scorso anno hai scritto il secondo principio come $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ (*Fisica 2*, capitolo 5). Newton lo aveva enunciato in un'altra forma. Ecco la seconda legge del moto come appare nella prima edizione dei *Principia*:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

«Il cambiamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, e avviene lungo la retta secondo la quale quella forza è impressa» (Isaac Newton, *Principia*, 1687, legge II; traduzione della redazione).

Il «moto» è la quantità di moto della definizione II: la legge parla dunque di come cambia $\boldsymbol{p}$, non di accelerazione. Nel commento che segue, Newton aggiunge che una forza doppia produce un cambiamento doppio, «sia che sia impressa tutta insieme e in una volta, sia per gradi e in successione», e che il cambiamento si compone con il moto che il corpo aveva già: si somma se

è concorde, si sottrae se è opposto, si compone obliquamente se è obliquo. È, in parole, una somma di vettori.

Nel testo di Newton il tempo non compare; ma una forza «impressa per gradi» agisce per un certo intervallo, e il cambiamento che produce è tanto maggiore quanto più a lungo agisce. In linguaggio moderno: se sul corpo agisce una forza risultante $\boldsymbol{F}$ costante per un intervallo Δt, la variazione della quantità di moto è $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t$; dividendo per Δt,

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

È la **forma newtoniana del secondo principio**: **la forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla rapidità con cui varia la sua quantità di moto**. Se la forza non è costante, la relazione vale per intervalli Δt sempre più piccoli ($\Delta t \to 0$), come la velocità e l'accelerazione istantanee del capitolo 1. Anche la forma di Newton è vettoriale: $\Delta\boldsymbol{p}$ ha sempre la direzione e il verso della forza risultante, mentre $\boldsymbol{p}$ può avere qualsiasi direzione. Scritta come uguaglianza fra la forza e il prodotto della massa per l'accelerazione, la legge si è affermata più tardi, nel corso del Settecento.

6.2.2 Due forme equivalenti, se la massa non cambia

Se la massa del corpo resta costante, la variazione della quantità di moto dipende solo dalla variazione della velocità: $\Delta\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - m\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = m\Delta\boldsymbol{v}$, e quindi

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = m\boldsymbol{a}$$

Le due forme sono dunque equivalenti per tutti i problemi che hai risolto finora. La forma con la quantità di moto, però, è più generale: vale anche per i sistemi la cui massa cambia, come un razzo che espelle gas o un nastro trasportatore su cui cade della sabbia. Su un nastro che scorre a 1,5 m/s cadono verticalmente 20 kg di sabbia al secondo: ogni secondo, 20 kg di sabbia passano da velocità orizzontale nulla a 1,5 m/s, e acquistano una quantità di moto orizzontale di 20 kg × 1,5 m/s = 30 kg·m/s. Il nastro, che si muove a velocità costante, deve quindi esercitare sulla sabbia una forza orizzontale di 30 N, e il motore deve fornirla: un'accelerazione del nastro non c'è, ma la forza serve lo stesso. Con $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ il problema non si imposterebbe nemmeno, perché non c'è un corpo di massa fissa che accelera.

6.3 L'impulso di una forza

6.3.1 Forza per tempo

Si chiama **impulso** di una forza costante $\boldsymbol{F}$ che agisce per un intervallo di tempo Δt il prodotto

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t \qquad (\mathrm{N\cdot s})$$

L'impulso è un vettore con la direzione e il verso della forza. Si misura in newton per secondo, e $\mathrm{N \cdot s} = (\mathrm{kg \cdot m/s^2}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{kg \cdot m/s}$: la stessa unità della quantità di moto, e non per caso. Con la forma di Newton del secondo principio, se $\boldsymbol{F}$ è la forza risultante,

$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$$

È il **teorema dell'impulso**: **l'impulso della forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione della sua quantità di moto**. È il fratello del teorema dell'energia cinetica (*Fisica 2*, capitolo 9): là il lavoro, cioè la forza «accumulata» lungo lo spazio, fa variare l'energia cinetica; qui la forza accumulata nel tempo fa variare la quantità di moto. Nessuno dei due è un principio nuovo: sono due conseguenze del secondo principio, comode in situazioni diverse.

6.3.2 Forze variabili e forza media

Le forze più interessanti per il teorema dell'impulso sono quelle che agiscono per un tempo brevissimo e cambiano rapidamente: il piede che calcia un pallone, la racchetta che colpisce una pallina, il terreno che ferma chi atterra da un salto. Forze di questo tipo si chiamano **forze impulsive**. Il loro andamento si rappresenta con un **grafico forza-tempo**, come quello della Figura 6.1: la forza cresce da zero, raggiunge un massimo e torna a zero, tutto in pochi millesimi di secondo.

Come hai visto per il lavoro di una forza variabile, che è l'area sotto il grafico forza-spostamento (capitolo 5), l'impulso di una forza variabile è l'**area sotto il grafico forza-tempo**. Basta dividere l'intervallo in tanti intervalli brevissimi, in ciascuno dei quali la forza è praticamente costante: ogni intervallo contribuisce con una striscia di area $F\Delta t$, e la somma delle strisce è l'area sotto la curva. Si definisce allora la **forza media** F_m come la forza costante che, nello stesso intervallo Δt, darebbe lo stesso impulso:

$$F_\mathrm{m} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Graficamente, F_m è l'altezza del rettangolo di base Δt che ha la stessa area della curva. Il teorema dell'impulso è prezioso proprio qui: della forza istantanea, che cambia di continuo, non sappiamo quasi nulla; ma la variazione della quantità di moto si misura facilmente, e da questa si ricava la forza media.

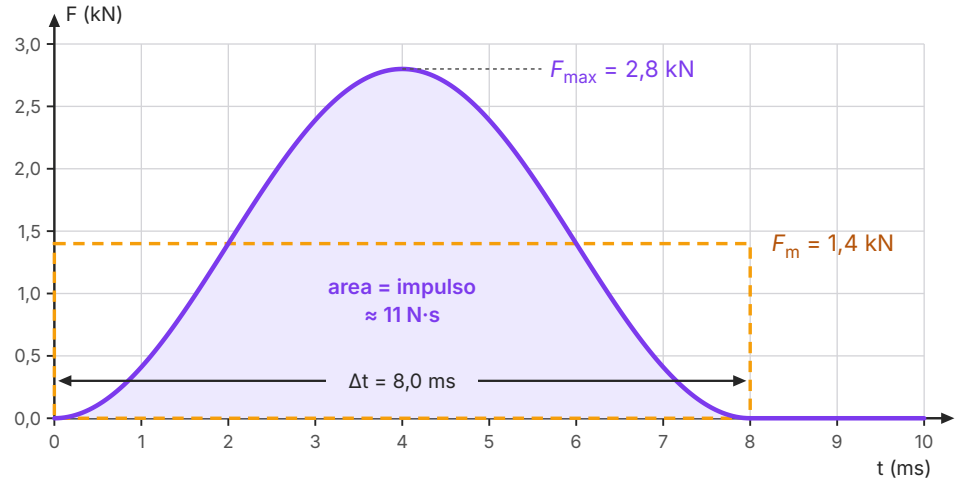


Figura 6.1 Forza esercitata dal piede su un pallone durante un calcio. La forma della curva è schematica (modello $F = F_{max}\,\mathrm{sen}^2(\pi t/\Delta t)$, con F_{max} = 2,8 kN e Δt = 8,0 ms). L'area colorata è l'impulso; il rettangolo tratteggiato, alto quanto la forza media F_m = 1,4 kN, ha la stessa area.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico di un calcio

Problema. La Figura 6.1 descrive la forza che il piede esercita su un pallone di 0,43 kg, inizialmente fermo. a) Stima l'impulso dall'area sotto la curva. b) Calcola la velocità del pallone quando si stacca dal piede. c) Confronta la forza media con il peso del pallone.

Soluzione. a) La curva è simmetrica: le due «gobbe» che sporgono sopra il rettangolo tratteggiato, alto metà del massimo, riempiono esattamente i due vuoti che restano sotto di esso, ai lati. L'area sotto la curva è quindi quella del rettangolo: $\boldsymbol{I} \approx 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{N} \times 8{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 11{,}2\ \mathrm{N{\cdot}s} \approx 11\ \mathrm{N{\cdot}s}$. (Puoi controllarlo contando i quadretti: ogni quadretto della griglia, 1 ms × 0,5 kN, vale 0,5 N·s, e sotto la curva ce ne sono circa 22.)

b) Durante il calcio la forza del piede è molto maggiore di ogni altra forza orizzontale, quindi è praticamente la forza risultante. Per il teorema dell'impulso, con il pallone fermo all'inizio, $mv_f = \boldsymbol{I}$: $v_f = 11{,}2\ \mathrm{N{\cdot}s} / 0{,}43\ \mathrm{kg} \approx 26\ \mathrm{m/s}$, cioè circa 94 km/h.

c) Il peso del pallone è $mg = 0{,}43\ \mathrm{kg} \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \approx 4{,}2\ \mathrm{N}$; la forza media è circa $1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{N} / 4{,}2\ \mathrm{N} \approx 330$ volte maggiore, e il picco quasi 670 volte. Ecco perché, durante il contatto, il peso si può trascurare.

Controllo. Le unità: $\mathrm{N{\cdot}s/kg} = (\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}){\cdot}\mathrm{s/kg} = \mathrm{m/s}$. Una velocità di qualche decina di metri al secondo è quella di un tiro deciso.

6.3.3 La palla che rimbalza

La quantità di moto è un vettore, e dimenticarlo porta all'errore più frequente del capitolo. Una pallina da tennis di 58 g colpisce perpendicolarmente un muro a 25 m/s e rimbalza con la stessa velocità in verso opposto (Figura 6.2a). La sua energia cinetica non è cambiata; la sua quantità di moto sì. Scegliamo l'asse x perpendicolare al muro, con il verso positivo nel verso dell'arrivo: $p_{i,x} = +mv$ e $p_{f,x} = -mv$, quindi

$$\Delta p_x = -mv - (+mv) = -2mv = -2 \times 0{,}058\ \text{kg} \times 25\ \text{m/s} = -2{,}9\ \text{kg·m/s}$$

La variazione è il **doppio** della quantità di moto iniziale ed è diretta verso l'esterno del muro: il muro ha dovuto prima fermare la pallina, poi rilanciarla. Se il contatto dura 4,0 ms, la forza media del muro sulla pallina è 2,9 kg·m/s / 0,0040 s ≈ $7{,}3 \times 10^2$ N, più di mille volte il peso della pallina. Una pallina di plastilina che arriva alla stessa velocità e si ferma attaccata al muro ha $\Delta p = mv = 1{,}45$ kg·m/s: la metà. Rimbalzare richiede un impulso maggiore che fermarsi.

Se la pallina arriva obliquamente, conviene scomporre i vettori (Figura 6.2b). Su una parete liscia la forza della parete è perpendicolare alla parete stessa: la componente della quantità di moto parallela alla parete non cambia, mentre quella perpendicolare si inverte. La variazione $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ è allora perpendicolare alla parete e ha modulo $2mv\cos\theta$, dove θ è l'angolo fra la velocità e la normale alla parete. Per una pallina da 58 g che arriva a 20 m/s con $\theta = 45°$: $\Delta p = 2 \times 0{,}058\ \text{kg} \times 20\ \text{m/s} \times \cos 45° \approx 1{,}6$ kg·m/s.

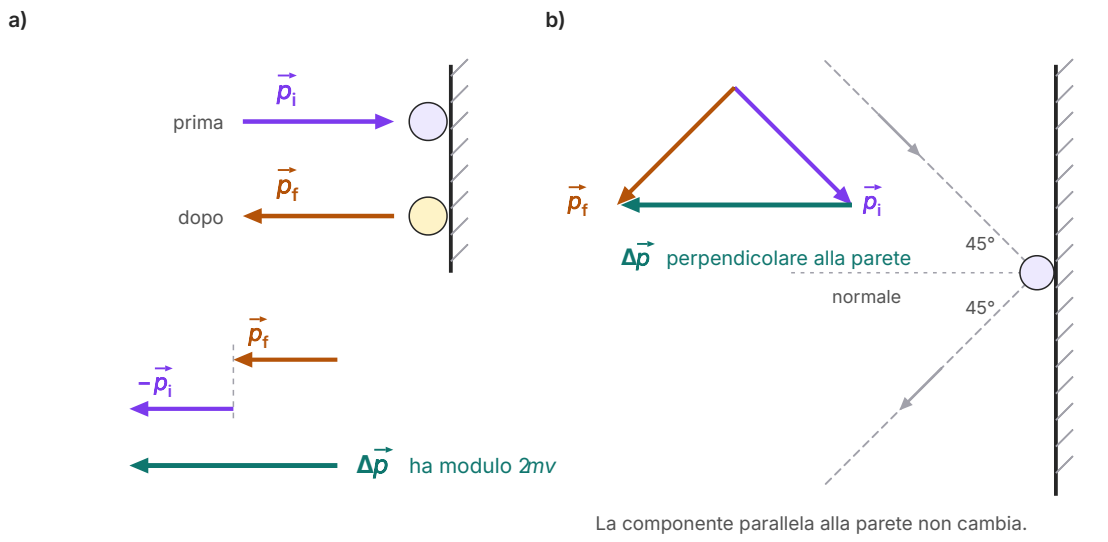


Figura 6.2 La variazione della quantità di moto di una pallina che rimbalza senza perdere velocità. a) Urto perpendicolare: $\boldsymbol{p}_f$ è opposto a $\boldsymbol{p}_i$ e $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ ha modulo $2mv$. b) Urto obliquo, con un angolo di 45° rispetto alla normale: disegnando $\boldsymbol{p}_i$ e $\boldsymbol{p}_f$ con la stessa origine, $\Delta\boldsymbol{p}$ va dalla punta di $\boldsymbol{p}_i$ alla punta di $\boldsymbol{p}_f$; è perpendicolare alla parete e ha modulo $2mv\cos 45°$.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare che la quantità di moto ha un verso

«La pallina arriva a 25 m/s e riparte a 25 m/s: la sua quantità di moto non cambia, quindi il muro non le ha dato alcun impulso.» Il ragionamento confonde il **modulo** della quantità di moto con il vettore. I moduli sono uguali, ma i versi opposti: $\Delta p = 2mv$, non zero. Per evitare l'errore scegli sempre un asse con un verso positivo e scrivi le componenti con il loro segno, prima di sottrarre.

Un errore parente: pensare che l'impulso faccia variare l'energia cinetica. Nel rimbalzo perfetto l'energia cinetica è la stessa prima e dopo, eppure l'impulso è il massimo possibile. L'impulso è legato alla variazione della quantità di moto; la variazione dell'energia cinetica è data dal lavoro.

6.4 Allungare il tempo per ridurre la forza

Il teorema dell'impulso ha una conseguenza pratica di enorme importanza. Quando un corpo deve essere fermato, la variazione della sua quantità di moto è fissata dalla situazione: da mv a zero. L'impulso necessario è quindi sempre lo stesso; ma lo stesso impulso si può ottenere con una forza grande che agisce per poco tempo o con una forza piccola che agisce a lungo. Allungare il tempo dell'arresto riduce la forza media nella stessa proporzione:

$$F_{\text{m}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}: \quad \text{a parità di } \Delta p, \text{ se } \Delta t \text{ decuplica, } F_{\text{m}} \text{ diventa dieci volte più piccola.}$$

La Figura 6.3 confronta due modi di fermare una persona di 75 kg che arriva a 4,0 m/s, cioè di annullare una quantità di moto di 300 kg·m/s. Le due curve hanno la stessa area; ma l'arresto che dura 0,20 s ha un picco di 3,0 kN, quello che dura 0,020 s un picco dieci volte più alto. Nel volume dello scorso anno hai ragionato in termini di **spazio** di arresto (*Fisica 2*, capitolo 5): allungare lo spazio e allungare il tempo sono due facce della stessa strategia, perché un arresto più lungo nello spazio dura anche di più.

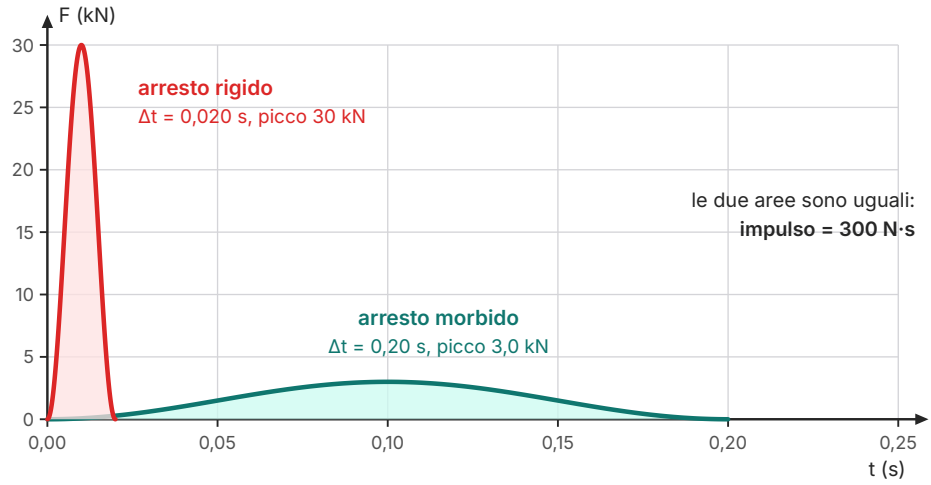


Figura 6.3 Due arresti con lo stesso impulso, 300 N·s (una persona di 75 kg a 4,0 m/s). Rosso: arresto rigido di 0,020 s, con un picco di 30 kN. Verde: arresto morbido di 0,20 s, con un picco di 3,0 kN. Le aree sotto le due curve sono uguali. Forma delle curve schematica, come nella Figura 6.1.

6.4.1 Atterrare da un salto

Quando atterri da un salto, sul tuo corpo agiscono due forze: il peso mg, verso il basso, e la forza del terreno, verso l'alto. Il teorema dell'impulso riguarda la forza **risultante**, quindi la forza media del terreno è maggiore di quella che serve a fermarti: deve anche reggere il tuo peso. Scegliendo l'asse verso l'alto, $(F_{\text{terreno}} - mg)\Delta t = 0 - (-mv)$, cioè

$$F_{\text{terreno}} = \frac{mv}{\Delta t} + mg$$

Una persona di 60 kg che salta giù da un muretto alto 1,0 m tocca terra a $v = \sqrt{(2gh)} \approx 4{,}4$ m/s (*Fisica 2*, capitolo 10), con una quantità di moto di circa 266 kg·m/s. Se atterra a gambe tese e si ferma in 0,020 s, il terreno spinge in media con 266/0,020 N + 588 N $\approx 1{,}4 \times 10^4$ N, oltre venti volte il suo peso: una forza capace di danneggiare articolazioni e ossa. Se piega le ginocchia e prolunga l'arresto a 0,30 s, la forza media scende a 266/0,30 N + 588 N $\approx 1{,}5 \times 10^3$ N, due volte e mezza il peso. È la stessa ragione per cui i ginnasti atterrano sui materassi e i paracadutisti imparano a rotolare.

COLLEGAMENTI

Airbag, caschi e zone di deformazione

In un incidente la variazione della quantità di moto degli occupanti è decisa dalla velocità dell'auto prima dell'urto: la sicurezza passiva non può cambiarla, ma può decidere **in quanto tempo** avviene e **su quale superficie** si distribuisce la forza. La zona di deformazione della carrozzeria, accartocciandosi, allunga la durata dell'urto per l'abitacolo; la cintura di sicurezza, che si allunga un poco, e l'airbag, che si sgonfia mentre la testa vi affonda, allungano la durata dell'arresto per il corpo e distribuiscono la forza su torace e viso, invece di concentrarla su una piccola zona.

Il casco da bicicletta funziona allo stesso modo. Facciamo una stima, con valori solo indicativi: in una caduta la testa (insieme a una parte del collo, diciamo 5 kg in tutto) urta il suolo a 5,0 m/s. Su un suolo rigido si fermerebbe in circa 2 ms, con una forza media di 5 kg × 5,0 m/s / 0,002 s ≈ 1×10^4 N. Lo strato di polistirolo del casco, schiacciandosi per un paio di centimetri, porta la durata dell'arresto a circa 8 ms e la forza media a circa 3×10^3 N: quattro volte meno. Per questo un casco che ha subito un urto va sostituito anche se sembra intatto: la schiuma schiacciata non si deforma una seconda volta.

6.4.2 Lo sport: accompagnare il colpo

Nel tennis, nel golf e nel calcio gli allenatori insistono sull'«accompagnare» il colpo, cioè continuare il movimento della racchetta, della mazza o della gamba anche dopo l'impatto. Il contatto con la palla dura pochi millesimi di secondo, e la sua durata dipende soprattutto dall'elasticità della palla e delle corde, non dal gesto. Chi accompagna il colpo, però, non comincia a frenare il braccio **prima** e **durante** l'impatto: la racchetta arriva alla palla alla massima velocità e mantiene la spinta per tutto il contatto, e la palla riceve l'impulso più grande possibile. Inoltre il braccio rallenta gradualmente dopo il colpo, invece di fermarsi di scatto, con meno sollecitazioni per le articolazioni: anche qui, un arresto più lungo significa forze più piccole.

6.5 La conservazione della quantità di moto

6.5.1 Il terzo principio, riletto

Finora hai studiato un corpo alla volta. Consideriamo adesso un sistema di corpi, per esempio due pattinatori sul ghiaccio che si spingono, o un fucile e il suo proiettile. Le forze che i corpi del sistema si scambiano tra loro sono forze interne; quelle esercitate da corpi che non fanno parte del sistema sono forze esterne (*Fisica 2*, capitolo 6). La **quantità di moto totale** del sistema è la somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli corpi:

$$\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots$$

Nel suo commento alla terza legge Newton osserva che, quando due corpi interagiscono, «si producono cambiamenti uguali non delle velocità, ma dei moti», in versi opposti. Con il teorema dell'impulso si può dimostrare in poche righe.

ESEMPIO SVOLTO

Dal terzo principio alla conservazione della quantità di moto

Ipotesi. Due corpi, 1 e 2, interagiscono per un intervallo Δt. Sul corpo 1 il corpo 2 esercita la forza $\boldsymbol{F}_{12}$, sul corpo 2 il corpo 1 esercita la forza $\boldsymbol{F}_{21}$. Supponiamo per ora che non agiscano forze esterne.

Passo 1: il terzo principio. Le due forze formano una coppia di azione e reazione: in ogni istante $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$. Sono uguali e opposte istante per istante, anche se cambiano durante l'interazione, e agiscono per lo stesso intervallo di tempo, perché l'una non esiste senza l'altra.

Passo 2: il teorema dell'impulso su ciascun corpo. In ogni breve intervallo dell'interazione $\Delta\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{F}_{12}\Delta t$ e $\Delta\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{F}_{21}\Delta t$. Le aree sotto i due grafici forza-tempo sono uguali e di segno opposto, quindi anche sull'intera interazione gli impulsi sono opposti: $\Delta\boldsymbol{p}_2 = -\Delta\boldsymbol{p}_1$.

Passo 3: la somma. La variazione della quantità di moto totale è

$$\Delta\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = \Delta\boldsymbol{p}_1 + \Delta\boldsymbol{p}_2 = \Delta\boldsymbol{p}_1 - \Delta\boldsymbol{p}_1 = 0$$

Conclusione. Quello che un corpo guadagna, l'altro lo perde: la quantità di moto passa da un corpo all'altro, ma la somma non cambia. Le forze interne non possono far variare la quantità di moto totale.

Estensione a N corpi. Con molti corpi le forze interne si raggruppano in coppie di azione e reazione, una per ogni coppia di corpi, e i loro impulsi si annullano a due a due. Se agiscono anche forze esterne, resta soltanto il loro impulso: $\Delta\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = \boldsymbol{F}_{\text{est}}\Delta t$, dove $\boldsymbol{F}_{\text{est}}$ è la risultante delle forze esterne.

6.5.2 Il principio

In fisica si dice **sistema isolato** un sistema su cui non agiscono forze esterne, o su cui le forze esterne hanno risultante nulla. (Nel volume dello scorso anno, parlando di calore, «isolato» voleva dire che il sistema non scambia energia con l'esterno, *Fisica 2*, capitolo 12: qui la parola riguarda le forze.) Dal ragionamento precedente segue il **principio di conservazione della quantità di moto**:

In un sistema isolato la quantità di moto totale resta costante, qualunque siano le forze interne:

$$\boldsymbol{p}_{\text{tot, i}} = \boldsymbol{p}_{\text{tot, f}} \quad \text{cioè} \quad m_1\boldsymbol{v}_{1\text{i}} + m_2\boldsymbol{v}_{2\text{i}} + \ldots = m_1\boldsymbol{v}_{1\text{f}} + m_2\boldsymbol{v}_{2\text{f}} + \ldots$$

Newton lo enuncia come terzo corollario delle sue leggi: la quantità di moto ottenuta sommando i moti nello stesso verso e sottraendo quelli in versi opposti *non mutatur ab actione corporum*

inter se, «non è cambiata dall'azione dei corpi fra loro» (*Principia*, 1687, corollario III; traduzione della redazione). La «somma con i segni» di Newton è la nostra somma per componenti. Il principio vale per qualsiasi tipo di forza interna: spinte muscolari, molle, esplosioni, attriti fra i corpi del sistema. È uno strumento potentissimo perché permette di collegare lo stato prima e dopo un'interazione senza sapere nulla di ciò che accade durante: delle forze interne non serve conoscere né l'intensità né la durata.

6.5.3 Quando si può usare

Un sistema perfettamente isolato, sulla Terra, non esiste: c'è sempre almeno il peso. Il principio, però, si usa in tre situazioni molto comuni.

- **Forze esterne che si fanno equilibrio.** Due carrelli su una rotaia orizzontale, con attrito trascurabile: il peso di ciascuno è equilibrato dalla reazione normale della rotaia, e la risultante delle forze esterne è nulla.
- **Interazioni brevi e intense.** Durante uno sparo, un'esplosione o un urto le forze interne sono enormi e durano pochi millesimi di secondo. Le forze esterne ordinarie (peso, attrito) nello stesso tempo producono un impulso trascurabile, e la quantità di moto totale subito prima e subito dopo l'interazione è praticamente la stessa. È l'**approssimazione impulsiva**.
- **Una componente sola.** Se le forze esterne hanno risultante nulla lungo una direzione, si conserva la componente di $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ lungo quella direzione, anche se le altre cambiano: è la **conservazione per componenti**.

Un esempio dell'ultimo caso è il cannone della Figura 6.4, montato su un carrello libero di scorrere su rotaie orizzontali. Il cannone, di 1500 kg, spara un proiettile di 10 kg a 400 m/s con un'inclinazione di 30° rispetto all'orizzontale. Lungo l'orizzontale non agiscono forze esterne (trascuriamo l'attrito delle ruote), e la componente orizzontale della quantità di moto totale, nulla prima dello sparo, resta nulla: il cannone rincula con $10\ \text{kg} \times 400\ \text{m/s} \times \cos 30° / 1500\ \text{kg} \approx 2{,}3$ m/s. Lungo la verticale, invece, il proiettile acquista una quantità di moto di $10\ \text{kg} \times 400\ \text{m/s} \times \text{sen}\ 30° = 2{,}0 \times 10^3$ kg·m/s verso l'alto, ma il cannone non affonda nel terreno: durante lo sparo le rotaie spingono verso l'alto con una forza molto maggiore del peso, e il loro impulso, una forza esterna, fornisce proprio quei $2{,}0 \times 10^3$ N·s. Per semplicità abbiamo considerato la velocità del proiettile rispetto al terreno.

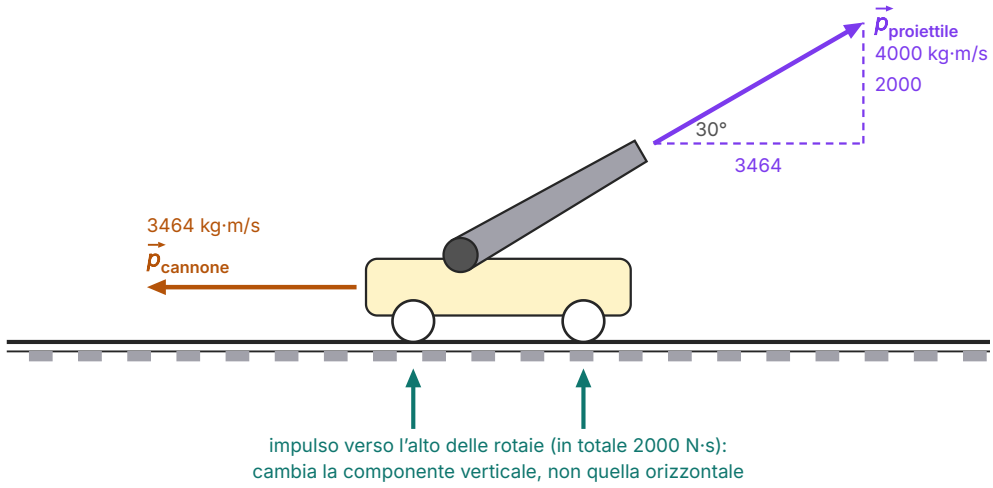


Figura 6.4 Un cannone libero di scorrere su rotaie orizzontali spara un proiettile di 10 kg a 400 m/s, a 30° sull'orizzontale. La componente orizzontale della quantità di moto si conserva: il cannone rincula con una quantità di moto orizzontale uguale e opposta a quella del proiettile (3464 kg·m/s). La componente verticale (2000 kg·m/s) è fornita dall'impulso delle rotaie, una forza esterna. Frecce in scala; quantità di moto in kg·m/s.

DA RICORDARE

Le domande da farsi prima di usare la conservazione

1) **Qual è il sistema?** Elenca i corpi che ne fanno parte: una forza è interna o esterna solo rispetto a un sistema scelto. 2) **Le forze esterne hanno risultante nulla**, o sono trascurabili durante un'interazione breve, o si annullano lungo una direzione? 3) **Scegli gli assi** e scrivi le componenti di tutte le velocità con il loro segno, prima e dopo. 4) Ricorda che si conserva la quantità di moto **totale**, non quella dei singoli corpi; e che le velocità vanno misurate tutte nello stesso sistema di riferimento inerziale.

6.6 Rinculo, esplosioni e razzi

6.6.1 Il rinculo

Un fucile di 4,0 kg spara un proiettile di 10 g a 800 m/s. Fucile e proiettile sono inizialmente fermi, quindi la quantità di moto totale è zero; lo sparo dura un tempo brevissimo, e nell'approssimazione impulsiva la quantità di moto totale resta zero. Lungo la direzione dello sparo, con il verso positivo quello del proiettile:

$$0 = m_p v_p + m_f v_f \quad \Longrightarrow \quad v_f = -\frac{m_p v_p}{m_f} = -\frac{0{,}010\ \text{kg} \times 800\ \text{m/s}}{4{,}0\ \text{kg}} = -2{,}0\ \text{m/s}$$

Il segno meno dice che il fucile si muove all'indietro: è il **rinculo**. Le due quantità di moto sono uguali e opposte, 8,0 kg·m/s ciascuna; le velocità, invece, stanno nel rapporto inverso delle masse. Chi spara appoggia il calcio del fucile alla spalla: il sistema che rincula diventa fucile più tiratore, di circa 74 kg, e la velocità di rinculo scende a circa 0,11 m/s. Lo stesso accade quando due pattinatori fermi si spingono: se lei ha 50 kg e lui 75 kg, e lei si allontana a 1,5 m/s, lui si allontana in verso opposto a 50 × 1,5 / 75 m/s = 1,0 m/s, chiunque dei due abbia spinto di più. La Figura 6.5 mostra la stessa situazione con due carrelli spinti da una molla.

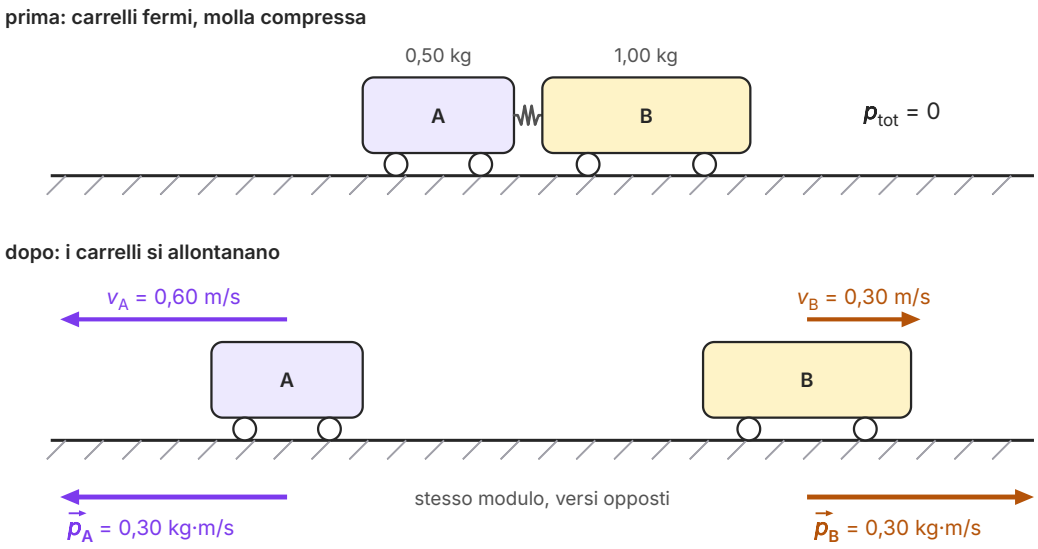


Figura 6.5 Due carrelli, inizialmente fermi, vengono separati dalla molla compressa fra loro. Dopo la separazione hanno quantità di moto uguali e opposte (0,30 kg·m/s), e quindi velocità inversamente proporzionali alle masse: il carrello A, di 0,50 kg, si muove a 0,60 m/s, il carrello B, di 1,00 kg, a 0,30 m/s. Frecce delle velocità e delle quantità di moto in scala.

Nota un fatto importante: la quantità di moto totale è zero prima e dopo, ma l'energia cinetica no. Prima i corpi sono fermi; dopo si muovono entrambi. L'energia cinetica viene dall'energia chimica della polvere da sparo, dai muscoli dei pattinatori, dall'energia elastica della molla: le forze interne non cambiano la quantità di moto totale, ma possono compiere lavoro e cambiare l'energia cinetica del sistema. Torneremo su questo punto negli urti (capitolo 7) e con il centro di massa (capitolo 8).

ESEMPIO SVOLTO

Il tuffo dalla barca

Problema. Una ragazza di 60 kg è in piedi su una barca di 120 kg, ferma in acqua calma. Si tuffa dalla poppa con una velocità orizzontale di 3,0 m/s rispetto all'acqua. a) Con quale velocità si muove la barca subito dopo il tuffo? b) Quanta energia cinetica hanno acquistato in tutto la ragazza e la barca, e da dove viene? c) La barca poi rallenta e si ferma: la quantità di moto totale non si conserva più?

Soluzione. a) Il sistema è ragazza più barca. Lungo la verticale il peso è equilibrato dalla spinta di Archimede; lungo l'orizzontale la resistenza dell'acqua, durante il breve tuffo, è trascurabile. La componente orizzontale della quantità di moto totale si conserva ed era zero. Con il verso positivo quello del tuffo: $60\ \text{kg} \times 3{,}0\ \text{m/s} + 120\ \text{kg} \times v_\text{b} = 0$, quindi $v_\text{b} = -1{,}5\ \text{m/s}$. La barca si allontana a 1,5 m/s nel verso opposto.

b) $K = \tfrac{1}{2} \times 60\ \text{kg} \times (3{,}0\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2} \times 120\ \text{kg} \times (1{,}5\ \text{m/s})^2 = 270\ \text{J} + 135\ \text{J} = 405\ \text{J} \approx 4{,}1 \times 10^2\ \text{J}$. Prima del tuffo l'energia cinetica era zero: viene dal lavoro dei muscoli della ragazza, cioè da energia chimica. Nota che la ragazza, più leggera, si porta via i due terzi dell'energia, ma la stessa quantità di moto della barca.

c) Dopo il tuffo la resistenza dell'acqua agisce a lungo sulla barca: è una forza esterna, il cui impulso non è più trascurabile, e la quantità di moto della barca diminuisce fino a zero. Il sistema non è più isolato; la conservazione valeva per l'istante del tuffo, non per i minuti successivi.

6.6.2 Esplosioni

In un'**esplosione** un corpo si divide in più frammenti per effetto di forze interne intense e brevissime. Se il corpo era fermo e le forze esterne sono trascurabili durante l'esplosione, la quantità di moto totale dei frammenti è zero: i vettori $m_\text{i}\boldsymbol{v}_\text{i}$, disposti punta-coda, formano una spezzata chiusa. Con due frammenti, questi partono in versi opposti lungo la stessa retta; con tre, le loro quantità di moto stanno su un piano e formano un triangolo.

ESEMPIO SVOLTO

Tre frammenti sul ghiaccio

Problema. Un contenitore di 0,75 kg, fermo su una lastra di ghiaccio orizzontale, si spezza per la pressione del gas che contiene in tre frammenti che scivolano sul ghiaccio. Il frammento 1, di 0,30 kg, parte verso est a 20 m/s; il frammento 2, di 0,20 kg, verso nord a 25 m/s. Trova la velocità (modulo e direzione) del frammento 3.

Soluzione. Il sistema è il contenitore con il gas; durante la rottura il peso è equilibrato dalla reazione del ghiaccio e l'attrito è trascurabile: la quantità di moto totale si conserva ed è nulla. Assi: x verso est, y verso nord. La massa del frammento 3 è 0,75 kg − 0,30 kg − 0,20 kg = 0,25 kg (trascuriamo la massa del gas).

Componenti: $\boldsymbol{p}_1 = (6{,}0;\ 0)$ kg·m/s, $\boldsymbol{p}_2 = (0;\ 5{,}0)$ kg·m/s. Da $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0$ segue $\boldsymbol{p}_3 = (-6{,}0;\ -5{,}0)$ kg·m/s, con modulo $\sqrt{(6{,}0^2 + 5{,}0^2)}$ kg·m/s ≈ 7,8 kg·m/s. La velocità del frammento 3 ha modulo 7,8 kg·m/s / 0,25 kg ≈ 31 m/s; la direzione forma con l'ovest un angolo $\tan^{-1}(5{,}0/6{,}0) \approx 40°$, verso sud: il frammento parte verso sud-ovest (Figura 6.6).

Controllo. Il triangolo della Figura 6.6b, disegnato in scala, si chiude. L'energia cinetica dei frammenti, $\frac{1}{2} \times 0{,}30 \times 20^2$ J + $\frac{1}{2} \times 0{,}20 \times 25^2$ J + $\frac{1}{2} \times 0{,}25 \times 31{,}2^2$ J ≈ $2{,}4 \times 10^2$ J, viene dall'energia del gas compresso.

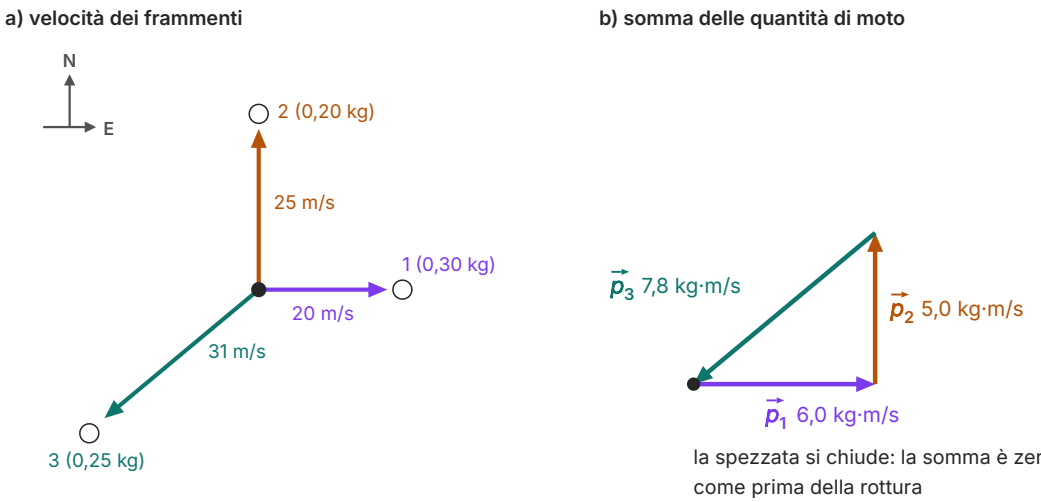


Figura 6.6 La rottura di un contenitore fermo in tre frammenti. a) Le velocità dei frammenti (in scala, a partire dal punto della rottura). b) Le quantità di moto disposte punta-coda formano un triangolo chiuso: la loro somma è zero, come la quantità di moto del contenitore prima della rottura.

6.6.3 Il razzo

Nel volume dello scorso anno hai visto che un razzo non ha bisogno dell'aria per spingersi: espelle all'indietro i gas di scarico e, per il terzo principio, i gas spingono il razzo in avanti (*Fisica 2*, capitolo 6). Ora puoi descriverlo con la quantità di moto. Considera il sistema razzo più propellente, lontano da ogni pianeta, inizialmente fermo: la sua quantità di moto totale è zero e resta zero. Ogni volta che il motore espelle una massa di gas Δm con una certa velocità all'indietro, il gas porta con sé una quantità di moto diretta all'indietro, e il razzo, che è diventato più leggero, acquista una quantità di moto uguale e opposta, in avanti. Un razzo è un rinculo continuo: un fucile che spara milioni di minuscoli proiettili ogni secondo.

Due osservazioni. Primo, la quantità di moto che il razzo guadagna non dipende da ciò che c'è dietro di lui: nel vuoto il razzo funziona benissimo, anzi meglio, perché non c'è aria che lo frena. Secondo, la massa del razzo cambia durante il moto: è proprio il caso in cui la forma $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ non basta e serve il secondo principio nella forma di Newton.

APPROFONDIMENTO

La spinta di un razzo

Supponiamo che in un intervallo Δt il motore espella una massa di gas Δm con velocità v_{rel} rispetto al razzo, cioè all'indietro rispetto a lui. Nel sistema di riferimento in cui il razzo, in quell'istante, è fermo, il gas espulso acquista una quantità di moto $\Delta m \cdot v_{\text{rel}}$ all'indietro. Per il teorema dell'impulso, il motore ha esercitato sul gas una forza media $\Delta m \cdot v_{\text{rel}}/\Delta t$ all'indietro; per il terzo principio il gas esercita sul razzo una forza uguale e opposta, in avanti. È la **spinta** del motore:

$$F_{\text{spinta}} = v_{\text{rel}} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

La spinta cresce con la velocità di espulsione dei gas e con la massa espulsa al secondo, la **portata di massa** del motore. Con valori dell'ordine di quelli di un grande lanciatore, $v_{\text{rel}} = 2{,}5$ km/s e $\Delta m/\Delta t = 1{,}2 \times 10^4$ kg/s, la spinta è $2{,}5 \times 10^3$ m/s $\times$ $1{,}2 \times 10^4$ kg/s $= 3{,}0 \times 10^7$ N. Per decollare la spinta deve superare il peso del razzo: un razzo di $2{,}5 \times 10^6$ kg pesa circa $2{,}5 \times 10^7$ N, quindi al decollo la forza risultante verso l'alto è di circa 5×10^6 N. Man mano che il propellente si consuma la massa diminuisce, la spinta resta circa la stessa e l'accelerazione cresce.

La velocità finale che un razzo può raggiungere dipende dalla velocità di espulsione e dal rapporto fra la massa iniziale (con il propellente) e quella finale (a serbatoi vuoti): il legame preciso è l'**equazione del razzo di Ciolkovskij** (Tsiolkovsky, nella grafia inglese), che si ricava con gli strumenti dell'analisi matematica. Una conseguenza si capisce già: per raggiungere velocità orbitali la quasi totalità della massa al decollo deve essere propellente, ed è per questo che i lanciatori si costruiscono a stadi, che si staccano quando i loro serbatoi sono vuoti.

APPROFONDIMENTO

Cartesio, Newton e la «quantità di moto»

L'idea che nel mondo qualcosa del moto si conservi è più antica di Newton. Nei *Principia philosophiae* (1644) Cartesio sostiene che Dio, creando la materia, le ha dato una certa quantità di moto e la conserva sempre uguale nell'universo, anche se si trasferisce da una parte all'altra. Per misurarla, spiega con un esempio, quando una parte di materia si muove con velocità doppia di un'altra, e quest'altra è grande il doppio della prima, «c'è tanto moto nella minore quanto nella maggiore» (parte II, articolo 36; traduzione della redazione). È il prodotto della grandezza del corpo per la sua velocità: ma per Cartesio la velocità è un numero senza direzione, e la sua quantità di moto è uno **scalare**.

Con una grandezza scalare la conservazione non funziona: due palline uguali che si scontrano frontalmente alla stessa velocità e restano ferme avrebbero «perso» tutto il loro moto, mentre la quantità di moto vettoriale, nulla prima e nulla dopo, si conserva. Infatti diverse delle regole sugli urti che Cartesio ne ricavava sono smentite dall'esperienza. La quantità di moto di Newton tiene conto del verso (i moti in versi opposti, nel corollario III, si sottraggono) e si conserva sempre in un sistema isolato.

Leibniz propose di misurare la «forza» di un corpo in movimento con la massa per il **quadrato** della velocità, la *vis viva* («forza viva»), da cui viene il nome del teorema delle forze vive (*Fisica 2*, capitolo 9). Ne nacque una lunga disputa fra i seguaci di Cartesio e quelli di Leibniz su quale fosse la «vera» misura del moto. Oggi sappiamo che erano grandezze diverse, entrambe utili: $m\boldsymbol{v}$, la quantità di moto, si conserva in ogni sistema isolato; $\frac{1}{2}mv^2$, l'energia cinetica, si conserva soltanto in alcuni urti, come vedrai nel prossimo capitolo.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: due carrelli che si respingono

Materiali. Una rotaia a basso attrito (rotaia a cuscino d'aria o guida con carrelli a cuscinetti), livellata con una livella a bolla; due carrelli, il carrello A con un respingente a molla che si può comprimere e bloccare con un fermo; masse aggiuntive da 500 g; due fotocellule collegate a un cronometro elettronico (risoluzione 0,1 ms); due bandierine di larghezza d = (25,0 ± 0,1) mm, misurata con il calibro; una bilancia (risoluzione 1 g).

Procedimento. 1) Pesa i carrelli: m_A = (500 ± 1) g; il carrello B, con le masse aggiuntive, vale (500 ± 1) g, (1000 ± 1) g o (1500 ± 1) g. 2) Comprimi la molla di A, blocca il fermo e accosta B ad A al centro della rotaia, con le due fotocellule a circa 20 cm dai carrelli, una per lato. 3) Sblocca il fermo con un colpetto verticale su un'asta isolante, senza spingere i carrelli. 4) Leggi i tempi di oscuramento Δt_A e Δt_B; ripeti cinque volte per ogni massa di B e calcola il valore medio e la semidispersione (*Fisica 1*, capitolo 4). 5) Calcola le velocità $v = d/\Delta t$ e le quantità di moto, con le loro incertezze relative: $\delta v/v = \delta d/d + \delta(\Delta t)/\Delta t$ e $\delta p/p = \delta m/m + \delta v/v$.

Tabella 6.1 Separazione di due carrelli inizialmente fermi (dati tipici di una prova). Tempi medi di cinque prove, con semidispersione 0,3 ms; quantità di moto in 10^{-3} kg·m/s.

m_B (g)	Δt_A (ms)	Δt_B (ms)	v_A (m/s)	v_B (m/s)	p_A	p_B
500	59,4	59,9	0,421 ± 0,004	0,417 ± 0,004	210 ± 2	209 ± 2
1000	51,6	102,5	0,484 ± 0,005	0,244 ± 0,002	242 ± 3	244 ± 2
1500	48,3	146,0	0,518 ± 0,005	0,171 ± 0,001	259 ± 3	257 ± 2

Confronto teoria–esperimento. Prima dello sgancio la quantità di moto totale è zero; se la rotaia è orizzontale e l'attrito trascurabile, il sistema è isolato lungo la rotaia e dopo lo sgancio deve valere $m_A v_A = m_B v_B$ (in modulo), cioè $v_A/v_B = m_B/m_A$. Il rapporto previsto, calcolato con le masse, vale 1,000 ± 0,004, 2,000 ± 0,006 e 3,000 ± 0,008; il rapporto misurato fra le velocità vale 1,01 ± 0,02, 1,99 ± 0,03 e 3,02 ± 0,05. In tutti e tre i casi l'intervallo della misura contiene il valore previsto: previsione e misura sono compatibili.

Che cosa concludere. In ogni riga della Tabella 6.1 la differenza fra p_A e p_B (1 o 2 unità) è minore della somma delle incertezze (4 o 5 unità): le due quantità di moto sono uguali entro gli errori di misura, anche se le velocità sono diverse fino a un fattore 3. Nota anche che la molla, sempre compressa allo stesso modo, dà quantità di moto diverse quando cambia la massa di B: non si conserva una «spinta» fissata dalla molla, ma la quantità di moto totale, che resta zero. L'incertezza dominante è quella sui tempi; un piccolo attrito, che rallenta i carrelli prima delle fotocellule, è un effetto sistematico che si riduce avvicinando le fotocellule ai carrelli.

Sicurezza. Il respingente compresso scatta con forza: tieni le dita lontane dalla molla quando sblocchi il fermo, e metti dei fermi morbidi alle estremità della rotaia.

Per la relazione. Riporta la tabella con le incertezze e il calcolo completo per una riga. Traccia il grafico di p_B in funzione di p_A, con le barre d'errore, insieme alla retta $p_B = p_A$. Discuti la compatibilità riga per riga e calcola anche l'energia cinetica totale dopo lo sgancio: è la stessa nelle tre prove? Che cosa ne deduci sull'energia elastica della molla? Proponi infine come verificare la conservazione quando i carrelli non partono da fermi.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ — quantità di moto (kg·m/s): vettore con la direzione e il verso della velocità; $K = p^2/(2m)$ lega il suo modulo all'energia cinetica.

$\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ — secondo principio nella forma di Newton: la forza risultante (N) è la rapidità di variazione della quantità di moto; se la massa è costante equivale a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$ — impulso (N·s = kg·m/s) di una forza costante; per una forza variabile è l'area sotto il grafico forza-tempo.

$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ — teorema dell'impulso: vale per la forza risultante; $F_m = \Delta p/\Delta t$ è la forza media. A parità di Δp, un Δt più lungo dà una forza media minore.

$\Delta\boldsymbol{p}_{tot} = \boldsymbol{F}_{est}\Delta t$ — le forze interne non cambiano la quantità di moto totale; la cambia solo l'impulso delle forze esterne.

$\boldsymbol{p}_{tot,\,i} = \boldsymbol{p}_{tot,\,f}$ — conservazione della quantità di moto: vale per un sistema isolato, durante interazioni brevi in cui le forze esterne sono trascurabili, o per la sola componente lungo cui le forze esterne si annullano.

$F_{spinta} = v_{rel}\Delta m/\Delta t$ — spinta di un razzo (N): velocità di espulsione dei gas (m/s) per massa espulsa al secondo (kg/s).

SINTESI

- La quantità di moto di un corpo è il vettore $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, che ha la direzione e il verso della velocità e si misura in kg·m/s.
- Quantità di moto ed energia cinetica sono grandezze diverse: la prima è un vettore proporzionale a v, la seconda uno scalare proporzionale a v^2; i moduli sono legati da $K = p^2/(2m)$.
- Newton enunciò il secondo principio come legge del cambiamento del moto: in forma moderna $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$, che equivale a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ quando la massa è costante ma vale anche per sistemi di massa variabile.
- L'impulso di una forza costante è $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$; per una forza variabile è l'area sotto il grafico forza-tempo.
- Il teorema dell'impulso afferma che l'impulso della forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto; dalla variazione della quantità di moto si ricava la forza media di un'interazione breve.
- In un rimbalzo la variazione della quantità di moto non è nulla: per un rimbalzo perpendicolare senza perdita di velocità vale $2mv$.
- A parità di variazione della quantità di moto, allungare la durata dell'arresto riduce la forza media: è il principio di airbag, caschi, zone di deformazione e ginocchia piegate.
- Dal terzo principio segue che le forze interne di un sistema non ne cambiano la quantità di moto totale; la cambia solo l'impulso delle forze esterne.
- In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva; in pratica la conservazione si usa anche durante interazioni brevi e intense e, componente per componente, lungo le direzioni in cui le forze esterne si annullano.
- Nel rinculo e nelle esplosioni da fermo le quantità di moto dei frammenti hanno somma nulla, mentre l'energia cinetica cresce a spese di un'energia interna (chimica, elastica, muscolare).
- Il razzo si muove espellendo gas all'indietro: la sua spinta è il prodotto della velocità di espulsione per la massa espulsa al secondo, e non richiede un mezzo esterno su cui spingere.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nel Sistema Internazionale la quantità di moto si misura in:
   A. kg·m/s^2
   B. kg·m/s
   C. J·s
   D. N/s

2. ● Una pallina di massa m colpisce perpendicolarmente un muro con velocità di modulo v e rimbalza con velocità dello stesso modulo. Il modulo della variazione della sua quantità di moto è:

   A. zero
   B. mv
   C. $2mv$
   D. mv^2

3. ● L'impulso della forza risultante che agisce su un corpo è uguale:

   A. alla variazione della sua quantità di moto
   B. alla variazione della sua energia cinetica
   C. al prodotto della forza per lo spostamento
   D. alla variazione della sua velocità

4. ●● Due corpi, di massa m e $4m$, hanno quantità di moto dello stesso modulo. Allora:

   A. hanno la stessa energia cinetica
   B. il corpo di massa $4m$ ha energia cinetica quattro volte maggiore
   C. il corpo di massa m ha energia cinetica doppia
   D. il corpo di massa m ha energia cinetica quattro volte maggiore

5. ●● Un airbag riduce la forza che agisce sulla testa di un passeggero durante un urto perché:

   A. riduce la variazione della quantità di moto della testa
   B. allunga la durata dell'arresto a parità di variazione della quantità di moto
   C. fa rimbalzare la testa all'indietro
   D. annulla l'impulso della forza

6. ●● La quantità di moto totale di un sistema di corpi si conserva quando:

   A. le forze interne sono nulle
   B. l'energia cinetica del sistema si conserva
   C. la risultante delle forze esterne è nulla
   D. tutti i corpi sono fermi

7. ●● Due pattinatori, di 40 kg e di 60 kg, sono fermi sul ghiaccio e si spingono. Il rapporto fra la velocità del pattinatore di 40 kg e quella del pattinatore di 60 kg è:

   A. 3/2
   B. 2/3
   C. 1
   D. 9/4

8. ●●● Un cannone montato su un carrello libero di scorrere su rotaie orizzontali spara un proiettile inclinato di 30° sopra l'orizzontale. Durante lo sparo, per il sistema cannone più proiettile si conserva:

   A. l'intera quantità di moto

   B. solo la componente verticale della quantità di moto

   C. nessuna componente della quantità di moto

   D. solo la componente orizzontale della quantità di moto

Vero o falso

9. ● La quantità di moto di un corpo ha sempre la stessa direzione e lo stesso verso della sua velocità. V / F

10. ● Due corpi che hanno la stessa energia cinetica hanno sempre la stessa quantità di moto. V / F

11. ● Le forze interne di un sistema non possono far variare la sua quantità di moto totale. V / F

12. ●● Un razzo nello spazio vuoto non può accelerare, perché non c'è nulla su cui spingere. V / F

13. ●● Se la risultante delle forze esterne su un sistema è nulla, la quantità di moto di ciascun corpo del sistema resta costante. V / F

Applicare

14. ● Un'auto di 1200 kg viaggia a 90 km/h. Calcola il modulo della sua quantità di moto.

15. ● Un martello colpisce un chiodo esercitando una forza media di 1,5 kN per 2,0 ms. Calcola l'impulso ricevuto dal chiodo.

16. ● Completa: 1 N·s = 1 _____ , perché 1 N = 1 _____ .

17. ● Due carrelli si muovono sulla stessa rotaia: il primo, di 2,0 kg, a 3,0 m/s verso destra, il secondo, di 3,0 kg, a 1,5 m/s verso sinistra. Calcola la quantità di moto totale.

18. ●● Un pallone di 0,45 kg colpisce perpendicolarmente un muro a 12 m/s e rimbalza a 9,0 m/s. Il contatto dura 0,020 s. Calcola il modulo della variazione della quantità di moto e la forza media esercitata dal muro.

19. ●● Usa la Figura 6.3. a) Leggi la durata e la forza massima delle due curve. b) Per curve di questa forma l'area è metà di quella del rettangolo $F_{max} \times \Delta t$: verifica che i due impulsi sono uguali. c) Calcola la forza media nei due casi.

20. ●● Un fucile da caccia di 3,2 kg spara un proiettile di 12 g a 750 m/s. Con quale velocità rincula il fucile, se nessuno lo trattiene?

21. ●● Una palla da baseball di 0,145 kg ha un'energia cinetica di 120 J. Calcola il modulo della sua quantità di moto.

Problemi

22. ●●● Una ragazza di 65 kg salta giù da un muretto alto 1,2 m e atterra in piedi, fermandosi in 0,25 s grazie al piegamento delle ginocchia. a) Con quale velocità tocca il suolo? b) Quale impulso deve ricevere per fermarsi? c) Calcola la forza media esercitata dal suolo e confrontala con il peso. d) Che cosa cambierebbe se si fermasse in 0,025 s?

23. ●● Una pallina da tennis di 57 g arriva sulla racchetta a 30 m/s in direzione orizzontale e viene rimandata indietro, sempre orizzontalmente, a 40 m/s. Il contatto dura 5,0 ms. a) Calcola il modulo della variazione della quantità di moto. b) Calcola la forza media della racchetta sulla pallina. c) Quante volte è maggiore del peso della pallina?

24. ●●● Un disco da hockey di 0,17 kg scivola sul ghiaccio a 12 m/s e urta la sponda della pista con una velocità che forma un angolo di 60° con la normale alla sponda. Rimbalza con la stessa velocità e con un angolo uguale dall'altra parte della normale. a) Calcola la variazione della quantità di moto (modulo e direzione). b) Se il contatto dura 15 ms, qual è la forza media della sponda? c) Perché la forza della sponda non ha componente parallela alla sponda stessa, se l'attrito è trascurabile?

25. ●●● Un ragazzo di 60 kg è fermo su una barca di 140 kg, ferma anch'essa. Si tuffa orizzontalmente con una velocità di 3,0 m/s **rispetto alla barca**. Calcola le velocità del ragazzo e della barca rispetto all'acqua subito dopo il tuffo. (Ricorda la composizione delle velocità del capitolo 2.)

26. ●●● Un oggetto di 2,4 kg, fermo su una superficie orizzontale liscia, esplode in tre frammenti che scivolano sulla superficie. Il primo, di 0,60 kg, parte verso est a 40 m/s; il secondo, di 0,80 kg, verso nord a 30 m/s. a) Calcola la velocità del terzo frammento (modulo e direzione). b) Calcola l'energia cinetica totale dei frammenti e spiega da dove viene.

27. ●●● Due carrelli, di 0,40 kg e di 0,60 kg, sono fermi su una rotaia orizzontale senza attrito, con una molla di costante elastica 800 N/m compressa di 4,0 cm fra loro. Si libera la molla, che si stacca da entrambi. Calcola le velocità finali dei due carrelli. (La massa della molla è trascurabile.)

28. ●●● Su un nastro trasportatore orizzontale, che si muove a velocità costante di 2,0 m/s, cade verticalmente sabbia al ritmo di 15 kg/s. a) Quale forza orizzontale deve esercitare il nastro sulla sabbia? b) Quale potenza deve fornire il motore per mantenere il nastro alla stessa velocità? c) Di quanto aumenta ogni secondo l'energia cinetica della sabbia? Che cosa diventa il resto dell'energia?

29. ●● Un cannone di 800 kg, appoggiato su un terreno orizzontale, spara orizzontalmente una palla di 5,0 kg a 300 m/s. a) Con quale velocità rincula il cannone subito dopo lo sparo? b) Il coefficiente di attrito dinamico fra le ruote bloccate e il terreno è 0,40: quanto spazio percorre il cannone prima di fermarsi? c) Perché nel punto a) si può trascurare l'attrito, che invece nel punto b) è decisivo?

Ragionare e argomentare

30. ●● Spiega con il teorema dell'impulso perché cadere su un materasso da ginnastica fa meno male che cadere sul pavimento dalla stessa altezza.

31. ●●● Stima di Fermi. Durante un temporale cadono 10 mm di pioggia in un'ora; le gocce arrivano a terra a circa 9 m/s e non rimbalzano. Stima la forza media che la pioggia esercita su un ombrello aperto di 1 m^2 e confrontala con il peso di un oggetto che conosci.

32. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Una pallina di 50 g arriva su un muro a 10 m/s e rimbalza a 10 m/s. La variazione della quantità di moto è $0{,}050 \times 10 - 0{,}050 \times 10 = 0$, quindi il muro non esercita alcuna forza media.» Correggi il ragionamento e calcola il valore giusto.

33. ●●● Progetta un esperimento per verificare il teorema dell'impulso con un carrello che urta un sensore di forza montato all'estremità di una rotaia. Indica gli strumenti, le grandezze da misurare, come confrontare le due quantità e le principali fonti di errore.

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: la definizione II (la quantità di moto), la legge II e il corollario III, nelle prime pagine dell'opera.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla conservazione della quantità di moto, ricavata anche con argomenti di simmetria e di relatività galileiana.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla quantità di moto e gli urti, con molti problemi su impulso, rinculo ed esplosioni.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulla quantità di moto, con esempi tratti dallo sport e dalla sicurezza stradale.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: come i concetti meccanici di forza e di moto sono stati estesi e messi in discussione.

Glossario del capitolo

Approssimazione impulsiva
Durante un'interazione breve e intensa (urto, sparo, esplosione) l'impulso delle forze esterne ordinarie è trascurabile, e la quantità di moto totale subito prima e subito dopo è la stessa.

Conservazione per componenti
Se la risultante delle forze esterne è nulla lungo una direzione, si conserva la componente della quantità di moto totale lungo quella direzione.

Esplosione
Divisione di un corpo in frammenti per effetto di forze interne intense e brevi; se il corpo era fermo, le quantità di moto dei frammenti hanno somma nulla.

Forma newtoniana del secondo principio
Il secondo principio scritto come $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$: la forza risultante è uguale alla rapidità di variazione della quantità di moto; vale anche per sistemi di massa variabile.

Forza impulsiva
Forza intensa che agisce per un tempo molto breve, come quella di un calcio, di uno sparo o di un urto.

Forza media
Forza costante che, nello stesso intervallo di tempo, darebbe lo stesso impulso di una forza variabile: $F_{\text{m}} = \Delta p/\Delta t$.

Grafico forza-tempo
Grafico dell'intensità di una forza in funzione del tempo; l'area sotto la curva è l'impulso della forza.

Impulso
Per una forza costante, il vettore $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$; per una forza variabile, l'area sotto il grafico forza-tempo. Si misura in N·s.

Portata di massa
Massa di gas espulsa da un motore a razzo nell'unità di tempo; si misura in kg/s.

Principio di conservazione della quantità di moto
In un sistema isolato la quantità di moto totale resta costante, qualunque siano le forze interne.

Quantità di moto
Vettore $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, prodotto della massa di un corpo per la sua velocità; si misura in kg·m/s.

Quantità di moto totale
Somma vettoriale delle quantità di moto dei corpi di un sistema.

Rinculo
Moto all'indietro di un corpo che lancia o espelle un altro corpo in avanti, come un fucile che spara; le due quantità di moto sono uguali e opposte.

Sistema isolato (in meccanica)
Senso meccanico, che si aggiunge a quello termico di *Fisica 2*: sistema di corpi su cui non agiscono forze esterne o su cui la risultante delle forze esterne è nulla.

Spinta
Forza con cui i gas espulsi spingono in avanti un razzo; è uguale alla velocità di espulsione dei gas per la massa espulsa al secondo.

Teorema dell'impulso
L'impulso della forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione della sua quantità di moto: $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p}$.

Soluzioni

1. B. $p = mv$ ha le dimensioni di una massa per una velocità: kg·m/s (equivalente a N·s).

2. C. La componente perpendicolare al muro passa da $+mv$ a $-mv$: $|\Delta p| = 2mv$.

3. A. È il teorema dell'impulso, $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p}$. La variazione dell'energia cinetica è data dal lavoro (che è la risposta C).

4. D. $K = p^2/(2m)$: a parità di p, l'energia cinetica è inversamente proporzionale alla massa.

5. B. La variazione della quantità di moto è fissata dalla velocità iniziale; allungando Δt la forza media $\Delta p/\Delta t$ diminuisce. Un rimbalzo, al contrario, aumenterebbe Δp.

6. C. Le forze interne non cambiano la quantità di moto totale (si annullano a coppie per il terzo principio); serve che la risultante delle forze esterne sia nulla. L'energia cinetica può cambiare anche quando $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ si conserva.

7. A. Quantità di moto uguali e opposte: $40\ v_1 = 60\ v_2$, quindi $v_1/v_2 = 60/40 = 3/2$.

8. D. Lungo l'orizzontale non agiscono forze esterne; lungo la verticale le rotaie esercitano un forte impulso verso l'alto (forza esterna), che fornisce al proiettile la sua quantità di moto verticale.

9. V. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ con $m > 0$: il vettore è un multiplo positivo della velocità.

10. F. $p = \sqrt{(2mK)}$ dipende anche dalla massa; e anche con le stesse masse le quantità di moto possono avere direzioni diverse.

11. V. Si presentano in coppie di azione e reazione, i cui impulsi sono uguali e opposti e si annullano a due a due.

12. F. Il razzo spinge i gas di scarico all'indietro e i gas spingono il razzo in avanti; la quantità di moto totale del sistema razzo più gas resta costante.

13. F. Resta costante la quantità di moto totale; quella dei singoli corpi cambia per effetto delle forze interne (per esempio due pattinatori che si spingono).

14. 90 km/h = 25 m/s; $p = mv = 1200\text{ kg} \times 25\text{ m/s} = 3{,}0 \times 10^4$ kg·m/s.

15. $I = F_{\text{m}}\Delta t = 1{,}5 \times 10^3\text{ N} \times 2{,}0 \times 10^{-3}\text{ s} = 3{,}0$ N·s.

16. 1 N·s = 1 kg·m/s, perché 1 N = 1 kg·m/s^2 e (kg·m/s^2)·s = kg·m/s.

17. Con il verso positivo a destra: $p_{\text{tot}} = 2{,}0\text{ kg} \times 3{,}0\text{ m/s} + 3{,}0\text{ kg} \times (-1{,}5\text{ m/s}) = 6{,}0 - 4{,}5 = 1{,}5$ kg·m/s, verso destra.

18. Asse verso il muro: $\Delta p = 0{,}45\text{ kg} \times (-9{,}0\text{ m/s}) - 0{,}45\text{ kg} \times 12\text{ m/s} = -9{,}45$ kg·m/s, modulo ≈ 9,5 kg·m/s, diretta verso l'esterno del muro. $F_{\text{m}} = 9{,}45\text{ kg·m/s} / 0{,}020\text{ s} \approx 4{,}7 \times 10^2$ N.

19. a) Arresto rigido: $\Delta t = 0{,}020$ s, $F_{\text{max}} = 30$ kN; arresto morbido: $\Delta t = 0{,}20$ s, $F_{\text{max}} = 3{,}0$ kN. b) $\frac{1}{2} \times 30 \times 10^3\text{ N} \times 0{,}020\text{ s} = 300$ N·s e $\frac{1}{2} \times 3{,}0 \times 10^3\text{ N} \times 0{,}20\text{ s} = 300$ N·s. c) $F_{\text{m}} = 300\text{ N·s} / 0{,}020\text{ s} = 1{,}5 \times 10^4$ N e 300 N·s / 0,20 s $= 1{,}5 \times 10^3$ N: la forza media è metà del picco.

20. Quantità di moto totale nulla prima e dopo lo sparo (approssimazione impulsiva): $v_{\text{f}} = m_{\text{p}}v_{\text{p}}/m_{\text{f}} = 0{,}012\text{ kg} \times 750\text{ m/s} / 3{,}2\text{ kg} \approx 2{,}8$ m/s, in verso opposto al proiettile.

21. $p = \sqrt{(2mK)} = \sqrt{(2 \times 0{,}145\text{ kg} \times 120\text{ J})} = \sqrt{(34{,}8)}$ kg·m/s ≈ 5,9 kg·m/s.

22. Si trascura la resistenza dell'aria. a) Nella caduta lavora solo il peso e l'energia meccanica si conserva: $v = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8\text{ m/s}^2 \times 1{,}2\text{ m})} \approx 4{,}85\text{ m/s} \approx 4{,}8$ m/s. b) Teorema dell'impulso per la forza risultante, asse verso l'alto: $I = \Delta p = 0 - (-65\text{ kg} \times 4{,}85\text{ m/s}) \approx 315$ N·s $\approx 3{,}2 \times 10^2$ N·s verso l'alto. c) Sulla ragazza agiscono il peso e la forza del suolo: $(F - mg)\Delta t = \Delta p$, quindi $F = 315\text{ N·s} / 0{,}25\text{ s} + 65\text{ kg} \times 9{,}8\text{ m/s}^2 \approx 1261\text{ N} + 637\text{ N} \approx 1{,}9 \times 10^3$ N, circa tre volte il peso (637 N). d) $F = 315/0{,}025\text{ N} + 637\text{ N} \approx 1{,}3 \times 10^4$ N, circa venti volte

il peso: dieci volte più breve l'arresto, quasi sette volte più grande la forza del suolo (il peso pesa sempre meno nel conto).

23. a) Asse nel verso di ritorno: $\Delta p = 0{,}057\ \text{kg} \times 40\ \text{m/s} - 0{,}057\ \text{kg} \times (-30\ \text{m/s}) = 0{,}057\ \text{kg} \times 70\ \text{m/s} \approx 4{,}0\ \text{kg·m/s}$. b) $F_m = 3{,}99\ \text{kg·m/s} / 0{,}0050\ \text{s} \approx 8{,}0 \times 10^2\ \text{N}$. c) Peso: $0{,}057\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \approx 0{,}56\ \text{N}$; rapporto $\approx 1{,}4 \times 10^3$: durante il contatto il peso è trascurabile.

24. a) Asse x lungo la normale, verso l'esterno della sponda; asse y parallelo alla sponda. La componente y, mv sen 60°, non cambia; la componente x passa da $-mv$ cos 60° a $+mv$ cos 60°: $\Delta p = 2mv \cos 60° = 2 \times 0{,}17\ \text{kg} \times 12\ \text{m/s} \times 0{,}50 \approx 2{,}0\ \text{kg·m/s}$, perpendicolare alla sponda, verso l'interno della pista. b) $F_m = 2{,}04\ \text{kg·m/s} / 0{,}015\ \text{s} \approx 1{,}4 \times 10^2\ \text{N}$, perpendicolare alla sponda. c) Senza attrito la sponda può esercitare solo una reazione normale: per il teorema dell'impulso, allora, la componente parallela della quantità di moto non può cambiare, e infatti l'angolo di uscita è uguale a quello di arrivo.

25. Sistema ragazzo più barca; durante il tuffo le forze esterne orizzontali sono trascurabili e la componente orizzontale della quantità di moto totale, nulla, si conserva. Tutte le velocità vanno espresse nello stesso sistema inerziale, l'acqua. Composizione delle velocità: $v_r = v' + V_b = 3{,}0\ \text{m/s} + V_b$. Conservazione: $60\ \text{kg} \times (3{,}0\ \text{m/s} + V_b) + 140\ \text{kg} \times V_b = 0$, da cui $200\ \text{kg} \times V_b = -180\ \text{kg·m/s}$ e $V_b = -0{,}90\ \text{m/s}$. Il ragazzo si muove a $v_r = 3{,}0 - 0{,}90 = 2{,}1\ \text{m/s}$ nel verso del tuffo, la barca a 0,90 m/s nel verso opposto. Controllo: $60 \times 2{,}1 = 126 = 140 \times 0{,}90\ \text{kg·m/s}$.

26. a) Il sistema è isolato lungo il piano (peso equilibrato dalla reazione normale, nessun attrito) e la quantità di moto totale resta nulla. Massa del terzo frammento: $2{,}4 - 0{,}60 - 0{,}80 = 1{,}0\ \text{kg}$. $\boldsymbol{p}_1 = (24; 0)\ \text{kg·m/s}$, $\boldsymbol{p}_2 = (0; 24)\ \text{kg·m/s}$, quindi $\boldsymbol{p}_3 = (-24; -24)\ \text{kg·m/s}$, modulo $24\sqrt{2} \approx 33{,}9\ \text{kg·m/s}$: $v_3 \approx 34\ \text{m/s}$, diretta verso sud-ovest (45° fra sud e ovest). b) $K = \frac{1}{2} \times 0{,}60 \times 40^2\ \text{J} + \frac{1}{2} \times 0{,}80 \times 30^2\ \text{J} + \frac{1}{2} \times 1{,}0 \times 33{,}9^2\ \text{J} = 480\ \text{J} + 360\ \text{J} + 576\ \text{J} \approx 1{,}4 \times 10^3\ \text{J}$. Prima era zero: viene dall'energia chimica dell'esplosivo (forze interne che compiono lavoro).

27. Si conservano due grandezze. Quantità di moto (sistema isolato lungo la rotaia): $0{,}40\ v_1 = 0{,}60\ v_2$, cioè $v_1 = 1{,}5\ v_2$ (versi opposti). Energia (la molla è una forza interna conservativa, nessun attrito): $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 800\ \text{N/m} \times (0{,}040\ \text{m})^2 = 0{,}64\ \text{J} = \frac{1}{2} \times 0{,}40 \times v_1^2 + \frac{1}{2} \times 0{,}60 \times v_2^2 = (0{,}45 + 0{,}30)\ \text{kg} \times v_2^2$. Quindi $v_2 = \sqrt{(0{,}64/0{,}75)}\ \text{m/s} \approx 0{,}92\ \text{m/s}$ e $v_1 = 1{,}5 \times 0{,}924\ \text{m/s} \approx 1{,}4\ \text{m/s}$, in versi opposti.

28. a) Ogni secondo 15 kg di sabbia passano da velocità orizzontale nulla a 2,0 m/s: $\Delta p/\Delta t = 15\ \text{kg/s} \times 2{,}0\ \text{m/s} = 30\ \text{N}$, che per il secondo principio nella forma di Newton è la forza orizzontale sulla sabbia (e quella che il motore deve fornire al nastro). b) $P = Fv = 30\ \text{N} \times 2{,}0\ \text{m/s} = 60\ \text{W}$. c) $\Delta K/\Delta t = \frac{1}{2} \times 15\ \text{kg/s} \times (2{,}0\ \text{m/s})^2 = 30\ \text{W}$: solo metà della potenza diventa energia cinetica. L'altra metà è dissipata dall'attrito fra la sabbia e il nastro mentre la sabbia, appena caduta, scivola finché raggiunge la velocità del nastro: diventa energia interna.

29. a) Approssimazione impulsiva: $V = 5{,}0\ \text{kg} \times 300\ \text{m/s} / 800\ \text{kg} \approx 1{,}9\ \text{m/s}$ (1,875 m/s). b) Dopo lo sparo agiscono sul cannone il peso, la reazione normale e l'attrito dinamico $\mu_d mg$. Per il teorema dell'energia cinetica (o $W_{nc} = \Delta E$, capitolo 5): $\mu_d mgd = \frac{1}{2}mV^2$, $d = V^2/(2\mu_d g) = (1{,}875\ \text{m/s})^2/(2 \times 0{,}40 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 0{,}45\ \text{m}$. c) Lo sparo dura pochi millesimi di secondo: in quel tempo l'impulso dell'attrito è trascurabile rispetto a quello, enorme, dei gas. La frenata invece dura circa mezzo secondo ($V/(\mu_d g) \approx 0{,}48\ \text{s}$) e l'attrito è l'unica forza orizzontale.

30. Traccia di risposta: in entrambi i casi la velocità d'arrivo, e quindi la variazione della quantità di moto da fermare, è la stessa (dipende solo dall'altezza). Il materasso si deforma e prolunga la durata dell'arresto; poiché $F_m = \Delta p/\Delta t$ (più il peso), la forza media sul corpo è molto minore. Inoltre il materasso distribuisce la forza su una superficie più ampia.

31. Traccia di risposta: in un'ora cade sull'ombrello un volume d'acqua di $1\ \text{m}^2 \times 0{,}010\ \text{m} = 0{,}010\ \text{m}^3$, cioè 10 kg; per secondo, $10\ \text{kg} / 3600\ \text{s} \approx 2{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg/s}$. Ogni secondo l'ombrello ferma una quantità di moto di $2{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg/s} \times 9\ \text{m/s} \approx 0{,}025\ \text{kg·m/s}$, quindi la forza media è circa 0,03 N: il peso di circa 3 g, una moneta piccola. La pioggia non pesa sull'ombrello per l'urto, ma semmai per l'acqua che vi si accumula (se non scivola via).

32. L'errore è aver sottratto i moduli invece delle componenti con il segno: le due velocità hanno versi opposti. Con l'asse verso il muro: $\Delta p = 0{,}050 \times (-10) - 0{,}050 \times 10 = -1{,}0$ kg·m/s; il modulo è 1,0 kg·m/s, diretto verso l'esterno del muro. Il muro esercita una forza media diversa da zero, pari a 1,0 kg·m/s divisa per la durata del contatto.

33. Traccia di risposta: un carrello di massa nota (bilancia) con un respingente elastico corre su una rotaia a basso attrito verso un sensore di forza fissato in fondo, collegato a un sistema di acquisizione (almeno 1000 campioni al secondo). Due fotocellule, prima del sensore, misurano la velocità di arrivo e quella di ritorno con una bandierina di larghezza nota: $\Delta p = m(v_f - v_i)$, con le velocità prese con il segno. Dal grafico forza-tempo registrato si calcola l'impulso come area sotto la curva (somma dei campioni per l'intervallo di campionamento). Si confrontano I e Δp con le loro incertezze e si verifica che siano compatibili; si ripete con velocità e respingenti diversi (più rigido, più morbido): l'area resta legata a Δp, mentre picco e durata cambiano. Fonti di errore: attrito sulla rotaia fra fotocellule e sensore, taratura e deriva dello zero del sensore, campionamento troppo lento per un urto rigido, rotaia non orizzontale.