CAPITOLO

5

Lavoro ed energia: forze conservative e dissipative

Il peso non ricorda la strada che hai fatto; l'attrito sì.

OBIETTIVI

1. Scrivere il lavoro come prodotto scalare e calcolarlo lungo un percorso curvo e per una forza variabile.
2. Dimostrare che il peso e la forza elastica sono conservativi e riconoscere perché l'attrito non lo è.
3. Definire l'energia potenziale per una forza conservativa qualsiasi e leggere il moto su un diagramma dell'energia potenziale.
4. Riconoscere equilibri stabili, instabili e indifferenti, punti di inversione, buche e barriere di potenziale.
5. Risolvere problemi in più tappe con il bilancio energetico in presenza di forze dissipative.
6. Calcolare la potenza istantanea di una forza e il rendimento di una catena di conversioni; misurare in laboratorio l'energia dissipata.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Ripartiamo da lavoro ed energia 2
5.2 Il lavoro come prodotto scalare 2
5.3 Forze conservative ed energia potenziale 5
5.4 I diagrammi dell'energia potenziale 8
5.5 L'energia quando agiscono forze dissipative 11
5.6 La potenza 14

Fisica 3 · Parte II · Le leggi di conservazione · versione 1.0
Capitolo 5: Lavoro ed energia: forze conservative e dissipative · pagine 131–154 del volume completo · estratto per lo studio

Una sciatrice parte da ferma in cima a una pista. Se agissero soltanto il peso e la reazione della neve, la sua velocità in fondo dipenderebbe solo dal dislivello; ma la velocità misurata è minore: la neve e l'aria hanno sottratto energia meccanica. Quanta, e dove è finita? Per rispondere servono il lavoro scritto come prodotto scalare, una definizione rigorosa di forza conservativa e di energia potenziale, i grafici dell'energia potenziale, da cui si legge il moto senza risolvere le equazioni della dinamica, e il bilancio dell'energia in presenza di attriti.

5.1 Ripartiamo da lavoro ed energia

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 2*, capitoli 8–10) hai incontrato le grandezze che ora renderemo più precise. Il lavoro di una forza costante F lungo uno spostamento rettilineo s è $W = Fs\cos\alpha$, dove α è l'angolo fra forza e spostamento: si misura in joule, è positivo se la forza aiuta il moto, negativo se lo ostacola, nullo se è perpendicolare allo spostamento. Il lavoro di una forza variabile è l'area sotto il grafico forza–spostamento.

Il teorema dell'energia cinetica lega il lavoro totale di tutte le forze alla variazione dell'energia cinetica $K = \tfrac{1}{2}mv^2$: $W_{\text{tot}} = \Delta K$. Per le forze conservative, come il peso e la forza elastica, hai definito un'energia potenziale: $U = mgh$ e $U = \tfrac{1}{2}kx^2$. La somma $E = K + U$ è l'energia meccanica, che si conserva quando compiono lavoro soltanto forze conservative. Quando agiscono anche forze non conservative, come l'attrito, vale $W_{\text{nc}} = \Delta E$: il loro lavoro è uguale alla variazione dell'energia meccanica, e l'energia meccanica sottratta diventa energia interna dei corpi, che si scaldano.

5.2 Il lavoro come prodotto scalare

5.2.1 Una definizione che non ha bisogno dell'angolo

La formula $W = Fs\cos\alpha$ contiene i moduli dei due vettori e il coseno dell'angolo fra loro: è il prodotto scalare del capitolo 1. La definizione di lavoro di una forza costante $\boldsymbol{F}$ lungo uno spostamento rettilineo $\Delta\boldsymbol{r}$ si scrive quindi in forma vettoriale ($\Delta\boldsymbol{r}$ è lo spostamento del punto di applicazione della forza):

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = F\,|\Delta\boldsymbol{r}|\cos\theta = F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y$$

La definizione è la stessa dello scorso anno, ma con le componenti non serve calcolare l'angolo, e il segno del lavoro esce da solo dal calcolo. Se il vento spinge una barca con la forza $\boldsymbol{F} = (120\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j})$ N mentre la barca si sposta di $\Delta\boldsymbol{r} = (40\,\mathbf{i} - 30\,\mathbf{j})$ m, il lavoro del vento è

$$W = 120\ \text{N} \times 40\ \text{m} + 50\ \text{N} \times (-30\ \text{m}) = 4800\ \text{J} - 1500\ \text{J} = 3{,}3 \times 10^3\ \text{J}$$

Il secondo termine è negativo perché le componenti y di forza e spostamento hanno verso opposto. Controllo con i moduli: $F = 130$ N, $|\Delta \boldsymbol{r}| = 50$ m, $\cos\theta = 3300/(130 \times 50) \approx 0{,}51$, $\theta \approx 59°$: un angolo acuto, come deve essere per un lavoro positivo. La proprietà distributiva del prodotto scalare dice anche che il lavoro della risultante è la somma dei lavori delle singole forze.

5.2.2 Il lavoro lungo un percorso curvo

Se il corpo percorre una curva, o se la forza cambia lungo il cammino, si usa l'idea che nel capitolo 1 ha portato dalla velocità media a quella istantanea: si divide il percorso in tratti così brevi che ciascuno sia praticamente rettilineo e che lungo ciascuno la forza sia praticamente costante. Uno di questi tratti è uno **spostamento elementare** $\Delta \boldsymbol{r}_i$ (Figura 5.1), e il lavoro lungo di esso, il **lavoro elementare**, è

$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i$$

Il lavoro totale da A a B è la somma dei lavori elementari: $W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots$ Più i tratti sono brevi, più la somma si avvicina al valore esatto; al quinto anno, con l'analisi matematica, diventerà un integrale. Per ora è un procedimento di calcolo e, soprattutto, uno strumento di ragionamento.

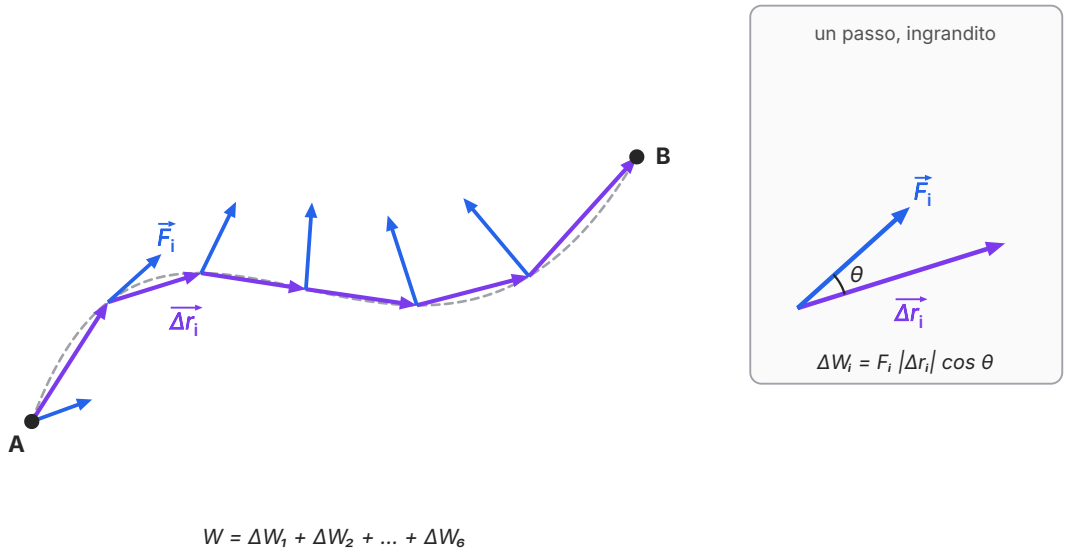

Figura 5.1 Il lavoro lungo un percorso curvo come somma di passi. Il cammino da A a B è diviso in sei spostamenti elementari $\Delta \boldsymbol{r}_i$ (in viola); la forza $\boldsymbol{F}_i$ (in blu) cambia modulo e direzione lungo il cammino, ma in ogni tratto breve si può considerare costante. Riquadro: in un passo il lavoro elementare è il prodotto scalare $\boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i$.

5.2.3 Il lavoro di una forza variabile, rivisto

Se il moto avviene lungo una retta, la somma dei lavori elementari ha un'interpretazione grafica che conosci: è l'area compresa fra il grafico della componente F_s della forza lungo lo spostamento e l'asse delle posizioni, contata positiva sopra l'asse e negativa sotto. Ora possiamo dire perché: ogni lavoro elementare $F_s \Delta s$ è l'area di un rettangolino alto F_s e largo Δs, positivo o negativo a seconda del segno di F_s.

Applichiamolo alla molla, la cui forza sul corpo attaccato all'estremo è $F_x = -kx$. Lo scorso anno hai calcolato il lavoro per deformarla a partire dalla lunghezza a riposo; ora calcoliamo il **lavoro della forza elastica** quando la deformazione passa da un valore qualsiasi x_A a un valore qualsiasi x_B. L'area sotto la retta $F_x = -kx$ è un trapezio, e il risultato è

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_A^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_B^{\,2}$$

Se la molla torna verso la lunghezza a riposo il lavoro è positivo; se si deforma ancora di più, è negativo. Con $k = 200$ N/m, quando l'allungamento passa da 10 cm a 4,0 cm, $W_{el} = \tfrac{1}{2} \times 200\ \text{N/m} \times [(0{,}10\ \text{m})^2 - (0{,}040\ \text{m})^2] = 0{,}84$ J. Il risultato dipende solo dalle deformazioni iniziale e finale: è il primo indizio che la forza elastica è conservativa.

ESEMPIO SVOLTO

Il lavoro letto su un grafico a tratti

Problema. Un carrello di 4,0 kg, inizialmente fermo, si muove su una rotaia orizzontale senza attrito, spinto da un motorino la cui forza varia con la posizione come nella Figura 5.2. a) Calcola il lavoro totale della forza da 0 a 8,0 m. b) Calcola la velocità del carrello a 8,0 m. c) In quale posizione il carrello è più veloce, e quanto vale la velocità massima?

Soluzione. Peso e reazione della rotaia sono perpendicolari allo spostamento e non compiono lavoro: il lavoro totale è quello del motorino. a) Scomponiamo l'area in figure semplici: da 0 a 2,0 m un triangolo, $\tfrac{1}{2} \times 2{,}0\ \text{m} \times 30\ \text{N} = 30$ J; da 2,0 m a 5,0 m un rettangolo, $3{,}0\ \text{m} \times 30\ \text{N} = 90$ J. Da 5,0 m a 7,0 m la forza scende di 20 N ogni metro e si annulla a 6,5 m: triangolo positivo $\tfrac{1}{2} \times 1{,}5\ \text{m} \times 30\ \text{N} = 22{,}5$ J e triangolo negativo $-\tfrac{1}{2} \times 0{,}5\ \text{m} \times 10\ \text{N} = -2{,}5$ J. Da 7,0 m a 8,0 m: $-10\ \text{N} \times 1{,}0\ \text{m} = -10$ J. Totale: $W = 130$ J.

b) Teorema dell'energia cinetica, partendo da fermo: $v = \sqrt{(2 \times 130\ \text{J} / 4{,}0\ \text{kg})} \approx 8{,}1$ m/s. c) Il carrello accelera finché la forza è positiva e rallenta dopo: la velocità è massima a 6,5 m, dove il lavoro è 142,5 J e $v_{max} = \sqrt{(2 \times 142{,}5\ \text{J} / 4{,}0\ \text{kg})} \approx 8{,}4$ m/s.

Controllo. $\sqrt{(\text{J/kg})} = \text{m/s}$. La velocità finale è minore della massima, coerente con l'area negativa dopo 6,5 m.

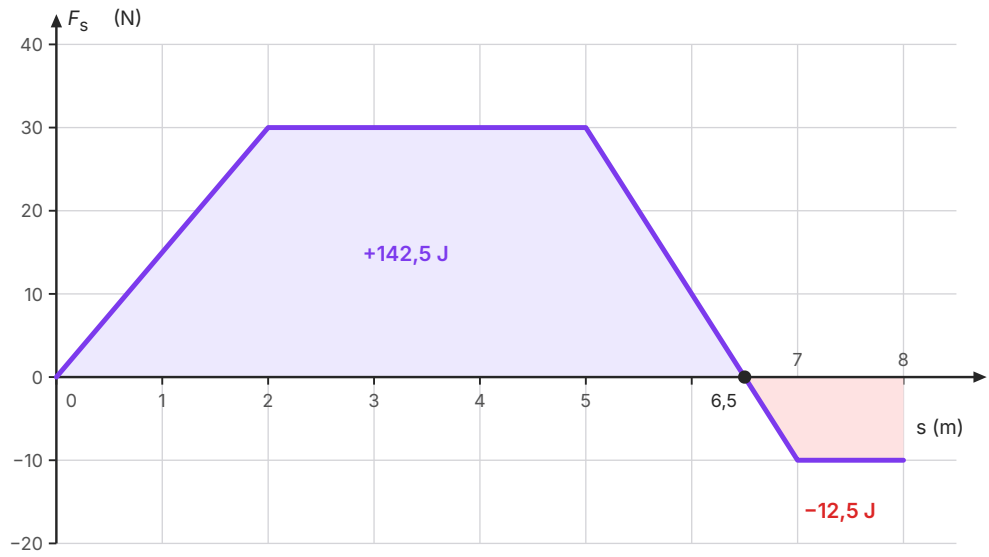

Figura 5.2 Forza del motorino sul carrello dell'esempio svolto in funzione della posizione. L'area in viola, sopra l'asse, vale +142,5 J; l'area in rosso, sotto l'asse dopo 6,5 m, vale −12,5 J. Il lavoro totale da 0 a 8,0 m è la somma con segno: 130 J.

5.3 Forze conservative ed energia potenziale

5.3.1 Due definizioni equivalenti

Lo scorso anno hai chiamato conservativa una forza il cui lavoro per andare da un punto A a un punto B non dipende dal percorso, e hai osservato che allora il suo lavoro su un percorso chiuso è nullo. Le due proprietà sono equivalenti, e ora possiamo dimostrarlo.

Supponiamo che il lavoro da A a B non dipenda dal percorso, e prendiamo un percorso chiuso formato da un'andata da A a B lungo una strada 1 e da un ritorno lungo una strada 2. Percorrere la strada 2 al contrario cambia il segno di ogni lavoro elementare, quindi il lavoro sul percorso chiuso è $W_{A\to B,\,1} - W_{A\to B,\,2} = 0$. Il ragionamento vale anche all'indietro: se il lavoro su ogni percorso chiuso è nullo, i lavori da A a B lungo due strade qualsiasi sono uguali.

Il ragionamento richiede che in ogni punto la forza sia la stessa all'andata e al ritorno. Una forza che dipende soltanto dalla posizione del corpo, e non dalla sua velocità né dal tempo, si chiama **forza posizionale**. Il peso e la forza elastica lo sono; l'attrito dinamico no, perché il suo verso dipende da quello della velocità. Tutte le forze conservative sono posizionali.

ESEMPIO SVOLTO

Il lavoro del peso lungo un percorso qualsiasi

Problema. Dimostra che il lavoro del peso su un corpo che va da A, alla quota y_A, a B, alla quota y_B, è $W = -mg(y_B - y_A)$ lungo *qualunque* percorso, anche curvo, e quindi che il peso è una forza conservativa.

Passo 1: il peso in componenti. Con l'asse y verticale verso l'alto e l'asse x orizzontale, il peso è un vettore costante: mg diretto verso il basso, cioè $-mg\,\mathbf{j}$, con componenti $(0; -mg)$.

Passo 2: un passo qualsiasi. Dividiamo il percorso in spostamenti elementari $\Delta\boldsymbol{r}_i = \Delta x_i\,\mathbf{i} + \Delta y_i\,\mathbf{j}$. Il lavoro elementare è il prodotto scalare in componenti: $\Delta W_i = 0 \times \Delta x_i + (-mg) \times \Delta y_i = -mg\,\Delta y_i$. Lo spostamento orizzontale non conta; conta solo la variazione di quota del passo, con il suo segno (Figura 5.3a).

Passo 3: la somma. $W = -mg(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots)$. La somma delle variazioni di quota di tutti i passi è la variazione di quota complessiva, $y_B - y_A$, qualunque sia il numero dei passi e qualunque sia la loro forma: le salite e le discese intermedie si compensano. Quindi

$$W_{\text{peso}} = -mg(y_B - y_A)$$

Passo 4: la conclusione. Il risultato dipende solo dalle quote dei punti di partenza e di arrivo, non dal percorso: il peso è conservativo. Su un percorso chiuso $y_B = y_A$ e il lavoro è nullo.

Controllo. Si è usato soltanto il fatto che il peso è un vettore costante: il risultato vale per qualsiasi forza costante. Lontano dalla Terra il peso non è costante, e nel capitolo 13 servirà un'altra energia potenziale.

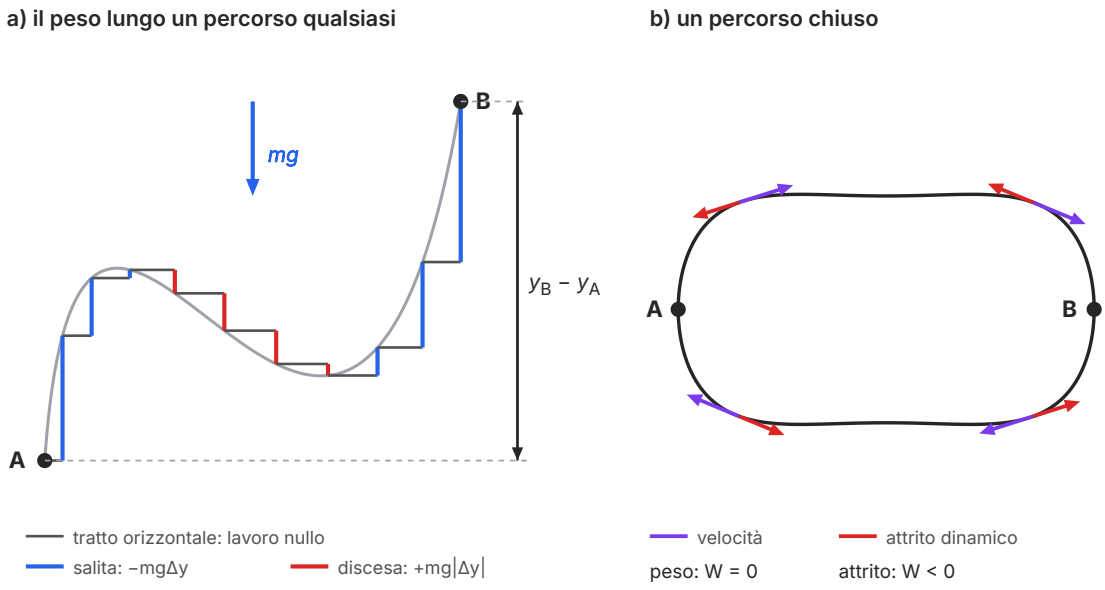

Figura 5.3 a) Il percorso curvo da A a B approssimato da una scala: sui tratti orizzontali il peso non compie lavoro, su quelli verticali compie $-mg\Delta y$ (positivo in discesa, in rosso; negativo in salita, in blu). b) Su un percorso chiuso il lavoro del peso è nullo; l'attrito dinamico è sempre opposto alla velocità e il suo lavoro è negativo.

5.3.2 La forza elastica e l'attrito

Per la forza elastica, in una dimensione, il risultato del paragrafo precedente, $W_{el} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$, dipende soltanto dalle deformazioni iniziale e finale: se la molla si allunga e poi torna indietro, i lavori elementari dell'andata e del ritorno si cancellano a due a due. Anche la forza elastica è conservativa.

L'attrito dinamico è il controesempio tipico (Figura 5.3b). Su un piano orizzontale il suo modulo è $\mu_d mg$, ma il verso è sempre opposto alla velocità: ogni lavoro elementare è negativo, e il lavoro totale è $-\mu_d mgd$, con d la lunghezza del cammino. Facendo un giro largo se ne spende di più che andando dritti, e su un percorso chiuso il lavoro non è nullo. Lo stesso vale per la resistenza dell'aria e dei liquidi.

5.3.3 L'energia potenziale come funzione della posizione

Ora possiamo dare la definizione generale di energia potenziale, che aggiorna quella dello scorso anno. Per una forza conservativa il lavoro da A a B dipende solo dai due punti; allora si può associare a ogni punto un numero, l'energia potenziale U, in modo che il lavoro sia la differenza fra il valore di partenza e quello di arrivo:

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -\Delta U$$

Si sceglie un punto di riferimento O in cui $U = 0$ (il livello di zero dello scorso anno) e si definisce l'energia potenziale di un punto P come il lavoro della forza quando il corpo va da P a O. Cambiare il riferimento aggiunge la stessa costante a tutti i valori di U, e la costante si cancella in ogni differenza: solo ΔU ha significato fisico. Dal lavoro del peso si ritrova $U = mgy$; da quello della forza elastica $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Se il lavoro dipendesse dal percorso, il «lavoro da P a O» non sarebbe un numero ben definito: **l'energia potenziale esiste soltanto per le forze conservative**. Da qui segue la conservazione dell'energia meccanica: se compiono lavoro solo forze conservative, $\Delta K = W_{tot} = -\Delta U$, cioè $\Delta(K + U) = 0$.

DA RICORDARE

Forza conservativa. Il lavoro da A a B non dipende dal percorso ⇔ il lavoro su ogni percorso chiuso è nullo. Peso e forza elastica sono conservativi; attrito e resistenza del mezzo no.

Energia potenziale. È definita solo per le forze conservative, dalla relazione $W_{A\to B} = U_A - U_B$: quando la forza compie lavoro positivo, l'energia potenziale diminuisce. Il valore di U dipende dal riferimento; le sue variazioni no.

5.4 I diagrammi dell'energia potenziale

5.4.1 Leggere il moto su un grafico

Consideriamo un corpo che si muove lungo una retta, l'asse x, soggetto a una forza conservativa con energia potenziale $U(x)$, e supponiamo che le altre forze non compiano lavoro. Il grafico di U in funzione della posizione si chiama **diagramma dell'energia potenziale** (Figura 5.4). Poiché l'energia meccanica E è costante, la disegniamo come una retta orizzontale, alla quota E, sullo stesso grafico. In ogni posizione, la distanza verticale fra la retta e la curva è l'energia cinetica:

$$K(x) = E - U(x)$$

Poiché K non può essere negativa, il corpo può trovarsi solo dove $U(x) \le E$: è la **regione accessibile**. Dove $U > E$ c'è la **regione proibita**, in cui il corpo non può entrare. Dove la retta taglia la curva, $U = E$ e la velocità è nulla: sono i punti di inversione, in cui il corpo si ferma e torna indietro. Il corpo è più veloce dove U è minima.

Per un carrello delle montagne russe senza attriti $U = mgh$, e il diagramma ha la forma del profilo della pista; la velocità che si legge è quella lungo la pista.

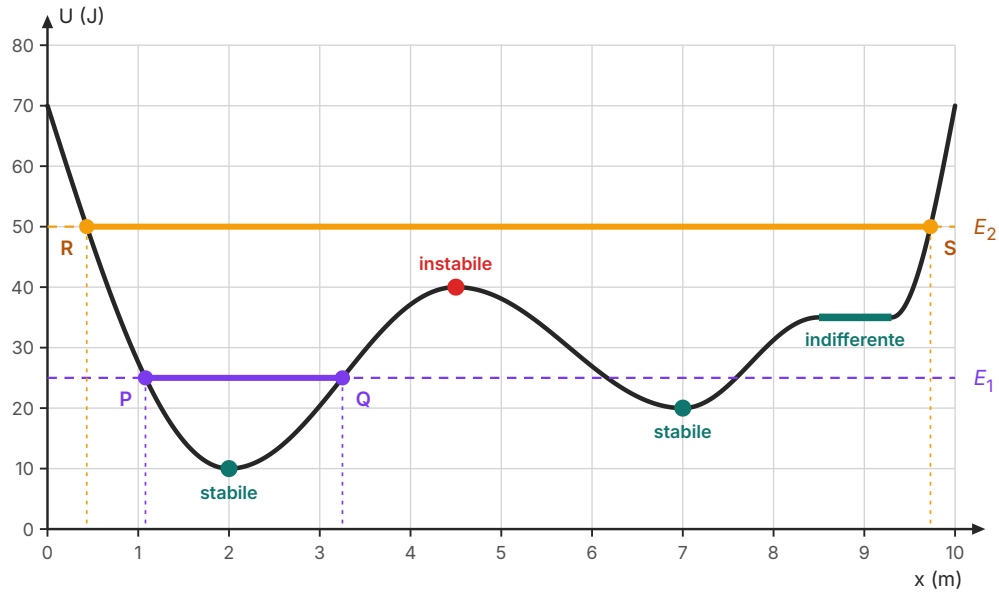

Figura 5.4 Diagramma dell'energia potenziale $U(x)$ di un corpo che si muove lungo l'asse x (curva calcolata da un modello). Con E_1 = 25 J il corpo oscilla nella buca di sinistra fra i punti di inversione P (≈ 1,1 m) e Q (3,25 m); con E_2 = 50 J supera la barriera e oscilla fra R (≈ 0,4 m) e S (≈ 9,7 m). In verde gli equilibri stabili e il tratto di equilibrio indifferente, in rosso l'equilibrio instabile.

5.4.2 La forza è la pendenza, cambiata di segno

Il diagramma contiene anche la forza. Per uno spostamento piccolo Δx, il lavoro della forza è $F_x \Delta x$ e, per la definizione di energia potenziale, è uguale a $-\Delta U$. Quindi

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \qquad (\Delta x \to 0)$$

Al limite, $\Delta U/\Delta x$ è la pendenza della tangente alla curva $U(x)$, come la velocità istantanea è la pendenza della tangente al grafico posizione–tempo (capitolo 1). Quindi **la forza spinge sempre il corpo verso le energie potenziali più basse**, ed è tanto più intensa quanto più il grafico è ripido. Per la molla, la parabola $U = \tfrac{1}{2}kx^2$ ha in x pendenza kx (lo verificherai in matematica), e la forza è proprio $-kx$.

5.4.3 L'equilibrio visto con l'energia

Dove la tangente al grafico è orizzontale la forza è nulla: sono le posizioni di equilibrio. Il diagramma dice anche di che tipo di equilibrio si tratta, e aggiorna la classificazione che hai imparato nel primo volume per i corpi appoggiati e sospesi.

In un **minimo** di U l'equilibrio è stabile: spostato da una parte o dall'altra, il corpo sente una forza che lo riporta indietro. In un **massimo** è instabile: un piccolo spostamento produce una forza che lo allontana ancora di più. In un tratto **piatto** è indifferente. Per un corpo appoggiato o sospeso $U = mgh$, con h quota del baricentro: «baricentro più basso possibile» significa «minimo di U», e il criterio del primo volume è un caso particolare di questo.

Intorno a un minimo, ogni curva liscia somiglia a una parabola: per questo le piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile sono, con buona approssimazione, armoniche, come quelle della massa sulla molla e del pendolo che hai studiato nel capitolo 4.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> «Nel punto più basso del grafico di U la forza è massima, perché lì il corpo va più veloce». **No.** Nel minimo di U è massima l'energia cinetica, ma la forza è **nulla**, perché la tangente è orizzontale. La forza dipende dalla **pendenza** del grafico, non dal suo valore: nella buca di sinistra della Figura 5.4 la forza è più intensa vicino ai punti di inversione, dove la curva è ripida e il corpo è quasi fermo. È la stessa situazione del pendolo: nel punto più basso è velocissimo, ma la componente del peso lungo la traiettoria è zero.

5.4.4 Buche, barriere e moti limitati

Un minimo di U circondato da valori più alti è una **buca di potenziale**; un massimo che separa due regioni è una **barriera di potenziale**. Un corpo in una buca, con energia minore dei bordi, va avanti e indietro fra due punti di inversione: è un **moto limitato**. Se da un lato la curva scende e non risale più, il corpo può allontanarsi indefinitamente: è un **moto illimitato**.

L'idea tornerà nel capitolo 13 con l'energia potenziale gravitazionale $U(r)$: un satellite in orbita compie un moto limitato, una sonda oltre la velocità di fuga un moto illimitato. In chimica, due atomi legati in una molecola stanno sul fondo di una buca: la distanza di equilibrio è la lunghezza del legame, e per separarli bisogna fornire l'energia che manca per uscire dalla buca.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere un diagramma dell'energia potenziale

Problema. Un corpo di 2,0 kg si muove lungo l'asse x con l'energia potenziale della Figura 5.4; le altre forze non compiono lavoro. a) Individua le posizioni di equilibrio e il loro tipo. b) Con E_1 = 25 J il corpo si trova nella buca di sinistra: fra quali posizioni si muove e qual è la sua velocità massima? c) Qual è l'energia minima per passare dalla buca di sinistra a quella di destra? d) Con E_2 = 50 J, con che velocità il corpo passa sulla barriera e nella buca di destra? e) In quale verso agisce la forza nel punto Q?

Soluzione. a) Tangente orizzontale in x = 2,0 m e 7,0 m (minimi: equilibrio stabile), in 4,5 m (massimo: instabile) e fra 8,5 m e 9,3 m (indifferente). b) La retta E = 25 J taglia la curva in P ≈ 1,1 m e Q = 3,25 m. Nel minimo U = 10 J: K = 15 J e $v = \sqrt{(2 \times 15\ \text{J} / 2{,}0\ \text{kg})} \approx 3{,}9$ m/s. c) Deve superare la barriera di 40 J: serve $E > 40$ J. d) Sulla barriera K = 10 J, $v \approx 3{,}2$ m/s; nel minimo di destra K = 30 J, $v \approx 5{,}5$ m/s; il moto resta limitato fra R ≈ 0,4 m e S ≈ 9,7 m. e) In Q la curva sale verso destra: la forza punta verso le x decrescenti, cioè verso il fondo della buca.

Controllo. In ogni punto $K \geq 0$, e le velocità crescono dove U diminuisce: le risposte sono coerenti con il grafico. Un modello dello stesso tipo descrive un carrello su una pista con due avvallamenti.

5.5 L'energia quando agiscono forze dissipative

5.5.1 Il bilancio in più tappe

Quando sul corpo agiscono anche forze non conservative, il teorema dell'energia cinetica si scrive separando i due tipi di lavoro: $W_c + W_{nc} = \Delta K$. Il lavoro delle forze conservative è $-\Delta U$, quindi

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = \Delta E \quad \text{ovvero} \quad K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f$$

È la relazione dello scorso anno, usata ora come strumento contabile: un **bilancio energetico**, in cui a ogni tappa del moto si elencano le forme di energia presenti e i lavori delle forze non conservative. Conviene fissare i punti in cui il moto cambia carattere (fine della molla, inizio di un tratto scabro, inizio della salita) e scrivere il bilancio tappa per tappa. Per l'attrito dinamico il lavoro è $-\mu_d N d$.

ESEMPIO SVOLTO

●●● Molla, tratto scabro e rampa

Problema. Un blocco di 0,50 kg comprime di 15 cm una molla di costante 800 N/m su un piano orizzontale (Figura 5.5). Lasciato libero, scivola senza attrito fino a un tratto scabro lungo 0,80 m, con $\mu_d = 0{,}25$; poi sale su una rampa liscia. a) Con che velocità il blocco lascia la molla? b) Con che velocità esce dal tratto scabro? c) Fino a che altezza sale sulla rampa? d) Il blocco torna indietro, rimbalza sulla molla e attraversa più volte il tratto scabro. Dove si ferma definitivamente?

Soluzione. Peso e reazione normale non compiono lavoro sul piano orizzontale; la forza della molla è conservativa; nel tratto scabro agisce l'attrito dinamico. a) Tappa A → B, solo forze conservative: $U_{el} = \tfrac{1}{2} \times 800\ \text{N/m} \times (0{,}15\ \text{m})^2 = 9{,}0\ \text{J} = K_B$, quindi $v_B = \sqrt{(2 \times 9{,}0\ \text{J} / 0{,}50\ \text{kg})} = 6{,}0\ \text{m/s}$. b) Tappa B → C: $N = mg$ e $W_{nc} = -\mu_d mgd = -0{,}25 \times 0{,}50\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}80\ \text{m} = -0{,}98\ \text{J}$; $K_C = 8{,}02\ \text{J}$ e $v_C \approx 5{,}7\ \text{m/s}$. c) Tappa C → D, rampa liscia: $mgh = 8{,}02\ \text{J}$, $h = 8{,}02\ \text{J} / (0{,}50\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 1{,}6\ \text{m}$.

d) Ogni attraversamento completo del tratto scabro sottrae 0,98 J. Il blocco si ferma quando l'attrito ha dissipato tutti i 9,0 J, cioè dopo un cammino sul tratto scabro $d_{tot} = 9{,}0\ \text{J} / (0{,}25 \times 0{,}50\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 7{,}35\ \text{m}$: nove attraversamenti completi (7,20 m) più 0,15 m del decimo. Gli attraversamenti dispari vanno verso la rampa, quelli pari verso la molla: il decimo parte dal bordo lato rampa, e il blocco si ferma circa 15 cm dopo quel bordo.

Controllo. J/(N/m) = m^2 e J/N = m. Alla fine i 9,0 J sono tutti energia interna del blocco e del piano (Figura 5.5). Il risultato d) dipende dalla massa: $d_{tot} = kx^2/(2\mu_d mg)$; con un blocco di massa doppia il cammino si dimezza.

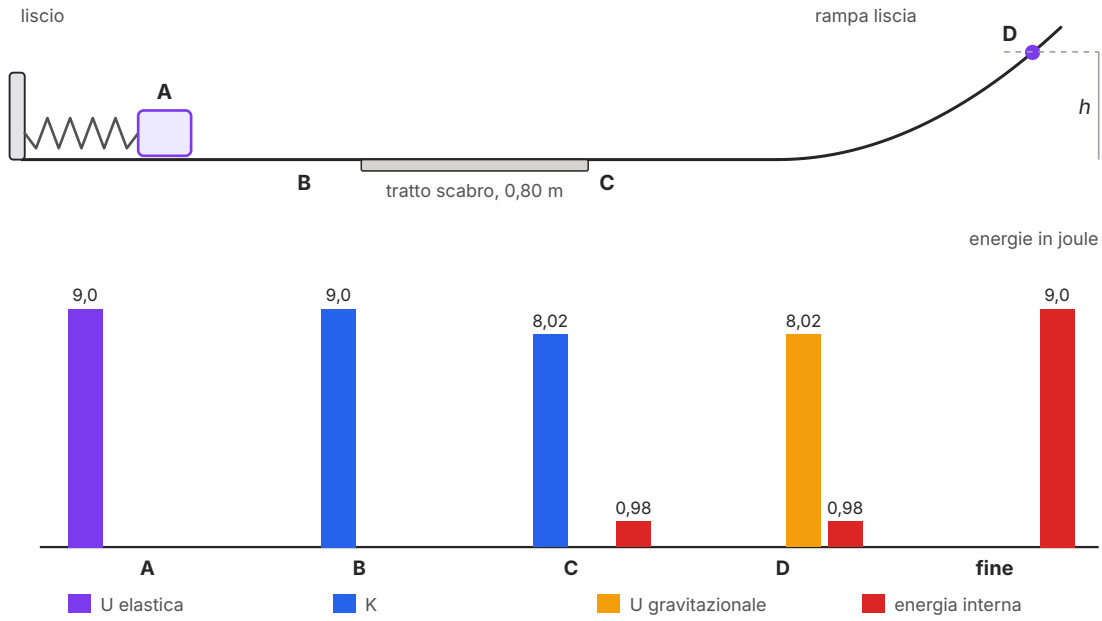

Figura 5.5 Il problema in più tappe dell'esempio svolto (schema non in scala) e il bilancio energetico con diagrammi a barre. A: molla compressa; B: il blocco lascia la molla; C: uscita dal tratto scabro; D: punto più alto sulla rampa liscia; fine: blocco fermo nel tratto scabro. In ogni colonna la somma delle barre è 9,0 J.

5.5.2 Dove va l'energia: un esempio dai dati

L'energia meccanica sottratta dalle forze dissipative diventa energia interna dei corpi coinvolti, che si scaldano: per l'attrito dinamico su una superficie ferma, l'energia interna del corpo e della superficie aumenta di $\mu_d N d$. Includendo l'energia interna, l'energia totale si conserva sempre; nel volume del quarto anno questo diventerà il primo principio della termodinamica. Il bilancio permette anche il percorso inverso: dai dati del moto si risale alle forze dissipative.

ESEMPIO SVOLTO

La resistenza dell'aria su una sciatrice

Problema. Una sciatrice di 70 kg (attrezzatura compresa) scende senza spingersi lungo un tratto rettilineo lungo 400 m con un dislivello di 80 m; la sua velocità passa da 10 m/s a 25 m/s (dati ipotetici, ma realistici). Il coefficiente di attrito dinamico sci–neve è circa 0,05 (valore indicativo). a) Quanta energia meccanica è stata dissipata? b) Quanta ne ha dissipata la neve? c) Stima la forza media di resistenza dell'aria.

Soluzione. Sulla sciatrice agiscono il peso, la reazione normale, l'attrito della neve e la resistenza dell'aria. a) $\Delta K = \tfrac{1}{2} \times 70\ \text{kg} \times [(25\ \text{m/s})^2 - (10\ \text{m/s})^2] = 18\,375\ \text{J}$; $\Delta U = -70\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 80\ \text{m} = -54\,880\ \text{J}$; $\Delta E \approx -3{,}65 \times 10^4\ \text{J}$. b) $\operatorname{sen}\,\alpha = 80/400 = 0{,}20$, $\cos\alpha \approx 0{,}980$; il lavoro dell'attrito è $-\mu_d mg \cos\alpha \cdot L = -0{,}05 \times 70\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}980 \times 400\ \text{m} \approx -1{,}3 \times 10^4\ \text{J}$. c) All'aria restano circa $3{,}65 \times 10^4\ \text{J} - 1{,}34 \times 10^4\ \text{J} \approx 2{,}3 \times 10^4\ \text{J}$, cioè una forza media di circa $2{,}3 \times 10^4\ \text{J} / 400\ \text{m} \approx 58\ \text{N}$.

Controllo. Quasi due terzi dell'energia dissipata li prende l'aria: per questo i discesisti stanno raccolti «a uovo». È un valore medio: la resistenza dell'aria cresce con la velocità (*Fisica 2*, capitolo 7). Con un coefficiente d'attrito fra 0,03 e 0,1 la stima cambia di qualche decina di per cento: è una stima, non una misura.

5.6 La potenza

5.6.1 Potenza media e potenza istantanea

La potenza media è il lavoro compiuto diviso per l'intervallo di tempo impiegato, $P = W/\Delta t$. Per un intervallo breve, in cui la forza è praticamente costante, il lavoro è $\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$; dividendo per Δt e facendo tendere Δt a zero, il rapporto $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ diventa la velocità istantanea. Si ottiene la **potenza istantanea** della forza:

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv\cos\theta$$

dove θ è l'angolo fra la forza e la velocità. Lo scorso anno avevi usato $P = Fv$ per una forza parallela alla velocità; la forma con il prodotto scalare vale sempre, e il segno dice se la forza fornisce energia al corpo o gliela sottrae. Una forza perpendicolare alla velocità, come la tensione del filo di un pendolo, ha potenza nulla in ogni istante.

ESEMPIO SVOLTO

Un'automobile in salita

Problema. Un'automobile di 1200 kg, conducente compreso, sale a velocità costante di 90 km/h su una strada rettilinea con pendenza del 6% (6 m di dislivello ogni 100 m in orizzontale). Le resistenze al moto (aria e rotolamento) valgono in totale circa 450 N. a) Quale potenza deve fornire la forza motrice? b) E in pianura, alla stessa velocità?

Soluzione. Sull'auto agiscono il peso, la reazione normale, la forza motrice (la spinta della strada sulle ruote motrici) e le resistenze. A velocità costante la risultante è nulla: la forza motrice equilibra la componente del peso lungo la strada più le resistenze. $\tan\alpha = 0{,}06$ dà $\operatorname{sen}\alpha \approx 0{,}0599$; $mg \operatorname{sen}\alpha = 1200\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}0599 \approx 704$ N, e $F \approx 704\ \text{N} + 450\ \text{N} \approx 1154$ N. a) Con $v = 90$ km/h $= 25$ m/s: $P = Fv \approx 1154\ \text{N} \times 25\ \text{m/s} \approx 29$ kW. b) In pianura: $P = 450\ \text{N} \times 25\ \text{m/s} \approx 11$ kW.

Controllo. N · m/s = W. Per pendenze piccole $\operatorname{sen}\alpha \approx \tan\alpha$. In salita, ogni secondo, circa 17,6 kJ vanno in energia potenziale: l'auto guadagna 1,5 m di quota al secondo.

ERRORE FREQUENTE

«Il motore sviluppa 29 kW, quindi consuma 29 kW». **No.** I 29 kW dell'esempio sono la **potenza utile**, quella della forza motrice sulle ruote. Il motore preleva dal carburante molto di più, perché gran parte dell'energia chimica diventa energia interna dei gas di scarico, del motore e del radiatore. E «29 kW all'ora» non ha senso: il kilowatt è già un'energia al secondo.

5.6.2 Il rendimento di una catena di conversioni

Lo scorso anno hai definito il rendimento di una macchina, $\eta = P_{\text{utile}}/P_{\text{assorbita}}$, sempre minore di 1. Molto spesso l'energia passa attraverso più macchine in serie: la potenza utile della prima è la potenza assorbita dalla seconda, e così via. Se le conversioni sono tre, $P_1 = \eta_1 P_0$, $P_2 = \eta_2 P_1 = \eta_1\eta_2 P_0$, e così via: il **rendimento complessivo** è il prodotto dei rendimenti delle singole tappe,

$$\eta_{\text{tot}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots$$

Il prodotto è minore del più piccolo dei fattori: una catena lunga perde molto anche se ogni anello è buono. Con valori indicativi del giusto ordine di grandezza, pensa a un'auto elettrica ricaricata con energia prodotta da una centrale a gas a ciclo combinato: la centrale rende circa 0,55 (le migliori arrivano intorno a 0,6), la rete di trasmissione e distribuzione circa 0,93, carica e scarica della batteria circa 0,9, motore ed elettronica circa 0,9. Il rendimento complessivo è $0{,}55 \times 0{,}93 \times 0{,}90 \times 0{,}90 \approx 0{,}41$: delle 100 unità di energia del combustibile, circa 40 arrivano alle ruote.

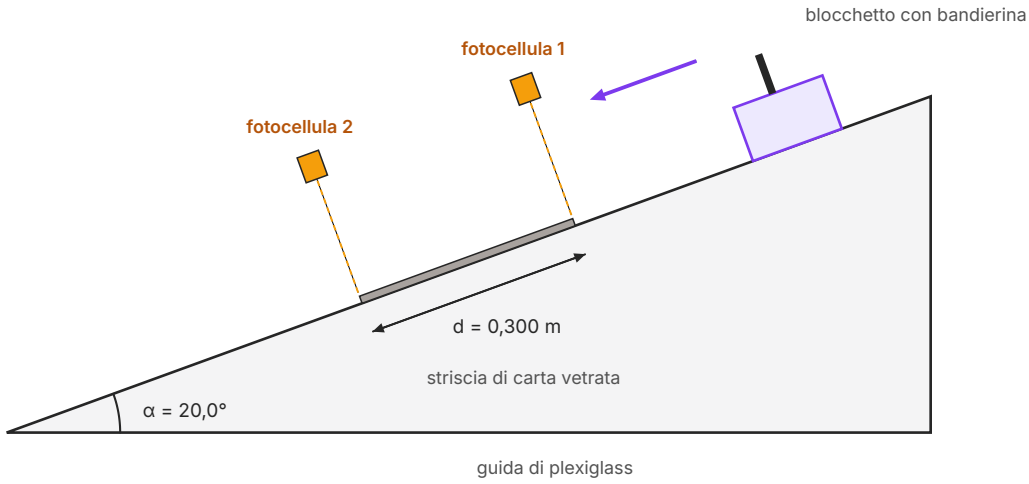

Figura 5.6 Lo schema dell'esperienza di laboratorio (non in scala). Il blocchetto scende lungo la guida inclinata di 20,0°; due fotocellule agli estremi della striscia di carta vetrata, lunga 0,300 m, misurano la velocità all'ingresso (fotocellula 1) e all'uscita (fotocellula 2).

COLLEGAMENTI

In laboratorio: l'energia dissipata su un tratto scabro

Materiali. Una guida inclinata di plexiglass, su cui è incollata una striscia di carta vetrata fine lunga d = (0,300 ± 0,001) m; un blocchetto di legno con una bandierina larga (20,00 ± 0,05) mm (calibro); due fotocellule con cronometro elettronico (risoluzione 0,1 ms), poste agli estremi della striscia; una bilancia (0,1 g); un goniometro o un inclinometro (0,2°); un dinamometro da 2 N (divisione 0,05 N).

Procedimento. 1) Misura la massa del blocchetto, m = (250,0 ± 0,1) g, e inclina la guida di α = (20,0 ± 0,2)° (Figura 5.6). 2) Lascia andare il blocchetto da fermo da punti diversi sopra la striscia, così che arrivi alla prima fotocellula con velocità diverse; il cronometro misura i tempi di oscuramento Δt_1 all'ingresso e Δt_2 all'uscita della striscia, e v = (larghezza della bandierina)/Δt. 3) Per ogni prova calcola ΔK, la variazione di energia potenziale lungo la striscia, $\Delta U = -mgd$ sen α = −(251 ± 3) mJ, il lavoro dell'attrito $W_{nc} = \Delta K + \Delta U$ e infine $\mu_d = -W_{nc}/(mg \cos\alpha \cdot d)$. 4) Metti poi la striscia di carta vetrata in orizzontale e tira il blocchetto a velocità costante con il dinamometro: la lettura è la forza d'attrito dinamico, da cui una seconda misura di μ_d.

Tabella 5.1 Il blocchetto sul tratto scabro: cinque prove (dati tipici). Tempi in millisecondi, velocità in m/s, energie in millijoule; le incertezze sono massime, propagate dalle sensibilità degli strumenti.

Prova	Δt_1	Δt_2	v_1	v_2	K_1	K_2	W_{nc}	μ_d
1	15,4	17,8	1,299	1,124	211 ± 4	158 ± 3	−304 ± 10	0,44 ± 0,02
2	12,9	14,2	1,550	1,408	300 ± 6	248 ± 5	−304 ± 14	0,44 ± 0,02
3	11,1	11,9	1,802	1,681	406 ± 10	353 ± 8	−304 ± 21	0,44 ± 0,03
4	9,8	10,3	2,041	1,942	521 ± 13	471 ± 12	−301 ± 28	0,44 ± 0,04
5	8,7	9,1	2,299	2,198	661 ± 19	604 ± 17	−308 ± 39	0,45 ± 0,06

Che cosa concludere. Il lavoro dell'attrito è lo stesso in tutte le prove, circa −0,30 J, entro le incertezze: dipende dalla lunghezza della striscia e dalla reazione normale, non dalla velocità, come prevede il modello dell'attrito dinamico. I cinque valori di μ_d sono compatibili fra loro e hanno media 0,44; come incertezza prendiamo quella della prova più precisa, ± 0,02. Le prove veloci sono le meno precise: ΔK è una piccola differenza fra due energie cinetiche grandi, e l'incertezza assoluta di ciascuna cresce con la velocità.

Confronto teoria–esperimento. Il dinamometro legge (1,05 ± 0,05) N con mg = 2,45 N: μ_d = 0,43 ± 0,02. I due intervalli, 0,42–0,46 e 0,41–0,45, si sovrappongono: le due misure sono compatibili. Come previsione, usa il valore del dinamometro per calcolare v_2 nella prova 3, con $v_2^2 = v_1^2 + 2gd(\text{sen}\,\alpha - \mu_d \cos\alpha)$: si ottiene (1,70 ± 0,03) m/s, compatibile con il valore misurato, (1,681 ± 0,018) m/s.

Sicurezza. Blocca la guida al banco e metti un fermo morbido in fondo; maneggia la carta vetrata con attenzione.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Riporta la tabella e il calcolo completo, con la propagazione delle incertezze, per una prova. Spiega perché le fotocellule vanno messe proprio agli estremi della striscia (l'attrito sulla guida di plexiglass, fuori dalla striscia, non entra nel bilancio). Discuti le cause sistematiche: la bandierina misura la velocità media durante l'oscuramento, non quella istantanea all'estremo; la carta vetrata si consuma; il blocchetto può ruotare un po' entrando nella striscia. Proponi infine come verificare che μ_d non dipende dalla velocità.

APPROFONDIMENTO

Coriolis e la parola «lavoro»

Nel Settecento le grandezze legate all'energia avevano molti nomi, e gli ingegneri che progettavano mulini, pompe e macchine a vapore misuravano l'«effetto» di una macchina in modi diversi. Nel 1829 Gaspard-Gustave de Coriolis, lo stesso della forza del capitolo 3, pubblicò il trattato *Du calcul de l'effet des machines*, in cui chiamò *travail* («lavoro») il prodotto della forza per lo spostamento, sommato lungo il cammino, e propose di chiamare «forza viva» la quantità $\frac{1}{2}mv^2$: con il fattore ½ il lavoro è uguale alla variazione della forza viva.

Negli stessi anni anche Jean-Victor Poncelet usava la parola nei suoi corsi di meccanica per ingegneri. Chiamando «lavoro» una grandezza calcolabile, si poteva confrontare il lavoro speso e quello reso da una macchina: è l'idea del rendimento, che qualche decennio più tardi confluirà nel principio generale di conservazione dell'energia.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y$ — lavoro (J) di una forza costante (N) lungo uno spostamento rettilineo (m); può essere positivo, negativo o nullo. Lungo un percorso curvo, o per una forza variabile, si somma sui passi elementari: $W = \Sigma\, \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i$; lungo una retta è l'area con segno sotto il grafico $F_s(s)$.

$W_{peso} = -mg(y_B - y_A)$; $W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_A^2 - \tfrac{1}{2}kx_B^2$ — lavori del peso e della forza elastica: dipendono solo dagli estremi, quindi le due forze sono conservative.

$W_{A\to B} = U_A - U_B$ — definizione dell'energia potenziale (J), valida solo per le forze conservative; il valore di U dipende dal riferimento, ΔU no.

$K = E - U(x) \geq 0$ — nel diagramma dell'energia potenziale il corpo sta dove $U \leq E$; i punti di inversione sono dove $U = E$.

$F_x = -\Delta U/\Delta x$ $(\Delta x \to 0)$ — la forza (N) è la pendenza del grafico di U cambiata di segno; equilibrio stabile nei minimi, instabile nei massimi, indifferente nei tratti piatti.

$W_{nc} = \Delta E$ — bilancio energetico: il lavoro (J) delle forze non conservative è la variazione dell'energia meccanica; per l'attrito dinamico vale $-\mu_d Nd$ e l'energia sottratta diventa energia interna.

$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv\cos\theta$ — potenza istantanea (W) di una forza; $\eta_{tot} = \eta_1\eta_2\eta_3\ldots$ — rendimento complessivo di una catena di conversioni.

SINTESI

- Il lavoro di una forza costante lungo uno spostamento rettilineo è il prodotto scalare $W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y$: il segno esce dal calcolo.
- Lungo un percorso curvo, o per una forza variabile, il lavoro è la somma dei lavori elementari su spostamenti sempre più piccoli; in una dimensione è l'area con segno sotto il grafico della forza.
- Il lavoro della forza elastica fra due deformazioni è $\frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$; quello del peso è $-mg\Delta y$ lungo qualunque percorso.
- Una forza è conservativa se il suo lavoro non dipende dal percorso, o, in modo equivalente, se è nullo su ogni percorso chiuso. L'attrito dinamico, sempre opposto alla velocità, non lo è.
- L'energia potenziale è definita, solo per le forze conservative, da $W_{A\to B} = U_A - U_B$; il riferimento è arbitrario e solo le differenze hanno significato fisico.
- Nel diagramma dell'energia potenziale il corpo può stare solo dove $U \le E$; la distanza fra la retta E e la curva è l'energia cinetica, e i punti di inversione sono dove $U = E$.
- La forza è la pendenza del grafico di U cambiata di segno: spinge sempre verso le energie potenziali più basse.
- Le posizioni di equilibrio sono dove la tangente al grafico di U è orizzontale: stabile in un minimo, instabile in un massimo, indifferente in un tratto piatto.
- Un corpo intrappolato in una buca di potenziale compie un moto limitato; con energia sufficiente supera una barriera, e se la curva non risale più il moto è illimitato.
- Con forze dissipative vale il bilancio $W_{nc} = \Delta E$, da applicare tappa per tappa; l'energia meccanica sottratta diventa energia interna e l'energia totale si conserva.
- La potenza istantanea di una forza è $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$; una forza perpendicolare alla velocità ha potenza nulla.
- Il rendimento di una catena di conversioni è il prodotto dei rendimenti delle singole tappe, ed è minore di ciascuno di essi.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Il lavoro $W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ di una forza costante è:
   - **A.** un vettore parallelo alla forza
   - **B.** uno scalare che può essere positivo, negativo o nullo
   - **C.** uno scalare sempre positivo o nullo
   - **D.** un vettore perpendicolare sia alla forza sia allo spostamento

2. ● Una forza è conservativa se:

   A. il suo lavoro su ogni percorso chiuso è nullo

   B. il suo lavoro è sempre positivo

   C. conserva l'energia cinetica del corpo su cui agisce

   D. il suo modulo è costante

3. ●● La forza $\boldsymbol{F} = (3{,}0\,\mathbf{i} - 4{,}0\,\mathbf{j})$ N agisce durante lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r} = (2{,}0\,\mathbf{i} + 1{,}0\,\mathbf{j})$ m. Il suo lavoro è:

   A. 10 J

   B. −2,0 J

   C. 2,0 J

   D. 5,0 J

4. ● In un diagramma dell'energia potenziale $U(x)$, una posizione di equilibrio stabile corrisponde a:

   A. un massimo della curva

   B. un punto in cui $U = 0$

   C. il punto in cui la curva è più ripida

   D. un minimo della curva

5. ●● Un corpo si muove lungo l'asse x con energia meccanica E costante. In un punto di inversione:

   A. la forza è sempre nulla

   B. $U = E$ e la velocità è nulla

   C. l'energia cinetica è massima

   D. $U = 0$

6. ●● In una certa posizione l'energia potenziale $U(x)$ di un corpo diminuisce al crescere di x. Lì la forza conservativa sul corpo:

   A. ha verso concorde con l'asse x

   B. ha verso opposto all'asse x

   C. è nulla

   D. dipende dal valore di U in quel punto

7. ●● Una gru solleva un carico di 500 kg a velocità costante di 0,40 m/s. La potenza della forza che la gru esercita sul carico è circa:

   A. 200 W

   B. 1,2 kW

   C. 2,0 kW

   D. 20 kW

8. ●●● L'energia attraversa tre macchine in serie, con rendimenti 0,90, 0,80 e 0,50. Il rendimento complessivo è:

   A. 2,2
   B. 0,50
   C. 0,73
   D. 0,36

Vero o falso

9. ● Il lavoro di una forza conservativa lungo un percorso chiuso è nullo. V / F

10. ●● Per la forza d'attrito dinamico si può definire un'energia potenziale, purché il moto avvenga lungo una retta. V / F

11. ●● Il valore dell'energia potenziale in un punto ha un significato fisico che non dipende dalla scelta del riferimento. V / F

12. ● La potenza di una forza sempre perpendicolare alla velocità del corpo è nulla in ogni istante. V / F

13. ● In una posizione di equilibrio instabile la forza risultante sul corpo è nulla. V / F

Applicare

14. ● Calcola il lavoro della forza $\boldsymbol{F} = (25\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j})$ N durante lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r} = (4{,}0\,\mathbf{i} - 3{,}0\,\mathbf{j})$ m e l'angolo fra forza e spostamento.

15. ● Una pallina di 0,20 kg scende lungo uno scivolo a spirale da A, a 3,5 m dal suolo, a B, a 0,50 m dal suolo. Calcola il lavoro del peso. Quanto vale il lavoro del peso se la pallina viene poi riportata da B ad A a mano, lungo una scala? E sull'intero percorso chiuso?

16. ●● Una molla ha costante elastica 400 N/m. Calcola il lavoro della forza elastica quando l'allungamento passa da 5,0 cm a 12 cm, e quando torna da 12 cm a 5,0 cm.

17. ●● Su un carrello di 3,0 kg, fermo su una rotaia orizzontale senza attrito, agisce una forza parallela alla rotaia che vale 12 N per i primi 4,0 m e poi diminuisce linearmente fino a zero a 10,0 m. Disegna il grafico della forza in funzione della posizione, calcola il lavoro totale e la velocità del carrello a 10,0 m.

18. ●●● Usa il diagramma della Figura 5.4 per un corpo di 2,0 kg con energia meccanica 30 J che si trova nella buca di sinistra. a) Leggi sul grafico, approssimativamente, i punti di inversione. b) Calcola la velocità massima. c) Può raggiungere la posizione $x = 7{,}0$ m? Perché?

19. ● Completa. Una forza è conservativa se il suo lavoro fra due punti non dipende dal _____. Per una forza conservativa il lavoro da A a B è uguale a U_A _____ U_B. In un diagramma dell'energia potenziale la forza è nulla dove la tangente è _____, e l'equilibrio è stabile in un _____ di U.

20. ●● La fune di uno skilift tira uno sciatore con una forza di 500 N, inclinata di 25° rispetto alla pista, mentre lo sciatore sale a velocità costante di 2,5 m/s. Calcola la potenza della forza della fune.

21. ●● Un corpo si muove lungo l'asse x; la tabella dà la sua energia potenziale. x (m): 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5. U (J): 8,0; 3,0; 1,0; 2,0; 6,0; 12. a) In quale intervallo si trova, approssimativamente, una posizione di equilibrio, e di che tipo è? b) Stima la forza media fra 0 e 0,5 m e fra 1,5 m e 2,0 m, con il segno.

Problemi

22. ●● Un'automobile di $1{,}4 \times 10^3$ kg sale a 72 km/h costanti su una strada con pendenza dell'8% (8 m di dislivello ogni 100 m in orizzontale). Le resistenze al moto valgono 520 N. Calcola la potenza della forza motrice in salita e in pianura alla stessa velocità.

23. ●● Un blocco di 2,0 kg viene lanciato a 4,0 m/s su un piano orizzontale; dopo un tratto scabro lungo 1,5 m, con $\mu_d = 0{,}30$, sale lungo una rampa liscia. a) Quanta energia meccanica dissipa l'attrito? b) A che altezza arriva sulla rampa?

24. ●●● Un blocco di 1,2 kg scivola a 3,0 m/s su un piano orizzontale scabro ($\mu_d = 0{,}20$, $\mu_s = 0{,}30$) e urta una molla di costante 500 N/m, che comprime. L'attrito agisce anche durante la compressione. a) Di quanto si comprime al massimo la molla? b) Il blocco resta fermo o viene respinto? c) Se viene respinto, con che velocità lascia la molla e quanta strada fa ancora prima di fermarsi?

25. ●●● Un ciclista, con la bicicletta, ha una massa di 80 kg e scende senza pedalare lungo una strada rettilinea lunga 1,2 km, con un dislivello di 60 m. La sua velocità passa da 5,0 m/s a 15 m/s. La resistenza al rotolamento vale 0,005 volte la reazione normale. a) Quanta energia meccanica è stata dissipata? b) Quanta dalla resistenza al rotolamento? c) Stima la forza media della resistenza dell'aria.

26. ●● (Con il capitolo 4) Un corpo di 0,50 kg, attaccato a una molla orizzontale di costante 50 N/m, oscilla senza attrito con ampiezza 10 cm. a) Disegna qualitativamente il diagramma dell'energia potenziale con la retta dell'energia meccanica e indica i punti di inversione. b) Calcola l'energia meccanica. c) Calcola la velocità quando lo spostamento dall'equilibrio è 6,0 cm. d) Verifica che la velocità massima è uguale a ωA.

27. ●●● (Con *Fisica 2*, capitolo 7) Un vagone delle montagne russe di 300 kg parte da fermo da una quota di 25 m e raggiunge la sommità di un giro della morte di raggio 6,0 m, a 12 m dal suolo. Lungo il tragitto gli attriti dissipano 9,0 kJ. a) Calcola la velocità nel punto più alto del giro. b) Calcola la forza che la pista esercita sul vagone in quel punto. c) In quel punto la pista deve spingere il vagone o trattenerlo? Il vagone resterebbe sulla pista anche se la pista potesse soltanto spingerlo, senza le ruote di sicurezza che lo agganciano alla rotaia?

28. ●●● Una pompa elettrica solleva 12 litri d'acqua al secondo in un serbatoio posto 30 m più in alto, a velocità costante e trascurabile. Il rendimento della pompa è 0,70 e quello del motore elettrico 0,90. a) Calcola la potenza utile. b) Calcola la potenza elettrica assorbita. c) Quanti kilowattora consuma in un'ora?

29. ●●● Un arco viene teso di 0,50 m; la forza necessaria, misurata ogni 10 cm, vale: 0 N; 40 N; 75 N; 105 N; 130 N; 150 N. a) Stima il lavoro compiuto per tendere l'arco, approssimando l'area con trapezi. b) Se l'80% di questo lavoro diventa energia cinetica di una freccia di 25 g, con che velocità parte la freccia?

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Marco scrive: «Su un piano orizzontale l'attrito dinamico vale sempre $\mu_d mg$, quindi posso definire la sua energia potenziale $U = \mu_d mgx$, come $U = mgy$ per il peso». Spiega con un esempio numerico perché il ragionamento è sbagliato.

31. ●●● Stima di ordine di grandezza. Un'automobile di 1500 kg frena da 130 km/h fino a fermarsi. Quanta energia diventa energia interna, soprattutto dei freni? A che altezza si potrebbe sollevare l'auto con la stessa energia?

32. ●● Un'automobile elettrica, in discesa, usa il motore come generatore e ricarica la batteria (frenata rigenerativa). Usa il bilancio energetico e il rendimento di una catena di conversioni per spiegare perché, con la sola energia recuperata in discesa, non potrebbe mai risalire fino alla quota di partenza.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla conservazione dell'energia e sul lavoro e l'energia potenziale, con la dimostrazione che il lavoro della gravità non dipende dal percorso.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo su energia potenziale e conservazione dell'energia, con molti diagrammi dell'energia potenziale e problemi in più tappe.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sull'energia, per il rendimento delle macchine e le catene di conversioni nella vita quotidiana.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: come l'idea di energia si è allargata dalla meccanica al calore.

Glossario del capitolo

Barriera di potenziale
Tratto del diagramma dell'energia potenziale con un massimo che separa due regioni; può essere superato solo da un corpo con energia meccanica maggiore del massimo.

Bilancio energetico
Contabilità dell'energia di un sistema tappa per tappa: energia cinetica e potenziale iniziali più lavoro delle forze non conservative uguale a energia cinetica e potenziale finali.

Buca di potenziale
Tratto del diagramma dell'energia potenziale in cui c'è un minimo circondato da valori più alti; un corpo con energia insufficiente vi resta intrappolato.

Diagramma dell'energia potenziale
Grafico dell'energia potenziale di un corpo in funzione della posizione, su cui si traccia la retta dell'energia meccanica per leggere il moto.

Forza posizionale
Forza che dipende soltanto dalla posizione del corpo su cui agisce, non dalla sua velocità né dal tempo. Ogni forza conservativa è posizionale.

Lavoro della forza elastica
Lavoro compiuto dalla forza di una molla quando la deformazione passa da x_A a x_B: $\frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$.

Lavoro elementare
Lavoro compiuto da una forza lungo uno spostamento elementare: il prodotto scalare della forza per lo spostamento. Il lavoro lungo un percorso è la somma dei lavori elementari.

Moto illimitato
Moto di un corpo che può allontanarsi indefinitamente, perché nel verso del moto l'energia potenziale non supera mai l'energia meccanica.

Moto limitato
Moto di un corpo confinato fra due punti di inversione, per esempio in una buca di potenziale.

Potenza istantanea
Potenza di una forza in un istante: il prodotto scalare della forza per la velocità, $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$; si misura in watt.

Potenza utile
La parte della potenza di una macchina che serve allo scopo per cui la macchina è usata.

Regione accessibile
Insieme delle posizioni in cui l'energia potenziale non supera l'energia meccanica, e in cui quindi il corpo può trovarsi.

Regione proibita
Insieme delle posizioni in cui l'energia potenziale supera l'energia meccanica: l'energia cinetica vi sarebbe negativa, e il corpo non può entrarvi.

Rendimento complessivo
Rendimento di una catena di conversioni dell'energia: il prodotto dei rendimenti delle singole tappe.

Spostamento elementare
Tratto di un percorso così breve da poter essere considerato rettilineo e da rendere praticamente costante la forza che agisce lungo di esso.

Soluzioni

1. B. Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare; il suo segno dipende dall'angolo fra forza e spostamento.

2. A. È una delle due definizioni equivalenti; l'altra è che il lavoro fra due punti non dipende dal percorso.

3. C. $W = 3{,}0\ \text{N} \times 2{,}0\ \text{m} + (-4{,}0\ \text{N}) \times 1{,}0\ \text{m} = 6{,}0\ \text{J} - 4{,}0\ \text{J} = 2{,}0\ \text{J}$.

4. D. In un minimo la forza è nulla e, per piccoli spostamenti, riporta il corpo verso il minimo.

5. B. $K = E - U = 0$: il corpo è fermo per un istante e torna indietro. La forza in generale non è nulla.

6. A. $F_x = -\Delta U/\Delta x$: se $\Delta U/\Delta x < 0$, la forza è positiva. La forza spinge verso le energie potenziali più basse.

7. C. A velocità costante la forza della gru equilibra il peso: $P = mgv = 500\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}40\ \text{m/s} \approx 2{,}0 \times 10^3\ \text{W}$.

8. D. $\eta_{\text{tot}} = 0{,}90 \times 0{,}80 \times 0{,}50 = 0{,}36$: minore del più piccolo dei tre rendimenti.

9. V. È una delle due definizioni equivalenti di forza conservativa.

10. F. Anche su una retta, andando avanti e indietro l'attrito compie lavoro negativo in entrambi i versi: il lavoro dipende dal cammino percorso, non solo dagli estremi, quindi non esiste una funzione $U(x)$.

11. F. Il valore di U dipende dal riferimento scelto; hanno significato fisico solo le differenze ΔU.

12. V. $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv \cos 90° = 0$: la forza cambia la direzione del moto, non l'energia cinetica.

13. V. In ogni posizione di equilibrio la forza è nulla (tangente orizzontale al grafico di U); «instabile» si riferisce a ciò che accade dopo un piccolo spostamento.

14. $W = 25\ \text{N} \times 4{,}0\ \text{m} + 10\ \text{N} \times (-3{,}0\ \text{m}) = 100\ \text{J} - 30\ \text{J} = 70\ \text{J}$. $F = \sqrt{(25^2 + 10^2)}\ \text{N} \approx 26{,}9\ \text{N}$, $|\Delta \boldsymbol{r}| = 5{,}0\ \text{m}$; $\cos\theta = 70/(26{,}9 \times 5{,}0) \approx 0{,}520$, $\theta \approx 59°$.

15. $W = -mg(y_B - y_A) = -0{,}20\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times (0{,}50\ \text{m} - 3{,}5\ \text{m}) \approx 5{,}9\ \text{J}$ (positivo, in discesa); da B ad A lungo la scala $-5{,}9$ J, perché conta solo il dislivello; sul percorso chiuso 0 J.

16. $W_{\text{el}} = \tfrac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = \tfrac{1}{2} \times 400\ \text{N/m} \times [(0{,}050\ \text{m})^2 - (0{,}12\ \text{m})^2] \approx -2{,}4\ \text{J}$ (la molla si allunga e la forza elastica si oppone); al ritorno +2,4 J.

17. Il grafico è un rettangolo da 0 a 4,0 m e poi un triangolo da 4,0 m a 10,0 m. $W = 12\ \text{N} \times 4{,}0\ \text{m} + \tfrac{1}{2} \times 6{,}0\ \text{m} \times 12\ \text{N} = 48\ \text{J} + 36\ \text{J} = 84\ \text{J}$. Teorema dell'energia cinetica, partendo da fermo: $v = \sqrt{(2 \times 84\ \text{J} / 3{,}0\ \text{kg})} \approx 7{,}5\ \text{m/s}$.

18. a) La retta $E = 30$ J taglia la curva a circa 0,9 m e a circa 3,5 m (i valori del modello sono 0,93 m e 3,52 m). b) Nel minimo $U = 10$ J, $K = 20$ J: $v = \sqrt{(2 \times 20\ \text{J} / 2{,}0\ \text{kg})} \approx 4{,}5\ \text{m/s}$. c) No. A 7,0 m $U = 20\ \text{J} < 30\ \text{J}$, quindi quella posizione non è proibita; ma per arrivarci il corpo dovrebbe superare la barriera a 4,5 m, dove $U = 40\ \text{J} > 30\ \text{J}$. La regione accessibile è formata da due tratti separati, e il corpo resta in quello in cui si trova.

19. percorso; meno (−); orizzontale; minimo.

20. $P = Fv \cos\theta = 500\ \text{N} \times 2{,}5\ \text{m/s} \times \cos 25° \approx 1{,}1 \times 10^3\ \text{W}$.

21. a) U scende fino a 1,0 J a $x = 1{,}0$ m e poi risale: c'è un minimo fra 0,5 m e 1,5 m, vicino a 1,0 m; equilibrio stabile. b) Fra 0 e 0,5 m: $F \approx -\Delta U/\Delta x = -(3{,}0\ \text{J} - 8{,}0\ \text{J})/0{,}5\ \text{m} = +10\ \text{N}$; fra 1,5 m e 2,0 m: $-(6{,}0\ \text{J} - 2{,}0\ \text{J})/0{,}5\ \text{m} = -8{,}0\ \text{N}$. Le due forze puntano verso il minimo.

22. Sull'auto agiscono il peso, la reazione normale, la forza motrice e le resistenze; a velocità costante la risultante è nulla. $\tan\alpha = 0{,}08$, $\text{sen}\,\alpha \approx 0{,}0797$; $F = mg\ \text{sen}\,\alpha + 520\ \text{N} = 1{,}4 \times 10^3\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}0797 + 520\ \text{N} \approx 1094\ \text{N} + 520\ \text{N} \approx 1614\ \text{N}$; $v = 20$ m/s; $P \approx 1614$

N × 20 m/s ≈ 32 kW. In pianura: 520 N × 20 m/s ≈ 10 kW.

23. Sul blocco agiscono peso, reazione normale e, nel tratto scabro, attrito dinamico. a) $W_{nc} = -\mu_d mgd$ = −0,30 × 2,0 kg × 9,8 m/s² × 1,5 m ≈ −8,8 J: si dissipano 8,8 J. b) K iniziale = ½ × 2,0 kg × (4,0 m/s)² = 16 J; dopo il tratto scabro 16 J − 8,82 J ≈ 7,2 J; sulla rampa liscia si conserva l'energia meccanica: h = 7,18 J / (2,0 kg × 9,8 m/s²) ≈ 0,37 m.

24. Sul blocco agiscono peso e reazione normale (che si equilibrano), attrito dinamico e forza elastica. a) Bilancio energetico fra l'urto e la compressione massima: l'energia cinetica diventa energia elastica, e una parte è dissipata dall'attrito lungo la compressione x: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu_d mgx$, cioè 5,40 J = 250 N/m · x^2 + 2,35 N · x. Soluzione positiva dell'equazione di secondo grado: x ≈ 0,142 m ≈ 14 cm. b) Alla compressione massima la molla spinge con kx ≈ 71 N, mentre l'attrito statico può valere al massimo $\mu_s mg$ ≈ 3,5 N: il blocco viene respinto. c) Nuovo bilancio dalla compressione massima al distacco: l'energia elastica $\frac{1}{2}kx^2$ ≈ 5,07 J diventa energia cinetica, meno il lavoro dell'attrito $\mu_d mgx$ ≈ 0,33 J: K ≈ 4,73 J e $v = \sqrt{(2 \times 4{,}73\text{ J} / 1{,}2\text{ kg})} \approx 2{,}8$ m/s. Poi solo l'attrito compie lavoro: $d = K/(\mu_d mg)$ = 4,73 J / 2,35 N ≈ 2,0 m.

25. Sul ciclista agiscono peso, reazione normale, resistenza al rotolamento e resistenza dell'aria; le ultime due sono dissipative. a) $\Delta K = \frac{1}{2} \times 80\text{ kg} \times [(15\text{ m/s})^2 - (5{,}0\text{ m/s})^2] = 8{,}0 \times 10^3$ J; $\Delta U = -80\text{ kg} \times 9{,}8\text{ m/s}^2 \times 60\text{ m} \approx -4{,}70 \times 10^4$ J; $\Delta E \approx -3{,}9 \times 10^4$ J: dissipati circa 39 kJ. b) sen α = 60/1200 = 0,050, cos α ≈ 0,9987; resistenza al rotolamento 0,005 × 80 kg × 9,8 m/s² × 0,9987 ≈ 3,9 N; lavoro ≈ −3,9 N × 1200 m ≈ $-4{,}7 \times 10^3$ J. c) All'aria restano circa $3{,}9 \times 10^4$ J − $0{,}47 \times 10^4$ J ≈ $3{,}4 \times 10^4$ J: forza media ≈ $3{,}4 \times 10^4$ J / 1200 m ≈ 29 N. Il bilancio usa $W_{nc} = \Delta E$ perché le uniche forze che compiono lavoro oltre al peso sono dissipative.

26. a) Parabola $U = \frac{1}{2}kx^2$ con il minimo nell'origine; la retta E la taglia in $x = \pm 10$ cm, i punti di inversione. b) $E = \frac{1}{2} \times 50\text{ N/m} \times (0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}25$ J. c) K = 0,25 J − ½ × 50 N/m × (0,060 m)² = 0,25 J − 0,090 J = 0,16 J; $v = \sqrt{(2 \times 0{,}16\text{ J} / 0{,}50\text{ kg})} = 0{,}80$ m/s. d) $v_{max} = \sqrt{(2E/m)}$ = 1,0 m/s; $\omega = \sqrt{(k/m)} = 10$ rad/s e ωA = 1,0 m/s: coincidono.

27. a) Bilancio energetico dalla partenza alla sommità: $mgh_1 + W_{nc} = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2$, con W_{nc} = −9,0 kJ perché gli attriti sono le uniche forze non conservative che compiono lavoro (la reazione della pista è perpendicolare al moto). 73,5 kJ − 9,0 kJ − 35,3 kJ = $\frac{1}{2}mv^2 \approx 29{,}2$ kJ; $v^2 \approx 195$ m²/s², $v \approx 14$ m/s. b) Nel punto più alto agiscono il peso e la reazione della pista, entrambi verso il basso, cioè verso il centro: la loro somma è la forza centripeta (*Fisica 2*, capitolo 7). $N + mg = mv^2/r$: N = 300 kg × 195 m²/s² / 6,0 m − 300 kg × 9,8 m/s² ≈ 9,7 kN − 2,9 kN ≈ 6,8 kN. c) Sì: la pista spinge il vagone verso il basso, cioè verso il centro, con 6,8 kN, e non deve trattenerlo. Lo stesso risultato si vede dalla velocità minima per restare sulla pista, $\sqrt{(gr)} \approx 7{,}7$ m/s, minore di 14 m/s: in quel punto le ruote di sicurezza non servono.

28. a) Ogni secondo si sollevano 12 kg d'acqua (densità $1{,}00 \times 10^3$ kg/m³) di 30 m, a velocità costante: $P_{utile} = mgh/\Delta t$ = 12 kg × 9,8 m/s² × 30 m / 1,0 s ≈ 3,5 kW. b) Rendimento complessivo della catena motore–pompa: η_{tot} = 0,90 × 0,70 = 0,63; $P_{assorbita}$ = 3,53 kW / 0,63 ≈ 5,6 kW. c) In un'ora: 5,6 kW × 1 h = 5,6 kWh.

29. a) Lavoro = area sotto il grafico forza–allungamento, con cinque trapezi di base 0,10 m: 0,10 m × [(0 + 40)/2 + (40 + 75)/2 + (75 + 105)/2 + (105 + 130)/2 + (130 + 150)/2] N = 0,10 m × 425 N ≈ 43 J (42,5 J). La forza non cresce linearmente: il modello della molla ideale non basta. b) Si conserva l'energia: $\frac{1}{2}mv^2$ = 0,80 × 42,5 J = 34 J; $v = \sqrt{(2 \times 34\text{ J} / 0{,}025\text{ kg})} \approx 52$ m/s.

30. Esempio: un blocco di 1,0 kg su un piano con μ_d = 0,50 va da x = 0 a x = 2,0 m e torna a x = 0. L'attrito compie −0,50 × 1,0 × 9,8 × 2,0 J ≈ −9,8 J all'andata e altrettanto al ritorno, perché cambia verso insieme alla velocità: in totale −19,6 J su un percorso chiuso. Con la «U» di Marco la variazione totale sarebbe zero. Il peso ha sempre lo stesso verso, l'attrito no: non è una forza posizionale, il suo lavoro dipende dal percorso e non esiste un'energia potenziale dell'attrito.

31. Traccia di risposta: 130 km/h ≈ 36,1 m/s; $K = \frac{1}{2} \times 1500\text{ kg} \times (36{,}1\text{ m/s})^2 \approx 9{,}8 \times 10^5$ J, circa 1 MJ, che di-

venta energia interna soprattutto di dischi e pastiglie dei freni (e in piccola parte di pneumatici, strada e aria). Con la stessa energia: $h = K/(mg) \approx 9{,}8 \times 10^5$ J / (1500 kg × 9,8 m/s^2) ≈ 67 m, l'altezza di un palazzo di una ventina di piani. Per questo i freni, dopo una frenata forte, sono caldissimi.

32. Traccia di risposta: in discesa l'energia potenziale persa, mgh, si divide fra il lavoro delle resistenze (aria, rotolamento), che diventa energia interna, e il lavoro del generatore. Di quest'ultimo solo una frazione arriva nella batteria (rendimento del generatore e della carica, entrambi minori di 1). In salita la catena si percorre al contrario (scarica, motore), con altri rendimenti minori di 1, e le resistenze sottraggono di nuovo energia. Il rendimento complessivo andata e ritorno è il prodotto di tutti questi fattori, e quindi molto minore di 1: l'energia disponibile per salire è minore di mgh. L'energia totale si conserva, ma la parte diventata energia interna non si può riconvertire per intero.