CAPITOLO

4

Il moto armonico e le oscillazioni

«[...] ciaschedun pendolo ha il tempo delle sue vibrazioni talmente limitato e prefisso, che impossibil cosa è il farlo muover sotto altro periodo che l'unico suo naturale.» — Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata prima (1638)

OBIETTIVI

1. Descrivere il moto armonico come proiezione di un moto circolare uniforme e scriverne la legge oraria, con ampiezza, pulsazione e fase.
2. Ricavare la velocità e l'accelerazione del moto armonico e riconoscere nella relazione $a = -\omega^2 x$ la condizione dinamica di ogni oscillatore armonico.
3. Dimostrare con il secondo principio che una massa su una molla e un pendolo che compie piccole oscillazioni sono oscillatori armonici, e calcolarne il periodo.
4. Seguire gli scambi fra energia cinetica e potenziale durante un'oscillazione e calcolare la velocità in ogni posizione.
5. Descrivere le oscillazioni smorzate e forzate e spiegare la risonanza con esempi tecnologici e quotidiani.
6. Misurare in laboratorio il periodo di un oscillatore a molla e confrontare la costante elastica ricavata dalle oscillazioni con quella statica.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Il moto armonico 2
4.2 La massa e la molla 7
4.3 Il pendolo semplice 12
4.4 L'energia nel moto armonico 15
4.5 Oscillazioni smorzate, oscillazioni forzate e risonanza 17

Fisica 3 · Parte I · Le leggi del moto e i sistemi di riferimento · versione 1.0
Capitolo 4: Il moto armonico e le oscillazioni · pagine 97–122 del volume completo · estratto per lo studio

Il pendolo di un vecchio orologio, la sospensione di un'auto che ha appena preso una buca, il ramo che ondeggia dopo che un uccello è volato via, la corda di una chitarra pizzicata: sono sistemi diversissimi, ma tutti si muovono avanti e indietro attorno a una posizione di equilibrio, e lo fanno con una regolarità sorprendente. Nei capitoli precedenti hai imparato a prevedere un moto a partire dalle forze e dalle condizioni iniziali, e a descriverlo da sistemi di riferimento diversi. In questo capitolo applichiamo lo stesso metodo a una famiglia di moti che ritroverai ovunque nella fisica: le oscillazioni.

Nel volume dello scorso anno (*Fisica 2*, capitoli 3 e 7) il moto armonico è comparso soltanto in due approfondimenti facoltativi, come proiezione di un moto circolare uniforme e con le formule dei periodi di una molla e di un pendolo enunciate senza dimostrazione. Ora quelle formule le ricaviamo dalle leggi della dinamica e seguiamo l'energia durante l'oscillazione; alla fine vedremo che cosa succede a un oscillatore che perde energia e a uno spinto con regolarità, fino alla risonanza. Le onde, che nascono da oscillazioni che si propagano, saranno l'argomento del volume del quarto anno.

4.1 Il moto armonico

4.1.1 Moti periodici e oscillazioni

Un moto periodico si ripete identico a intervalli di tempo uguali: la Terra attorno al Sole, la lancetta di un orologio, il pistone di un motore che gira a regime. Come per il moto circolare uniforme (*Fisica 2*, capitolo 3), il tempo di una ripetizione completa è il periodo T, e il numero di ripetizioni al secondo è la frequenza $f = 1/T$, misurata in hertz. Fra i moti periodici ci interessano qui quelli **oscillatori**, in cui un corpo va avanti e indietro lungo lo stesso percorso, a cavallo di una posizione di equilibrio. Il punto attorno a cui avviene l'oscillazione si chiama **centro di oscillazione**; la distanza massima da esso è l'ampiezza A.

4.1.2 La proiezione di un moto circolare uniforme

Riprendiamo la costruzione di *Fisica 2*, capitolo 3 (Figura 4.1a). Un punto P percorre di moto circolare uniforme una circonferenza di centro O e raggio A, in verso antiorario, con velocità angolare ω; Q è la sua proiezione sull'asse x, che passa per O. Chiamiamo φ_0 l'angolo che il raggio OP forma con l'asse x all'istante $t = 0$: all'istante t l'angolo è diventato $\omega t + \varphi_0$, e la coordinata di Q è il cateto adiacente di un triangolo rettangolo con ipotenusa A:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

È la **legge oraria del moto armonico**. Mentre P gira, Q oscilla lungo il diametro fra $-A$ e $+A$: il raggio della circonferenza è l'ampiezza dell'oscillazione, e il periodo è quello del moto circolare. L'argomento del coseno, $\omega t + \varphi_0$, si chiama **fase** dell'oscillazione e si misura in radianti; il suo valore all'istante iniziale, φ_0, è la **fase iniziale**. Infine ω, la rapidità con cui cresce la fase, si chiama **pulsazione**: in un periodo la fase aumenta di 2π, quindi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(rad/s)}$$

Il nome è nuovo perché P è soltanto uno strumento di calcolo: una massa che oscilla su una molla non gira attorno a niente, e per lei ω è semplicemente la frequenza moltiplicata per 2π. Ricorda che nella formula $\omega t + \varphi_0$ è un angolo in **radianti**: per calcolare il coseno la calcolatrice va messa in modalità RAD.

La fase iniziale dice da dove parte l'oscillazione. Con $\varphi_0 = 0$ il corpo all'istante iniziale si trova in $x = A$, fermo all'estremo destro: è il caso di una molla tirata e lasciata andare. Con $\varphi_0 = -\pi/2$ si ha $x(t) = A\cos(\omega t - \pi/2) = A \operatorname{sen} \omega t$: il corpo parte dal centro e si muove verso le x positive, come una massa ferma colpita con un piccolo colpo. Il grafico della Figura 4.1b mostra la legge oraria per $\varphi_0 = 0$: i punti P_0, P_1, P_2, P_3 della circonferenza, raggiunti a un quarto di periodo l'uno dall'altro, corrispondono a $x = A, 0, -A, 0$.

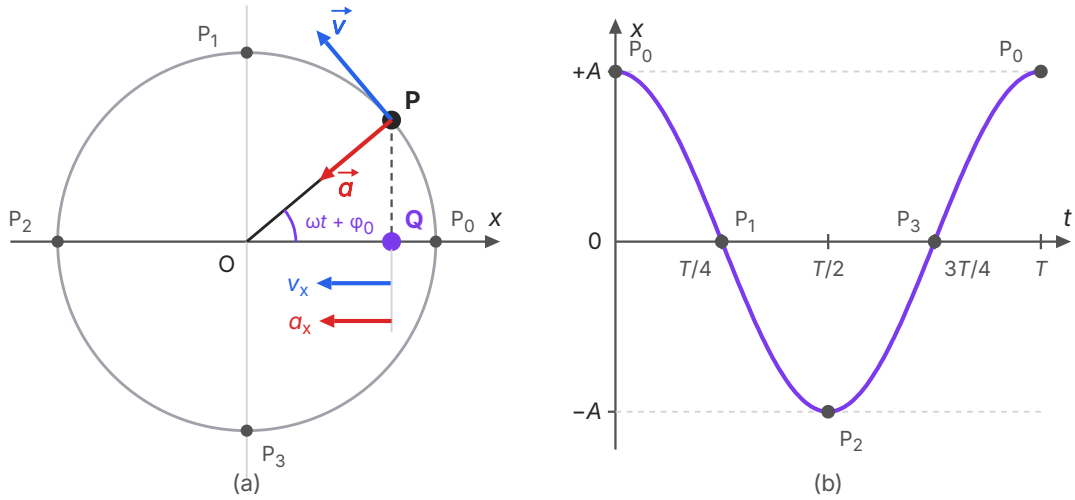

Figura 4.1 Il moto armonico come proiezione del moto circolare uniforme. (a) Il punto P gira con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio A; la sua proiezione Q sull'asse x oscilla fra $-A$ e $+A$. La velocità di Q è la componente x della velocità di P, la sua accelerazione è la componente x dell'accelerazione centripeta di P. (b) La legge oraria $x(t) = A\cos\omega t$, cioè con $\varphi_0 = 0$: i punti segnati corrispondono alle posizioni $P_0 \ldots P_3$ della circonferenza, a intervalli di $T/4$.

4.1.3 Velocità e accelerazione

Q e P hanno in ogni istante la stessa coordinata x. Quindi ogni spostamento di Q è la componente x dello spostamento di P nello stesso intervallo di tempo; dividendo per Δt e facendo tendere Δt a zero, come hai fatto nel capitolo 1 per definire la velocità istantanea, si ottiene che **la velocità di Q è la componente x della velocità di P**, e lo stesso vale per le accelerazioni.

ESEMPIO SVOLTO

Velocità e accelerazione del moto armonico, passo per passo

Problema. Ricava la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ del punto Q che si muove con la legge oraria $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, e trova la relazione fra l'accelerazione e la posizione.

Passo 1: la velocità di P. P si muove di moto circolare uniforme: la sua velocità ha modulo ωA (la relazione $v = \omega r$ di *Fisica 2*) ed è tangente alla circonferenza, quindi perpendicolare al raggio OP. Il raggio forma con l'asse x l'angolo $\omega t + \varphi_0$; la velocità, ruotata di 90° in verso antiorario, forma l'angolo $\omega t + \varphi_0 + \pi/2$. La sua componente x è $\omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, perché $\cos(\alpha + \pi/2) = -\mathrm{sen}\,\alpha$.

$$v(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Controllo del segno. Quando P è nella metà superiore della circonferenza (fase fra 0 e π) si muove verso sinistra, e infatti il seno è positivo e v negativa: Q va verso le x decrescenti.

Passo 2: l'accelerazione di P. È l'accelerazione centripeta, di modulo $\omega^2 A$ (la relazione $a_c = \omega^2 r$), diretta da P verso O, cioè in verso opposto al raggio OP. La sua componente x è quindi $-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Passo 3: il confronto con la posizione. Il prodotto $A\cos(\omega t + \varphi_0)$ è proprio $x(t)$. Dunque in ogni istante

$$a = -\omega^2 x$$

Controllo. Le unità tornano: il radiante è un numero puro, quindi ωA si misura in $(1/\mathrm{s})\cdot\mathrm{m} = \mathrm{m/s}$ e $\omega^2 x$ in $\mathrm{m/s^2}$. Nei punti di inversione $x = \pm A$ la velocità è nulla e l'accelerazione ha il modulo massimo, $a_{max} = \omega^2 A$; al centro la velocità ha il modulo massimo, $v_{max} = \omega A$, e l'accelerazione è nulla.

Il risultato del passo 3 è il cuore di tutto il capitolo: **nel moto armonico l'accelerazione è proporzionale allo spostamento dal centro e ha verso opposto**. Quando il corpo è a destra del centro l'accelerazione punta a sinistra, quando è a sinistra punta a destra, e cresce con la distanza: il corpo è sempre «richiamato» verso il centro, tanto più fortemente quanto più se ne allontana.

Nel volume dello scorso anno il moto armonico era definito in modo geometrico, come proiezione di un moto circolare uniforme. Da qui in avanti useremo una definizione dinamica, più utile: un moto rettilineo è armonico quando in ogni istante la sua accelerazione è legata alla posizione dalla relazione $a = -\omega^2 x$, con ω costante. Un sistema che si muove così si chiama **oscillatore armonico**. Abbiamo appena visto che la proiezione del moto circolare soddisfa questa relazione; nel prossimo paragrafo vedremo anche il viceversa: ogni corpo con questa accelerazione si muove secondo la legge oraria del moto armonico.

La Figura 4.2 mostra i grafici di x, v e a in funzione del tempo per un oscillatore con $A = 4{,}0$ cm e $T = 0{,}80$ s, uno sotto l'altro con la stessa scala dei tempi. Le tre curve hanno la stessa forma e lo stesso periodo, ma sono spostate l'una rispetto all'altra. Quando due grandezze oscillano con la stessa pulsazione, la differenza fra le loro fasi si chiama **sfasamento**. Poiché $-\text{sen}\,\alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$, la velocità ha la fase della posizione aumentata di $\pi/2$: raggiunge il massimo un quarto di periodo *prima* della posizione, e si dice che velocità e posizione sono **in quadratura**. L'accelerazione, $-\omega^2 x$, è sempre di segno opposto alla posizione: lo sfasamento è π, e le due grandezze sono **in opposizione di fase**. Le linee tratteggiate della figura, negli istanti in cui x è massimo, attraversano il grafico di v dove vale zero e quello di a nel suo minimo.

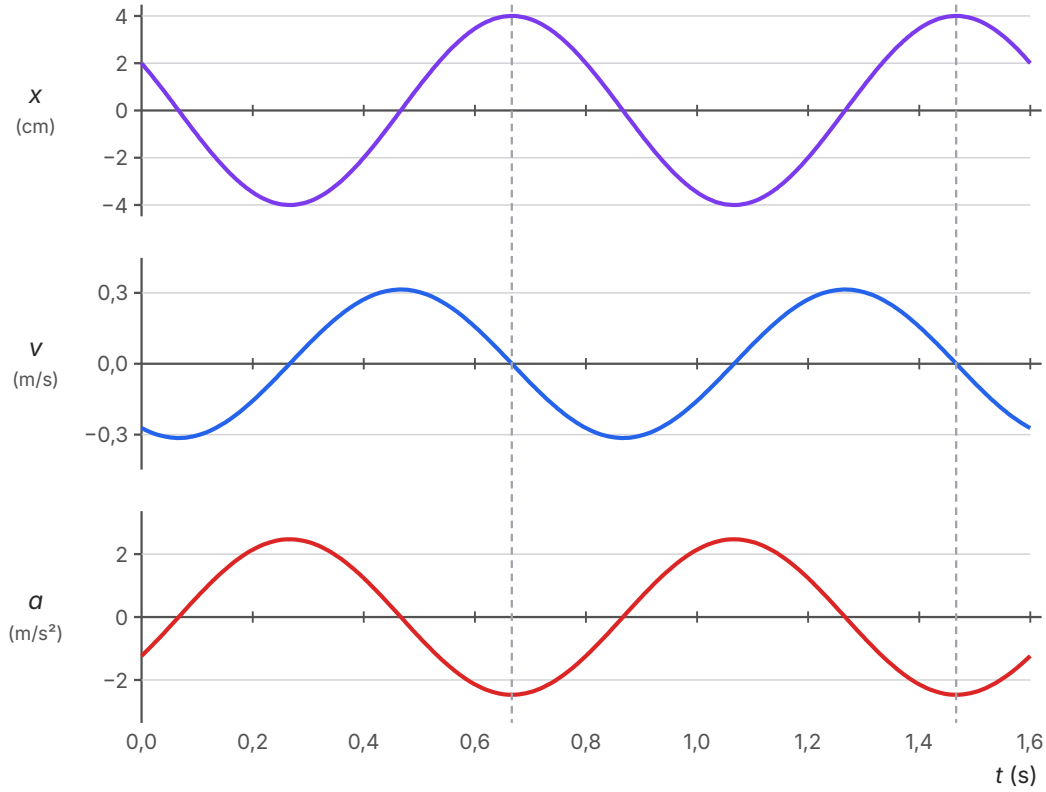

Figura 4.2 Posizione, velocità e accelerazione di un oscillatore armonico con $A = 4{,}0$ cm, $T = 0{,}80$ s e $\varphi_0 = \pi/3$, calcolate dalle leggi $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $v = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, $a = -\omega^2 x$. Le linee tratteggiate segnano gli istanti in cui x è massimo: lì la velocità è nulla e l'accelerazione è minima (massima in modulo e negativa).

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico di un'oscillazione

Problema. Dal grafico di $x(t)$ della Figura 4.2 ricava a) l'ampiezza, il periodo, la frequenza e la pulsazione; b) la fase iniziale; c) la velocità massima e l'accelerazione massima, e controllale sugli altri due grafici; d) l'istante in cui il corpo passa per la prima volta per il centro.

Soluzione. a) La curva oscilla fra −4,0 cm e +4,0 cm: $A = 4{,}0$ cm $= 0{,}040$ m. Due massimi successivi distano 0,80 s: $T = 0{,}80$ s, $f = 1/T = 1{,}25$ Hz, $\omega = 2\pi/T \approx 7{,}85$ rad/s.

b) All'istante $t = 0$ il grafico parte da $x = 2{,}0$ cm e scende. Dalla legge oraria, $x(0) = A\cos\varphi_0$, quindi $\cos\varphi_0 = 2{,}0/4{,}0 = 0{,}50$, che dà $\varphi_0 = \pi/3$ oppure $\varphi_0 = -\pi/3$. Per scegliere guardiamo il verso del moto: $v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\varphi_0$ è negativa (il corpo va verso il centro) solo se $\operatorname{sen}\varphi_0 > 0$, cioè per $\varphi_0 = \pi/3$.

c) $v_{max} = \omega A = 7{,}85 \text{ rad/s} \times 0{,}040 \text{ m} \approx 0{,}31$ m/s; $a_{max} = \omega^2 A = (7{,}85 \text{ rad/s})^2 \times 0{,}040 \text{ m} \approx 2{,}5$ m/s^2. Sono i valori estremi dei grafici di v e di a.

d) Il corpo passa per il centro quando il coseno si annulla per la prima volta, cioè quando la fase vale $\pi/2$: $\omega t + \pi/3 = \pi/2$, da cui $t = (\pi/6)/\omega = T/12 \approx 0{,}067$ s.

Controllo. All'istante $t = 0$ il grafico di v parte da circa −0,27 m/s: è $-\omega A \operatorname{sen}(\pi/3) = -0{,}314 \times 0{,}866$ m/s $\approx -0{,}27$ m/s. Il grafico di a parte da circa −1,2 m/s^2, cioè $-\omega^2 x(0) = -61{,}7 \text{ s}^{-2} \times 0{,}020$ m.

ERRORE FREQUENTE

«Nel punto di inversione il corpo è fermo, quindi la sua accelerazione è nulla.» **No.** Una velocità nulla non implica un'accelerazione nulla: nei punti di inversione l'accelerazione ha anzi il modulo massimo, $\omega^2 A$, perché il corpo è più lontano dal centro. È la stessa situazione del sasso lanciato verso l'alto nel punto più alto della traiettoria: fermo per un istante, ma con accelerazione g.

Un secondo errore riguarda la calcolatrice. In $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ la fase è in radianti: con $A = 0{,}10$ m, $\omega = 4{,}0$ rad/s e $t = 0{,}50$ s si ha $x = 0{,}10 \text{ m} \times \cos 2{,}0 \approx -0{,}042$ m. Con la calcolatrice in gradi si ottiene $0{,}10 \text{ m} \times \cos 2{,}0° \approx +0{,}100$ m: un risultato sbagliato anche nel segno, che non dà nessun segnale d'allarme.

4.2 La massa e la molla

4.2.1 L'oscillatore a molla

Un blocco di massa m, appoggiato su un piano orizzontale senza attrito, è attaccato a una molla di costante elastica k, fissata a una parete. Misuriamo la posizione x del blocco a partire dal punto in cui la molla è a riposo. Sul blocco agiscono il peso e la reazione normale del piano, che si fanno equilibrio, e la forza elastica, che secondo la legge di Hooke (*Fisica 1*, capitolo 7) vale

$$F = -kx$$

Il segno meno dice che la forza punta sempre verso la posizione di equilibrio: se la molla è allungata ($x > 0$) tira il blocco verso sinistra, se è compressa ($x < 0$) lo spinge verso destra. Una forza che riporta un corpo verso la posizione di equilibrio si chiama **forza di richiamo**; quella della molla ha in più la proprietà di essere proporzionale allo spostamento. Per il secondo principio $ma = -kx$, cioè

$$a = -\frac{k}{m}x$$

È esattamente la relazione $a = -\omega^2 x$ del moto armonico, con $\omega^2 = k/m$. Possiamo concludere che il blocco si muove di moto armonico? Il ragionamento è quello del capitolo 1: le leggi del moto, una volta date le forze, la posizione e la velocità iniziali, determinano il moto in modo unico. Consideriamo allora il punto Q che è la proiezione di un moto circolare uniforme con $\omega = \sqrt{(k/m)}$, su una circonferenza scelta in modo che Q parta dalla stessa posizione e con la stessa velocità del blocco (è sempre possibile, regolando A e φ_0). Q e il blocco hanno, in ogni posizione, la stessa accelerazione, e partono nelle stesse condizioni: devono quindi muoversi nello stesso modo. Il blocco si muove secondo la legge $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, con

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \qquad T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)}$$

Lo stesso argomento vale per qualunque sistema: **se l'accelerazione è proporzionale allo spostamento e opposta, cioè $a = -Cx$ con C costante positiva, il moto è armonico con $\omega = \sqrt{C}$**. Per trovare il periodo di un oscillatore non serve risolvere nulla: basta scrivere il secondo principio e leggere il coefficiente davanti a x.

DA RICORDARE

Da che cosa dipende il periodo di una massa su una molla. Solo dalla massa e dalla costante elastica: $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$. Una molla più rigida oscilla più in fretta; una massa maggiore oscilla più lentamente, ma con la radice quadrata: per raddoppiare il periodo bisogna quadruplicare la massa.

Da che cosa non dipende. Dall'ampiezza, finché vale la legge di Hooke: un'oscillazione ampia ha più strada da fare, ma la percorre più velocemente, e i due effetti si compensano esattamente. Da g: la stessa molla con la stessa massa oscillerebbe con lo stesso periodo sulla Luna. Da come è stato avviato il moto: le condizioni iniziali fissano l'ampiezza e la fase iniziale, non il periodo.

4.2.2 La molla verticale

Appendiamo ora il blocco a una molla verticale. In equilibrio la molla è allungata di un tratto Δl tale che la forza elastica equilibri il peso: $k\Delta l = mg$. Spostiamo il blocco dalla nuova posizione di equilibrio e chiamiamo y lo spostamento da essa, positivo verso il basso. La molla è allungata di $\Delta l + y$ e tira verso l'alto con forza $k(\Delta l + y)$, mentre il peso tira verso il basso. La risultante, positiva verso il basso, vale

$$mg - k(\Delta l + y) = -ky$$

perché mg e $k\Delta l$ si cancellano. La gravità ha un solo effetto: sposta più in basso il centro di oscillazione. Attorno a esso il blocco oscilla di moto armonico con la stessa pulsazione e lo stesso periodo che avrebbe sul piano orizzontale. Ne segue una conseguenza curiosa: siccome $m/k = \Delta l/g$, il periodo si può calcolare dal solo allungamento statico, $T = 2\pi\sqrt{(\Delta l/g)}$, senza conoscere né la massa né la costante elastica.

ESEMPIO SVOLTO

Le sospensioni di un'auto

Problema. Un'auto di 1200 kg viene caricata con quattro passeggeri, di massa complessiva 300 kg, e la carrozzeria si abbassa di 3,0 cm. Schematizziamo le sospensioni come un'unica molla verticale e trascuriamo per ora gli ammortizzatori. a) Calcola la costante elastica delle sospensioni. b) Calcola il periodo e la frequenza delle oscillazioni verticali dell'auto carica. c) Su una strada sterrata le buche si susseguono ogni 1,5 m: a quale velocità l'auto le incontra con la stessa frequenza delle sue oscillazioni?

Soluzione. a) Il carico aggiunge una forza $mg = 300\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2940\ \text{N}$, che allunga la «molla» di 0,030 m: $k = 2940\ \text{N} / 0{,}030\ \text{m} = 9{,}8 \times 10^4\ \text{N/m}$.

b) Sull'auto carica, di massa 1500 kg, agiscono il peso e la forza elastica delle sospensioni: come abbiamo visto, attorno alla posizione di equilibrio la risultante è $-ky$, e il moto è armonico. $T = 2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(1500\ \text{kg} / 9{,}8 \times 10^4\ \text{N/m})} \approx 0{,}78\ \text{s}$; $f = 1/T \approx 1{,}3\ \text{Hz}$.

c) L'auto incontra una buca ogni $\Delta t = (1{,}5\ \text{m})/v$. Perché questo intervallo sia uguale al periodo: $v = 1{,}5\ \text{m} / 0{,}777\ \text{s} \approx 1{,}9\ \text{m/s}$, circa 7 km/h. A questa velocità ogni buca arriva quando la carrozzeria ha appena completato un'oscillazione, e le oscillazioni si sommano: è un primo esempio di risonanza, il fenomeno che studieremo alla fine del capitolo.

Controllo. Con il metodo dell'allungamento statico: l'auto carica abbassa le sospensioni di $mg/k = 1500 \times 9{,}8 / 9{,}8 \times 10^4\ \text{m} = 0{,}15\ \text{m}$ rispetto alla molla scarica, e $2\pi\sqrt{(0{,}15\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 0{,}78\ \text{s}$. Frequenze di circa 1 Hz sono tipiche delle sospensioni delle automobili: il modello, pur rozzo, dà l'ordine di grandezza giusto.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il periodo di un oscillatore a molla

Materiali. Una molla morbida (massa 24 g) appesa a un sostegno; un portapesi e masse da 50 g, per un totale di 300 g; un cronometro (risoluzione 0,01 s); un metro a nastro (1 mm); una bilancia (1 g).

Procedimento. 1) **Misura statica di *k*.** Appendi 100 g, 200 g e 300 g e misura ogni volta l'allungamento della molla rispetto alla posizione senza carico: ottieni 8,1 cm, 16,4 cm e 24,5 cm (± 0,1 cm). Da $k = mg/\Delta l$ ricavi 12,1 N/m, 12,0 N/m e 12,0 N/m: $k_{\text{statica}} = (12{,}0 \pm 0{,}1)$ N/m (valore medio e semidispersione, *Fisica 1*, capitolo 4). 2) **Misura dei periodi.** Per ciascuna massa sposta il portapesi di 2–3 cm dall'equilibrio, lascialo andare e misura il tempo t_{20} di 20 oscillazioni complete, partendo dal conteggio «zero» al passaggio per un estremo. Il tempo di reazione di chi usa il cronometro rende l'incertezza su t_{20} di circa 0,2 s; dividendo per 20 l'incertezza sul periodo scende a 0,01 s. 3) Calcola T^2 con la sua incertezza, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$, e riporta T^2 in funzione di m (Figura 4.3).

Tabella 4.1 Periodo di oscillazione al variare della massa appesa (dati tipici di una prova). La massa m è quella del portapesi con i pesi.

m (g)	t_{20} (s)	T (s)	T^2 (s^2)
50	8,7	0,435 ± 0,010	0,189 ± 0,009
100	11,8	0,590 ± 0,010	0,348 ± 0,012
150	14,4	0,720 ± 0,010	0,518 ± 0,014
200	16,5	0,825 ± 0,010	0,681 ± 0,017
250	18,3	0,915 ± 0,010	0,837 ± 0,018
300	20,1	1,005 ± 0,010	1,010 ± 0,020

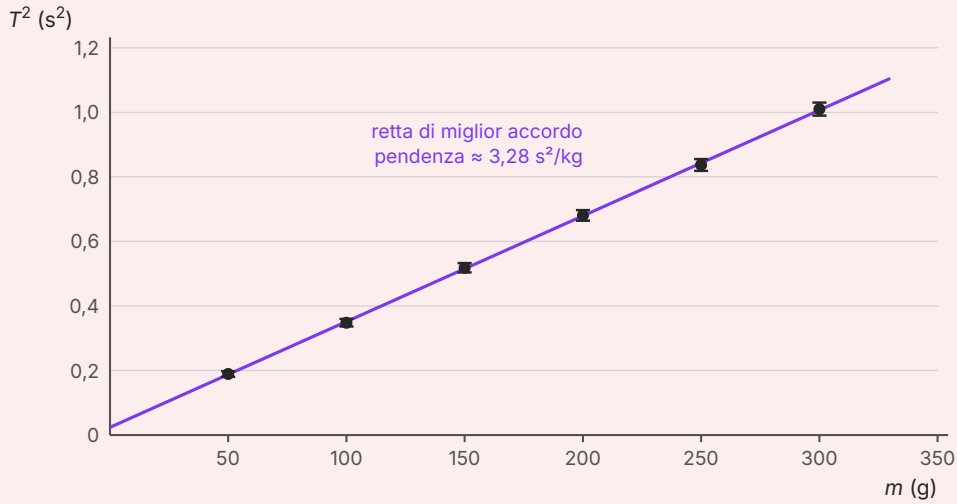

Figura 4.3 Il quadrato del periodo in funzione della massa appesa, con le barre d'errore, per i dati della Tabella 4.1. I punti stanno su una retta che non passa per l'origine.

Che cosa concludere. Se $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$, allora $T^2 = (4\pi^2/k)m$: il grafico di T^2 in funzione di m deve essere una retta di pendenza $4\pi^2/k$. I punti sono effettivamente allineati entro le barre d'errore. La retta di miglior accordo ha pendenza $\approx 3{,}28$ s^2/kg; le rette di massima e di minima pendenza compatibili con le barre (*Fisica 1*, capitolo 5) danno 3,40 s^2/kg e 3,17 s^2/kg. Ne segue $k_{\text{dinamica}} = 4\pi^2/\text{pendenza} = (12{,}0 \pm 0{,}4)$ N/m.

Confronto teoria–esperimento. Le due misure di k, $(12{,}0 \pm 0{,}4)$ N/m dalle oscillazioni e $(12{,}0 \pm 0{,}1)$ N/m dagli allungamenti, sono compatibili: gli intervalli si sovrappongono. La retta però non passa per l'origine: intercetta l'asse verticale a circa 0,02 s^2. È un effetto sistematico che il modello trascura: anche la molla oscilla, e la sua massa si aggiunge in parte a quella appesa. Dall'intercetta si ricava una massa aggiuntiva fra 3 g e 12 g circa, compatibile con il risultato teorico (che non dimostriamo) secondo cui la molla contribuisce con circa un terzo della sua massa, 8 g. Ecco perché conviene ricavare k dalla pendenza e non da un singolo periodo: per $m = 200$ g la formula con k_{statica} prevede $T = (0{,}811 \pm 0{,}003)$ s, mentre si misura $(0{,}825 \pm 0{,}010)$ s, un valore appena più grande, nel verso previsto dalla massa della molla.

Sicurezza. Non superare il carico massimo della molla: una molla deformata in modo permanente non segue più la legge di Hooke. Fissa bene il sostegno al tavolo.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Spiega perché si misurano 20 oscillazioni invece di una, perché si fa il grafico di T^2 e non di T, e che cosa rappresentano la pendenza e l'intercetta. Concludi con il confronto fra le due misure di k e con una discussione dell'intercetta.

4.3 Il pendolo semplice

4.3.1 La forza di richiamo del pendolo

Il pendolo semplice è il modello di un piccolo corpo di massa m appeso a un filo inestensibile e di massa trascurabile, lungo l. Quando il filo forma un angolo θ con la verticale (Figura 4.4a), sul corpo agiscono il peso $m\boldsymbol{g}$ e la tensione del filo $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$. (Chiamiamo così la tensione perché in questo capitolo la lettera T indica il periodo.) Scomponiamo il peso in due componenti: una lungo il filo, di modulo mg cos θ, e una tangente all'arco descritto dal corpo, di modulo mg sen θ. La tensione e la componente del peso lungo il filo agiscono nella direzione del raggio e, insieme, forniscono l'accelerazione centripeta del moto lungo l'arco (capitolo 1). È la componente tangente a cambiare la velocità del corpo, e punta sempre verso la posizione più bassa: è una forza di richiamo.

Misuriamo la posizione del corpo con la lunghezza s dell'arco a partire dal punto più basso, positiva da un lato e negativa dall'altro; se l'angolo è in radianti, $s = l\theta$. La componente tangente della forza, con il suo segno, è

$$F_{\mathrm{tan}} = -mg \operatorname{sen} \theta$$

Non è proporzionale allo spostamento $s = l\theta$, perché il seno di un angolo non è proporzionale all'angolo: il moto del pendolo, a rigore, **non** è armonico. Ma per angoli piccoli il seno e l'angolo in radianti sono quasi uguali, come mostrano la Tabella 4.2 e il grafico della Figura 4.4b.

Tabella 4.2 Confronto fra un angolo θ in radianti e il suo seno. L'errore relativo è (θ − sen θ)/sen θ.

θ (gradi)	θ (rad)	sen θ	errore relativo
5°	0,0873	0,0872	0,13%
10°	0,1745	0,1736	0,51%
20°	0,3491	0,3420	2,1%
30°	0,5236	0,5000	4,7%

Fino a una decina di gradi l'errore è inferiore all'1%. Sostituire sen θ con θ (in radianti) si chiama **approssimazione delle piccole oscillazioni**; con essa la forza diventa $F_{\mathrm{tan}} \approx -mg\theta = -(mg/l)s$, proporzionale allo spostamento e opposta, e l'accelerazione lungo l'arco è

$$a_{\mathrm{t}} = -\frac{g}{l}s$$

È di nuovo la relazione del moto armonico, con $\omega^2 = g/l$. Per le piccole oscillazioni il pendolo è un oscillatore armonico, e il suo periodo è

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)} \qquad \text{(piccole oscillazioni)}$$

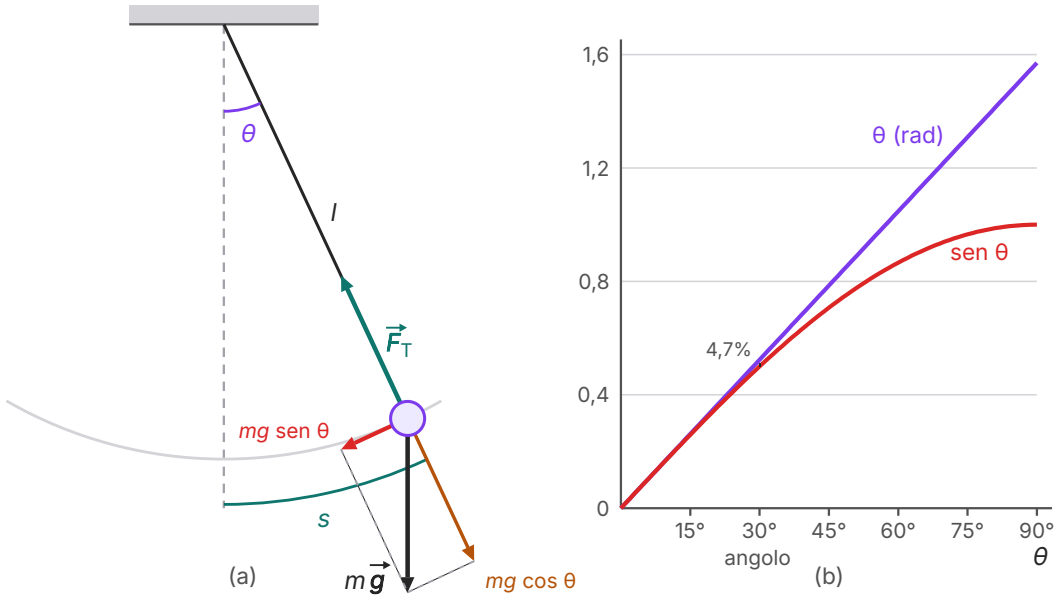

Figura 4.4 (a) Le forze su un pendolo semplice nel punto di inversione, con il filo inclinato di 25°: il peso $m\boldsymbol{g}$, scomposto lungo il filo e lungo la tangente all'arco, e la tensione $\boldsymbol{F}_T$, che qui, a velocità nulla, equilibra la componente del peso lungo il filo. La componente mg sen θ riporta il corpo verso il punto più basso; s è lo spostamento misurato lungo l'arco. (b) L'angolo in radianti e il suo seno, per angoli da 0° a 90°: fin verso i 15° le due curve quasi coincidono; a 30° differiscono del 4,7%.

Nel pendolo il ruolo della costante elastica è svolto da mg/l. Per questo la massa si semplifica e il periodo non ne dipende: un corpo più pesante subisce una forza di richiamo maggiore, ma ha anche una maggiore inerzia, nella stessa proporzione. Dietro questa semplificazione c'è un fatto profondo, l'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale (*Fisica 2*, capitolo 5): la massa che compare nel peso è la stessa che compare in ma. Newton, nei *Principia*, riferisce proprio di aver confrontato pendoli uguali con corpi di materiali diversi, senza trovare differenze nei periodi.

4.3.2 L'isocronismo e la misura del tempo

Come per la molla, nella formula del periodo l'ampiezza non compare: piccole oscillazioni più o meno ampie durano lo stesso tempo. È la proprietà detta **isocronismo** («uguale durata»). Si racconta che Galileo, giovane, l'abbia notata osservando l'oscillare di una lampada nel duomo di Pisa e confrontandolo con il battito del proprio polso; la storia ci è arrivata dal suo primo biografo, Vincenzo Viviani, e non sappiamo quanto sia fedele. Certo è che nei *Discorsi e dimo-*

strazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638) Galileo dedica al pendolo pagine ammirate, e che intorno alla metà del Seicento Christiaan Huygens costruì i primi orologi regolati da un pendolo, molto più precisi di quelli che li avevano preceduti.

Nel **pendolo a secondi** ogni mezza oscillazione dura un secondo, quindi $T = 2{,}0$ s; la lunghezza necessaria è $l = gT^2/(4\pi^2) = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times (2{,}0\ \text{s})^2/(4\pi^2) \approx 0{,}99$ m. Al contrario, misurando con cura la lunghezza e il periodo di un pendolo si ricava l'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Per propagare le incertezze (*Fisica 1*, capitolo 4) si sommano le incertezze relative, contando due volte quella del periodo perché compare al quadrato: $\Delta g/g = \Delta l/l + 2\Delta T/T$. Conviene quindi cronometrare molte oscillazioni di seguito.

APPROFONDIMENTO

Quando le oscillazioni non sono piccole

Galileo si spingeva più in là di quanto le sue misure permettessero. Nella Giornata prima dei *Discorsi* Sagredo, uno dei personaggi del dialogo, si stupisce che un corpo appeso a una corda lunghissima impieghi lo stesso tempo a oscillare con ampiezze molto diverse: «quel mobile medesimo, appeso a una corda di cento braccia di lunghezza, slontanato dall'imo punto una volta novanta gradi ed un'altra un grado solo o mezzo, tanto tempo spendesse in passar questo minimo, quanto in passar quel massimo arco».

Per un'ampiezza di 90° non è così. Quando le oscillazioni non sono piccole il seno cresce meno dell'angolo, la forza di richiamo è minore di quella del modello armonico e il pendolo impiega più tempo. Il periodo esatto non ha una formula elementare, ma si calcola numericamente: rispetto al valore $T_0 = 2\pi\sqrt{(l/g)}$ delle piccole oscillazioni è più lungo dello 0,2% per un'ampiezza di 10°, dell'1,7% per 30°, del 7,3% per 60° e del 18% per 90°. Una differenza del 18% non sfugge a un cronometro; ma con gli strumenti del tempo, e con oscillazioni ampie che l'aria smorza in fretta, era difficile accorgersene.

Huygens scoprì che un pendolo sarebbe esattamente isocrono, a qualunque ampiezza, se il corpo invece di un arco di circonferenza percorresse una **cicloide**, la curva descritta da un punto del bordo di una ruota che rotola; per avvicinarsi a questa traiettoria fece oscillare il filo dei suoi orologi fra due lamine sagomate. Negli orologi moderni a pendolo, più semplicemente, si mantengono piccole le oscillazioni.

4.4 L'energia nel moto armonico

4.4.1 Un continuo scambio fra energia cinetica ed energia potenziale

Torniamo al blocco sulla molla orizzontale senza attrito. Il peso e la reazione normale sono perpendicolari allo spostamento e non compiono lavoro; l'unica forza che lavora è quella elastica, che è conservativa. L'energia meccanica si conserva (*Fisica 2*, capitolo 10), e in ogni posizione vale

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Il secondo membro si ottiene guardando un punto di inversione, $x = \pm A$, dove la velocità è nulla e l'energia è tutta potenziale elastica. Al centro, invece, l'energia è tutta cinetica: $\tfrac{1}{2}mv_{\text{max}}{}^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$, da cui $v_{\text{max}} = A\sqrt{(k/m)} = \omega A$. È lo stesso valore trovato con la proiezione del moto circolare: due strade diverse portano allo stesso risultato, un buon controllo della coerenza della teoria. In una posizione qualsiasi, risolvendo la conservazione rispetto a v,

$$v = \pm\omega\,\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

dove il segno dipende dal verso del moto. L'energia meccanica dell'oscillatore, $\tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$, è proporzionale al quadrato dell'ampiezza: un'oscillazione ampia il doppio contiene un'energia quattro volte maggiore. La Figura 4.5 segue l'oscillazione per mezzo periodo: l'energia potenziale e quella cinetica si scambiano continuamente i ruoli, mentre la loro somma resta costante. Nell'istante $T/8$, quando $x = A/\sqrt{2}$, le due energie sono uguali.

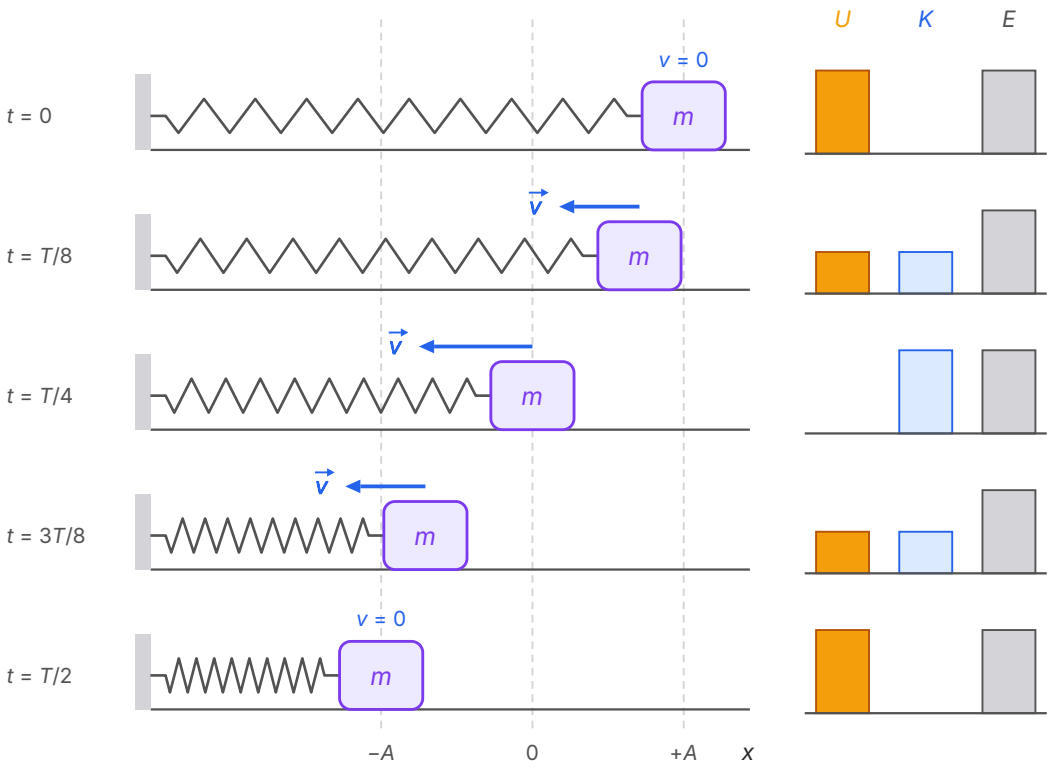

Figura 4.5 Un blocco attaccato a una molla, su un piano senza attrito, in cinque istanti di mezzo periodo, partendo da fermo in $x = +A$. A destra, i diagrammi a barre dell'energia potenziale elastica U, dell'energia cinetica K e dell'energia meccanica E: in $t = T/8$ e in $t = 3T/8$ il blocco è in $x = \pm A/\sqrt{2} \approx \pm 0{,}71A$ e le due energie sono uguali.

La conservazione dell'energia permette anche di trovare l'ampiezza quando il moto non parte da un estremo. Se all'istante iniziale il blocco si trova in x_0 con velocità v_0, l'energia vale $\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$; uguagliandola a $\frac{1}{2}kA^2$ si ottiene $A = \sqrt{(x_0^2 + (v_0/\omega)^2)}$.

ESEMPIO SVOLTO

La velocità in ogni punto

Problema. Un blocco di 0,40 kg, attaccato a una molla di costante elastica 160 N/m su un piano senza attrito, viene spostato di 5,0 cm dall'equilibrio e lasciato andare. Calcola a) la pulsazione e il periodo; b) l'energia meccanica; c) la velocità massima; d) la velocità quando il blocco si trova a 3,0 cm dal centro; e) la posizione in cui l'energia cinetica è uguale a quella potenziale.

Soluzione. Sul blocco lavora solo la forza elastica, conservativa: l'energia meccanica si conserva. a) $\omega = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(160\ \text{N/m} / 0{,}40\ \text{kg})} = 20$ rad/s; $T = 2\pi/\omega \approx 0{,}31$ s. b) Il blocco parte da fermo da un estremo, quindi $A = 5{,}0$ cm e $E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2} \times 160\ \text{N/m} \times (0{,}050\ \text{m})^2 = 0{,}20$ J. c) $v_{max} = \omega A = 20$ rad/s $\times$ 0,050 m = 1,0 m/s. d) $v = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)} = 20\ \text{rad/s} \times \sqrt{(0{,}050^2 - 0{,}030^2)}\ \text{m} = 20\ \text{rad/s} \times 0{,}040\ \text{m} = 0{,}80$ m/s. e) Se $K = U$, ciascuna vale metà dell'energia: $\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}kA^2$, da cui $x = \pm A/\sqrt{2} \approx \pm 3{,}5$ cm.

Controllo. Con la conservazione dell'energia scritta per esteso, al punto d): $\tfrac{1}{2} \times 0{,}40\ \text{kg} \times (0{,}80\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2} \times 160\ \text{N/m} \times (0{,}030\ \text{m})^2 = 0{,}128\ \text{J} + 0{,}072\ \text{J} = 0{,}20$ J. Il risultato e) è minore dell'ampiezza, come deve, e non dipende né da m né da k.

4.4.2 L'energia del pendolo

Anche per il pendolo l'energia meccanica si conserva, perché la tensione è sempre perpendicolare alla velocità e non compie lavoro. Con il filo inclinato di θ il corpo è più in alto del punto più basso di $h = l(1 - \cos\theta)$ (*Fisica 2*, capitolo 10). Per angoli piccoli vale $1 - \cos\theta \approx \theta^2/2$: per 10° il primo membro è 0,01519 e il secondo 0,01523. Allora l'energia potenziale diventa $mgh \approx \tfrac{1}{2}mgl\theta^2 = \tfrac{1}{2}(mg/l)s^2$: ha la stessa forma di quella di una molla, con mg/l al posto di k. Ritroviamo per un'altra strada la «costante elastica» del pendolo.

La conservazione dell'energia, però, vale a qualunque ampiezza, mentre il modello armonico no. Per un pendolo lungo 1,00 m lasciato andare a 10° la velocità nel punto più basso è, esattamente, $\sqrt{(2gl(1 - \cos\theta))} \approx 0{,}5457$ m/s; il modello armonico dà $\omega A = \sqrt{(g/l)} \times l\theta \approx 0{,}5464$ m/s. Le due velocità differiscono dello 0,13%: per piccole oscillazioni il modello funziona benissimo.

4.5 Oscillazioni smorzate, oscillazioni forzate e risonanza

4.5.1 Le oscillazioni smorzate

Un'altalena lasciata a se stessa prima o poi si ferma. Negli oscillatori reali agiscono anche forze non conservative, l'attrito e la resistenza dell'aria, che compiono un lavoro negativo: per la relazione $W_{nc} = \Delta E$ (*Fisica 2*, capitolo 10) l'energia meccanica diminuisce, trasformandosi in energia interna, e con essa diminuisce l'ampiezza. Un'oscillazione la cui ampiezza diminuisce nel

tempo per effetto delle forze dissipative si chiama **oscillazione smorzata**, e la perdita di energia è lo **smorzamento**.

Se la forza resistente è proporzionale alla velocità e piccola, come per un oscillatore che si muove lentamente nell'aria, si dimostra che a ogni periodo l'ampiezza si riduce **della stessa frazione**, mentre il periodo resta praticamente quello dell'oscillatore ideale. La Figura 4.6a mostra il grafico calcolato con questo modello per un'oscillazione di periodo 1,0 s che a ogni periodo conserva l'80% dell'ampiezza: dopo un periodo l'ampiezza è 4,0 cm, dopo due 3,2 cm, e così via. L'energia, proporzionale al quadrato dell'ampiezza, si riduce a ogni periodo al 64%.

Se lo smorzamento è forte il corpo non oscilla più: spostato dall'equilibrio, vi ritorna lentamente senza superarlo, come la porta munita di un chiudiporta idraulico. Gli **ammortizzatori** di un'auto servono proprio a questo: sono cilindri pieni d'olio che dissipano l'energia delle oscillazioni delle sospensioni, così che dopo una buca la carrozzeria torni in equilibrio in circa un'oscillazione, invece di continuare a saltellare.

Un oscillatore che, dopo essere stato spostato o colpito, oscilla senza altri interventi esterni compie un'**oscillazione libera**. La frequenza delle sue oscillazioni libere (in assenza di smorzamento) è la sua **frequenza propria**, f_0: per una massa su una molla $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{(k/m)}$, per un pendolo $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{(g/l)}$. È quello che Galileo, nella frase che apre questo capitolo, chiama il periodo «unico suo naturale».

4.5.2 Le oscillazioni forzate e la risonanza

Che cosa succede se un oscillatore viene spinto da una forza esterna che varia periodicamente, con una frequenza f scelta da noi? Si ha allora un'**oscillazione forzata**, come quella di un'altalena spinta a intervalli regolari o di un edificio scosso da un terremoto. Dopo un breve tempo iniziale di assestamento l'oscillatore **oscilla con la frequenza della forza esterna**, non con la propria; ma l'ampiezza che raggiunge dipende moltissimo da quanto le due frequenze sono vicine. Una massa appesa a una molla tenuta in mano segue senza quasi oscillare una mano che si muove molto lentamente, resta quasi ferma se la mano va su e giù molto in fretta, e oscilla con grande ampiezza quando il ritmo della mano si avvicina alla sua frequenza propria. Il fenomeno per cui un sistema forzato oscilla con ampiezza massima quando la frequenza della forza è vicina alla sua frequenza propria si chiama **risonanza**.

Il grafico dell'ampiezza in funzione della frequenza della forza è la **curva di risonanza** (Figura 4.6b). Il picco è tanto più alto e stretto quanto minore è lo smorzamento: un oscillatore poco smorzato risponde in modo enorme a una forza piccola, purché sia «accordata» con lui, e quasi non risponde alle altre frequenze. Con uno smorzamento forte il picco si abbassa e si allarga.

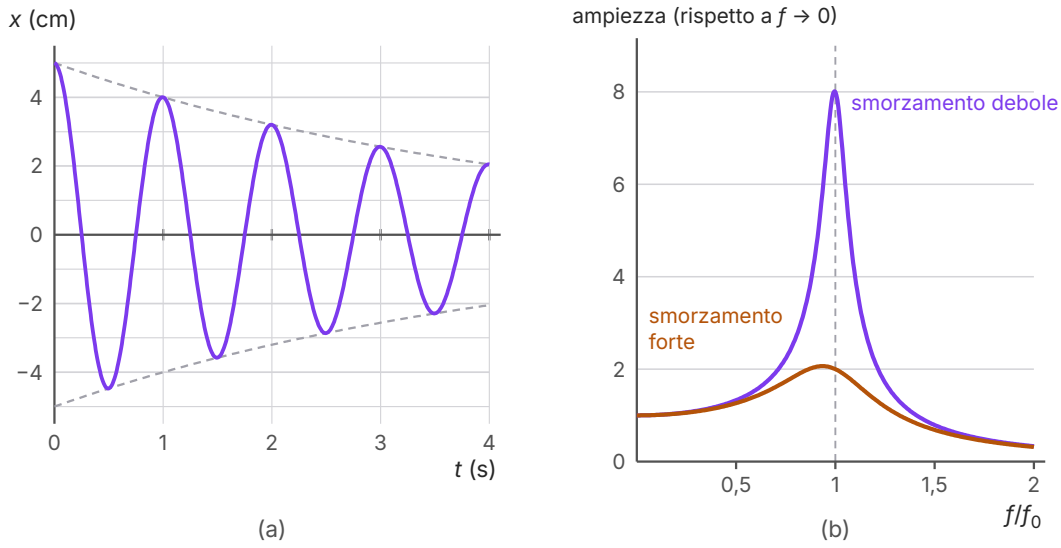

Figura 4.6 Due modelli calcolati. (a) Oscillazione smorzata con periodo 1,0 s e ampiezza iniziale 5,0 cm: a ogni periodo l'ampiezza si riduce all'80% del valore precedente (linee tratteggiate). (b) Curve di risonanza di un oscillatore forzato per due diversi smorzamenti: l'ampiezza, divisa per quella che si ha con una forza quasi costante, in funzione del rapporto fra la frequenza f della forza e la frequenza propria f_0.

Il meccanismo si capisce con l'energia. Una spinta compie lavoro positivo se ha lo stesso verso della velocità, negativo se ha verso opposto. Se le spinte arrivano con il ritmo dell'oscillatore, ognuna lo trova nella stessa fase e gli cede energia; se arrivano con un ritmo diverso, a volte aiutano e a volte frenano, e l'energia non si accumula. Galileo lo spiega, nella Giornata prima dei *Discorsi*, con un pendolo pesante messo in moto soffiandoci contro: «col solo soffiarvi dentro conferiremo noi moto, e moto anche assai grande col reiterare i soffi, ma sotto 'l tempo che è proprio quel delle sue vibrazioni», a patto che i soffi siano «dati a tempo, e non quando il pendolo ci vien incontro». È ciò che fa chi spinge un bambino sull'altalena: una spinta per oscillazione, quando l'altalena comincia ad allontanarsi.

COLLEGAMENTI

La risonanza: utile, pericolosa, a volte fraintesa

Un bicchiere che si rompe. Un calice di cristallo colpito con un dito «canta» alla sua frequenza propria; un suono intenso di quella frequenza lo fa vibrare in risonanza fino a romperlo.

Gli edifici e i terremoti. Anche un edificio ha le sue frequenze proprie, che diminuiscono al crescere dell'altezza. Durante un terremoto soffrono di più gli edifici le cui frequenze proprie sono vicine a quelle dominanti dello scuotimento del terreno. Gli ingegneri progettano le strutture tenendone conto e, in alcuni grattacieli, aggiungono smorzatori: il più noto è la grande sfera d'acciaio appesa come un pendolo nella parte alta del grattacielo Taipei 101, a Taiwan, che oscilla sfasata rispetto all'edificio, ne assorbe energia e ne riduce le oscillazioni.

Il ponte di Tacoma Narrows. Nel 1940 il ponte sospeso di Tacoma Narrows, nello stato di Washington, crollò pochi mesi dopo l'inaugurazione, dopo che il suo impalcato, sotto un vento sostenuto, aveva oscillato e si era torto con ampiezza crescente. Il crollo è spesso presentato come un esempio di risonanza, ma il vento non spingeva il ponte a intervalli regolari: soffiava in modo pressoché costante. Oggi lo si spiega con il **flutter aeroelastico**: è il moto stesso dell'impalcato a modificare il flusso dell'aria in modo che il vento lo spinga sempre «a tempo», cedendogli energia a ogni oscillazione. È un'oscillazione che si autoalimenta, diversa da un'oscillazione forzata da una causa esterna periodica, e da allora i ponti sospesi si progettano e si provano in galleria del vento anche per evitarla.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ — legge oraria del moto armonico: A ampiezza (m), ω pulsazione (rad/s), $\omega t + \varphi_0$ fase (rad), φ_0 fase iniziale. La calcolatrice va in modalità RAD.

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ — la pulsazione è legata al periodo T (s) e alla frequenza f (Hz).

$v = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$ — velocità e accelerazione, proiezioni di quelle del moto circolare uniforme; $v_{max} = \omega A$ al centro, $a_{max} = \omega^2 A$ agli estremi.

$a = -\omega^2 x$ — condizione dinamica del moto armonico: l'accelerazione è proporzionale allo spostamento e opposta. Se il secondo principio dà $a = -Cx$, il moto è armonico con $\omega = \sqrt{C}$.

$T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$ — periodo di una massa m (kg) su una molla di costante k (N/m), orizzontale o verticale; non dipende né dall'ampiezza né da g.

$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$ — periodo di un pendolo semplice di lunghezza l (m), valido solo per piccole oscillazioni (errore sotto l'1% fino a circa 20°); non dipende dalla massa.

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$ — conservazione dell'energia dell'oscillatore (J), da cui $v = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$; l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza.

Oscillazioni smorzate: l'ampiezza diminuisce perché le forze dissipative sottraggono energia. Oscillazioni forzate: a regime il sistema oscilla con la frequenza della forza, con ampiezza massima vicino alla frequenza propria f_0 (risonanza).

SINTESI

- Un moto armonico è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro; la sua legge oraria è $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, con ampiezza A, pulsazione $\omega = 2\pi/T$ e fase iniziale φ_0.
- La velocità e l'accelerazione si ottengono proiettando quelle del moto circolare: $v = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ e $a = -\omega^2 x$.
- Nel moto armonico l'accelerazione è proporzionale allo spostamento dal centro e opposta: $a = -\omega^2 x$. Ogni sistema che obbedisce a questa relazione è un oscillatore armonico.
- La velocità è in quadratura con la posizione (massima al centro, nulla agli estremi), l'accelerazione è in opposizione di fase (massima in modulo agli estremi, nulla al centro).
- Per una massa su una molla il secondo principio dà $a = -(k/m)x$: il moto è armonico con $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$, indipendente dall'ampiezza e da g. Con la molla verticale la gravità sposta soltanto il centro di oscillazione.
- La forza di richiamo del pendolo, $-mg\,\text{sen}\,\theta$, diventa proporzionale allo spostamento solo nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, $\text{sen}\,\theta \approx \theta$; allora $T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$.
- Il periodo del pendolo non dipende dalla massa, per l'equivalenza fra massa inerziale e gravitazionale, e per piccole oscillazioni non dipende dall'ampiezza (isocronismo); per ampiezze grandi si allunga (del 18% a 90°).
- Dal periodo e dalla lunghezza di un pendolo si misura $g = 4\pi^2 l/T^2$; il pendolo a secondi è lungo circa 0,99 m.
- Senza attriti l'energia dell'oscillatore si conserva: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$. Energia cinetica e potenziale si scambiano a ogni quarto di periodo; l'energia totale è proporzionale ad A^2.
- Le forze dissipative smorzano le oscillazioni; con uno smorzamento debole l'ampiezza si riduce della stessa frazione a ogni periodo.
- Un oscillatore forzato oscilla con la frequenza della forza esterna; l'ampiezza è massima quando questa è vicina alla frequenza propria (risonanza), con un picco tanto più alto quanto minore è lo smorzamento.
- Il crollo del ponte di Tacoma Narrows (1940) non fu una semplice risonanza: lo si spiega con il flutter aeroelastico, un'oscillazione che il vento costante alimenta da sé.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nella legge oraria $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, la pulsazione ω:

   A. è il numero di oscillazioni compiute in un secondo

   B. è la velocità angolare del corpo che oscilla

   C. è uguale a $2\pi/T$ e si misura in rad/s

   D. dipende dall'ampiezza dell'oscillazione

2. ● In un moto armonico l'accelerazione ha il modulo massimo:
   A. nei punti di inversione
   B. quando il corpo passa per il centro di oscillazione
   C. a metà strada fra il centro e gli estremi
   D. in nessun punto: è costante

3. ●● Il periodo di un corpo appeso a una molla diventa quattro volte più lungo se:
   A. la massa diventa quattro volte maggiore
   B. la massa diventa sedici volte maggiore
   C. la costante elastica diventa quattro volte maggiore
   D. l'ampiezza diventa quattro volte maggiore

4. ●● Un pendolo semplice compie piccole oscillazioni. Il suo periodo raddoppia se:
   A. si raddoppia la massa appesa
   B. si raddoppia l'ampiezza
   C. si raddoppia la lunghezza del filo
   D. si quadruplica la lunghezza del filo

5. ●● In un oscillatore armonico, la velocità rispetto alla posizione è sfasata di:
   A. zero: le due grandezze sono in fase
   B. π/2: sono in quadratura
   C. π: sono in opposizione di fase
   D. 2π

6. ● Un orologio a pendolo, ben regolato sulla Terra, viene portato sulla Luna, dove g è circa un sesto. L'orologio:
   A. non cambia il suo ritmo
   B. va avanti
   C. va indietro
   D. si ferma subito

7. ●● Se l'ampiezza di oscillazione di una massa su una molla raddoppia, la sua energia meccanica:
   A. quadruplica
   B. raddoppia
   C. resta uguale
   D. si dimezza

8. ●● Un oscillatore viene spinto da una forza periodica esterna. Dopo l'assestamento iniziale oscilla:
   - **A.** sempre con la sua frequenza propria
   - **B.** con ampiezza che non dipende dalla frequenza della forza
   - **C.** con una frequenza uguale alla media fra la propria e quella della forza
   - **D.** con la frequenza della forza, e con ampiezza massima quando questa è vicina alla frequenza propria

Vero o falso

9. ● In un moto armonico, quando il corpo passa per il centro di oscillazione la sua accelerazione è nulla. V / F

10. ● Una massa appesa a una molla oscilla con lo stesso periodo sulla Terra e sulla Luna. V / F

11. ●● Il periodo di un pendolo semplice non dipende dall'ampiezza, qualunque essa sia. V / F

12. ●● Nel moto armonico la velocità e l'accelerazione sono in opposizione di fase. V / F

13. ●● Il ponte di Tacoma Narrows crollò perché il vento soffiava a raffiche con la stessa frequenza delle oscillazioni proprie del ponte. V / F

Applicare

14. ● Un oscillatore compie 15 oscillazioni complete in 6,0 s. Calcola il periodo, la frequenza e la pulsazione.

15. ● La posizione di un corpo è data da $x(t) = (0{,}12\ \text{m})\cos[(5{,}0\ \text{rad/s})\,t]$. Ricava l'ampiezza e il periodo, e calcola la posizione negli istanti $t = 0{,}20$ s e $t = 0{,}50$ s.

16. ● Un corpo di 0,25 kg è attaccato a una molla di costante elastica 40 N/m. Calcola la pulsazione, il periodo e la frequenza delle sue oscillazioni.

17. ●● Un corpo oscilla di moto armonico con ampiezza 8,0 cm e periodo 1,2 s. Calcola la velocità massima e l'accelerazione massima.

18. ● Quanto deve essere lungo un pendolo semplice per oscillare con un periodo di 1,50 s?

19. ● Completa. In un oscillatore armonico l'accelerazione è proporzionale allo _____ dal centro di oscillazione e ha verso _____ ; il periodo di una massa su una molla dipende dalla _____ e dalla _____ , ma non dall'_____.

20. ●● Nella Figura 4.6a leggi l'ampiezza iniziale e l'ampiezza dopo uno, due e tre periodi. Verifica che il rapporto fra due ampiezze successive è costante e calcola quale frazione dell'energia iniziale resta dopo tre periodi.

21. ●● Un corpo appeso a una molla verticale la allunga di 6,0 cm in equilibrio. Calcola il periodo delle sue oscillazioni verticali.

Problemi

22. ●● Un blocco di 0,50 kg, attaccato a una molla di costante elastica 200 N/m su un piano senza attrito, viene spostato di 6,0 cm dall'equilibrio e lasciato andare. Calcola a) la pulsazione e il periodo; b) l'energia meccanica; c) la velocità quando il blocco si trova a 2,0 cm dal centro; d) il tempo che impiega, dall'istante in cui viene lasciato, per raggiungere per la prima volta la posizione a 3,0 cm dal centro.

23. ●● Per misurare g si usa un pendolo lungo (1,200 ± 0,002) m, misurati dal punto di sospensione al centro della sfera; 20 oscillazioni complete durano (43,9 ± 0,2) s. Calcola il periodo e g con le loro incertezze, e confronta il risultato con il valore 9,80 m/s^2.

24. ●●● Un pendolo semplice lungo 0,80 m è appeso al soffitto di un ascensore. Calcola il periodo delle piccole oscillazioni a) quando l'ascensore è fermo o si muove a velocità costante; b) mentre accelera verso l'alto con accelerazione di modulo 2,0 m/s^2; c) mentre accelera verso il basso con accelerazione di modulo 2,0 m/s^2. d) Che cosa succede se il cavo si spezza e l'ascensore cade liberamente? Risolvi nel sistema di riferimento dell'ascensore.

25. ●●● Un blocco di 0,20 kg scivola a 1,5 m/s su un piano orizzontale senza attrito e urta una molla di costante elastica 80 N/m, fissata a una parete; la comprime e viene respinto indietro. Calcola a) la compressione massima della molla; b) per quanto tempo il blocco resta a contatto con la molla; c) l'accelerazione massima del blocco. d) Se il blocco arrivasse a 3,0 m/s, quali di questi risultati cambierebbero?

26. ●●● Su un giradischi che gira a 33⅓ giri al minuto è fissato un piolo a 12 cm dall'asse. Illuminato da una luce orizzontale lontana, il piolo proietta un'ombra su una parete verticale. a) Che moto compie l'ombra? Calcola la sua pulsazione, il suo periodo e la sua ampiezza. b) Calcola la velocità massima dell'ombra e confrontala con la velocità del piolo. c) Calcola l'accelerazione centripeta del piolo e l'accelerazione massima dell'ombra: in quale punto dell'oscillazione si ha questa accelerazione?

27. ●● Un blocco di 0,50 kg, fermo nella posizione di equilibrio di una molla di costante elastica 50 N/m su un piano senza attrito, riceve un colpo che gli dà una velocità di 0,60 m/s verso le x positive. a) Calcola la pulsazione e l'ampiezza dell'oscillazione. b) Scrivi la legge oraria, con la fase iniziale. c) Calcola la posizione e la velocità del blocco 0,10 s dopo il colpo.

28. ●●● Due molle uguali, ciascuna di costante elastica 30 N/m e massa trascurabile, sostengono un corpo di 0,60 kg. a) Le molle sono appese una accanto all'altra (in parallelo) e il corpo è attaccato a entrambe: dimostra che il sistema equivale a una sola molla di costante 60 N/m e calcola il periodo. b) Le molle sono appese una sotto l'altra (in serie) e il corpo è attaccato alla seconda: dimostra che il sistema equivale a una molla di costante 15 N/m e calcola il periodo. c) Qual è il rapporto fra i due periodi?

29. ●●● Un orologio a pendolo è regolato a Roma, dove $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$, come pendolo a secondi ($T = 2{,}000$ s). Viene trasferito in una località equatoriale dove $g = 9{,}78\ \text{m/s}^2$ (nel capitolo 3 hai visto perché g efficace è minore all'equatore). a) Calcola la lunghezza del pendolo e il suo nuovo periodo. b) L'orologio va avanti o indietro? Di quanti secondi al giorno? c) Di quanto bisogna accorciare il pendolo per correggerlo?

Ragionare e argomentare

30. ●● Un compagno sostiene: «Un pendolo con una sfera di piombo oscilla più in fretta di uno uguale con una sfera di legno, perché il peso lo riporta indietro con più forza». Trova l'errore nel ragionamento e spiega che cosa si osserva davvero.

31. ●●● Progetta un esperimento, con un pendolo lungo circa 1 m, un cronometro manuale e un goniometro, per stabilire da quale ampiezza in poi l'allungamento del periodo diventa misurabile. Stima l'incertezza della misura del periodo e confrontala con gli allungamenti del periodo calcolati nell'Approfondimento sulle oscillazioni non piccole.

32. ●● Uno studente deve calcolare la posizione di un corpo con $x(t) = (0{,}10\ \text{m})\cos[(3{,}0\ \text{rad/s})\,t]$ all'istante $t = 0{,}80$ s, e scrive: «$x = 0{,}10\ \text{m} \times \cos 2{,}4 = 0{,}0999$ m, quasi all'estremo». Trova l'errore, correggilo e spiega quale controllo avrebbe potuto fargli capire che il risultato era sbagliato.

33. ●●● Spingendo un bambino sull'altalena, conviene dare una spinta a ogni oscillazione, quando l'altalena comincia ad allontanarsi. Spiega con il lavoro della forza perché, e descrivi che cosa succederebbe se le spinte avessero un periodo un po' diverso da quello dell'altalena.

PER APPROFONDIRE

- [GAL] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: nella Giornata prima, le pagine sul pendolo, sui soffi «dati a tempo» e sulle corde che vibrano.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sull'oscillatore armonico e sulla risonanza, con molti esempi presi da campi diversi della fisica.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulle vibrazioni, per un'introduzione senza formule al pendolo, alle oscillazioni forzate e alla risonanza.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: le misure con il pendolo come esempio di propagazione delle incertezze e di confronto fra due risultati.

Glossario del capitolo

Approssimazione delle piccole oscillazioni
Sostituzione di sen θ con θ (in radianti), accettabile per angoli piccoli: con essa il pendolo diventa un oscillatore armonico.

Centro di oscillazione
Posizione di equilibrio attorno alla quale avviene un'oscillazione; nel moto armonico è il punto $x = 0$.

Curva di risonanza
Grafico dell'ampiezza di un oscillatore forzato in funzione della frequenza della forza; il picco è più alto e stretto se lo smorzamento è debole.

Fase
Argomento del coseno nella legge oraria del moto armonico, $\omega t + \varphi_0$; si misura in radianti e cresce di 2π a ogni periodo.

Fase iniziale
Valore φ_0 della fase all'istante $t = 0$; dipende da come è stato avviato il moto.

Flutter aeroelastico
Oscillazione autoalimentata di una struttura investita da un flusso d'aria, in cui il moto della struttura modifica il flusso in modo da riceverne energia.

Forza di richiamo
Forza che tende a riportare un corpo nella posizione di equilibrio; se è proporzionale allo spostamento produce un moto armonico.

Frequenza propria
Frequenza f_0 delle oscillazioni libere di un sistema non smorzato; per una massa su una molla $(1/2\pi)\sqrt{(k/m)}$.

In opposizione di fase
Detto di due grandezze sfasate di π, sempre di segno opposto, come l'accelerazione e la posizione nel moto armonico.

In quadratura
Detto di due grandezze sfasate di $\pi/2$ (un quarto di periodo), come la velocità e la posizione nel moto armonico.

Isocronismo
Proprietà di un oscillatore il cui periodo non dipende dall'ampiezza; il pendolo semplice la possiede solo per piccole oscillazioni.

Legge oraria del moto armonico
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$: la posizione di un corpo in moto armonico in funzione del tempo.

Oscillatore armonico
Sistema la cui accelerazione è proporzionale allo spostamento dall'equilibrio e opposta, $a = -\omega^2 x$; si muove di moto armonico.

Oscillazione forzata
Oscillazione di un sistema sottoposto a una forza esterna periodica; a regime ha la frequenza della forza.

Oscillazione libera
Oscillazione di un sistema che, dopo essere stato spostato o colpito, oscilla senza altre azioni esterne.

Oscillazione smorzata
Oscillazione la cui ampiezza diminuisce nel tempo perché forze dissipative sottraggono energia all'oscillatore.

Pendolo a secondi
Pendolo semplice con periodo di 2 s, cioè che compie una mezza oscillazione al secondo; è lungo circa 0,99 m.

Pulsazione
Rapidità di crescita della fase di un'oscillazione: $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, in rad/s.

Risonanza
Forte aumento dell'ampiezza di un'oscillazione forzata quando la frequenza della forza è vicina alla frequenza propria del sistema.

Sfasamento
Differenza fra le fasi di due grandezze che oscillano con la stessa pulsazione.

Soluzioni

1. C. Per definizione $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, in rad/s. Non è il numero di oscillazioni al secondo (quella è f) e non è la velocità angolare di qualcosa che gira: il corpo oscilla lungo un segmento.

2. A. $|a| = \omega^2|x|$ è massima dove $|x| = A$, cioè nei punti di inversione; al centro è nulla.

3. B. $T \propto \sqrt{m}$: per moltiplicare T per 4 bisogna moltiplicare m per $4^2 = 16$. Quadruplicando m il periodo raddoppia; quadruplicando k si dimezza; l'ampiezza non conta.

4. D. $T \propto \sqrt{l}$: con l quattro volte maggiore il periodo raddoppia. Massa e ampiezza (piccola) non contano.

5. B. $v = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$: la velocità è in quadratura con la posizione.

6. C. Con g minore il periodo $T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$ è più lungo (circa $\sqrt{6} \approx 2{,}4$ volte): il pendolo compie meno oscillazioni in un'ora e l'orologio va indietro.

7. A. $E = \frac{1}{2}kA^2$: raddoppiando A l'energia diventa $2^2 = 4$ volte maggiore.

8. D. A regime l'oscillatore forzato segue la frequenza della forza; l'ampiezza dipende dalla vicinanza fra questa e la frequenza propria, ed è massima vicino alla risonanza.

9. V. Al centro $x = 0$, quindi $a = -\omega^2 x = 0$ (e la velocità è massima).

10. V. $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$ non contiene g: la gravità sposta soltanto la posizione di equilibrio.

11. F. L'isocronismo vale solo per piccole oscillazioni; per ampiezze grandi il periodo si allunga (dell'1,7% a 30°, del 18% a 90°).

12. F. Sono in quadratura (sfasamento $\pi/2$): la velocità è massima dove l'accelerazione è nulla. In opposizione di fase sono l'accelerazione e la posizione.

13. F. Il vento era pressoché costante, non a raffiche periodiche; il crollo si spiega con il flutter aeroelastico, un'oscillazione autoalimentata dall'interazione fra il moto dell'impalcato e il vento.

14. $T = 6{,}0\text{ s} / 15 = 0{,}40$ s; $f = 1/T = 2{,}5$ Hz; $\omega = 2\pi f \approx 16$ rad/s.

15. $A = 0{,}12$ m; $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(5{,}0\text{ rad/s}) \approx 1{,}3$ s. $x(0{,}20\text{ s}) = 0{,}12\text{ m} \times \cos(1{,}0) \approx 0{,}065$ m $= 6{,}5$ cm; $x(0{,}50\text{ s}) = 0{,}12\text{ m} \times \cos(2{,}5) \approx -0{,}096$ m $= -9{,}6$ cm (fase in radianti).

16. $\omega = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(40\text{ N/m} / 0{,}25\text{ kg})} \approx 13$ rad/s (12,6 rad/s); $T = 2\pi/\omega \approx 0{,}50$ s; $f = 1/T \approx 2{,}0$ Hz.

17. $\omega = 2\pi/T = 2\pi/1{,}2\text{ s} \approx 5{,}24$ rad/s. $v_{max} = \omega A = 5{,}24\text{ rad/s} \times 0{,}080\text{ m} \approx 0{,}42$ m/s; $a_{max} = \omega^2 A = (5{,}24\text{ rad/s})^2 \times 0{,}080\text{ m} \approx 2{,}2\text{ m/s}^2$.

18. $l = gT^2/(4\pi^2) = 9{,}8\text{ m/s}^2 \times (1{,}50\text{ s})^2/(4\pi^2) \approx 0{,}56$ m.

19. spostamento; opposto; massa; costante elastica; ampiezza.

20. Ampiezze lette sul grafico: 5,0 cm; 4,0 cm; 3,2 cm; circa 2,6 cm. Rapporti: $4{,}0/5{,}0 = 0{,}80$; $3{,}2/4{,}0 = 0{,}80$; $2{,}56/3{,}2 = 0{,}80$, costanti. L'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza: dopo tre periodi resta $(0{,}80)^6 = (2{,}56/5{,}0)^2 \approx 0{,}26$ dell'energia iniziale, cioè circa il 26%.

21. In equilibrio $k\Delta l = mg$, quindi $m/k = \Delta l/g$ e $T = 2\pi\sqrt{(\Delta l/g)} = 2\pi\sqrt{(0{,}060\text{ m} / 9{,}8\text{ m/s}^2)} \approx 0{,}49$ s.

22. Sul blocco lavora solo la forza elastica (peso e normale si equilibrano): l'energia meccanica si conserva. a) $\omega = \sqrt{(200\text{ N/m} / 0{,}50\text{ kg})} = 20$ rad/s; $T = 2\pi/\omega \approx 0{,}31$ s. b) $A = 0{,}060$ m, $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 200\text{ N/m} \times (0{,}060\text{ m})^2 = 0{,}36$ J. c) $v = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)} = 20\text{ rad/s} \times \sqrt{(0{,}060^2 - 0{,}020^2)}\text{ m} \approx 1{,}1$ m/s. d) Con $\varphi_0 = 0$, $x = A\cos\omega t = 0{,}030$ m quando $\cos\omega t = 0{,}50$, cioè $\omega t = \pi/3$: $t = (\pi/3)/(20\text{ rad/s}) \approx 0{,}052$ s (un sesto del periodo).

23. $T = 43{,}9\text{ s} / 20 = 2{,}195$ s, $\Delta T = 0{,}2\text{ s} / 20 = 0{,}01$ s: $T = (2{,}20 \pm 0{,}01)$ s. $g = 4\pi^2 l/T^2 = 4\pi^2 \times 1{,}200\text{ m} / (2{,}195\text{ s})^2 \approx 9{,}83\text{ m/s}^2$. Incertezza relativa: $\Delta g/g = \Delta l/l + 2\Delta T/T = 0{,}002/1{,}200 + 2 \times 0{,}01/2{,}195 \approx 0{,}0017 + 0{,}0091 \approx 0{,}011$; $\Delta g \approx 0{,}1\text{ m/s}^2$. $g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\text{ m/s}^2$: compatibile con

9,80 m/s^2. L'incertezza è dominata dal periodo: contare più oscillazioni o usare una fotocellula la ridurrebbe.

24. Sistema di riferimento dell'ascensore, non inerziale quando accelera (capitolo 3). Sul corpo agiscono il peso $m\boldsymbol{g}$, la tensione e, se l'ascensore ha accelerazione $\boldsymbol{A}$, la forza apparente $-m\boldsymbol{A}$. Peso e forza apparente si sommano nella forza $m\boldsymbol{g}_{\text{eff}}$, con $\boldsymbol{g}_{\text{eff}} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{A}$ (la gravità efficace del capitolo 3), che sostituisce il peso nella forza di richiamo: $T = 2\pi\sqrt{(l/g_{\text{eff}})}$. a) $g_{\text{eff}} = g$: $T = 2\pi\sqrt{(0{,}80\text{ m} / 9{,}8\text{ m/s}^2)} \approx 1{,}80$ s. b) Accelerazione verso l'alto: la forza apparente è verso il basso, $g_{\text{eff}} = g + A = 11{,}8\text{ m/s}^2$, $T = 2\pi\sqrt{(0{,}80/11{,}8)}$ s ≈ 1,64 s. c) Accelerazione verso il basso: $g_{\text{eff}} = g - A = 7{,}8\text{ m/s}^2$, $T = 2\pi\sqrt{(0{,}80/7{,}8)}$ s ≈ 2,01 s. d) In caduta libera $A = g$ e $g_{\text{eff}} = 0$: non c'è forza di richiamo (assenza di peso), il pendolo non oscilla; se era in moto, il corpo continua a girare attorno al punto di sospensione con il filo teso, se era fermo resta fermo rispetto all'ascensore.

25. Durante il contatto sul blocco agiscono il peso e la normale, che si equilibrano, e la forza elastica: il blocco compie mezza oscillazione armonica. a) Si conserva l'energia meccanica (solo la forza elastica compie lavoro): $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = v\sqrt{(m/k)} = 1{,}5$ m/s × $\sqrt{(0{,}20\text{ kg} / 80\text{ N/m})} = 0{,}075\text{ m} = 7{,}5\text{ cm}$. b) Il contatto dura mezzo periodo, perché il blocco entra al centro di oscillazione, arriva all'estremo e ritorna al centro: $t = T/2 = \pi\sqrt{(m/k)} = \pi \times 0{,}050\text{ s} \approx 0{,}16$ s. c) Per il secondo principio $a_{\text{max}} = kA/m = 80\text{ N/m} \times 0{,}075\text{ m} / 0{,}20\text{ kg} = 30\text{ m/s}^2$ (cioè $\omega^2 A$, con $\omega = 20$ rad/s). d) A 3,0 m/s raddoppiano la compressione (15 cm) e l'accelerazione massima (60 m/s^2), mentre il tempo di contatto resta 0,16 s: il periodo non dipende dall'ampiezza (purché la molla segua ancora la legge di Hooke).

26. a) Il piolo si muove di moto circolare uniforme; l'ombra sulla parete è la sua proiezione su un diametro, quindi compie un moto armonico. $\omega = 2\pi \times (33{,}33\text{ giri} / 60\text{ s}) \approx 3{,}49$ rad/s; $T = 60\text{ s} / 33{,}33 = 1{,}80$ s; $A = 12$ cm. b) $v_{\text{max}} = \omega A = 3{,}49\text{ rad/s} \times 0{,}12\text{ m} \approx 0{,}42$ m/s: è uguale alla velocità del piolo, che l'ombra raggiunge quando passa per il centro (lì la velocità del piolo è parallela alla parete). c) $a_{\text{c}} = \omega^2 r = (3{,}49$ rad/s$)^2 \times 0{,}12\text{ m} \approx 1{,}5\text{ m/s}^2$; anche l'accelerazione massima dell'ombra vale $\omega^2 A \approx 1{,}5\text{ m/s}^2$, e si ha negli estremi dell'oscillazione, quando l'accelerazione centripeta del piolo è parallela alla parete.

27. a) $\omega = \sqrt{(50\text{ N/m} / 0{,}50\text{ kg})} = 10$ rad/s. Il blocco parte dal centro con velocità 0,60 m/s, che è la velocità massima: $A = v_{\text{max}}/\omega = 0{,}060$ m (oppure dall'energia: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$). b) $x(0) = 0$ con velocità positiva: $\varphi_0 = -\pi/2$, $x(t) = (0{,}060\text{ m}) \cos[(10\text{ rad/s})t - \pi/2] = (0{,}060\text{ m}) \operatorname{sen}[(10\text{ rad/s})t]$. c) $x(0{,}10\text{ s}) = 0{,}060\text{ m} \times \operatorname{sen}(1{,}0) \approx 0{,}050$ m; $v = \omega A \cos(\omega t) = 0{,}60\text{ m/s} \times \cos(1{,}0) \approx 0{,}32$ m/s, verso le x positive.

28. Per ogni molla vale la legge di Hooke; la massa delle molle è trascurabile. a) In parallelo le due molle hanno lo stesso allungamento x e tirano entrambe: la forza totale è $kx + kx = 2kx$, quindi $k_{\text{eq}} = 2k = 60$ N/m. Sul corpo, attorno all'equilibrio, la risultante è $-k_{\text{eq}}y$ (come per la molla verticale): $T = 2\pi\sqrt{(0{,}60\text{ kg} / 60\text{ N/m})} \approx 0{,}63$ s. b) In serie, ogni molla (di massa trascurabile) trasmette la stessa forza F, e i due allungamenti si sommano: $x = F/k + F/k = 2F/k$, cioè $F = (k/2)x$ e $k_{\text{eq}} = 15$ N/m. $T = 2\pi\sqrt{(0{,}60\text{ kg} / 15\text{ N/m})} \approx 1{,}26$ s. c) $T_{\text{serie}}/T_{\text{parallelo}} = \sqrt{(60/15)} = 2$.

29. Per piccole oscillazioni il pendolo è un oscillatore armonico con $T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$; la lunghezza non cambia nel trasferimento. a) $l = gT^2/(4\pi^2) = 9{,}80 \times 2{,}000^2/(4\pi^2)\text{ m} \approx 0{,}9929$ m. Nuovo periodo: $T' = T\sqrt{(9{,}80/9{,}78)} \approx 2{,}0020$ s. b) Il periodo è più lungo, quindi in un giorno il pendolo compie meno oscillazioni di quelle previste e l'orologio va indietro. In 86 400 s reali compie $86\,400/T'$ oscillazioni, e segna $86\,400 \times T/T'$ s: il ritardo è $86\,400\text{ s} \times (1 - 2{,}000/2{,}0020) \approx 88$ s al giorno, cioè circa un minuto e mezzo. c) Serve $l' = g'T^2/(4\pi^2) = l \times 9{,}78/9{,}80 \approx 0{,}9909$ m: il pendolo va accorciato di circa 2,0 mm. Bastano piccole differenze di g per far sbagliare un buon orologio: è uno dei modi con cui, storicamente, si è scoperto che g varia con la latitudine.

30. Traccia di risposta. È vero che sulla sfera di piombo agisce una forza di richiamo maggiore ($mg \operatorname{sen}\theta$ è proporzionale a m), ma la sfera ha anche un'inerzia maggiore nella stessa proporzione: l'accelerazione $a_{\text{t}} = -g \operatorname{sen}\theta$ non dipende dalla massa (equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazio-

nale). Le due sfere oscillano con lo stesso periodo $2\pi\sqrt{(l/g)}$. Nella realtà la sfera di legno, più leggera rispetto alla resistenza dell'aria che subisce, si smorza più in fretta, ma il periodo resta praticamente lo stesso.

31. Traccia di risposta. Si misura il tempo di 20 oscillazioni per ampiezze crescenti (5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°...), lasciando andare il pendolo da fermo con il filo teso, e si ripete ogni misura 3–5 volte. Con un cronometro manuale l'incertezza su 20 oscillazioni è circa 0,2 s su circa 40 s, cioè lo 0,5%; ripetendo e facendo la media si può scendere a 0,2–0,3%. Gli allungamenti calcolati sono 0,2% a 10°, 0,4% a 15°, 0,8% a 20°, 1,2% a 25°, 1,7% a 30°: con questi strumenti l'effetto diventa chiaramente misurabile intorno ai 20–25°. Conviene confrontare ogni misura con quella a 5° fatta con lo stesso pendolo (così l'incertezza su l e su g non conta) e tenere conto che l'ampiezza diminuisce un po' durante le 20 oscillazioni.

32. Lo studente ha usato la calcolatrice in modalità gradi: 2,4 è la fase in radianti. Correttamente $x = 0{,}10\ \text{m} \times \cos(2{,}4\ \text{rad}) \approx -0{,}074\ \text{m}$: il corpo è dall'altra parte del centro, a 7,4 cm. Controllo: il periodo è $2\pi/(3{,}0\ \text{rad/s}) \approx 2{,}1\ \text{s}$; a 0,80 s è passato più di un quarto di periodo (circa 0,38 periodi), e dopo un quarto di periodo il corpo, partito da $+A$, ha già superato il centro: non può essere ancora vicino all'estremo positivo.

33. Traccia di risposta. Il lavoro di una spinta è positivo se la forza ha lo stesso verso della velocità. Spingendo una volta per oscillazione, quando l'altalena comincia ad allontanarsi, la spinta ha sempre il verso del moto e cede energia; l'energia si accumula e l'ampiezza cresce finché l'energia ceduta a ogni spinta compensa quella dissipata dall'aria e dagli attriti in un'oscillazione. Se il periodo delle spinte fosse un po' diverso da quello dell'altalena, ogni spinta arriverebbe in una fase un po' diversa: per un certo tempo le spinte aiuterebbero, poi arriverebbero mentre l'altalena viene incontro, compiendo lavoro negativo e frenandola. L'ampiezza crescerebbe e poi diminuirebbe senza mai diventare grande: è il motivo per cui la risonanza richiede che la frequenza della forza sia vicina a quella propria (Galileo: soffi «dati a tempo, e non quando il pendolo ci vien incontro»).