CAPITOLO

1

I vettori e le leggi del moto

Conoscere le forze e lo stato di un corpo in un istante significa poterne prevedere il moto: è la promessa della meccanica, e anche il suo limite.

OBIETTIVI

1. Scrivere i vettori con i versori degli assi e sommarli, sottrarli e moltiplicarli per un numero per componenti, ricavando modulo e direzione con il controllo del quadrante.
2. Calcolare il prodotto scalare di due vettori nelle due forme, interpretarlo come proiezione e usarlo per trovare l'angolo fra due vettori.
3. Calcolare il modulo del prodotto vettoriale e trovarne direzione e verso con la regola della mano destra.
4. Definire velocità e accelerazione istantanee come limiti per $\Delta t \to 0$ e stimarle da tabelle, grafici e video.
5. Scomporre l'accelerazione di un moto curvilineo in accelerazione tangenziale e centripeta e risolvere problemi di moto circolare non uniforme.
6. Spiegare come le leggi della dinamica e le condizioni iniziali permettono di prevedere il moto, e quali sono i limiti di questa previsione.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Ripartiamo da... le leggi del moto 2
1.2 L'algebra dei vettori in componenti 3
1.3 Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale 6
1.4 Velocità e accelerazione istantanee 9
1.5 Il moto curvilineo qualsiasi 14
1.6 Le leggi del moto come modello predittivo 16

Fisica 3 · Parte I · Le leggi del moto e i sistemi di riferimento · versione 1.0
Capitolo 1: I vettori e le leggi del moto · pagine 21–46 del volume completo · estratto per lo studio

Una sonda spaziale viaggia per anni verso un pianeta lontano a motori spenti, eppure chi l'ha lanciata sapeva già, il giorno della partenza, dove si sarebbe trovata ogni giorno del viaggio. Dietro questa previsione, come dietro il navigatore che stima l'ora di arrivo, ci sono le leggi del moto che conosci dai volumi precedenti, scritte però in una forma più precisa.

Questo capitolo prepara gli strumenti del secondo biennio: il calcolo con i vettori per componenti, i due prodotti fra vettori (lo scalare e il vettoriale), una definizione precisa di velocità e accelerazione «in un istante», l'accelerazione di un moto curvilineo qualsiasi e il senso in cui le leggi del moto permettono di *prevedere*.

1.1 Ripartiamo da… le leggi del moto

Riassumiamo ciò che useremo continuamente in questo volume. Se un punto non ti è chiaro, riprendi il capitolo indicato di *Fisica 2*: qui non lo rispiegheremo.

Il moto nel piano (*Fisica 2*, capitolo 1). La posizione di un corpo è data dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$, che va dall'origine al corpo; lo spostamento è $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. La velocità media è $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$, la velocità istantanea $\boldsymbol{v}$ è tangente alla traiettoria; l'accelerazione media è $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$, e c'è accelerazione anche quando cambia soltanto la direzione della velocità. Per il principio di indipendenza dei moti, un moto nel piano si studia come due moti rettilinei lungo gli assi, legati soltanto dal tempo.

Il proiettile (*Fisica 2*, capitolo 2). Senza aria il moto orizzontale è uniforme e quello verticale è uniformemente accelerato, con accelerazione $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ verso il basso: $x = v_{0x}t$, $y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$. La traiettoria è un arco di parabola.

Il moto circolare uniforme (*Fisica 2*, capitolo 3). Su una circonferenza di raggio r percorsa con periodo T, la velocità angolare è $\omega = 2\pi/T$ (in rad/s) e la velocità ha modulo $v = \omega r$. Il moto è accelerato: l'accelerazione centripeta punta verso il centro e vale $a_c = v^2/r = \omega^2 r$.

I tre principi della dinamica (*Fisica 2*, capitoli 4–7). Primo: in un sistema di riferimento inerziale un corpo su cui agisce una risultante nulla resta in quiete o in moto rettilineo uniforme. Secondo: la risultante delle forze è $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, da usare per componenti, $\Sigma F_x = ma_x$, $\Sigma F_y = ma_y$. Terzo: se A esercita su B la forza $\boldsymbol{F}_{AB}$, B esercita su A la forza $\boldsymbol{F}_{BA} = -\boldsymbol{F}_{AB}$. In un moto curvilineo la risultante ha una componente verso il centro di curvatura, che fa da forza centripeta: $F_c = mv^2/r$.

Il metodo per un problema di dinamica non cambia: si sceglie il corpo, si disegna il diagramma di corpo libero, si fissano gli assi, si scrive il secondo principio per componenti. In questo volume lo applicheremo a osservatori in moto, oscillazioni, urti, corpi che ruotano, fluidi, pianeti e molecole.

DA RICORDARE

I simboli di questo volume. Un vettore si scrive in grassetto corsivo ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$), il suo modulo in corsivo semplice (a, F); nelle figure il vettore ha una freccia sopra la lettera. I versori degli assi sono in grassetto diritto: **i**, **j**, **k**. Il segno × fra due vettori indica il prodotto vettoriale; fra due numeri, come in $3{,}0 \times 10^8$ m/s, è la moltiplicazione della notazione scientifica. In fisica scriviamo «tan» per la tangente di un angolo; il libro di matematica scrive «tg»: è la stessa funzione.

1.2 L'algebra dei vettori in componenti

1.2.1 I versori

Nel primo volume hai scomposto i vettori nelle loro componenti cartesiane. Ora scriviamo questa scomposizione come una vera uguaglianza fra vettori, con un nuovo strumento. Si chiama **versore** un vettore di modulo 1, privo di unità di misura, che indica soltanto una direzione e un verso: il versore di un vettore $\boldsymbol{a}$ non nullo è $\boldsymbol{a}/a$. In un sistema di riferimento cartesiano si usano i **versori degli assi**: **i**, **j** e **k**, diretti nel verso positivo degli assi x, y e z (Figura 1.1). Ogni vettore del piano è la somma di due vettori paralleli agli assi:

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

I numeri a_x e a_y, con segno e unità di misura, sono le componenti cartesiane; i vettori $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ sono le componenti vettoriali. Con l'asse x verso est e l'asse y verso nord, uno spostamento di 3,0 m verso est e 4,0 m verso nord è $\Delta\boldsymbol{r} = (3{,}0\text{ m})\mathbf{i} + (4{,}0\text{ m})\mathbf{j}$, e una velocità di 12 m/s verso ovest è $\boldsymbol{v} = (-12\text{ m/s})\mathbf{i}$: l'unità di misura sta nella componente, il versore è un numero puro con una direzione.

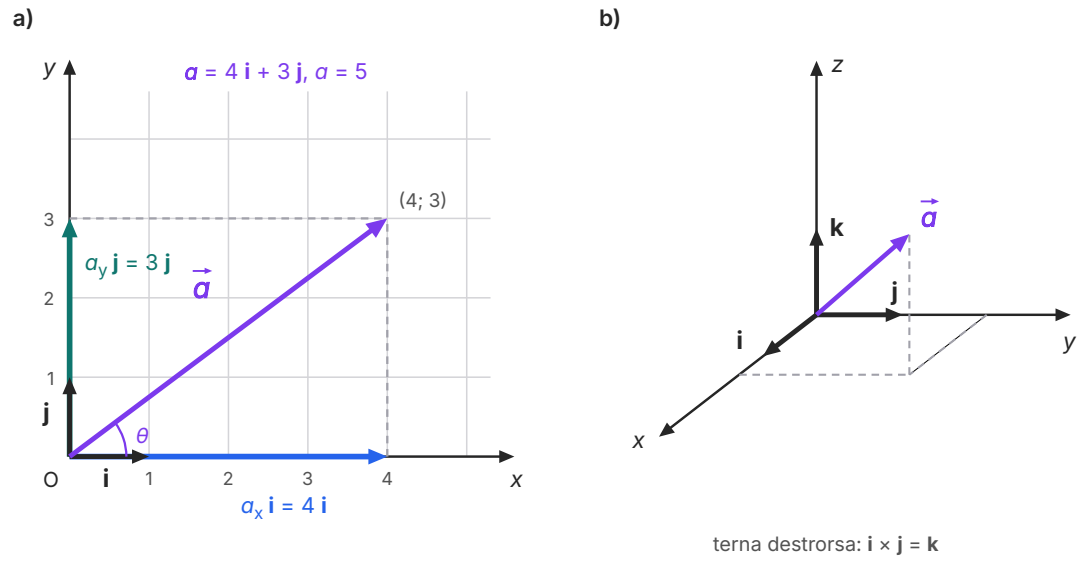


Figura 1.1 a) I versori **i** e **j** degli assi e la scomposizione $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ di un vettore del piano: qui $a_x = 4$, $a_y = 3$ (in unità della griglia) e il modulo è 5. b) Nello spazio si aggiunge il versore **k** dell'asse z; la terna di assi è destrorsa. Le linee tratteggiate mostrano le tre componenti del vettore $\boldsymbol{a}$.

1.2.2 Modulo e direzione dalle componenti

Dalle componenti si ricavano il modulo, con il teorema di Pitagora, e l'angolo θ che il vettore forma con il verso positivo dell'asse x, misurato in senso antiorario:

$$a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)} \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Il tasto $\tan^{-1}$ della calcolatrice restituisce sempre un angolo fra −90° e +90°, cioè un vettore che punta verso destra; ma (3; 3) e (−3; −3) hanno lo stesso rapporto a_y/a_x. Perciò si fa sempre il **controllo del quadrante**: si guardano i segni delle componenti e, se a_x è negativa, si aggiungono 180° al risultato della calcolatrice.

ERRORE FREQUENTE

«Il vettore $\boldsymbol{a}$ = (−3,0 m)**i** + (3,0 m)**j** forma con l'asse x l'angolo $\tan^{-1}(3{,}0/(-3{,}0)) = -45°$.» **No.** −45° indica un vettore che punta in basso a destra, mentre $\boldsymbol{a}$, con componente x negativa e y positiva, punta in alto a sinistra, nel secondo quadrante: θ = −45° + 180° = 135°. Il segno delle componenti dice il quadrante; la calcolatrice, da sola, non lo sa.

1.2.3 Somma, differenza e prodotto per un numero

I versori non cambiano durante un calcolo, perciò si possono raccogliere i termini con lo stesso versore, come i monomi simili in algebra. Se $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, $\boldsymbol{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ e k è un numero:

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\,\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\,\mathbf{j} \qquad k\boldsymbol{a} = ka_x\mathbf{i} + ka_y\mathbf{j}$$

ESEMPIO SVOLTO

Il volo dell'elisoccorso

Problema. Un elicottero di soccorso vola per 12,0 km in direzione 30° a nord dell'est, poi per altri 20,0 km verso nord-ovest. Con l'asse x verso est e l'asse y verso nord, calcola a) lo spostamento totale per componenti; b) il suo modulo e la sua direzione; c) la direzione da seguire per tornare in linea retta alla base.

Soluzione. a) Il primo tratto forma 30° con l'asse x, il secondo 135° (nord-ovest è a metà fra il nord, 90°, e l'ovest, 180°):

$$\Delta\boldsymbol{r}_1 = (12{,}0\text{ km})(\cos 30°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j}) = (10{,}39\text{ km})\,\mathbf{i} + (6{,}00\text{ km})\,\mathbf{j}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}_2 = (20{,}0\text{ km})(\cos 135°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 135°\,\mathbf{j}) = (-14{,}14\text{ km})\,\mathbf{i} + (14{,}14\text{ km})\,\mathbf{j}$$

Sommando i termini con lo stesso versore: $\Delta\boldsymbol{r} = (-3{,}75\text{ km})\,\mathbf{i} + (20{,}14\text{ km})\,\mathbf{j}$.

b) Il modulo è $\sqrt{(3{,}75^2 + 20{,}14^2)}$ km $\approx 20{,}5$ km. La calcolatrice dà $\tan^{-1}(20{,}14/(-3{,}75)) \approx -79{,}5°$; ma la componente x è negativa e la y positiva (secondo quadrante): $\theta = -79{,}5° + 180° = 100{,}5°$, cioè 10,5° a ovest del nord.

c) Serve lo spostamento opposto, $-\Delta\boldsymbol{r} = (3{,}75\text{ km})\,\mathbf{i} - (20{,}14\text{ km})\,\mathbf{j}$: angolo $100{,}5° + 180° = 280{,}5°$, cioè 10,5° a est del sud.

Controllo. Lo spostamento (20,5 km) è minore della distanza percorsa (32,0 km), come deve essere.

1.2.4 Nello spazio: la terna destrorsa

Il terzo asse ci servirà soprattutto per il prodotto vettoriale, che dà un vettore perpendicolare al piano dei due vettori di partenza. Nello spazio $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ e, applicando due volte il teorema di Pitagora, $a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$. Gli assi formano sempre una **terna destrorsa**: se le dita della mano destra si chiudono ruotando dall'asse x verso l'asse y, il pollice indica il verso positivo dell'asse z. Nei problemi nel piano metteremo x verso destra e y verso l'alto: allora l'asse z esce dal foglio verso chi guarda.

1.3 Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale

In fisica capita spesso di dover «moltiplicare» due vettori: una forza per uno spostamento, una posizione per una forza. Ci sono due modi utili di farlo, e li useremo per tutto il volume.

1.3.1 Il prodotto scalare

Si chiama **angolo fra due vettori** l'angolo θ, compreso fra $0°$ e $180°$, che i due vettori formano quando sono disegnati con l'origine in comune. Si chiama **prodotto scalare** di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ il numero

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta$$

Si legge «$\boldsymbol{a}$ scalare $\boldsymbol{b}$». Il risultato è uno scalare: un numero con un segno e con un'unità di misura, il prodotto delle unità dei due vettori. Il suo significato si vede nella Figura 1.2: il numero $b\cos\theta$ è la **proiezione** di $\boldsymbol{b}$ sulla direzione di $\boldsymbol{a}$, la lunghezza con segno della sua «ombra» sulla retta di $\boldsymbol{a}$. Il prodotto scalare è quindi il modulo di un vettore per la proiezione dell'altro: misura quanto i due vettori «vanno nella stessa direzione». Ne seguono le proprietà essenziali:

- il prodotto scalare è positivo se $\theta < 90°$, negativo se $\theta > 90°$, nullo se $\theta = 90°$. Due vettori non nulli perpendicolari si dicono **vettori ortogonali**: il loro prodotto scalare è zero;
- per vettori paralleli e concordi $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab$; in particolare $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$;
- il prodotto scalare è commutativo, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$, e distributivo rispetto alla somma, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

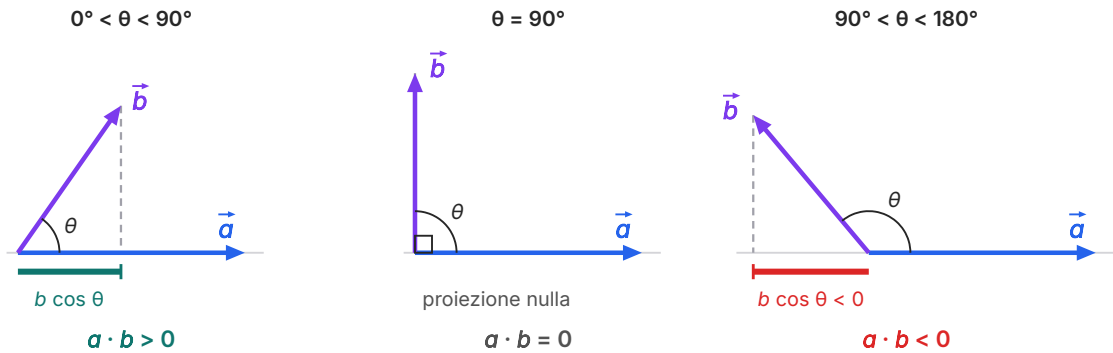


Figura 1.2 Il prodotto scalare come proiezione. Il segmento colorato sulla retta di $\boldsymbol{a}$ è la proiezione $b\cos\theta$ del vettore $\boldsymbol{b}$; il prodotto scalare è $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot (b\cos\theta)$. È positivo se l'angolo fra i vettori è acuto, nullo se è retto, negativo se è ottuso.

I versori degli assi hanno modulo 1 e sono perpendicolari fra loro, quindi $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$. Moltiplicando $(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j})$ con la proprietà distributiva, dei quattro

termini restano soltanto quelli con $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$, e si ottiene la forma per componenti:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y \qquad \text{(nello spazio: } + a_z b_z\text{)}$$

ESEMPIO SVOLTO

Le due forme del prodotto scalare coincidono

Problema. Dimostra, senza usare la proprietà distributiva, che $ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$ per due vettori qualsiasi del piano.

Passo 1. Disegna $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con l'origine in comune. Il vettore $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ va dalla punta di $\boldsymbol{b}$ alla punta di $\boldsymbol{a}$: i tre vettori formano un triangolo con i lati a, b, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, e θ è l'angolo fra i primi due.

Passo 2. Per il teorema del coseno (teorema di Carnot), che conosci dalla matematica:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Passo 3. Le componenti di $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ sono $a_x - b_x$ e $a_y - b_y$; per il teorema di Pitagora:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (a_x-b_x)^2 + (a_y-b_y)^2 = a^2 + b^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y)$$

Passo 4. Uguagliando le due espressioni, a^2 e b^2 si cancellano e resta $ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$.

Controllo. Con $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i}$ e $\boldsymbol{b} = 2\mathbf{j}$, perpendicolari, la formula dà $3\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0$, come $\cos 90° = 0$.

Insieme, le due forme danno l'angolo fra due vettori noti per componenti: $\cos\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/(ab)$. Due droni volano alla stessa quota con velocità $\boldsymbol{v}_1 = (4{,}0\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{j})$ m/s e $\boldsymbol{v}_2 = (-1{,}0\mathbf{i} + 6{,}0\mathbf{j})$ m/s. Allora $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 4{,}0\cdot(-1{,}0) + 3{,}0\cdot 6{,}0 = 14\ \text{m}^2/\text{s}^2$; i moduli sono 5,0 m/s e $\sqrt{37}$ m/s $\approx 6{,}08$ m/s; $\cos\theta = 14/(5{,}0\cdot 6{,}08) \approx 0{,}460$ e $\theta \approx 62{,}6°$.

Il lavoro di una forza costante, che nel volume scorso hai scritto $W = Fs\cos\alpha$, è proprio un prodotto scalare, $W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$; nel capitolo 5 lo useremo in questa forma, insieme alla potenza $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$.

1.3.2 Il prodotto vettoriale

Si chiama **prodotto vettoriale** di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e si scrive $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ («$\boldsymbol{a}$ vettore $\boldsymbol{b}$»), il vettore $\boldsymbol{c}$ definito così (Figura 1.3):

- il **modulo** è $c = ab$ sen θ: l'area del parallelogramma che ha $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ come lati, di base a e altezza b sen θ;
- la **direzione** è perpendicolare al piano che contiene $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$;
- il **verso** si trova con la regola della mano destra: si chiudono le dita della mano destra ruotando da $\boldsymbol{a}$ verso $\boldsymbol{b}$, per l'angolo minore; il pollice indica il verso di $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

È la regola con cui nel primo volume hai dato un verso al momento di una forza: nel capitolo 9 scriveremo infatti il momento come $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$, e nel capitolo 10 il momento angolare come $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}$

$\times \boldsymbol{F}$, e nel capitolo 10 il momento angolare come $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$.

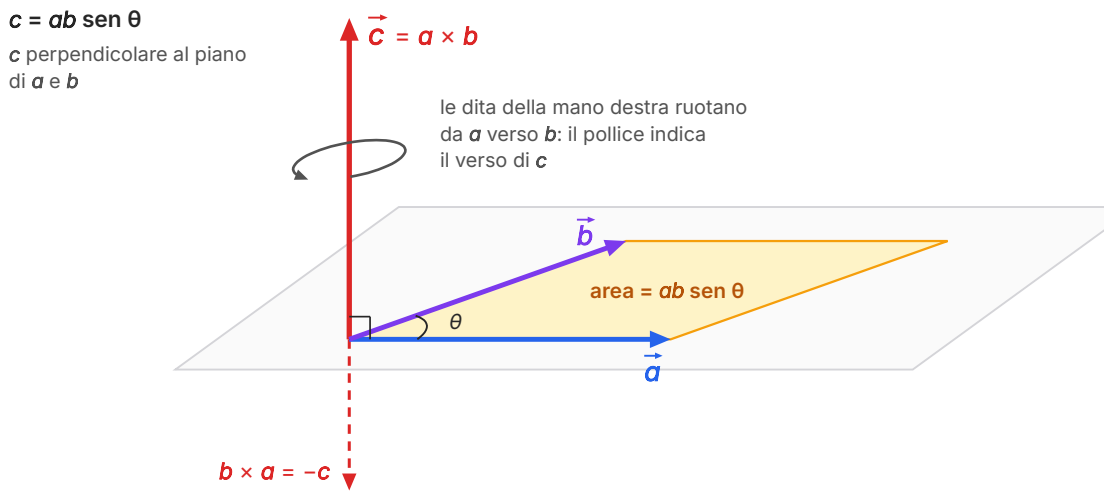


Figura 1.3 Il prodotto vettoriale $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Il modulo ab sen θ è l'area del parallelogramma colorato di lati $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$; la direzione è perpendicolare al piano dei due vettori, e il verso è quello del pollice della mano destra quando le dita ruotano da $\boldsymbol{a}$ verso $\boldsymbol{b}$. Scambiando l'ordine si ottiene il vettore opposto, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c}$ (tratteggiato).

Dalla definizione seguono proprietà molto diverse da quelle del prodotto fra numeri. **L'ordine conta**: ruotando da $\boldsymbol{b}$ verso $\boldsymbol{a}$ il pollice punta dall'altra parte, quindi $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$; si dice che il prodotto vettoriale gode della **proprietà anticommutativa**. Per vettori paralleli (sen θ = 0) il prodotto vettoriale è nullo, in particolare $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$; il suo modulo è massimo, ab, per vettori perpendicolari, al contrario del prodotto scalare. Per i versori di una terna destrorsa $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, e scambiando l'ordine cambia il segno.

Nei problemi nel piano del foglio, con l'asse z uscente, il prodotto vettoriale di due vettori del piano è diretto lungo z: esce dal foglio se la rotazione da $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ è antioraria, entra se è oraria. Per i due droni, $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ ha modulo $5{,}0 \cdot 6{,}08 \cdot \text{sen } 62{,}6° \approx 27\ \text{m}^2/\text{s}^2$ ed esce dal foglio, perché da $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ si ruota in senso antiorario.

APPROFONDIMENTO

Il prodotto vettoriale per componenti

Con la proprietà distributiva (valida anche per il prodotto vettoriale, purché non si scambi l'ordine dei fattori) e i prodotti fra i versori si ricava

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$$

Per due vettori del piano xy resta soltanto la componente lungo $\mathbf{k}$, $a_x b_y - a_y b_x$: positiva se il vettore esce dal foglio, negativa se vi entra. Per i due droni: $4{,}0 \cdot 6{,}0 - 3{,}0 \cdot (-1{,}0) = 27\ \mathrm{m^2/s^2}$, come con ab sen θ. Ne viene anche un controllo dell'angolo: sen θ = 27/30,4 ≈ 0,888 e cos θ ≈ 0,460 danno entrambi θ ≈ 62,6°.

1.4 Velocità e accelerazione istantanee

1.4.1 Il passaggio al limite

Nel primo volume (*Fisica 1*, capitolo 15) la velocità istantanea era il valore a cui si avvicina la velocità media quando l'intervallo di tempo diventa piccolissimo, e la pendenza della tangente al grafico spazio-tempo. Ora diamo a questa idea una forma precisa, perché da qui in avanti ogni grandezza «in un istante» sarà costruita allo stesso modo.

Un treno della metropolitana parte dalla stazione. Per non scuotere i passeggeri l'accelerazione cresce gradualmente; nel modello che usiamo la posizione lungo il binario, nei primi secondi, è $s = 0{,}030\ t^3$ (s in metri, t in secondi). Cerchiamo la velocità all'istante $t_0 = 4{,}0$ s, quando il treno è a 1,92 m, calcolando le velocità medie su intervalli sempre più brevi, sia dopo sia prima di t_0 (Tabella 1.1).

Tabella 1.1 Velocità medie del treno ($s = 0{,}030\ t^3$) su intervalli sempre più brevi che cominciano o terminano all'istante $t_0 = 4{,}0$ s.

Δt (s)	velocità media fra t_0 e $t_0 + \Delta t$ (m/s)	velocità media fra $t_0 - \Delta t$ e t_0 (m/s)
1	1,83	1,11
0,5	1,6275	1,2675
0,1	1,4763	1,4043
0,01	1,4436	1,4364
0,001	1,44036	1,43964

Le due colonne si avvicinano allo stesso numero, 1,44 m/s, una dall'alto e l'altra dal basso, e ci si avvicinano quanto vogliamo pur di prendere Δt abbastanza piccolo. Quel numero è la velocità

istantanea in t_0, e si scrive

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(«il limite di $\Delta s/\Delta t$ per Δt che tende a zero»). Il **limite** è il valore a cui il rapporto si avvicina indefinitamente quando Δt diventa sempre più piccolo, senza mai essere zero. Non si può porre semplicemente $\Delta t = 0$: il rapporto diventerebbe 0/0, che non ha significato. Sul grafico (Figura 1.4) le secanti verso i punti successivi a P sono più ripide della curva, quelle verso i punti precedenti meno ripide; al tendere a zero di Δt le une e le altre ruotano verso un'unica retta «schiacciata» fra le due famiglie, la tangente in P.

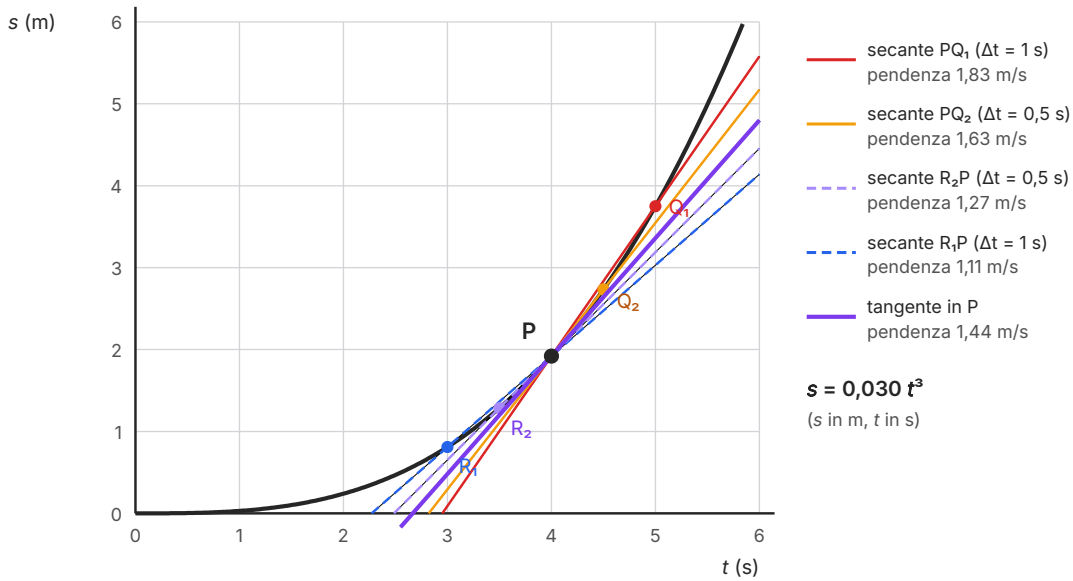


Figura 1.4 Dalle secanti alla tangente. Grafico spazio-tempo del treno della metropolitana, $s = 0{,}030\ t^3$. Le secanti verso i punti successivi a P (linee continue) hanno pendenza maggiore della velocità in P, quelle verso i punti precedenti (tratteggiate) minore; al diminuire di Δt si avvicinano tutte alla tangente in P, di pendenza 1,44 m/s (Tabella 1.1).

Per un moto uniformemente accelerato il limite si calcola con l'algebra. Con $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, sviluppando il quadrato del binomio, la velocità media fra t e $t + \Delta t$ è

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{v_0 \Delta t + \frac{1}{2}a(2t\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = v_0 + at + \frac{1}{2}a\Delta t$$

Per $\Delta t \to 0$ l'ultimo termine sparisce e resta $v = v_0 + at$, la legge della velocità che conosci, ora conseguenza della definizione. Il calcolo dice anche che, per intervalli successivi all'istante scelto, la velocità media supera quella istantanea di $\frac{1}{2}a\Delta t$, una quantità *proporzionale* a Δt: nel

grafico della velocità media in funzione di Δt i punti stanno su una retta, che incontra l'asse verticale ($\Delta t = 0$) nel valore della velocità istantanea. Lo sfrutteremo in laboratorio.

1.4.2 Il vettore velocità e il vettore accelerazione

Nel piano la definizione è la stessa, scritta con i vettori, e il limite si calcola componente per componente:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

v_x e v_y sono le pendenze delle tangenti ai grafici x–t e y–t, e $\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$. Quando Δt tende a zero lo spostamento $\Delta \boldsymbol{r}$ diventa una corda sempre più corta della traiettoria e ne assume la direzione della tangente: per questo la velocità è tangente alla traiettoria. Allo stesso modo l'accelerazione istantanea è

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Per il proiettile, per esempio, $v_x = v_{0x}$ è costante e $v_y = v_{0y} - gt$ ha pendenza $-g$: dunque $a_x = 0$ e $a_y = -g$ in ogni istante.

ESEMPIO SVOLTO

Dal video al vettore velocità

Problema. Un pallone lanciato verso un canestro è ripreso a 20 fotogrammi al secondo; dal video si leggono le posizioni del suo centro (Tabella 1.2; asse x orizzontale, y verticale verso l'alto). a) Stima il vettore velocità all'istante 0,40 s e l'angolo che forma con l'orizzontale. b) Stima la componente verticale dell'accelerazione.

Tabella 1.2 Posizioni del pallone lette dal video, un fotogramma ogni 0,050 s.

t (s)	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
x (m)	1,250	1,500	1,750	2,000	2,250	2,500	2,750
y (m)	2,994	3,159	3,300	3,416	3,508	3,575	3,618

Soluzione. a) Non si può scendere sotto un fotogramma, ma si può scegliere l'intervallo *centrato* sull'istante, da 0,35 s a 0,45 s: le velocità medie prima e dopo l'istante sbagliano in versi opposti, e sull'intervallo centrato gli errori si compensano (per un moto uniformemente accelerato, del tutto).

$$v_x \approx \frac{2{,}250\ \text{m} - 1{,}750\ \text{m}}{0{,}10\ \text{s}} = 5{,}0\ \text{m/s} \qquad v_y \approx \frac{3{,}508\ \text{m} - 3{,}300\ \text{m}}{0{,}10\ \text{s}} = 2{,}08\ \text{m/s}$$

Quindi $\boldsymbol{v} \approx (5{,}0\mathbf{i} + 2{,}1\mathbf{j})$ m/s, di modulo $\sqrt{(5{,}0^2 + 2{,}08^2)}$ m/s $\approx 5{,}4$ m/s; con entrambe le componenti positive (primo quadrante), l'angolo è $\tan^{-1}(2{,}08/5{,}0) \approx 23°$ sopra l'orizzontale.

b) Allo stesso modo $v_y(0{,}30\ \text{s}) \approx (3{,}300 - 2{,}994)/0{,}10$ m/s $= 3{,}06$ m/s e $v_y(0{,}50\ \text{s}) \approx (3{,}618 - 3{,}508)/0{,}10$ m/s $= 1{,}10$ m/s, quindi $a_y \approx (1{,}10 - 3{,}06)/0{,}20\ \text{m/s}^2 = -9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Controllo. Le x crescono di 0,250 m a ogni fotogramma (moto orizzontale uniforme) e $a_y = -g$: è un moto di proiettile.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la velocità in un istante

Materiali. Una rotaia a basso attrito inclinata di pochi gradi, con un carrello; un metro a nastro (sensibilità 1 mm); uno smartphone che riprende di lato a 120 fotogrammi al secondo, con un righello nell'inquadratura; una fotocellula con cronometro elettronico (sensibilità 0,1 ms); una bandierina di cartoncino larga (1,00 ± 0,01) cm fissata sul carrello.

Procedimento. 1) Segna sulla rotaia il punto P, a 50,0 cm dalla partenza, e mettici la fotocellula, in modo che il centro della bandierina tagli il fascio quando il carrello passa per P. 2) Lascia partire il carrello da fermo e riprendi la discesa. 3) Nel video trova il fotogramma del passaggio per P (istante t_0) e, contando i fotogrammi, leggi lo spostamento Δs compiuto nei Δt successivi, per Δt = 0,10 s, 0,20 s, ..., 0,50 s. Ogni posizione si legge con un'incertezza di circa 1 mm, quindi Δs ha un'incertezza di 2 mm. 4) Annota il tempo di oscuramento della fotocellula.

Tabella 1.3 Spostamenti dopo il passaggio per P e velocità medie corrispondenti (dati tipici). L'incertezza della velocità media è (0,002 m)/Δt.

Δt (s)	Δs (m)	v_m (m/s)	incertezza (m/s)
0,10	0,082	0,820	0,020
0,20	0,169	0,845	0,010
0,30	0,265	0,883	0,007
0,40	0,364	0,910	0,005
0,50	0,472	0,944	0,004

Che cosa concludere. Le velocità medie diminuiscono con Δt, ma le loro incertezze crescono: con Δt = 0,10 s sono già 0,02 m/s, e intervalli più brevi non avrebbero senso. Si sfrutta allora il risultato del paragrafo precedente, $v_m = v(t_0) + \frac{1}{2}a\Delta t$: nel grafico di v_m in funzione di Δt (Figura 1.5) i punti sono allineati, e la retta di miglior accordo, prolungata fino a Δt = 0, dà l'intercetta $v(t_0)$ = (0,785 ± 0,014) m/s, con l'incertezza ricavata dalle rette di massima e minima pendenza (*Fisica 1*, capitolo 5). La pendenza, circa 0,32 m/s^2, è metà dell'accelerazione del carrello: $a \approx$ 0,63 m/s^2.

Confronto teoria–esperimento. La fotocellula è rimasta oscurata per (12,7 ± 0,1) ms: v = 1,00 cm / 12,7 ms ≈ 0,787 m/s, con incertezza relativa 1% + 0,8% ≈ 1,8%, cioè ± 0,014 m/s. Anche questa è una velocità media, ma su un intervallo così breve che la differenza dalla velocità istantanea (al più $\frac{1}{2}a\Delta t \approx$ 0,004 m/s) è minore dell'incertezza. Le due misure differiscono di 0,002 m/s, molto meno della somma delle incertezze (0,028 m/s): sono compatibili.

Sicurezza. Metti un fermo imbottito alla fine della rotaia.

Per la relazione. Riporta la tabella e il grafico con le barre d'incertezza; traccia le rette di miglior accordo, di massima e di minima pendenza, ricava l'intercetta con la sua incertezza e confrontala con la fotocellula. Spiega perché non conviene usare intervalli di un solo fotogramma. Discuti gli errori sistematici: bandierina non centrata su P, prospettiva della ripresa, attrito non costante lungo la rotaia.

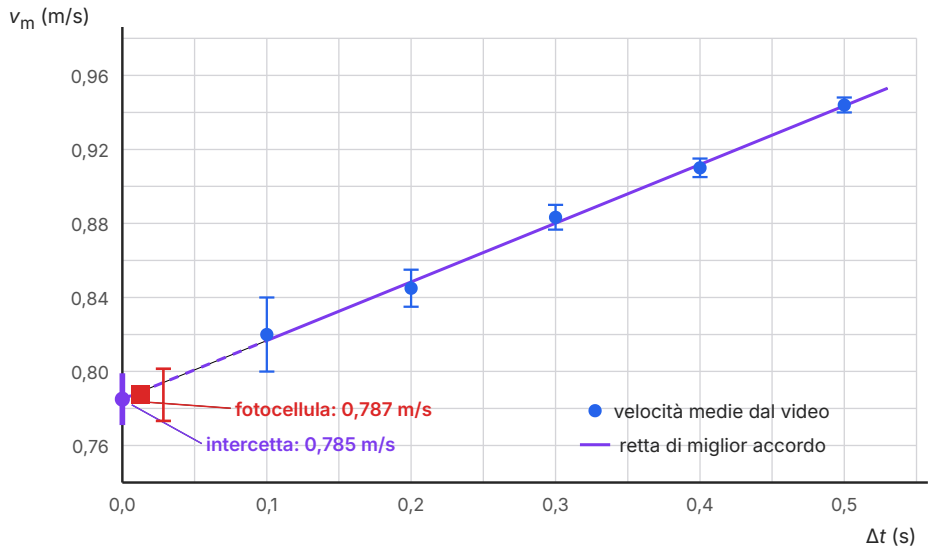


Figura 1.5 Il passaggio al limite in laboratorio (dati tipici). Le velocità medie del carrello dopo il passaggio per P, con le barre d'incertezza, stanno su una retta; prolungata fino a $\Delta t = 0$ (tratto tratteggiato) incontra l'asse verticale in 0,785 m/s, la velocità istantanea in P. Il quadratino rosso è la misura della fotocellula, una velocità media su soli 12,7 ms: le due misure sono compatibili.

1.5 Il moto curvilineo qualsiasi

1.5.1 Accelerazione tangenziale e centripeta

Nel volume scorso hai visto che in un moto curvilineo la componente dell'accelerazione parallela alla velocità ne cambia la rapidità, quella perpendicolare ne cambia la direzione. Ora diamo a entrambe un valore, in qualsiasi moto.

La componente lungo la velocità si chiama accelerazione tangenziale a_t: è il limite di $\Delta v/\Delta t$, dove v è la velocità scalare (il numero del tachimetro); è positiva se il corpo accelera, negativa se rallenta, nulla se il tachimetro resta fermo.

Per la componente perpendicolare basta un'idea: per un breve tratto, qualunque curva si confonde con un arco di circonferenza. La circonferenza che meglio approssima la traiettoria in un punto ha un centro, il centro di curvatura, e un raggio, il **raggio di curvatura** r: piccolo

dove la curva è stretta, grande dove è dolce, infinito su un tratto rettilineo (Figura 1.6b). In quel punto il corpo cambia direzione come se percorresse quella circonferenza, quindi l'accelerazione centripeta vale

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c \qquad a = \sqrt{(a_t^2 + a_c^2)}$$

Il moto lungo una traiettoria curva con velocità scalare variabile si chiama **moto curvilineo**: è il caso di quasi tutti i moti reali. Il moto rettilineo ($a_c = 0$) e il moto circolare uniforme ($a_t = 0$) sono due casi particolari. L'accelerazione punta verso il centro di curvatura soltanto se $a_t = 0$: se il corpo accelera è inclinata in avanti, se rallenta all'indietro.

1.5.2 Il moto circolare non uniforme

Se la traiettoria è una circonferenza ma la velocità scalare cambia, si parla di **moto circolare non uniforme**: un'auto che accelera in una rotatoria, una centrifuga che prende giri. In ogni istante valgono ancora $v = \omega r$ e $a_c = v^2/r$, con i valori istantanei. Se a_t è costante, lungo l'arco la velocità scalare e la distanza percorsa seguono le leggi del moto uniformemente accelerato, mentre a_c cresce come v^2. Nel capitolo 9 descriveremo questo moto con le grandezze angolari.

ESEMPIO SVOLTO

L'auto che accelera nella rotatoria

Problema. Un'auto entra a 5,0 m/s in una rotatoria di raggio 20 m e la percorre con accelerazione tangenziale costante di 1,5 m/s^2. Calcola a) l'accelerazione all'ingresso; b) la velocità, l'accelerazione centripeta e l'accelerazione totale dopo un quarto di giro, e l'angolo fra accelerazione e velocità; c) il tempo impiegato.

Soluzione. a) $a_c = (5{,}0\ \text{m/s})^2/20\ \text{m} = 1{,}25\ \text{m/s}^2$; $a = \sqrt{(1{,}5^2 + 1{,}25^2)}\ \text{m/s}^2 \approx 2{,}0\ \text{m/s}^2$.

b) Un quarto di giro è un arco lungo $l = \pi r/2 \approx 31{,}4$ m. Lungo l'arco il moto è uniformemente accelerato:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t l = (5{,}0\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot 31{,}4\ \text{m} \approx 119\ \text{m}^2/\text{s}^2 \quad \Longrightarrow \quad v \approx 10{,}9\ \text{m/s}$$

Allora $a_c = 119\ \text{m}^2/\text{s}^2\ /\ 20\ \text{m} \approx 5{,}96\ \text{m/s}^2$ e $a = \sqrt{(1{,}5^2 + 5{,}96^2)}\ \text{m/s}^2 \approx 6{,}1\ \text{m/s}^2$. L'angolo φ fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v}$ è dato da $\tan\varphi = a_c/a_t = 5{,}96/1{,}5$, $\varphi \approx 76°$: l'accelerazione punta quasi verso il centro, ma inclinata in avanti (Figura 1.6a).

c) $t = (v - v_0)/a_t = (10{,}9 - 5{,}0)\ \text{m/s}\ /\ 1{,}5\ \text{m/s}^2 \approx 3{,}9$ s.

Controllo. a_c è cresciuta di quasi cinque volte mentre la velocità è poco più che raddoppiata: $a_c \propto v^2$. Chi fornisce questa accelerazione? Sull'auto agiscono il peso, la reazione normale dell'asfalto, che si fanno equilibrio, e l'attrito statico sulle gomme, che deve valere ma. Con $\mu_s = 0{,}70$ il massimo è $\mu_s g \approx 6{,}9\ \text{m/s}^2$: l'auto è vicina al limite di aderenza.

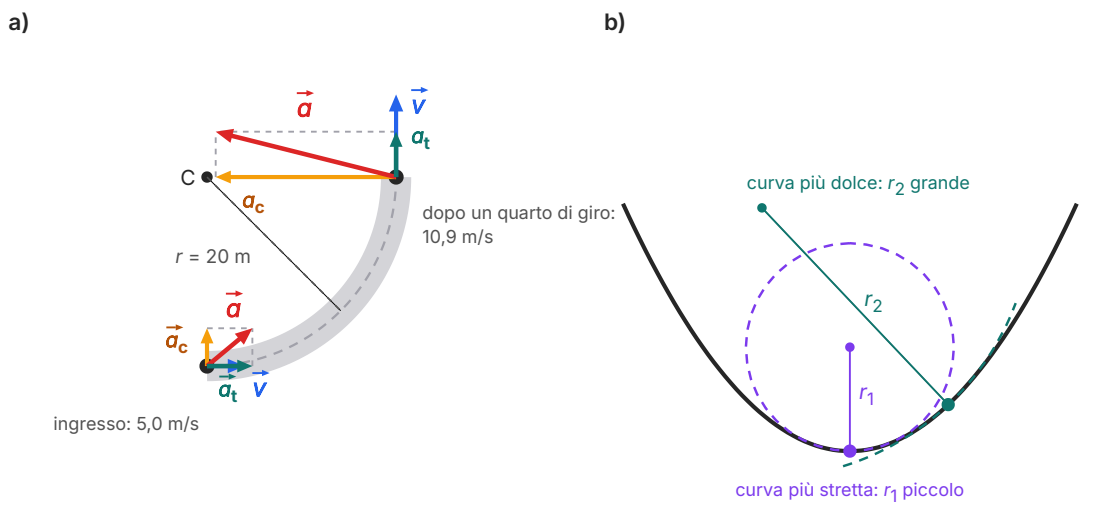


Figura 1.6 a) L'auto dell'esempio svolto nella rotatoria di raggio 20 m, all'ingresso e dopo un quarto di giro. La velocità $\boldsymbol{v}$ (in blu) è tangente; l'accelerazione tangenziale (1,5 m/s^2, in verde) ha il verso di $\boldsymbol{v}$, quella centripeta (in arancione) punta verso il centro C e cresce da 1,25 m/s^2 a 5,96 m/s^2; la loro somma $\boldsymbol{a}$ (in rosso) è inclinata in avanti. Le accelerazioni sono in scala fra loro. b) Il raggio di curvatura: in ogni punto la traiettoria si confonde con un arco di circonferenza, di raggio minore dove la curva è più stretta.

COLLEGAMENTI

Frenare in curva: il cerchio di aderenza

Su strada orizzontale l'unica forza orizzontale sull'auto è l'attrito degli pneumatici, che non supera $\mu_s mg$. Lo stesso attrito deve dare *sia* l'accelerazione tangenziale (per frenare o accelerare) *sia* quella centripeta (per curvare), quindi $\sqrt{(a_t^2 + a_c^2)} \le \mu_s g$. In un grafico con a_t e a_c sugli assi, le accelerazioni possibili stanno dentro un cerchio di raggio $\mu_s g$, il **cerchio di aderenza**: i tecnici delle corse leggono la telemetria proprio in grafici di questo tipo.

Con $\mu_s = 0{,}90$ (asfalto asciutto) il raggio è circa 8,8 m/s^2. In una curva di raggio 50 m, senza frenare, l'auto può arrivare a $\sqrt{(8{,}8 \cdot 50)}$ m/s $\approx$ 21 m/s (76 km/h); frenando con 5,0 m/s^2, per curvare restano $\sqrt{(8{,}8^2 - 5{,}0^2)}$ m/s^2 $\approx$ 7,3 m/s^2 e la velocità massima scende a circa 19 m/s (69 km/h). Per questo si frena prima della curva, non dentro.

1.6 Le leggi del moto come modello predittivo

Il vero potere delle leggi della dinamica è che permettono di *prevedere* il moto. Il secondo principio dà l'accelerazione in ogni istante, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$; l'accelerazione dice come cambia la velocità in un intervallo brevissimo, $\Delta\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{a}\Delta t$; la velocità dice come cambia la posizione, $\Delta\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{v}\Delta t$. Partendo da un istante in cui si conoscono posizione e velocità, si può avanzare un piccolo passo alla volta e ricostruire tutto il moto futuro.

Posizione e velocità nell'istante di partenza sono le **condizioni iniziali**; l'accelerazione iniziale non va data, perché la stabiliscono le forze. Le stesse forze con condizioni iniziali diverse danno moti diversi: un sasso lasciato cadere e uno lanciato in orizzontale dalla stessa altezza subiscono la stessa forza, il peso, ma il primo scende in verticale e il secondo descrive una parabola. Per prevedere un moto servono quindi le forze *e* le condizioni iniziali.

ESEMPIO SVOLTO

Prevedere il moto passo dopo passo

Problema. Una pallina viene lasciata cadere da ferma; trascuriamo l'aria. Senza usare la legge oraria, prevedi di quanto è scesa dopo 0,50 s avanzando a passi di $\Delta t = 0{,}10$ s con questa regola: in ogni passo la posizione cambia della velocità all'inizio del passo per Δt, e la velocità cambia di $a\Delta t$ (asse y verso l'alto, origine nel punto di partenza).

Soluzione. Condizioni iniziali: $y = 0$ e $v_y = 0$. Sulla pallina agisce soltanto il peso, quindi $a_y = -9{,}8$ m/s^2 e a ogni passo la velocità diminuisce di 0,98 m/s:

Tabella 1.4 Previsione passo dopo passo della caduta libera ($\Delta t = 0{,}10$ s) e confronto con la legge oraria $y = -\frac{1}{2}gt^2$.

t (s)	v_y (m/s)	y previsto (m)	y esatto (m)
0,0	0	0	0
0,1	−0,98	0	−0,049
0,2	−1,96	−0,098	−0,196
0,3	−2,94	−0,294	−0,441
0,4	−3,92	−0,588	−0,784
0,5	−4,90	−0,980	−1,225

Dopo cinque passi la previsione è −0,980 m; la legge oraria dà $-\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50^2$ m = −1,225 m.

Controllo e miglioramento. La previsione sbaglia per difetto, perché in ogni passo usa la velocità iniziale del passo, la più piccola in modulo. Con passi di 0,050 s si trova −1,103 m, con passi di 0,010 s −1,201 m: l'errore (0,245 m, 0,123 m, 0,025 m) è proporzionale a Δt e tende a zero con Δt (Figura 1.7). Il metodo funziona anche quando le forze cambiano da un istante all'altro e nessuna formula è disponibile.

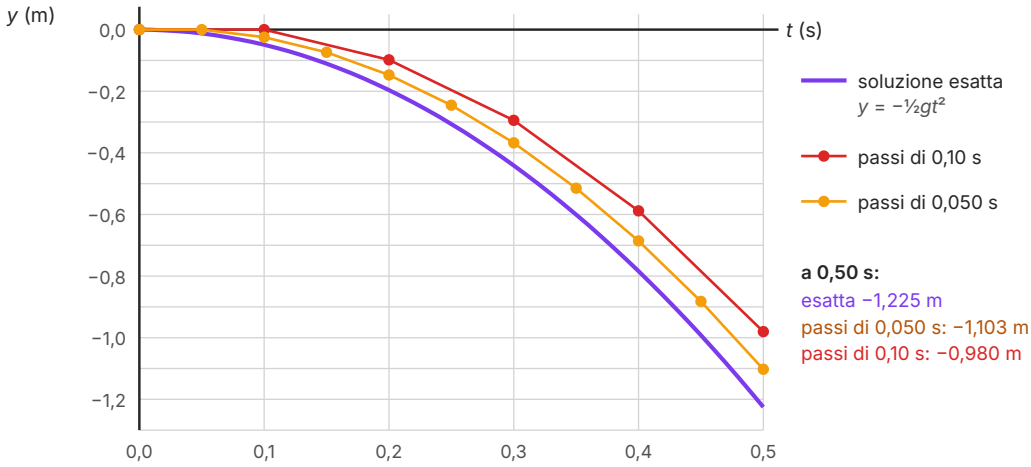


Figura 1.7 La previsione passo dopo passo della caduta libera. La curva viola è la legge oraria esatta; i punti sono le previsioni con passi di 0,10 s (in rosso) e di 0,050 s (in arancione). Dimezzando il passo l'errore si dimezza: nel limite $\Delta t \to 0$ il metodo riproduce la soluzione esatta.

Così lavorano i calcolatori che guidano le sonde spaziali, simulano un crash test o prevedono il tempo: dividono il tempo in passi brevissimi e applicano a ogni passo le leggi della dinamica, con regole più raffinate della nostra. Il modello ha però dei limiti: richiede forze note e condizioni iniziali misurate bene, e vale finché le velocità sono piccole rispetto a quella della luce e i corpi non hanno dimensioni atomiche, come vedrai al quinto anno.

APPROFONDIMENTO

Il sogno di Laplace

All'inizio dell'Ottocento il matematico francese Pierre-Simon de Laplace espresse con un'immagine celebre la fiducia nelle leggi del moto: un'intelligenza che conoscesse in un certo istante tutte le forze della natura e le posizioni di tutti i corpi, e fosse capace di eseguire tutti i calcoli, vedrebbe il futuro come il passato, senza incertezza. È il **determinismo** della meccanica classica: lo stato presente, attraverso le leggi del moto, determina in modo univoco quello futuro. La fisica successiva ne ha mostrato due limiti. In molti sistemi, come l'atmosfera, una minima differenza nelle condizioni iniziali, inevitabile in qualsiasi misura, cresce nel tempo fino a cambiare completamente l'evoluzione: è il **caos deterministico**, che impedisce previsioni del tempo affidabili a molte settimane di distanza pur con leggi deterministiche. E nel mondo degli atomi, come vedrai al quinto anno, la meccanica quantistica fornisce soltanto probabilità.

IN SINTESI

Le formule del capitolo

$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ $(+ a_z\mathbf{k})$; $a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)}$; $\tan\theta = a_y/a_x$ — vettore scritto con i versori degli assi (modulo 1, nessuna unità); dopo $\tan^{-1}$, se $a_x < 0$ si aggiungono 180°. Somme, differenze e prodotti per un numero si fanno componente per componente.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y$ $(+ a_zb_z)$ — prodotto scalare: un numero, con unità uguale al prodotto delle unità; modulo di un vettore per la proiezione dell'altro; nullo per vettori perpendicolari, negativo se $\theta > 90°$.

$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\,\text{sen}\,\theta$ — prodotto vettoriale: vettore perpendicolare al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, verso dato dalla regola della mano destra, modulo uguale all'area del parallelogramma; nullo per vettori paralleli; $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$; $\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ — velocità (m/s) e accelerazione (m/s^2) istantanee, calcolate componente per componente: pendenze delle tangenti ai grafici x–t, y–t e v_x–t, v_y–t.

$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta v/\Delta t$; $a_c = v^2/r$; $a = \sqrt{(a_t^2 + a_c^2)}$ — in un moto curvilineo qualsiasi l'accelerazione tangenziale (m/s^2) cambia la velocità scalare, quella centripeta la direzione; r è il raggio di curvatura nel punto.

$\Delta\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{a}\Delta t$, $\Delta\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{v}\Delta t$, con $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$ — forze e condizioni iniziali determinano il moto, che si calcola a passi brevi; l'approssimazione migliora quando Δt tende a zero.

SINTESI

- Un versore è un vettore di modulo 1, senza unità di misura, che indica una direzione e un verso; con i versori degli assi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ogni vettore si scrive $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.
- Somma, differenza e prodotto per un numero si eseguono componente per componente. Modulo e direzione si ricavano dalle componenti; dopo $\tan^{-1}$ bisogna sempre controllare il quadrante con i segni delle componenti.
- Gli assi formano una terna destrorsa: con x a destra e y in alto nel piano del foglio, l'asse z esce dal foglio.
- Il prodotto scalare $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y$ è un numero: il modulo di un vettore per la proiezione dell'altro. È positivo, nullo o negativo secondo che l'angolo fra i vettori sia acuto, retto o ottuso.
- Il prodotto vettoriale $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ è un vettore perpendicolare al piano dei due vettori, di modulo ab sen θ (l'area del parallelogramma), con il verso dato dalla regola della mano destra; è anticommutativo e nullo per vettori paralleli.
- La velocità istantanea è il limite della velocità media per $\Delta t \to 0$: le velocità medie su intervalli successivi e precedenti a un istante tendono allo stesso valore, la pendenza della tangente al grafico.
- Nel piano velocità e accelerazione istantanee sono vettori, calcolati come limiti componente per componente; la velocità è tangente alla traiettoria.
- Per piccoli Δt la velocità media differisce dalla istantanea di una quantità proporzionale a Δt: prolungando il grafico di v_m in funzione di Δt fino a $\Delta t = 0$ si misura la velocità istantanea.
- In un moto curvilineo qualsiasi l'accelerazione è la somma dell'accelerazione tangenziale, che cambia la velocità scalare, e dell'accelerazione centripeta v^2/r, che cambia la direzione; r è il raggio di curvatura.
- Nel moto circolare non uniforme la velocità scalare cambia; con a_t costante, lungo l'arco valgono le leggi del moto uniformemente accelerato e a_c cresce come v^2.
- Le leggi della dinamica, insieme alle condizioni iniziali (posizione e velocità in un istante), determinano il moto futuro, che si può calcolare passo dopo passo; questo determinismo ha però limiti pratici (caos) e di principio (mondo atomico).

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un versore è:
   - **A.** un vettore di modulo 1, senza unità di misura, che indica una direzione e un verso
   - **B.** la componente x di un vettore
   - **C.** un vettore di modulo 1 m
   - **D.** un vettore sempre parallelo all'asse x

2. ● Il prodotto scalare di due vettori non nulli è zero quando i vettori sono:
   - **A.** paralleli e concordi
   - **B.** di uguale modulo
   - **C.** perpendicolari
   - **D.** paralleli e discordi

3. ● Dati $\boldsymbol{a} = (2{,}0\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j})$ m e $\boldsymbol{b} = (4{,}0\mathbf{i} + 1{,}0\mathbf{j})$ m, il prodotto scalare $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ vale:
   - **A.** 11 m^2
   - **B.** 5,0 m^2
   - **C.** −5,0 m^2
   - **D.** $(8{,}0\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j})$ m^2

4. ●● Il prodotto vettoriale $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ è uguale a:
   - **A.** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
   - **B.** zero, per qualsiasi coppia di vettori
   - **C.** $ab \cos\theta$
   - **D.** $-(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

5. ●● Nel piano del foglio, con x verso destra e y verso l'alto, il prodotto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ è:
   - **A.** un vettore diretto lungo l'asse y
   - **B.** il numero 1
   - **C.** il versore $\mathbf{k}$, uscente dal foglio
   - **D.** il versore $\mathbf{k}$, entrante nel foglio

6. ● La velocità istantanea di un corpo all'istante t_0 è:
   - **A.** il limite della velocità media su intervalli che contengono t_0, per Δt che tende a zero
   - **B.** la velocità media calcolata con $\Delta t = 0$
   - **C.** la velocità media fra l'istante 0 e l'istante t_0
   - **D.** la pendenza della secante fra l'origine e il punto del grafico corrispondente a t_0

7. ●● Un'auto percorre una curva rallentando. La sua accelerazione:
   A. è diretta verso il centro di curvatura
   B. è tangente alla traiettoria, con verso opposto alla velocità
   C. è nulla, se il tachimetro scende in modo uniforme
   D. ha una componente verso il centro di curvatura e una componente opposta alla velocità

8. ●● Il vettore $(-4{,}0\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j})$ m forma con il verso positivo dell'asse x un angolo di:
   A. −45°
   B. 135°
   C. 45°
   D. 225°

Vero o falso

9. ● Il prodotto scalare di due vettori è un vettore perpendicolare a entrambi. V / F

10. ● Il modulo di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ è uguale all'area del parallelogramma che ha $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ come lati. V / F

11. ●● Se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$, l'angolo fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è maggiore di 90°. V / F

12. ●● In un moto circolare con velocità scalare costante l'accelerazione tangenziale è nulla, ma l'accelerazione no. V / F

13. ●● Per prevedere il moto di un corpo per tutti gli istanti successivi basta conoscere le forze che agiscono su di esso. V / F

Applicare

14. ● Scrivi con i versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ un vettore spostamento di modulo 40,0 m che forma un angolo di 210° con il verso positivo dell'asse x.

15. ● Dati $\boldsymbol{a} = 3{,}0\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j}$ e $\boldsymbol{b} = -1{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j}$ (in metri), calcola $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ e il modulo di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

16. ●● Una forza di 6,0 N e uno spostamento di 2,5 m formano un angolo di 120°. Calcola il loro prodotto scalare e spiega il significato del segno.

17. ●● Calcola l'angolo fra i vettori $\boldsymbol{a} = 2{,}0\mathbf{i} + 1{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{b} = 1{,}0\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$.

18. ● Il vettore $\boldsymbol{a}$, di modulo 4,0 m, è diretto come l'asse x; il vettore $\boldsymbol{b}$, di modulo 3,0 N, sta nel piano xy e forma 30° con $\boldsymbol{a}$, verso l'asse y positivo. Calcola il modulo di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ e indicane direzione e verso.

19. ●● Il treno della metropolitana del paragrafo sul passaggio al limite ha legge oraria $s = 0{,}030\ t^3$. Calcola la velocità media sull'intervallo centrato da 3,9 s a 4,1 s e confrontala con i valori della Tabella 1.1 per $\Delta t = 0{,}1$ s: quale stima della velocità istantanea è migliore?

20. ● Completa. In un moto curvilineo l'accelerazione tangenziale fa cambiare _____ della velocità, l'accelerazione centripeta ne fa cambiare _____ . L'accelerazione centripeta vale v^2/r, dove r è il _____ della traiettoria nel punto considerato; su un tratto rettilineo essa è _____ .

21. ●● Un treno entra a 30 m/s in una curva di raggio 800 m e intanto frena con un'accelerazione tangenziale di modulo 0,40 m/s^2. Calcola in quell'istante l'accelerazione centripeta, il modulo dell'accelerazione e l'angolo che l'accelerazione forma con la direzione opposta alla velocità.

Problemi

22. ●● In una gara di orientamento una concorrente percorre 450 m verso nord-est, poi 300 m verso ovest, poi 200 m verso sud. Con l'asse x verso est e l'asse y verso nord, calcola a) lo spostamento totale per componenti; b) il suo modulo e la sua direzione; c) il vettore spostamento che la riporterebbe in linea retta alla partenza.

23. ●●● Una slitta viene trascinata su un piano orizzontale da una fune che esercita la forza $\boldsymbol{F} = (60\mathbf{i} + 35\mathbf{j})$ N (asse x orizzontale, y verticale). a) Calcola l'angolo fra la fune e l'orizzontale. b) Per uno spostamento $\Delta\boldsymbol{r} = (12\mathbf{i})$ m calcola $\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ e verifica che coincide con il lavoro $Fs \cos \alpha$ del volume scorso (*Fisica 2*, capitolo 8). c) Calcola $\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ se la slitta sale invece lungo un pendio, con $\Delta\boldsymbol{r} = (12\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{j})$ m, e spiega da che cosa dipende la differenza.

24. ●●● Una chiave inglese è applicata a un bullone nell'origine O; la mano agisce nel punto di posizione $\boldsymbol{r} = (0{,}25\mathbf{i} + 0{,}10\mathbf{j})$ m con la forza $\boldsymbol{F} = (-20\mathbf{i} + 50\mathbf{j})$ N. a) Calcola $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ con la formula per componenti dell'Approfondimento e di' se il bullone tende a ruotare in senso orario o antiorario. b) Calcola i moduli di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$ e l'angolo fra i due vettori, e verifica che rF sen θ dà lo stesso risultato. c) Ricava il braccio della forza rispetto a O (*Fisica 1*, capitolo 10).

25. ●●● Un'auto entra a 6,0 m/s in una rotatoria piana di raggio 25 m e accelera con accelerazione tangenziale costante di 2,0 m/s^2. Il coefficiente di attrito statico fra gomme e asfalto è 0,80. a) Spiega, con il diagramma delle forze, quale forza fornisce sia l'accelerazione tangenziale sia quella centripeta. b) A quale velocità l'auto raggiunge il limite di aderenza? c) Che distanza ha percorso lungo la rotatoria a quel punto, e che frazione di giro è?

26. ●●● Un pallone calciato orizzontalmente dal bordo di un muretto viene ripreso a 20 fotogrammi al secondo. Le posizioni lette dal video (asse y verso l'alto, origine nel punto di partenza) sono: t = 0,10 s, 0,15 s, 0,20 s, 0,25 s, 0,30 s; x = 0,180 m, 0,270 m, 0,360 m, 0,450 m, 0,540 m; y = −0,049 m, −0,110 m, −0,196 m, −0,306 m, −0,441 m. a) Stima il vettore velocità all'istante 0,20 s con un intervallo centrato, il suo modulo e l'angolo con l'orizzontale. b) Stima v_y a 0,15 s e a 0,25 s e da questi la componente verticale dell'accelerazione. c) Il risultato è compatibile con un moto di proiettile?

27. ●●● Una ventola si avvia da ferma: un punto all'estremità di una pala, a distanza r dall'asse, si muove su una circonferenza con accelerazione tangenziale costante a_t. a) Dopo quanto tempo l'accelerazione del punto forma un angolo di 45° con la sua velocità? Calcolalo per $r = 0{,}20$ m e $a_t = 3{,}0$ m/s^2. b) Dimostra che in quell'istante il punto ha descritto un angolo di 0,5 rad (circa 29°), qualunque siano r e a_t.

28. ●● Un carrello di 2,0 kg, inizialmente fermo su una rotaia orizzontale senza attrito, è spinto da una forza costante di 3,0 N. a) Usando il metodo passo dopo passo dell'esempio svolto, con passi di 1,0 s, prevedi la posizione dopo 3,0 s. b) Ripeti con passi di 0,50 s. c) Confronta con la legge oraria del moto uniformemente accelerato e verifica che l'errore è proporzionale al passo.

29. ●●● I vertici di un triangolo sono A(1,0 m; 2,0 m), B(4,0 m; 3,0 m) e C(2,0 m; 6,0 m). a) Scrivi i vettori AB e AC con i versori. b) Calcola l'area del triangolo come metà del modulo del prodotto vettoriale di AB e AC. c) Calcola l'angolo in A con il prodotto scalare e controlla il risultato con il seno ricavato dal punto b).

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Per calcolare la direzione del vettore $(-5{,}0\mathbf{i} - 5{,}0\mathbf{j})$ m, Paolo scrive: «$\tan\theta = (-5{,}0)/(-5{,}0) = 1$, quindi $\theta = \tan^{-1} 1 = 45°$: il vettore punta verso nord-est». Spiega l'errore e correggilo.

31. ●●● Una fotocellula misura la velocità di un carrello dividendo la larghezza della bandierina, 2,0 cm, per il tempo di oscuramento. Il carrello passa a circa 1,5 m/s con un'accelerazione di 2,0 m/s^2. Spiega perché la fotocellula misura in realtà una velocità media e stima di quanto cambia la velocità del carrello mentre la bandierina attraversa il fascio. La misura si può considerare una velocità istantanea?

32. ●● Le previsioni meteorologiche usano leggi deterministiche della fisica e calcolatori potentissimi, eppure non sono affidabili a un mese di distanza. Spiega perché, usando le idee di condizioni iniziali e di caos deterministico.

33. ●● Spiega, aiutandoti con la regola della mano destra e con un esempio di due vettori nel piano del foglio, perché il prodotto vettoriale non può essere commutativo, mentre il prodotto scalare lo è.

PER APPROFONDIRE

- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sul moto, con la velocità come limite, quello sulle leggi di Newton, dove il moto viene calcolato passo dopo passo, e il capitolo sui vettori.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sui vettori, con il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, e quello sul moto in due e tre dimensioni.
- [TAY] J. R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il capitolo sull'adattamento di una retta ai dati sperimentali, utile per ricavare un'intercetta con la sua incertezza.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sulla velocità e sull'accelerazione nei moti curvilinei, spiegate quasi senza formule.

Glossario del capitolo

Angolo fra due vettori
Angolo, compreso fra 0° e 180°, fra due vettori disegnati con l'origine in comune.

Caos deterministico
Comportamento di sistemi governati da leggi deterministiche in cui piccolissime differenze nelle condizioni iniziali crescono fino a rendere impossibile la previsione a lungo termine.

Cerchio di aderenza
Insieme delle accelerazioni orizzontali che l'attrito delle gomme può fornire a un veicolo: $\sqrt{(a_t^2 + a_c^2)} \leq \mu_s g$.

Condizioni iniziali
Posizione e velocità di un corpo in un istante iniziale; insieme alle forze determinano il moto successivo.

Determinismo
Idea, propria della meccanica classica, che lo stato presente di un sistema e le leggi del moto determinino in modo univoco il suo stato futuro.

Limite
Valore a cui una grandezza, come il rapporto $\Delta s/\Delta t$, si avvicina indefinitamente quando Δt diventa sempre più piccolo, senza mai annullarsi.

Moto circolare non uniforme
Moto su una circonferenza con velocità scalare variabile: oltre all'accelerazione centripeta v^2/r c'è un'accelerazione tangenziale.

Moto curvilineo
Moto lungo una traiettoria curva con velocità scalare in generale variabile; l'accelerazione ha una componente tangenziale e una centripeta.

Prodotto scalare
Numero $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$; è nullo per vettori perpendicolari e negativo se l'angolo fra i vettori è ottuso.

Prodotto vettoriale
Vettore $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ di modulo ab sen θ (l'area del parallelogramma di lati $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$), perpendicolare al piano dei due vettori, con il verso dato dalla regola della mano destra.

Proiezione
Lunghezza con segno, $b \cos\theta$, dell'«ombra» del vettore $\boldsymbol{b}$ sulla retta di un altro vettore; il prodotto scalare è il modulo di un vettore per la proiezione dell'altro.

Proprietà anticommutativa
Proprietà del prodotto vettoriale per cui scambiando i fattori il risultato cambia verso: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

Raggio di curvatura
Raggio della circonferenza che meglio approssima una traiettoria in un suo punto: piccolo dove la curva è stretta, infinito sui tratti rettilinei.

Terna destrorsa
Disposizione degli assi x, y, z per cui le dita della mano destra, ruotando da x verso y, lasciano il pollice nel verso positivo di z.

Versore
Vettore di modulo 1, senza unità di misura, che indica una direzione e un verso; il versore di $\boldsymbol{a}$ è $\boldsymbol{a}/a$.

Versori degli assi
I versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ diretti nel verso positivo degli assi x, y, z; con essi ogni vettore si scrive $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

Vettori ortogonali
Due vettori non nulli perpendicolari fra loro; il loro prodotto scalare è zero.

Soluzioni

1. A. Un versore ha modulo 1 ed è un numero puro: indica soltanto una direzione e un verso.

2. C. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta$ è zero, per vettori non nulli, solo se $\cos\theta = 0$, cioè $\theta = 90°$.

3. B. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2{,}0 \cdot 4{,}0 + (-3{,}0) \cdot 1{,}0 = 8{,}0 - 3{,}0 = 5{,}0\ \text{m}^2$: il risultato è un numero, non un vettore.

4. D. Il prodotto vettoriale è anticommutativo: ruotando da $\boldsymbol{b}$ verso $\boldsymbol{a}$ il pollice della mano destra punta nel verso opposto.

5. C. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$: ruotando da x (destra) a y (alto) la rotazione è antioraria e il pollice esce dal foglio.

6. A. È la definizione: il limite della velocità media per $\Delta t \to 0$. Con $\Delta t = 0$ il rapporto sarebbe 0/0, privo di significato.

7. D. La curva richiede un'accelerazione centripeta verso il centro di curvatura; il rallentamento un'accelerazione tangenziale opposta alla velocità. La somma è inclinata all'indietro.

8. B. $\tan^{-1}(4{,}0/(-4{,}0)) = -45°$ sulla calcolatrice, ma la componente x è negativa e la y positiva (secondo quadrante): $-45° + 180° = 135°$.

9. F. Il prodotto scalare è un numero (uno scalare); il vettore perpendicolare a entrambi è il prodotto vettoriale.

10. V. Il parallelogramma ha base a e altezza $b \operatorname{sen}\theta$, quindi area $ab \operatorname{sen}\theta = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

11. V. $ab \cos\theta < 0$ con a, b positivi richiede $\cos\theta < 0$, cioè $90° < \theta \leq 180°$.

12. V. La velocità scalare non cambia, quindi $a_t = 0$; ma la direzione cambia e c'è l'accelerazione centripeta v^2/r.

13. F. Le forze danno soltanto l'accelerazione; servono anche le condizioni iniziali, cioè posizione e velocità in un istante (un sasso lasciato cadere e uno lanciato subiscono la stessa forza ma si muovono diversamente).

14. $a_x = 40{,}0\ \text{m} \cdot \cos 210° = -34{,}6\ \text{m}$; $a_y = 40{,}0\ \text{m} \cdot \operatorname{sen} 210° = -20{,}0\ \text{m}$. Quindi $\Delta\boldsymbol{r} = (-34{,}6\ \text{m})\mathbf{i} + (-20{,}0\ \text{m})\mathbf{j}$: il vettore sta nel terzo quadrante, come deve essere per 210°.

15. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (2{,}0\mathbf{i} + 6{,}0\mathbf{j})\ \text{m}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (4{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j})\ \text{m}$; $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (6{,}0 + 3{,}0)\mathbf{i} + (8{,}0 - 6{,}0)\mathbf{j} = (9{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j})\ \text{m}$; $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{(4{,}0^2 + 2{,}0^2)}\ \text{m} = \sqrt{20}\ \text{m} \approx 4{,}5\ \text{m}$.

16. Prodotto scalare = $6{,}0\ \text{N} \cdot 2{,}5\ \text{m} \cdot \cos 120° = 15\ \text{N·m} \cdot (-0{,}50) = -7{,}5\ \text{N·m}$. Il segno negativo indica che la forza ha una componente opposta allo spostamento (la proiezione della forza sullo spostamento è negativa): nel capitolo 5 diremo che la forza compie un lavoro resistente di −7,5 J.

17. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2{,}0 \cdot 1{,}0 + 1{,}0 \cdot (-2{,}0) + 2{,}0 \cdot 2{,}0 = 4{,}0$; $a = \sqrt{(4 + 1 + 4)} = 3{,}0$; $b = \sqrt{(1 + 4 + 4)} = 3{,}0$. $\cos\theta = 4{,}0/(3{,}0 \cdot 3{,}0) \approx 0{,}444$, $\theta \approx 64°$ (63,6°).

18. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab \operatorname{sen}\theta = 4{,}0\ \text{m} \cdot 3{,}0\ \text{N} \cdot \operatorname{sen} 30° = 6{,}0\ \text{N·m}$. Il vettore è perpendicolare al piano xy, cioè diretto lungo l'asse z; la rotazione da $\boldsymbol{a}$ (asse x) verso $\boldsymbol{b}$ (verso y positivo) è antioraria, quindi il verso è quello di $+\mathbf{k}$: esce dal foglio.

19. $s(4{,}1) = 0{,}030 \cdot 4{,}1^3\ \text{m} = 2{,}0676\ \text{m}$; $s(3{,}9) = 0{,}030 \cdot 3{,}9^3\ \text{m} = 1{,}7796\ \text{m}$. Velocità media = $(2{,}0676 - 1{,}7796)\ \text{m} / 0{,}20\ \text{s} \approx 1{,}440\ \text{m/s}$. Gli intervalli non centrati con $\Delta t = 0{,}1$ s danno 1,476 m/s e 1,404 m/s, che sbagliano di circa 0,036 m/s per eccesso e per difetto; l'intervallo centrato sbaglia di soli 0,0003 m/s: è la stima migliore, perché i due errori opposti si compensano quasi del tutto.

20. Il modulo (la velocità scalare); la direzione; raggio di curvatura; nulla (il raggio di curvatura è infinito).

21. $a_c = v^2/r = (30\ \text{m/s})^2/800\ \text{m} \approx 1{,}1\ \text{m/s}^2$ (1,125 m/s^2); $|a_t| = 0{,}40\ \text{m/s}^2$; $a = \sqrt{(0{,}40^2 + 1{,}125^2)}\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}2\ \text{m/s}^2$. L'accelerazione tangenziale è opposta alla velocità; l'angolo φ fra $\boldsymbol{a}$ e la direzione opposta alla velocità è dato da $\tan\varphi = 1{,}125/0{,}40$, $\varphi \approx 70°$.

22. a) Nord-est = 45°, ovest = 180°, sud = 270°. Componenti: $x = 450 \cos 45° - 300 + 0 = 318{,}2 - 300 = 18{,}2$ m; $y = 450 \operatorname{sen} 45° + 0 - 200 = 318{,}2 - 200 = 118{,}2$ m. $\Delta\boldsymbol{r} \approx (18\mathbf{i} + 118\mathbf{j})$ m. b) Modulo $\sqrt{(18{,}2^2 + 118{,}2^2)}$ m ≈ 120 m; entrambe le componenti sono positive (primo quadrante): $\theta = \tan^{-1}(118{,}2/18{,}2) \approx 81°$, cioè circa 9° a est del nord. c) Il vettore opposto: $(-18\mathbf{i} - 118\mathbf{j})$ m, 120 m in direzione 261°, circa 9° a ovest del sud.

23. a) $\tan\alpha = 35/60$, $\alpha \approx 30°$. b) $\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = 60\text{ N} \cdot 12\text{ m} + 35\text{ N} \cdot 0 = 720$ J. Con il volume scorso: $F = \sqrt{(60^2 + 35^2)}$ N ≈ 69,5 N, $W = Fs \cos\alpha = 69{,}5\text{ N} \cdot 12\text{ m} \cdot \cos 30{,}3° \approx 720$ J: lo stesso valore. c) $\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = 60 \cdot 12 + 35 \cdot 3{,}0 = 720\text{ J} + 105\text{ J} = 825\text{ J} \approx 8{,}3 \times 10^2$ J. Lungo il pendio anche la componente verticale della forza ha una componente dello spostamento parallela a sé, e contribuisce al prodotto scalare.

24. a) Componente lungo **k**: $r_x F_y - r_y F_x = 0{,}25\text{ m} \cdot 50\text{ N} - 0{,}10\text{ m} \cdot (-20\text{ N}) = 12{,}5 + 2{,}0 = 14{,}5$ N·m; le altre componenti sono nulle (vettori nel piano). $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (14{,}5\text{ N·m})\mathbf{k}$: esce dal foglio, quindi il bullone tende a ruotare in senso antiorario. b) $r = \sqrt{(0{,}25^2 + 0{,}10^2)}$ m ≈ 0,269 m; $F = \sqrt{(20^2 + 50^2)}$ N ≈ 53,9 N. Il prodotto scalare $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = 0{,}25 \cdot (-20) + 0{,}10 \cdot 50 = 0$: i vettori sono perpendicolari, $\theta = 90°$. Allora $rF \operatorname{sen}\theta = 0{,}269\text{ m} \cdot 53{,}9\text{ N} \cdot 1 \approx 14{,}5$ N·m: coincide. c) Il braccio è $b = M/F = 14{,}5\text{ N·m} / 53{,}9\text{ N} \approx 0{,}269$ m, uguale a r proprio perché la forza è perpendicolare a $\boldsymbol{r}$.

25. a) Sull'auto agiscono il peso mg (verso il basso), la reazione normale N (verso l'alto) e l'attrito statico delle gomme (orizzontale). Lungo la verticale non c'è accelerazione: $N = mg$. L'unica forza orizzontale è l'attrito, che per il secondo principio deve valere ma, con $a = \sqrt{(a_t^2 + a_c^2)}$: fornisce sia la componente tangenziale sia quella centripeta. b) L'attrito statico non supera $\mu_s N = \mu_s mg$, quindi $a \le \mu_s g = 0{,}80 \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 7{,}84\text{ m/s}^2$. Al limite $a_c = \sqrt{(7{,}84^2 - 2{,}0^2)}\text{ m/s}^2 \approx 7{,}58\text{ m/s}^2$, e da $a_c = v^2/r$: $v = \sqrt{(7{,}58 \cdot 25)}$ m/s ≈ 13,8 m/s (circa 50 km/h). c) Lungo l'arco il moto è uniformemente accelerato: $l = (v^2 - v_0^2)/(2a_t) = (189{,}5 - 36)\text{ m}^2/\text{s}^2 / (4{,}0\text{ m/s}^2) \approx 38$ m; la circonferenza è $2\pi \cdot 25$ m ≈ 157 m, quindi l'auto ha percorso circa 0,24 giri, poco meno di un quarto di giro.

26. a) Intervallo centrato 0,15–0,25 s: $v_x = (0{,}450 - 0{,}270)\text{ m} / 0{,}10\text{ s} = 1{,}80$ m/s; $v_y = (-0{,}306 - (-0{,}110))$ m / 0,10 s = −1,96 m/s. $\boldsymbol{v} \approx (1{,}8\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j})$ m/s, modulo $\sqrt{(1{,}80^2 + 1{,}96^2)}$ m/s ≈ 2,7 m/s; il vettore sta nel quarto quadrante (x positiva, y negativa) e punta sotto l'orizzontale di $\tan^{-1}(1{,}96/1{,}80) \approx 47°$. b) $v_y(0{,}15\text{ s}) \approx (-0{,}196 - (-0{,}049))/0{,}10\text{ m/s} = -1{,}47$ m/s; $v_y(0{,}25\text{ s}) \approx (-0{,}441 - (-0{,}196))/0{,}10\text{ m/s} = -2{,}45$ m/s; $a_y \approx (-2{,}45 - (-1{,}47))/0{,}10\text{ m/s}^2 = -9{,}8\text{ m/s}^2$. c) Sì: x cresce di 0,090 m a ogni fotogramma (moto orizzontale uniforme con 1,80 m/s) e $a_y = -g$, come nel moto del proiettile (si usa il principio di indipendenza dei moti).

27. a) L'accelerazione forma 45° con la velocità quando le due componenti sono uguali, $a_c = a_t$, cioè $v^2/r = a_t$, $v = \sqrt{(a_t r)}$. Poiché il moto lungo la circonferenza parte da fermo ed è uniformemente accelerato (accelerazione tangenziale costante), $v = a_t t$, quindi $t = \sqrt{(r/a_t)}$. Con i dati: $v = \sqrt{(3{,}0 \cdot 0{,}20)}$ m/s ≈ 0,77 m/s, $t = \sqrt{(0{,}20/3{,}0)}$ s ≈ 0,26 s. b) Lunghezza dell'arco percorso: $l = v^2/(2a_t) = a_t r/(2a_t) = r/2$. L'angolo in radianti è arco/raggio: $\theta = l/r = 1/2 = 0{,}5$ rad ≈ 29°, indipendente da r e da a_t.

28. $a = F/m = 3{,}0\text{ N} / 2{,}0\text{ kg} = 1{,}5\text{ m/s}^2$ (secondo principio: sul carrello agiscono il peso e la reazione normale, che si equilibrano, e la spinta orizzontale). a) Passi di 1,0 s (la posizione avanza con la velocità all'inizio del passo): $t = 1{,}0$ s: $x = 0$, $v = 1{,}5$ m/s; $t = 2{,}0$ s: $x = 1{,}5$ m, $v = 3{,}0$ m/s; $t = 3{,}0$ s: $x = 4{,}5$ m, $v = 4{,}5$ m/s. b) Passi di 0,50 s: le velocità all'inizio dei sei passi sono 0; 0,75; 1,5; 2,25; 3,0; 3,75 m/s, e $x = 0{,}50\text{ s} \cdot 11{,}25\text{ m/s} \approx 5{,}6$ m (5,625 m). c) Legge oraria: $x = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}0^2$ m = 6,75 m. Errori: 2,25 m con passi di 1,0 s, 1,125 m con passi di 0,50 s: dimezzando il passo l'errore si dimezza (è proporzionale al passo).

29. a) $\mathrm{AB} = (3{,}0\mathbf{i} + 1{,}0\mathbf{j})$ m; $\mathrm{AC} = (1{,}0\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j})$ m. b) Componente lungo **k** del prodotto vettoriale: $3{,}0 \cdot 4{,}0 - 1{,}0 \cdot 1{,}0 = 11\text{ m}^2$; il modulo (11 m²) è l'area del parallelogramma di lati AB e AC, e il triangolo ne è la metà: 5,5 m². c) $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = 3{,}0 \cdot 1{,}0 + 1{,}0 \cdot 4{,}0 = 7{,}0\text{ m}^2$; $|\mathrm{AB}| = \sqrt{10}$ m ≈ 3,16 m, $|\mathrm{AC}| = \sqrt{17}$ m ≈ 4,12 m; $\cos\mathrm{A} = 7{,}0/13{,}04 \approx 0{,}537$, $\mathrm{A} \approx 57{,}5°$. Controllo: $\operatorname{sen}\mathrm{A} = 11/13{,}04 \approx 0{,}844$, che dà ancora A ≈ 57,5°, e $0{,}537^2 + 0{,}844^2 \approx 1{,}00$.

30. Il rapporto $(-5{,}0)/(-5{,}0) = 1$ è lo stesso dei vettori (5,0; 5,0) e (−5,0; −5,0), che puntano in versi opposti: la calcolatrice restituisce l'angolo del primo. Il vet-

tore ha entrambe le componenti negative, quindi sta nel terzo quadrante: $\theta = 45° + 180° = 225°$, cioè punta verso sud-ovest, non verso nord-est. Modulo $\sqrt{50}$ m ≈ 7,1 m.

31. Traccia di risposta. La fotocellula misura il tempo di oscuramento $\Delta t = 0{,}020$ m / 1,5 m/s ≈ 13 ms e calcola larghezza/Δt: è per definizione una velocità media su quell'intervallo. Durante l'attraversamento la velocità cambia di $a\Delta t = 2{,}0\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}013$ s ≈ 0,027 m/s, cioè meno del 2% di 1,5 m/s. Per un moto uniformemente accelerato la velocità media coincide con la velocità istantanea a metà dell'intervallo; quindi la misura si può considerare la velocità istantanea nell'istante in cui la bandierina è a metà del fascio, con un errore trascurabile rispetto alle incertezze tipiche (qualche per cento).

32. Traccia di risposta. Una previsione deterministica parte dalle condizioni iniziali, cioè dallo stato dell'atmosfera misurato oggi (temperature, pressioni, venti in moltissimi punti), che non si conosce mai esattamente: ogni misura ha un'incertezza e fra le stazioni restano zone non misurate. L'atmosfera è un sistema caotico: differenze piccolissime nelle condizioni iniziali crescono nel tempo, fino a produrre evoluzioni completamente diverse. Per questo l'affidabilità diminuisce con l'orizzonte della previsione, anche con leggi perfettamente note e calcolatori potentissimi; si usano infatti più previsioni con condizioni iniziali leggermente diverse per stimare quanto è incerto il risultato.

33. Traccia di risposta. Il prodotto scalare dipende soltanto da a, b e $\cos\theta$, che non cambiano scambiando i vettori: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. Per il prodotto vettoriale il modulo è lo stesso, ma il verso dipende dal senso della rotazione: con $\boldsymbol{a}$ lungo x e $\boldsymbol{b}$ lungo y nel piano del foglio, ruotando da $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (senso antiorario) il pollice esce dal foglio, ruotando da $\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$ (senso orario) entra nel foglio. I due prodotti sono quindi vettori opposti: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.