CAPITOLO

3

Il moto circolare uniforme

Un corpo che gira sempre alla stessa velocità non smette mai di accelerare: la sua velocità cambia direzione in ogni istante.

OBIETTIVI

1. Descrivere il moto circolare uniforme con il periodo, la frequenza e la velocità tangenziale, e convertire i giri al minuto in hertz.
2. Misurare gli angoli in radianti e passare dai gradi ai radianti e viceversa.
3. Usare la velocità angolare e la relazione $v = \omega r$, distinguendo i punti di un corpo rigido (stessa ω) dalle ruote collegate da una catena (stessa v).
4. Ricavare l'accelerazione centripeta e calcolarla con $a_c = v^2/r = \omega^2 r$.
5. Spiegare perché il moto circolare uniforme è un moto accelerato e dove punta la sua accelerazione.
6. Verificare in laboratorio la proporzionalità fra velocità tangenziale e distanza dall'asse.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Il moto circolare uniforme 2
3.2 La velocità tangenziale 4
3.3 Il radiante e la velocità angolare 6
3.4 L'accelerazione centripeta 12
3.5 Misurare il moto circolare e il moto armonico 16

Fisica 2 · Parte I · Il moto nel piano · versione 1.0
Capitolo 3: Il moto circolare uniforme · pagine 67–90 del volume completo · estratto per lo studio

Le pale di un ventilatore, il cestello della lavatrice durante la centrifuga, la ruota di una bicicletta, la giostra al luna park, un punto qualsiasi della Terra che ruota intorno al proprio asse, la Luna nel suo giro intorno a noi: il mondo è pieno di oggetti che girano in tondo, ripetendo lo stesso percorso a intervalli regolari. È un moto così familiare che sembra non nascondere sorprese. Invece ne nasconde una importante: un corpo che gira a velocità costante **sta accelerando**.

Nel capitolo 1 hai visto che un corpo accelera anche quando cambia soltanto la direzione della sua velocità, e hai calcolato l'accelerazione media di un'auto in una rotatoria. In questo capitolo studiamo con precisione il caso più semplice di moto curvilineo, il moto lungo una circonferenza con velocità scalare costante. Impareremo a descriverlo con nuove grandezze, il periodo, la frequenza e la velocità angolare; introdurremo un nuovo modo di misurare gli angoli, il **radiante**; e ricaveremo quanto vale, e dove punta, l'accelerazione di un corpo che gira. È l'ultimo tassello della cinematica nel piano: dal prossimo capitolo ci chiederemo quali forze producono i moti che abbiamo descritto.

3.1 Il moto circolare uniforme

3.1.1 Un moto che si ripete

Un corpo che si muove lungo una circonferenza compie un **moto circolare**. Se, in più, percorre archi uguali in tempi uguali, qualunque sia la durata che scegliamo, cioè se la sua velocità scalare è costante, il moto si chiama **moto circolare uniforme**. Come per il moto rettilineo uniforme, la parola «uniforme» si riferisce alla rapidità del moto, non alla sua direzione: in un moto circolare uniforme il tachimetro segnerebbe sempre lo stesso valore, ma la direzione del moto cambia in ogni istante.

Molti moti reali sono, con ottima approssimazione, circolari uniformi: un punto del cestello di una lavatrice durante la centrifuga, la punta della lancetta di un orologio, un punto della superficie terrestre nella rotazione quotidiana, un'auto che percorre una rotatoria senza accelerare né frenare. Nel modello, come nei capitoli precedenti, il corpo è un punto materiale: per la ruota o il disco studieremo il moto di ciascun punto, uno alla volta. La retta intorno alla quale ruota un corpo esteso, perpendicolare al piano del moto e passante per il centro delle circonferenze descritte dai suoi punti, si chiama **asse di rotazione**.

Il moto circolare uniforme è un moto periodico: dopo ogni giro il corpo si ritrova nella stessa posizione, con la stessa velocità, e tutto ricomincia uguale. Come per i fenomeni periodici che hai incontrato nel primo volume, per esempio le oscillazioni di un pendolo (*Fisica 1*, capitoli 1 e 2), conviene descriverlo con la durata di una ripetizione.

3.1.2 Periodo e frequenza

Il **periodo** T di un moto circolare uniforme è il tempo impiegato per compiere un giro completo. Si misura in secondi. Un modo pratico di misurarlo, che userai in laboratorio, è cronometrare un certo numero di giri e dividere per quel numero: l'errore che commetti premendo il cronometro si distribuisce così su molti giri.

La **frequenza** f è il numero di giri compiuti nell'unità di tempo. Se un giro dura T, in un secondo i giri sono $1/T$: frequenza e periodo sono l'uno l'inverso dell'altro,

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

L'unità di misura della frequenza nel SI è 1/s, cioè s^{-1}, che prende il nome di **hertz** (simbolo Hz), in onore del fisico tedesco Heinrich Hertz: una frequenza di 1 Hz corrisponde a un giro al secondo. Nella tecnica si usano molto anche i **giri al minuto** (giri/min, sui motori spesso indicati con rpm, dall'inglese *revolutions per minute*). Poiché un minuto contiene 60 secondi, per passare dai giri al minuto agli hertz si divide per 60:

$$f\,(\mathrm{Hz}) = \frac{n\,(\text{giri/min})}{60}$$

Ecco alcuni valori tipici. La lancetta dei secondi compie un giro in 60 s: il suo periodo è 60 s e la frequenza 1/60 Hz ≈ 0,017 Hz. Il piatto di un giradischi per i vecchi dischi in vinile gira a 33⅓ giri/min, cioè 0,556 Hz, con un periodo di 1,80 s. Il motore di un'auto al minimo gira intorno agli 800 giri/min, circa 13 Hz. Il disco rigido di molti computer ruota a 7200 giri/min, cioè 120 Hz: un giro dura poco più di 8 millesimi di secondo.

Per la Terra il discorso è un po' più sottile. Rispetto al Sole un giro dura in media 24 h, il giorno solare; ma mentre la Terra ruota su sé stessa avanza anche lungo l'orbita, e per riportare il Sole nella stessa posizione nel cielo deve ruotare un po' più di un giro. Il periodo di rotazione vero, misurato rispetto alle stelle lontane, si chiama **giorno sidereo** e dura 23 h 56 min 4 s, cioè 86 164 s. Nei calcoli di questo capitolo useremo questo valore.

ESEMPIO SVOLTO

Dai giri al minuto al periodo

Problema. Nella centrifuga una lavatrice raggiunge 1200 giri/min. Il disco rigido di un computer ruota a 7200 giri/min. Calcola, per ciascuno, la frequenza in hertz e il periodo. Quanti giri compie il disco rigido durante un giro del cestello?

Soluzione. Lavatrice: $f = 1200/60\ \text{Hz} = 20\ \text{Hz}$; $T = 1/f = 1/(20\ \text{Hz}) = 0{,}050\ \text{s} = 50\ \text{ms}$. Disco rigido: $f = 7200/60\ \text{Hz} = 120\ \text{Hz}$; $T = 1/(120\ \text{Hz}) \approx 8{,}33 \times 10^{-3}\ \text{s} \approx 8{,}3\ \text{ms}$.

Durante un giro del cestello, che dura 0,050 s, il disco compie $120\ \text{Hz} \times 0{,}050\ \text{s} = 6{,}0$ giri. Allo stesso risultato si arriva con il rapporto delle frequenze: $7200/1200 = 6$.

Controllo. $\text{Hz} \times \text{s} = (1/\text{s}) \times \text{s}$ è un numero puro, come deve essere un numero di giri. Una frequenza più alta corrisponde a un periodo più breve: il disco, sei volte più frequente, ha un periodo sei volte più corto (50 ms / 6 ≈ 8,3 ms).

3.2 La velocità tangenziale

3.2.1 Quanto è veloce un punto che gira

In un giro il corpo percorre una volta la circonferenza, lunga $2\pi r$, e impiega il tempo T. Poiché il moto è uniforme, la velocità scalare è la stessa in ogni tratto e vale lo spazio percorso diviso il tempo impiegato. Il modulo della velocità di un corpo in moto circolare uniforme si chiama **velocità tangenziale**:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

L'aggettivo «tangenziale» ricorda la direzione del vettore velocità: come hai visto nel capitolo 1, la velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria, e la tangente a una circonferenza in un punto è perpendicolare al raggio che passa per quel punto. La Figura 3.1 mostra la velocità in quattro punti della traiettoria: le frecce viola hanno tutte la stessa lunghezza, ma ciascuna punta in una direzione diversa.

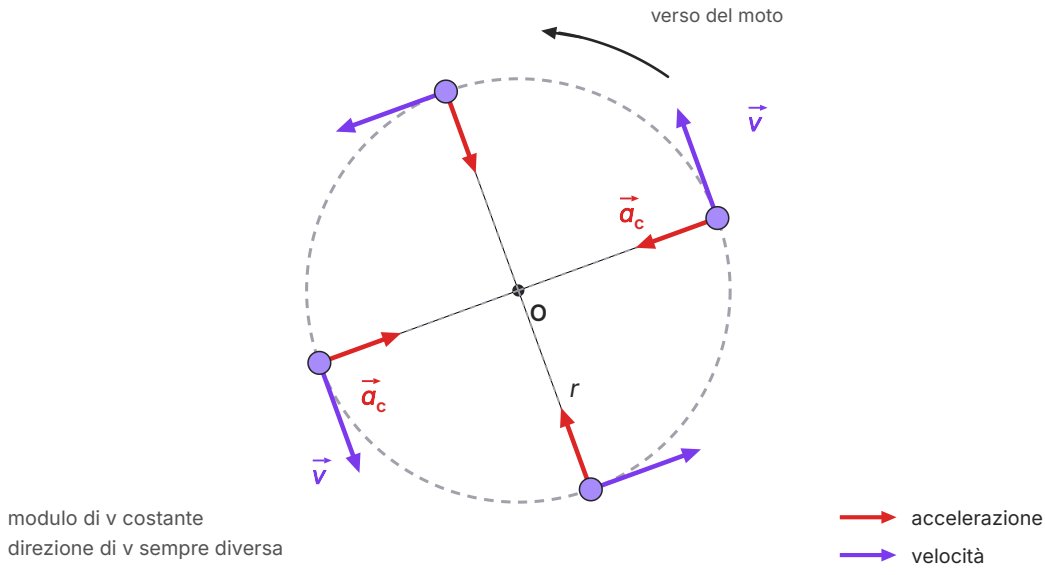


Figura 3.1 Moto circolare uniforme in verso antiorario. In ogni punto la velocità $\boldsymbol{v}$ (in viola) è tangente alla circonferenza, cioè perpendicolare al raggio, e ha sempre lo stesso modulo; l'accelerazione $\boldsymbol{a}_c$ (in rosso), che studieremo più avanti nel capitolo, è diretta lungo il raggio, verso il centro O.

Calcoliamo, per esempio, la velocità di un punto dell'equatore dovuta alla rotazione terrestre. Il raggio equatoriale della Terra è 6378 km e il periodo è il giorno sidereo:

$$v = \frac{2\pi \times 6{,}378 \times 10^6 \text{ m}}{86\,164 \text{ s}} \approx 465 \text{ m/s} \approx 1670 \text{ km/h}$$

Senza accorgercene, all'equatore ci muoviamo a una velocità superiore a quella di un aereo di linea. Non lo percepiamo perché con noi si muovono anche il suolo, l'aria e tutto ciò che ci circonda: come hai visto nel capitolo 1 con la nave di Galileo, ciò che conta per l'osservazione è il moto relativo. Alle nostre latitudini la velocità è minore, perché un punto dell'Italia gira su una circonferenza più piccola di quella dell'equatore: lo calcolerai negli esercizi.

3.2.2 Una velocità che cambia sempre direzione

Il moto circolare uniforme mette alla prova il linguaggio dei vettori del capitolo 1. In esso è costante il **modulo** della velocità, la velocità tangenziale v, ma non è costante il **vettore** velocità $\boldsymbol{v}$, che cambia direzione in ogni istante. Per questo diremo sempre «velocità tangenziale costante» o «velocità scalare costante», e mai «velocità costante», che vorrebbe dire vettore costante e quindi moto rettilineo uniforme. Fra poco vedremo la conseguenza più importante di questa osservazione: il moto circolare uniforme è un moto accelerato.

La formula della velocità tangenziale dice anche come v dipende dal raggio. A parità di periodo, un punto più lontano dal centro percorre in un giro una circonferenza più lunga, e quindi va più veloce: v è direttamente proporzionale a r. Se ti sei mai seduto all'estremità di una giostra, sai che lì «si vola», mentre vicino al centro si gira quasi da fermi, anche se tutti i seggiolini compiono un giro nello stesso tempo.

3.3 Il radiante e la velocità angolare

3.3.1 Misurare gli angoli con il raggio

Finora hai misurato gli angoli in gradi: l'angolo giro vale 360°, un numero scelto per tradizione, che risale all'astronomia dell'antica Mesopotamia. Per descrivere i moti circolari è molto più comodo un'altra unità, legata direttamente alla geometria della circonferenza. Su una circonferenza di raggio r, consideriamo un angolo al centro e l'arco l che esso individua. La misura dell'angolo in radianti è il rapporto fra la lunghezza dell'arco e il raggio:

$$\theta = \frac{l}{r}$$

Il **radiante** (simbolo rad) è quindi l'angolo al centro che individua un arco lungo quanto il raggio (Figura 3.2a). La misura non dipende dalla circonferenza che si sceglie: raddoppiando il raggio raddoppia anche l'arco, e il rapporto resta lo stesso. Essendo il rapporto fra due lunghezze, un angolo in radianti è un numero puro; il simbolo rad si scrive per ricordare che quel numero è un angolo.

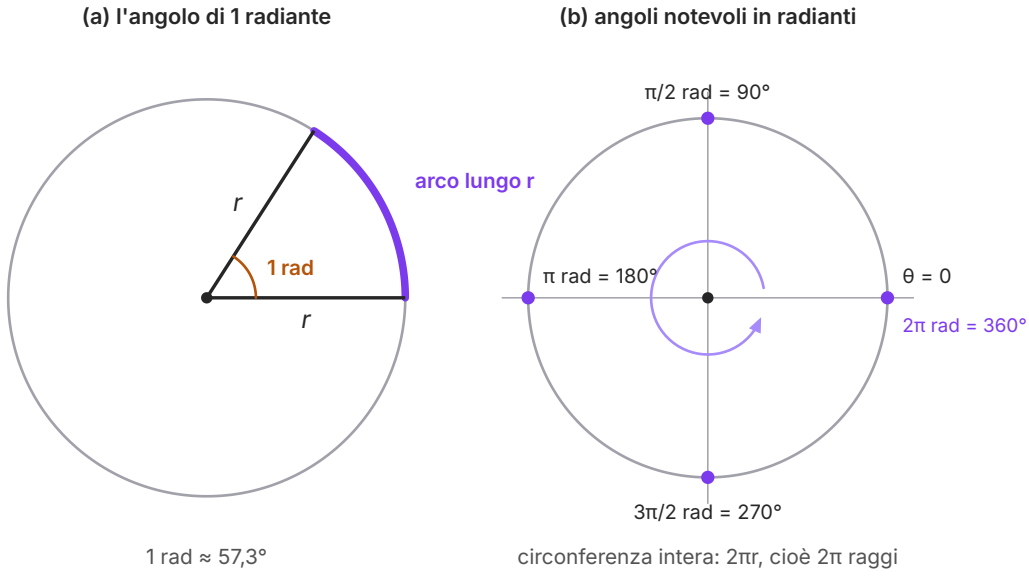


Figura 3.2 (a) Il radiante: l'angolo al centro che individua un arco (in viola) lungo quanto il raggio r; vale circa 57,3°. (b) Alcuni angoli notevoli espressi in radianti e in gradi. L'intera circonferenza, lunga $2\pi r$, contiene $2\pi \approx 6{,}28$ archi lunghi un raggio: l'angolo giro misura 2π rad.

Quanti radianti misura un angolo giro? L'arco è l'intera circonferenza, lunga $2\pi r$, quindi l'angolo vale $2\pi r/r = 2\pi$ rad $\approx 6{,}28$ rad. Da questa uguaglianza si ricavano tutte le conversioni:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$$

Per passare dai gradi ai radianti si moltiplica per $\pi/180$; per passare dai radianti ai gradi si moltiplica per $180/\pi$. Un angolo retto misura quindi $\pi/2$ rad $\approx 1{,}57$ rad, un angolo piatto π rad $\approx 3{,}14$ rad. Nel primo volume (capitolo 6) la calcolatrice in modalità RAD era un pericolo da evitare quando calcolavi sen e cos di angoli in gradi; ora sai che cosa misura quella modalità.

3.3.2 La velocità angolare

Mentre un corpo gira, il raggio che lo congiunge al centro spazza un angolo. Se in un intervallo Δt il raggio ruota di un angolo $\Delta\theta$, detto **spostamento angolare**, la rapidità della rotazione è misurata dalla **velocità angolare**

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocità angolare si indica con la lettera greca ω (omega) e si misura in radianti al secondo (rad/s). Nel moto circolare uniforme il raggio spazza angoli uguali in tempi uguali, quindi ω è costante. In un periodo il raggio compie un giro, cioè 2π rad, e perciò

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Confrontiamo ora la velocità tangenziale con quella angolare. Poiché $v = 2\pi r/T$ e $\omega = 2\pi/T$, la velocità tangenziale è il prodotto della velocità angolare per il raggio:

$$v = \omega r$$

È lo stesso legame che c'è fra arco e angolo, $l = \theta r$, diviso per il tempo. La relazione vale soltanto se ω è espressa in rad/s, perché solo con i radianti la lunghezza dell'arco è l'angolo per il raggio. Per esempio, la Terra ruota con $\omega = 2\pi/86\,164\ \text{s} \approx 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s, e all'equatore $v = \omega r = 7{,}29 \times 10^{-5}\ \text{rad/s} \times 6{,}378 \times 10^{6}\ \text{m} \approx 465$ m/s, come avevamo trovato. Nelle unità, rad/s × m dà m/s, perché il radiante è un numero puro e si può omettere.

ERRORE FREQUENTE

«Una ruota di raggio 0,30 m fa un giro al secondo, quindi ω = 360°/s e $v = \omega r = 360 \times 0{,}30$ m/s = 108 m/s»: **sbagliato**. Nella formula $v = \omega r$ la velocità angolare va espressa in **rad/s**: un giro al secondo significa ω = 2π rad/s ≈ 6,28 rad/s, e quindi $v \approx 6{,}28 \times 0{,}30$ m/s ≈ 1,9 m/s. Un controllo con il buon senso smaschera subito l'errore: in un secondo il punto percorre una circonferenza, lunga $2\pi \times 0{,}30$ m ≈ 1,9 m, non 108 m. Allo stesso modo, i giri al minuto vanno prima convertiti in hertz e poi moltiplicati per 2π.

3.3.3 Stessa velocità angolare, velocità diverse

Quando ruota un corpo rigido, come un disco, una ruota o una giostra, in ogni intervallo di tempo tutti i suoi raggi ruotano dello stesso angolo: **tutti i punti hanno la stessa velocità angolare**, e lo stesso periodo. La velocità tangenziale invece no: per $v = \omega r$, è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione. Un punto sull'asse è fermo, un punto a metà raggio va alla metà della velocità di un punto sul bordo.

DA RICORDARE

In un corpo rigido che ruota, **ω è la stessa per tutti i punti**, mentre **$v = \omega r$ cresce con la distanza dall'asse**. Al contrario, quando due ruote sono collegate da una cinghia o da una catena che non slitta, o si toccano senza strisciare, sono i punti dei bordi ad avere la **stessa velocità tangenziale**, mentre le velocità angolari sono diverse: gira più in fretta la ruota più piccola.

La seconda situazione è quella della bicicletta (Figura 3.3). Pedalando si fa ruotare la **corona**, la ruota dentata collegata ai pedali; la catena trasmette il moto al **pignone**, la piccola ruota dentata fissata al mozzo della ruota posteriore. Ogni maglia della catena si muove con la stessa velocità v, che è anche la velocità tangenziale dei denti della corona e del pignone: $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Il rapporto fra le velocità angolari del pignone e della corona si chiama **rapporto di trasmissione**:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Poiché i denti hanno tutti lo stesso passo, il raggio di una ruota dentata è proporzionale al numero dei suoi denti, e il rapporto di trasmissione si può calcolare anche contando i denti: con una corona da 48 denti e un pignone da 16, il pignone (e con lui la ruota) fa tre giri per ogni giro dei pedali. Il pignone e la ruota posteriore, a loro volta, sono un unico corpo rigido: hanno la stessa velocità angolare, ma il bordo della ruota, molto più lontano dall'asse, va molto più veloce dei denti del pignone.

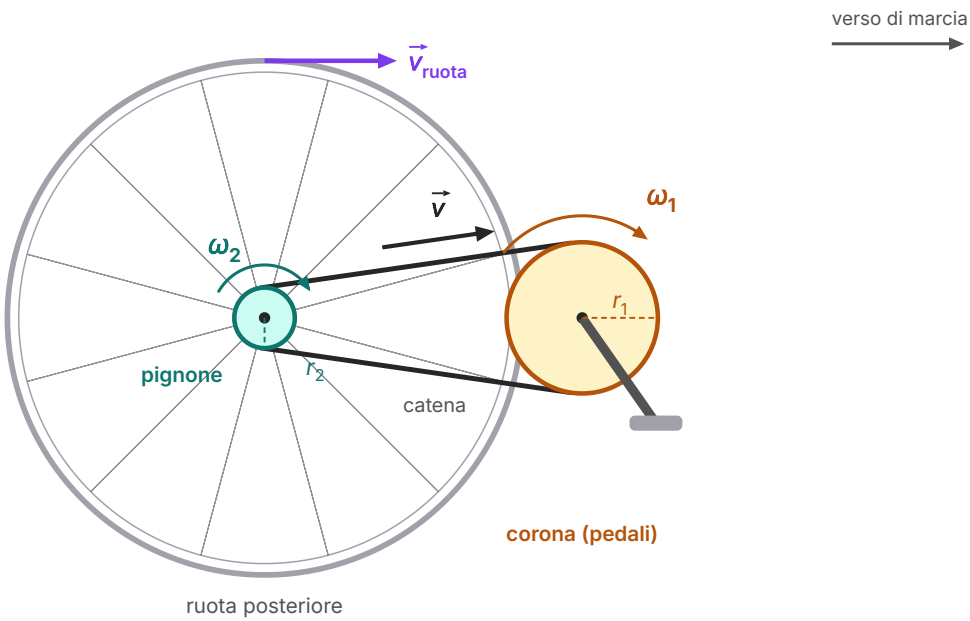


Figura 3.3 Trasmissione a catena di una bicicletta (corona di raggio 10 cm, pignone di 4,0 cm, ruota di 34 cm; disegno in scala). La catena ha in ogni punto la stessa velocità v, uguale alla velocità tangenziale dei denti della corona e del pignone: il pignone, più piccolo, ruota con velocità angolare ω_2 maggiore di quella della corona, ω_1. La ruota posteriore ruota insieme al pignone, con la stessa ω_2, e il suo bordo ha velocità v_{ruota} molto maggiore di v.

ESEMPIO SVOLTO

Pedalare in pianura

Problema. Un ciclista pedala facendo un giro di pedali al secondo. La corona ha raggio 10 cm, il pignone 4,0 cm e la ruota posteriore 34 cm (Figura 3.3). Calcola a) la velocità angolare della corona e la velocità della catena; b) la velocità angolare del pignone; c) la velocità della bicicletta, supponendo che la ruota rotoli senza strisciare.

Soluzione. a) La corona ha $T = 1{,}0$ s, quindi $\omega_1 = 2\pi/T \approx 6{,}28$ rad/s. La catena si muove come i denti della corona: $v = \omega_1 r_1 = 6{,}28 \text{ rad/s} \times 0{,}10 \text{ m} \approx 0{,}63$ m/s.

b) I denti del pignone hanno la stessa velocità della catena: $\omega_2 = v/r_2 = 0{,}628 \text{ m/s} / 0{,}040 \text{ m} \approx 15{,}7$ rad/s, cioè 2,5 giri al secondo (il rapporto di trasmissione è $10/4{,}0 = 2{,}5$).

c) La ruota ruota con il pignone, a 15,7 rad/s. Se rotola senza strisciare, la bicicletta avanza a ogni giro di una lunghezza pari alla circonferenza della ruota, cioè con la velocità tangenziale del bordo: $v_{\text{bici}} = \omega_2 R = 15{,}7 \text{ rad/s} \times 0{,}34 \text{ m} \approx 5{,}3 \text{ m/s} \approx 19$ km/h.

Controllo. Una pedalata tranquilla in pianura, circa 20 km/h: il risultato è realistico. Si arriva allo stesso numero in un solo passaggio: $v_{\text{bici}} = v_{\text{catena}} \times R/r_2 = 0{,}628 \text{ m/s} \times 34/4{,}0 \approx 5{,}3$ m/s.

Anche il grafico della velocità tangenziale in funzione della distanza dall'asse racconta la stessa storia. Per i punti di un disco che ruota, $v = \omega r$ è una proporzionalità diretta: il grafico è una retta che passa per l'origine, e la sua pendenza è la velocità angolare. Due dischi che ruotano a velocità angolari diverse danno due rette con pendenze diverse (Figura 3.4).

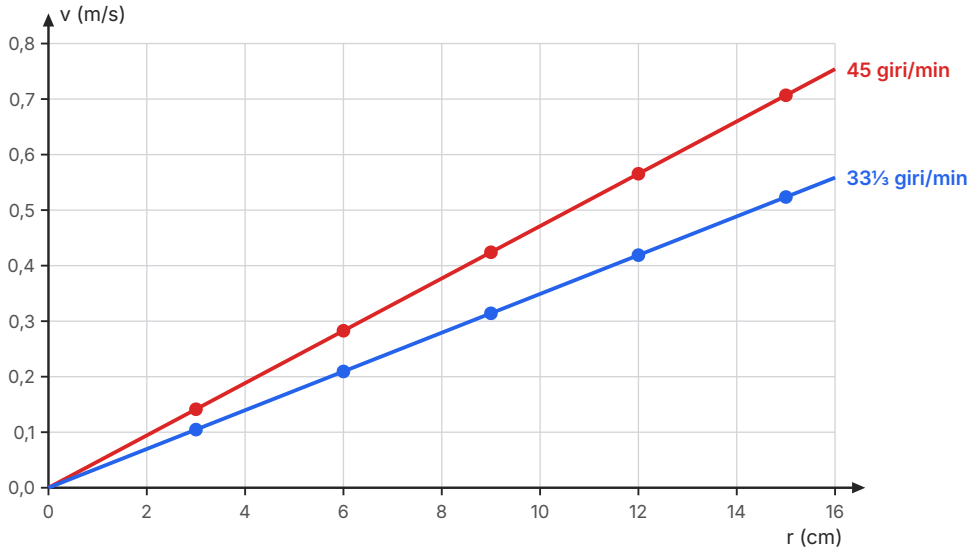


Figura 3.4 Velocità tangenziale in funzione della distanza dall'asse per i punti del piatto di un giradischi, alle due velocità di rotazione 33⅓ giri/min (in blu) e 45 giri/min (in rosso); valori calcolati con $v = \omega r$. Ogni retta passa per l'origine e la sua pendenza è la velocità angolare del piatto.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere la pendenza di un grafico

Problema. Usando la Figura 3.4, a) ricava dal grafico la velocità angolare del piatto per la retta rossa e controlla che corrisponda a 45 giri/min; b) trova a quale distanza dall'asse un punto del piatto a 33⅓ giri/min ha velocità 0,40 m/s; c) spiega perché le due rette partono dallo stesso punto.

Soluzione. a) Scegliamo sulla retta rossa un punto lontano dall'origine, dove la lettura è più precisa: per $r = 15$ cm $= 0{,}15$ m si legge $v \approx 0{,}71$ m/s. La pendenza è $\omega = v/r \approx 0{,}71$ m/s / 0,15 m $\approx 4{,}7$ rad/s. Il valore atteso è $\omega = 2\pi \times (45/60)$ Hz $\approx 4{,}71$ rad/s: la lettura è in accordo.

b) Sulla retta blu $\omega = 2\pi/1{,}80$ s $\approx 3{,}49$ rad/s, quindi $r = v/\omega = 0{,}40$ m/s / 3,49 rad/s $\approx 0{,}115$ m ≈ 11 cm. Sul grafico, la retta blu attraversa la riga di 0,4 m/s poco oltre la tacca degli 11 cm, in accordo con il calcolo.

c) Per $r = 0$ il punto è sull'asse di rotazione e resta fermo, qualunque sia la velocità angolare: entrambe le rette passano per l'origine.

Controllo. Il rapporto fra le pendenze è $4{,}71/3{,}49 \approx 1{,}35$, uguale al rapporto fra le frequenze, $45/33{,}3 \approx 1{,}35$: a parità di raggio, il piatto più veloce dà velocità tangenziali più grandi nella stessa proporzione.

COLLEGAMENTI

Come fa il ciclocomputer a sapere quanto vai veloce?

Il piccolo computer montato sul manubrio di molte biciclette non misura direttamente la velocità. Su un raggio della ruota è fissato un magnete, e sulla forcella un sensore che registra ogni passaggio del magnete: il dispositivo misura quindi il periodo di rotazione della ruota. All'installazione l'utente inserisce la circonferenza della ruota, $2\pi R$; da lì il calcolo è quello di questo capitolo, $v = 2\pi R/T$. Se si inserisce una circonferenza sbagliata del 5%, anche la velocità e la distanza percorsa risultano sbagliate del 5%: è un errore sistematico, che nessuna ripetizione delle misure può scoprire.

Con lo stesso principio funziona il tachimetro di molte auto, che conta i giri delle ruote. Per questo, montando pneumatici di diametro diverso da quello previsto, il tachimetro sbaglia: una ruota più grande percorre più strada a ogni giro, e l'auto va più veloce di quanto indicato.

3.4 L'accelerazione centripeta

3.4.1 Dove punta l'accelerazione

Nel moto circolare uniforme il vettore velocità cambia direzione in ogni istante; dunque, per la definizione del capitolo 1, il corpo ha un'accelerazione. Per trovarla seguiamo il metodo di quel capitolo: confrontiamo la velocità in due istanti vicini, calcoliamo la differenza $\Delta\boldsymbol{v}$ e la dividiamo per l'intervallo di tempo.

Nella Figura 3.5a il corpo passa dalla posizione $\boldsymbol{r}_1$ alla posizione $\boldsymbol{r}_2$ nel tempo Δt, mentre il raggio ruota dell'angolo $\Delta\theta$. Le velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ hanno lo stesso modulo v e sono perpendicolari ai rispettivi raggi; perciò anche l'angolo fra di esse è $\Delta\theta$. Nella Figura 3.5b le due velocità sono disegnate con la coda nello stesso punto: la differenza $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ è la freccia che va dalla punta di $\boldsymbol{v}_1$ alla punta di $\boldsymbol{v}_2$.

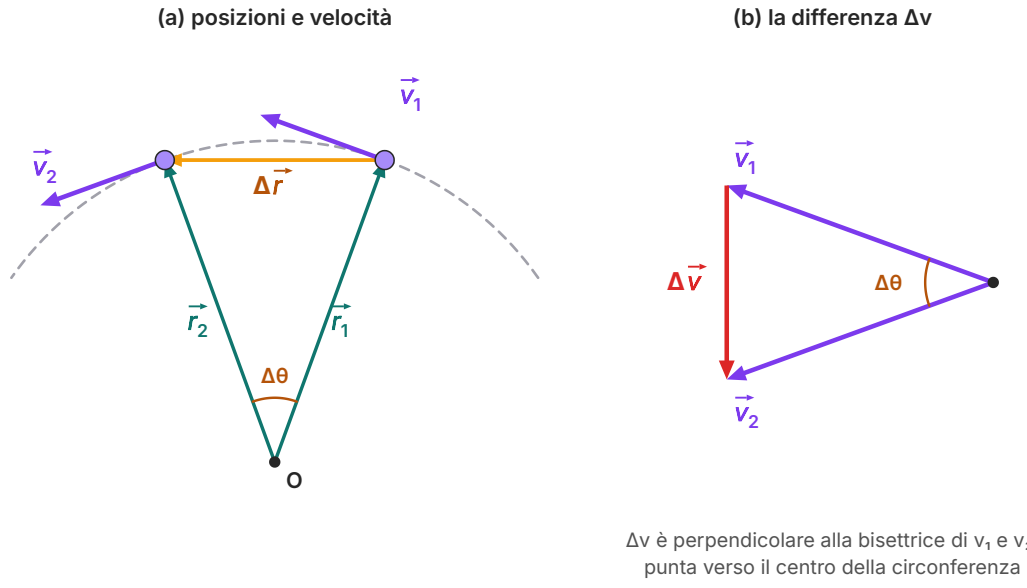


Figura 3.5 Come si trova l'accelerazione centripeta. (a) In un intervallo Δt il corpo passa da $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, con spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$; il raggio ruota di Δθ (qui 40°, grande per chiarezza). (b) Le velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, di uguale modulo, formano lo stesso angolo Δθ. I due triangoli isosceli sono simili. $\Delta\boldsymbol{v}$, e con essa l'accelerazione media, è perpendicolare alla bisettrice delle due velocità e punta verso il centro.

Il triangolo delle velocità è isoscele, con i lati uguali lunghi v e l'angolo al vertice $\Delta\theta$. La differenza $\Delta\boldsymbol{v}$ è perpendicolare alla bisettrice di quell'angolo, e quindi parallela alla direzione che dal punto medio dell'arco va verso il centro. Se ora facciamo diventare l'intervallo Δt sempre più piccolo, le due posizioni si avvicinano, l'angolo $\Delta\theta$ tende a zero e $\Delta\boldsymbol{v}$ diventa perpendicolare alla velocità in quel punto, lungo il raggio, rivolta verso il centro. L'accelerazione istantanea di un moto circolare uniforme è quindi sempre **diretta verso il centro** della circonferenza: per questo si chiama **accelerazione centripeta**, dal latino *centrum petere*, «dirigersi verso il centro». È la componente normale dell'accelerazione di cui hai letto nel capitolo 1; nel moto circolare uniforme la componente tangenziale è nulla, perché la velocità scalare non cambia.

3.4.2 Quanto vale

Per calcolarne il modulo osserviamo che i due triangoli della Figura 3.5 sono simili: sono entrambi isosceli, con lo stesso angolo al vertice $\Delta\theta$. Nel triangolo delle posizioni i lati uguali sono lunghi r e la base è $|\Delta\boldsymbol{r}|$; in quello delle velocità i lati uguali sono lunghi v e la base è $|\Delta\boldsymbol{v}|$. Lati corrispondenti di triangoli simili sono proporzionali, quindi

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{v} = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{r} \qquad \text{cioè} \qquad |\Delta\boldsymbol{v}| = \frac{v}{r}\,|\Delta\boldsymbol{r}|$$

Quando l'intervallo Δt è molto piccolo, la corda $|\Delta \boldsymbol{r}|$ è praticamente uguale all'arco percorso, che vale $v\Delta t$. Sostituendo, $|\Delta \boldsymbol{v}| \approx (v/r) \times v\Delta t = v^2 \Delta t / r$; dividendo per Δt si ottiene il modulo dell'accelerazione:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

La seconda forma si ottiene sostituendo $v = \omega r$: $(\omega r)^2/r = \omega^2 r$. L'unità è quella di ogni accelerazione: $(\text{m/s})^2/\text{m} = \text{m/s}^2$. Il ragionamento che abbiamo fatto, in cui un intervallo viene reso sempre più piccolo, è lo stesso che ci ha portato dalla velocità media a quella istantanea; in matematica lo renderai rigoroso negli anni successivi.

Le due formule dicono cose diverse, entrambe utili. A parità di raggio, l'accelerazione cresce con il **quadrato** della velocità: raddoppiando la velocità in una curva, l'accelerazione quadruplica. A parità di velocità, l'accelerazione è inversamente proporzionale al raggio: una curva stretta presa a 50 km/h comporta un'accelerazione molto maggiore di una curva larga presa alla stessa velocità. A parità di velocità angolare, invece, come per i punti di un disco, $a_c = \omega^2 r$ è proporzionale alla distanza dall'asse.

Torniamo all'auto nella rotatoria del capitolo 1, che percorre un quarto di giro a 10 m/s in 3,0 s. L'arco percorso è 10 m/s × 3,0 s = 30 m, un quarto della circonferenza, che è quindi lunga 120 m: il raggio è $r = 120\ \text{m}/(2\pi) \approx 19$ m. L'accelerazione centripeta vale $a_c = (10\ \text{m/s})^2/19{,}1\ \text{m} \approx 5{,}2\ \text{m/s}^2$, sempre diretta verso il centro. Nel capitolo 1 avevamo trovato un'accelerazione media di 4,7 m/s²: è un po' più piccola, perché in un quarto di giro l'accelerazione cambia direzione, e la media di vettori con direzioni diverse ha un modulo minore del loro modulo comune.

ESEMPIO SVOLTO

L'accelerazione della Luna

Problema. La Luna percorre intorno alla Terra un'orbita quasi circolare di raggio $3{,}84 \times 10^8$ m, con un periodo, rispetto alle stelle, di 27,3 giorni. Considerando il moto circolare uniforme, calcola a) la velocità tangenziale della Luna; b) la sua accelerazione centripeta, e confrontala con g.

Soluzione. a) Periodo in secondi: $T = 27{,}3 \times 86\,400\ \text{s} \approx 2{,}36 \times 10^6$ s. Velocità: $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 3{,}84 \times 10^8\ \text{m} / 2{,}359 \times 10^6\ \text{s} \approx 1{,}02 \times 10^3$ m/s, circa 1 km al secondo.

b) $a_c = v^2/r = (1023\ \text{m/s})^2/(3{,}84 \times 10^8\ \text{m}) \approx 2{,}72 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$. Con l'altra formula: $\omega = 2\pi/T \approx 2{,}66 \times 10^{-6}$ rad/s e $a_c = \omega^2 r \approx 2{,}72 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$. Il rapporto con l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre è $9{,}8/(2{,}72 \times 10^{-3}) \approx 3{,}6 \times 10^3$: l'accelerazione della Luna è circa 3600 volte più piccola di g.

Controllo. Nei passaggi abbiamo tenuto una cifra in più e arrotondato i risultati a tre cifre, come i dati. L'accelerazione è minuscola, ma la Luna ha molto spazio a disposizione: in ogni secondo il vettore velocità varia di appena 2,7 mm/s, e solo in direzione. Perché sia proprio 3600 volte più piccola di g lo capirai studiando la gravitazione, negli anni successivi.

3.4.3 Un moto uniforme ma accelerato

Il moto circolare uniforme è dunque un moto **accelerato**, con un'accelerazione di modulo costante, v^2/r, ma di direzione sempre diversa, perché punta sempre verso il centro. Non è un moto uniformemente accelerato nel senso del primo volume, in cui il vettore accelerazione era costante: qui è costante solo il suo modulo. La Figura 3.1 riassume la situazione: in ogni punto la velocità è tangente, l'accelerazione è perpendicolare alla velocità e diretta lungo il raggio, verso l'interno.

Perché un'accelerazione sempre perpendicolare alla velocità non ne cambia il modulo? Un'accelerazione parallela alla velocità la farebbe crescere o diminuire; un'accelerazione perpendicolare, in ogni piccolo intervallo, aggiunge alla velocità solo un piccolo vettore $\Delta\boldsymbol{v}$ di traverso, che ne cambia la direzione e non la lunghezza. Il corpo «cade» in continuazione verso il centro, senza mai avvicinarsi a esso, perché nel frattempo avanza lungo la tangente.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «Il moto circolare uniforme non è accelerato, perché la velocità non cambia»: **falso**. Non cambia il modulo della velocità, ma la direzione sì, e quindi cambia il vettore velocità: l'accelerazione vale v^2/r ed è diretta verso il centro (lo avevi già incontrato nel capitolo 1, per l'auto in curva). Un secondo errore collegato è immaginare l'accelerazione diretta **verso l'esterno**, perché in auto, in curva, ci si sente spinti verso l'esterno. Visto da terra il passeggero tende a proseguire in linea retta, lungo la tangente, mentre l'auto curva verso l'interno: l'accelerazione dei corpi che girano è centripeta. Perché ci si sente «spinti» lo capiremo con il primo principio della dinamica, nel prossimo capitolo.

Un'accelerazione richiede sempre una causa: per far girare un corpo in tondo bisogna «tirarlo» continuamente verso il centro. Per la pallina legata a un filo è il filo teso, per l'auto in curva è l'attrito delle gomme sull'asfalto, per la Luna è l'attrazione della Terra. Studieremo queste cause, cioè le forze, nella prossima parte del libro; nel capitolo 7 torneremo sul moto circolare per capire quale forza produce l'accelerazione centripeta in ciascun caso.

COLLEGAMENTI

Accelerazioni da centrifuga

Le accelerazioni centripete si confrontano spesso con g. In un'auto che percorre una curva di raggio 50 m a 54 km/h, cioè 15 m/s, l'accelerazione è $(15\ \text{m/s})^2/50\ \text{m} = 4{,}5\ \text{m/s}^2$, poco meno di mezzo g. Il cestello di una lavatrice, di raggio circa 25 cm, che centrifuga a 1200 giri/min ha $\omega = 2\pi \times 20\ \text{Hz} \approx 126\ \text{rad/s}$: un punto del bordo ha un'accelerazione $\omega^2 r \approx 3{,}9 \times 10^3\ \text{m/s}^2$, circa 400 volte g. Il bucato è spinto verso il centro dalla parete del cestello, su cui poggia; le gocce d'acqua, che passano attraverso i fori, non sono trattenute e proseguono lungo la tangente, staccandosi dai panni.

Nei laboratori di analisi le centrifughe separano i componenti del sangue: fanno ruotare le provette a migliaia di giri al minuto, e le particelle più dense si raccolgono sul fondo molto più rapidamente che per semplice sedimentazione. Le loro prestazioni si indicano proprio come multipli di g: a 3000 giri/min, per un campione a 10 cm dall'asse, $\omega^2 r$ vale circa 1000 g.

3.5 Misurare il moto circolare e il moto armonico

3.5.1 Il moto circolare in laboratorio

Le grandezze di questo capitolo si misurano con strumenti semplici. Il periodo si ottiene con un cronometro su molti giri; la velocità tangenziale di un punto si può misurare in modo indipendente, per esempio con una fotocellula, e poi confrontare con la previsione $v = \omega r$. Il laboratorio che segue fa proprio questo, e usa il grafico v–r per ricavare la velocità angolare.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: velocità tangenziale e distanza dall'asse

Materiali. Un giradischi (oppure una piattaforma girevole con motore a velocità costante); un righello (sensibilità 1 mm); un calibro (sensibilità 0,1 mm); un cronometro (sensibilità 0,01 s); una fotocellula collegata a un cronometro elettronico (sensibilità 0,0001 s); una bandierina di cartoncino rigido; nastro biadesivo.

Procedimento. 1) Accendi il giradischi a 33⅓ giri/min e misura con il cronometro la durata di 10 giri, cinque volte. 2) Misura con il calibro la larghezza della bandierina lungo la direzione del moto: $b = (20{,}0 \pm 0{,}1)$ mm. 3) Fissa la bandierina sul piatto, in verticale, a distanza r dall'asse, e posiziona la fotocellula in modo che la bandierina interrompa il fascio a ogni giro. Il cronometro elettronico misura l'intervallo Δt in cui il fascio resta interrotto; la velocità tangenziale è $v = b/\Delta t$. Ripeti tre volte per ogni distanza. 4) Ripeti con la bandierina a quattro distanze diverse.

Le cinque misure dei 10 giri danno 18,1 s; 17,9 s; 18,0 s; 18,2 s; 17,9 s. La media è 18,02 s, con semidispersione 0,15 s: il periodo è $T = (1{,}80 \pm 0{,}02)$ s, e la velocità angolare $\omega = 2\pi/T = (3{,}49 \pm 0{,}04)$ rad/s.

Tabella 3.1 Misure con la fotocellula (dati tipici di una prova). Δt è la media di tre passaggi, con la semidispersione; $v = b/\Delta t$.

r (cm), ± 0,1 cm	Δt (s)	v (m/s)	v/r (rad/s)
4,0	0,1441 ± 0,0008	0,1388 ± 0,0015	3,47
8,0	0,0712 ± 0,0004	0,281 ± 0,003	3,51
12,0	0,0479 ± 0,0003	0,418 ± 0,005	3,48
15,0	0,0381 ± 0,0002	0,525 ± 0,005	3,50

Che cosa concludere. L'incertezza relativa di ciascuna velocità è la somma di quelle di b (0,5%) e di Δt (circa 0,5–0,6%), cioè circa l'1%. Il rapporto v/r è costante entro le incertezze (per $r = 4{,}0$ cm l'incertezza relativa di r, 2,5%, porta quella del rapporto a circa il 3,5%, cioè ± 0,12 rad/s): v è direttamente proporzionale a r. Riportando i punti su un grafico v–r si ottiene una retta per l'origine con pendenza circa 3,49 rad/s, che coincide con la velocità angolare misurata con il cronometro, (3,49 ± 0,04) rad/s: le due misure, ottenute con metodi indipendenti, sono compatibili, e confermano la legge $v = \omega r$.

Sicurezza. Tieni lontani dal piatto in rotazione capelli lunghi, sciarpe e cavi; sposta la bandierina e la fotocellula solo a piatto fermo.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Riporta le due tabelle (tempi dei 10 giri; misure con la fotocellula) e il calcolo di T, ω e delle velocità con la propagazione delle incertezze. Costruisci il grafico v–r con le barre d'incertezza, traccia la retta che passa per l'origi-

ne e meglio si adatta ai punti, ricavane la pendenza con la sua incertezza (con le rette di massima e minima pendenza) e verifica la compatibilità con $\omega = 2\pi/T$. Discuti gli errori sistematici: la bandierina, che è un piccolo segmento rettilineo, non segue esattamente l'arco di circonferenza, e l'effetto è maggiore vicino all'asse; la larghezza efficace del fascio della fotocellula si somma a quella della bandierina; il motore potrebbe non mantenere esattamente 33⅓ giri/min (confronta il periodo misurato con il valore nominale, 1,80 s).

3.5.2 Dal giro all'oscillazione

Guardiamo una ruota che gira «di taglio», con l'occhio nel piano della ruota: un segno sul bordo non sembra più girare, ma andare avanti e indietro lungo un segmento, veloce al centro e lento alle estremità, dove si ferma per un istante e torna indietro. Il moto circolare uniforme visto di profilo diventa un'oscillazione. Il riquadro seguente, facoltativo, descrive questo nuovo tipo di moto.

APPROFONDIMENTO

Il moto armonico (facoltativo)

Un punto P percorre di moto circolare uniforme una circonferenza di raggio r e centro O, con velocità angolare ω. Sia Q la proiezione di P su un diametro, che prendiamo come asse x (Figura 3.6). Mentre P gira, Q oscilla avanti e indietro lungo il diametro fra $-r$ e $+r$. Il moto di Q si chiama **moto armonico**; la distanza massima dal centro, r, si chiama **ampiezza**, e il periodo dell'oscillazione è lo stesso del moto circolare.

Se all'istante $t = 0$ il punto P si trova sull'asse x, dopo un tempo t il raggio OP ha ruotato dell'angolo $\theta = \omega t$, e la posizione di Q è il cateto adiacente del triangolo rettangolo con ipotenusa OP: $x = r \cos \omega t$. Qui l'angolo ωt è in radianti: per calcolarne il coseno la calcolatrice va messa in modalità RAD. Il grafico di x in funzione del tempo è la curva ondulata della figura, che si ripete identica a ogni periodo.

Il moto armonico non è soltanto una curiosità geometrica: con buona approssimazione oscillano così un corpo appeso a una molla, un pendolo che compie piccole oscillazioni, la membrana di un altoparlante che emette un suono puro. Lo studierai negli anni successivi; per ora basta sapere che dietro molte oscillazioni si nasconde un moto circolare uniforme visto di profilo.

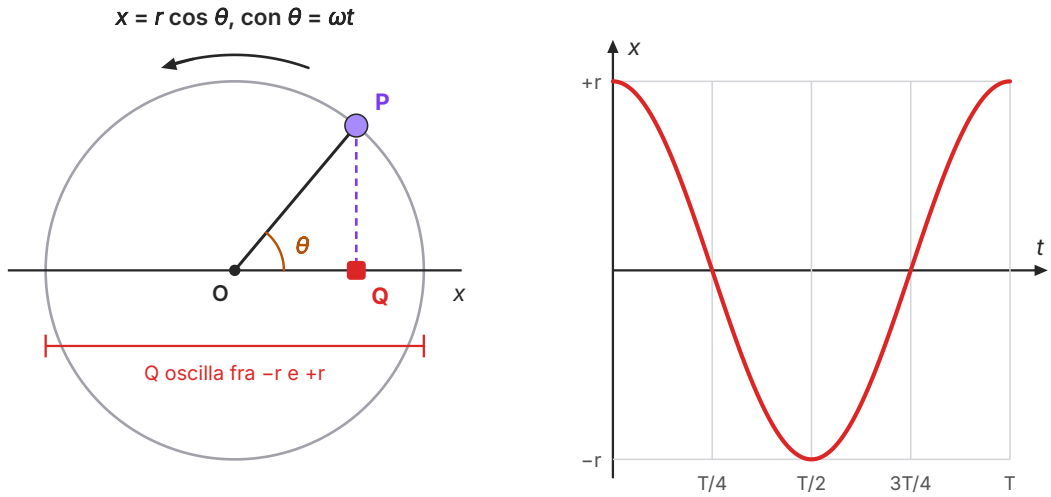


Figura 3.6 Il moto armonico come proiezione del moto circolare uniforme. Mentre il punto P gira con velocità angolare ω, la sua proiezione Q sul diametro orizzontale oscilla fra $-r$ e $+r$ secondo la legge $x = r\cos\omega t$; a destra, il grafico di x in funzione di t per un periodo (curva calcolata).

IN SINTESI

Le formule del moto circolare uniforme

$f = 1/T$ — la frequenza (Hz = s^{-1}) è il numero di giri al secondo, l'inverso del periodo T (s), il tempo di un giro; f (Hz) = giri al minuto / 60.

$v = 2\pi r/T = 2\pi r f$ — velocità tangenziale (m/s): costante in modulo, ma diretta lungo la tangente, perciò il vettore velocità cambia in ogni istante.

$\theta = l/r$; 2π rad = 360°; 1 rad ≈ 57,3° — misura di un angolo in radianti: arco diviso raggio, un numero puro.

$\omega = \Delta\theta/\Delta t = 2\pi/T = 2\pi f$ — velocità angolare (rad/s): uguale per tutti i punti di un corpo rigido che ruota.

$v = \omega r$ — la velocità tangenziale è proporzionale alla distanza dall'asse; ω va espressa in rad/s. Ruote collegate da una catena hanno la stessa v sul bordo: $\omega_2/\omega_1 = r_1/r_2$.

$a_c = v^2/r = \omega^2 r$ — accelerazione centripeta (m/s^2): sempre diretta verso il centro, perpendicolare alla velocità; il moto circolare uniforme è un moto accelerato.

Con questo capitolo si chiude lo studio dei moti nel piano. Abbiamo imparato a descrivere come si muovono i corpi: in linea retta, lungo una parabola, in tondo. Nella prossima parte ci

chiederemo perché si muovono così, cioè quale legame c'è fra il moto di un corpo e le forze che agiscono su di esso.

SINTESI

- Il moto circolare uniforme è il moto lungo una circonferenza con velocità scalare costante: il corpo percorre archi uguali in tempi uguali.
- È un moto periodico: il periodo T è il tempo di un giro, la frequenza $f = 1/T$ il numero di giri al secondo, in hertz ($1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$); i giri al minuto si dividono per 60 per avere gli hertz.
- La velocità tangenziale $v = 2\pi r/T$ è il modulo della velocità; il vettore velocità è tangente alla traiettoria, perpendicolare al raggio, e cambia direzione in ogni istante.
- Un angolo in radianti è il rapporto fra l'arco e il raggio, $\theta = l/r$; l'angolo giro misura 2π rad, e 1 rad $\approx 57{,}3°$.
- La velocità angolare $\omega = \Delta\theta/\Delta t = 2\pi/T$ si misura in rad/s; è la stessa per tutti i punti di un corpo rigido che ruota.
- La velocità tangenziale e quella angolare sono legate da $v = \omega r$, con ω in rad/s: nei punti di un disco la velocità cresce in proporzione alla distanza dall'asse.
- In una trasmissione a catena o a cinghia i bordi delle ruote hanno la stessa velocità tangenziale, e la ruota più piccola gira con velocità angolare maggiore: $\omega_2/\omega_1 = r_1/r_2$.
- Il moto circolare uniforme è accelerato: l'accelerazione centripeta è diretta verso il centro e vale $a_c = v^2/r = \omega^2 r$.
- La formula dell'accelerazione centripeta si ricava dalla similitudine fra il triangolo delle posizioni e quello delle velocità, facendo tendere a zero l'intervallo di tempo.
- A parità di raggio l'accelerazione centripeta è proporzionale al quadrato della velocità; a parità di velocità è inversamente proporzionale al raggio.
- Per mantenere un corpo in moto circolare serve sempre una causa che lo tiri verso il centro: le forze responsabili saranno studiate nella parte sulla dinamica.
- La proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro è un moto armonico, $x = r\cos\omega t$ (argomento facoltativo).

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nel moto circolare uniforme resta costante:
   - **A.** il vettore velocità
   - **B.** il vettore accelerazione
   - **C.** il modulo della velocità
   - **D.** la direzione della velocità

2. ● Il periodo di un moto circolare uniforme è:
   - **A.** il numero di giri compiuti in un secondo
   - **B.** il tempo impiegato per compiere un giro
   - **C.** l'angolo descritto in un secondo
   - **D.** la lunghezza della circonferenza percorsa

3. ● Un angolo di π rad corrisponde a:
   - **A.** 90°
   - **B.** 360°
   - **C.** 57,3°
   - **D.** 180°

4. ● Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è diretta:
   - **A.** verso il centro della circonferenza
   - **B.** lungo la tangente, nel verso del moto
   - **C.** verso l'esterno della circonferenza
   - **D.** in nessuna direzione, perché è nulla

5. ● Il piatto di un giradischi ruota a 45 giri/min. La sua frequenza è:
   - **A.** 45 Hz
   - **B.** 0,75 Hz
   - **C.** 2700 Hz
   - **D.** 1,33 Hz

6. ●● Due bambini sono seduti su una giostra che ruota, uno a 2 m e l'altro a 4 m dall'asse. Quale affermazione è corretta?
   - **A.** hanno la stessa velocità tangenziale e velocità angolari diverse
   - **B.** il bambino più esterno ha velocità angolare doppia
   - **C.** hanno la stessa velocità angolare e il più esterno ha velocità tangenziale doppia
   - **D.** hanno la stessa velocità angolare e la stessa velocità tangenziale

7. ●● In una curva di raggio fissato un'auto raddoppia la sua velocità. La sua accelerazione centripeta:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** si dimezza
   - **C.** resta la stessa
   - **D.** quadruplica

8. ●● L'unità di misura della velocità angolare nel SI è:
   A. rad/s
   B. giri/min
   C. Hz · m
   D. m/s

9. ●● Una ruota gira con velocità angolare costante. Se la frequenza di rotazione raddoppia, la velocità angolare:
   A. si dimezza
   B. raddoppia
   C. quadruplica
   D. non cambia

Vero o falso

10. ● Nel moto circolare uniforme la velocità è costante. V / F

11. ● Frequenza e periodo di un moto circolare uniforme sono l'uno l'inverso dell'altro. V / F

12. ●● Tutti i punti di un disco che ruota hanno la stessa velocità angolare. V / F

13. ●● Nella formula $v = \omega r$ la velocità angolare può essere espressa indifferentemente in gradi al secondo o in radianti al secondo. V / F

14. ●● L'accelerazione centripeta della Luna nel suo moto intorno alla Terra è maggiore dell'accelerazione di gravità g alla superficie terrestre. V / F

Applicare

15. ● Esprimi in radianti gli angoli di 90°, 45°, 270° e 1°; esprimi in gradi l'angolo di 2,0 rad.

16. ● Il cestello di una lavatrice centrifuga a 1400 giri/min. Calcola la frequenza in hertz e il periodo.

17. ● La lancetta dei secondi di un orologio da polso è lunga 1,5 cm. Calcola il periodo, la velocità angolare e la velocità tangenziale della sua punta.

18. ● Un'auto percorre una rotonda di raggio 25 m alla velocità costante di 36 km/h. Calcola la sua accelerazione centripeta.

19. ●● Un punto sul bordo di un disco di raggio 15 cm si muove a 2,4 m/s. Calcola la velocità angolare, il periodo e la frequenza del disco.

20. ●● Una centrifuga da laboratorio fa ruotare le provette a 3000 giri/min, a 10 cm dall'asse. Calcola l'accelerazione centripeta delle provette ed esprimila come multiplo di g.

21. ●● Osserva la Figura 3.4. a) Quanto vale circa la velocità di un punto a 6 cm dall'asse, alle due velocità di rotazione? b) A che distanza dall'asse, a 45 giri/min, un punto ha la stessa velocità di un punto a 12 cm a 33⅓ giri/min? Controlla la lettura con un calcolo.

22. ● Completa. Nel moto circolare uniforme il vettore velocità è sempre _____ alla traiettoria, mentre l'accelerazione, detta _____ , è diretta verso _____ . Un radiante è l'angolo al centro che individua un arco lungo quanto _____ .

Problemi

23. ●● La Terra compie una rotazione completa rispetto alle stelle in 86 164 s (giorno sidereo); il suo raggio equatoriale è 6378 km. Calcola a) la velocità angolare della Terra; b) la velocità tangenziale di un punto dell'equatore, in m/s e in km/h; c) la sua accelerazione centripeta, e confrontala con g.

24. ●●● Collegati al primo volume (*Fisica 1*, capitolo 6). Roma si trova alla latitudine di 41,9° nord: il raggio che congiunge Roma al centro della Terra forma un angolo di 41,9° con il piano dell'equatore. a) Disegna la situazione e spiega perché Roma, nella rotazione terrestre, descrive una circonferenza di raggio $r = R \cos 41{,}9°$, dove $R = 6378$ km. b) Calcola r. c) Calcola la velocità tangenziale di Roma dovuta alla rotazione terrestre, usando il giorno sidereo del problema precedente.

25. ●● Una ciclista pedala a 75 giri/min. La corona ha raggio 9,0 cm, il pignone 3,6 cm e la ruota posteriore 33 cm. Calcola a) la velocità angolare dei pedali; b) la velocità della catena; c) la velocità angolare della ruota posteriore; d) la velocità della bicicletta in km/h, supponendo che le ruote rotolino senza strisciare.

26. ●●● Collegati al capitolo 2. Un ragazzo fa ruotare una pallina legata a uno spago su una circonferenza orizzontale di raggio 0,80 m, a 1,5 m dal suolo, con un periodo di 0,40 s. a) Calcola la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta della pallina. b) A un certo istante lo spago si spezza: in quale direzione parte la pallina? Che moto compie da quel momento (trascura l'aria)? c) A che distanza orizzontale dal punto in cui si è spezzato lo spago la pallina tocca terra?

27. ●● In una curva di raggio 80 m, per ragioni di comfort e di sicurezza, l'accelerazione centripeta di un'auto non deve superare 5,0 m/s^2. a) Qual è la velocità massima, in m/s e in km/h? b) Quale sarebbe la velocità massima in una curva di raggio dimezzato? Di quale fattore si riduce?

28. ●●● Il disco di un hard disk ruota a 7200 giri/min. a) Calcola la velocità angolare del disco. b) Calcola la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta di un punto a 4,0 cm dall'asse, ed esprimi l'accelerazione come multiplo di g. c) Quanto valgono velocità e accelerazione di un punto a 2,0 cm dall'asse? d) Quanto tempo impiega il disco a ruotare di un angolo retto?

29. ●● Un'atleta percorre la curva di una pista di atletica, una semicirconferenza di raggio 36,5 m, alla velocità costante di 9,0 m/s. Calcola a) la lunghezza della curva; b) il tempo impiegato a percorrerla; c) l'accelerazione centripeta dell'atleta. d) Nelle corsie esterne il raggio è maggiore: a parità di velocità, l'accelerazione è maggiore o minore?

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Un compagno risolve così: «Una ruota di raggio 0,50 m compie un giro al secondo. La sua velocità angolare è 360°/s, quindi un punto del bordo ha velocità $v = \omega r = 360 \times 0{,}50$ m/s = 180 m/s». Individua l'errore e correggi il risultato. Quale controllo di buon senso avrebbe potuto smascherarlo?

31. ●● Un'auto percorre una rotatoria con il tachimetro fermo su 40 km/h. Spiega perché l'auto ha un'accelerazione, in quale direzione è diretta e perché, alla stessa velocità, in una rotatoria più piccola l'accelerazione è maggiore.

32. ●●● Stima. Un'auto viaggia in autostrada a 130 km/h e le sue ruote hanno un raggio di circa 30 cm. Stima l'accelerazione centripeta di un punto del battistrada nel suo moto di rotazione intorno all'asse della ruota (cioè come lo vede chi viaggia sull'auto), ed esprimila come multiplo di g. Che cosa ne deduci su un sassolino incastrato nel battistrada?

33. ●●● Progetta un esperimento. Lo smartphone contiene un accelerometro, che con un'app adatta misura l'accelerazione. Descrivi come useresti uno smartphone fissato su una piattaforma girevole a velocità regolabile per verificare che $a_c = \omega^2 r$: quali grandezze misureresti, quali faresti variare e quali terresti costanti, quali grafici costruiresti e che cosa ti aspetti di vedere.

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: tra le definizioni con cui si apre l'opera compare la «forza centripeta» (*vis centripeta*), il nome che Newton diede alla causa che costringe un corpo a girare intorno a un centro.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sul moto di rotazione, con la distinzione fra velocità tangenziale e velocità di rotazione illustrata da molti esempi quotidiani.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il paragrafo sul moto circolare uniforme nel capitolo sul moto in due dimensioni, con altri problemi.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sul moto, per un'altra via all'accelerazione di un corpo che gira.

Glossario del capitolo

Accelerazione centripeta
Accelerazione di un corpo in moto circolare uniforme, diretta verso il centro della circonferenza, di modulo $a_c = v^2/r = \omega^2 r$.

Ampiezza
Nel moto armonico, la distanza massima del punto che oscilla dal centro di oscillazione; è uguale al raggio della circonferenza corrispondente.

Asse di rotazione
Retta intorno alla quale ruota un corpo esteso, perpendicolare al piano del moto e passante per il centro delle circonferenze descritte dai suoi punti.

Frequenza
Numero di giri (o di ripetizioni) compiuti nell'unità di tempo: $f = 1/T$; si misura in hertz.

Giorno sidereo
Periodo di rotazione della Terra misurato rispetto alle stelle lontane: 23 h 56 min 4 s, cioè 86 164 s.

Giri al minuto
Unità pratica di frequenza (giri/min o rpm); si divide per 60 per ottenere la frequenza in hertz.

Hertz
Unità di misura della frequenza nel SI, simbolo Hz: 1 Hz = 1 s^{-1}, un giro al secondo.

Moto armonico
Moto oscillatorio della proiezione su un diametro di un punto in moto circolare uniforme: $x = r \cos \omega t$.

Moto circolare
Moto di un corpo la cui traiettoria è una circonferenza.

Moto circolare uniforme
Moto circolare in cui il corpo percorre archi uguali in tempi uguali, cioè con velocità scalare costante; è un moto periodico e accelerato.

Periodo
Nel moto circolare uniforme, il tempo T impiegato per compiere un giro completo; si misura in secondi.

Radiante
Unità di misura degli angoli (rad): l'angolo al centro che individua un arco lungo quanto il raggio; 2π rad = 360°, 1 rad ≈ 57,3°.

Rapporto di trasmissione
In due ruote collegate da una catena o da una cinghia, il rapporto fra le velocità angolari, uguale all'inverso del rapporto fra i raggi: $\omega_2/\omega_1 = r_1/r_2$.

Spostamento angolare
Angolo $\Delta\theta$, in radianti, di cui ruota in un certo intervallo di tempo il raggio che congiunge il corpo al centro.

Velocità angolare
Rapporto fra lo spostamento angolare e l'intervallo di tempo, $\omega = \Delta\theta/\Delta t$; nel moto circolare uniforme vale $2\pi/T$; si misura in rad/s.

Velocità tangenziale
Modulo della velocità di un corpo in moto circolare uniforme, $v = 2\pi r/T$; il vettore velocità è tangente alla circonferenza.

Soluzioni

1. C. Resta costante la velocità scalare, cioè il modulo della velocità; direzione della velocità e direzione dell'accelerazione cambiano in ogni istante.

2. B. Il periodo è la durata di un giro; il numero di giri al secondo è la frequenza.

3. D. 2π rad = 360°, quindi π rad = 180°.

4. A. L'accelerazione è centripeta: perpendicolare alla velocità e rivolta verso il centro.

5. B. $f = 45/60$ Hz = 0,75 Hz.

6. C. Tutti i punti della giostra hanno la stessa ω; per $v = \omega r$, a distanza doppia la velocità è doppia.

7. D. $a_c = v^2/r$: con v doppia, a_c diventa $2^2 = 4$ volte più grande.

8. A. La velocità angolare si misura in radianti al secondo; i giri al minuto sono un'unità pratica, non del SI.

9. B. $\omega = 2\pi f$: è direttamente proporzionale alla frequenza.

10. F. È costante solo il modulo della velocità; la direzione cambia in ogni istante, quindi il vettore velocità non è costante.

11. V. $f = 1/T$ e $T = 1/f$.

12. V. In un corpo rigido tutti i raggi ruotano dello stesso angolo nello stesso tempo; cambia da punto a punto la velocità tangenziale.

13. F. La relazione deriva da $l = \theta r$, che vale solo con l'angolo in radianti: ω va in rad/s.

14. F. Vale circa $2{,}7 \times 10^{-3}$ m/s^2, circa 3600 volte meno di g.

15. 90° = $\pi/2$ rad ≈ 1,57 rad; 45° = $\pi/4$ rad ≈ 0,785 rad; 270° = $3\pi/2$ rad ≈ 4,71 rad; 1° = $\pi/180$ rad ≈ 0,0175 rad. 2,0 rad × 180°/π ≈ 115°.

16. $f = 1400/60$ Hz ≈ 23 Hz (23,3 Hz); $T = 1/f = 60/1400$ s ≈ 0,043 s = 43 ms.

17. $T = 60$ s; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/60$ s ≈ 0,105 rad/s; $v = \omega r$ = 0,105 rad/s × 0,015 m ≈ $1{,}6 \times 10^{-3}$ m/s = 1,6 mm/s.

18. $v = 36$ km/h = 10 m/s; $a_c = v^2/r = (10 \text{ m/s})^2/25$ m = 4,0 m/s^2.

19. $\omega = v/r = 2{,}4$ m/s / 0,15 m = 16 rad/s; $T = 2\pi/\omega \approx$ 0,39 s; $f = 1/T \approx 2{,}5$ Hz.

20. $\omega = 2\pi \times 3000/60$ Hz ≈ 314 rad/s; $a_c = \omega^2 r$ = (314 rad/s)^2 × 0,10 m ≈ $9{,}9 \times 10^3$ m/s^2; 9870/9,8 ≈ $1{,}0 \times 10^3$: circa 1000 g.

21. a) Dal grafico, a 6 cm: circa 0,21 m/s (33⅓ giri/min) e circa 0,28 m/s (45 giri/min); calcolo: 3,49 × 0,06 ≈ 0,21 m/s e 4,71 × 0,06 ≈ 0,28 m/s. b) A 12 cm, a 33⅓ giri/min, $v \approx 0{,}42$ m/s; la retta rossa raggiunge 0,42 m/s a circa 9 cm. Calcolo: $r = 0{,}419$ m/s / 4,71 rad/s ≈ 0,089 m ≈ 8,9 cm (cioè 12 cm × 33,3/45).

22. tangente; centripeta; il centro della circonferenza; il raggio.

23. a) $\omega = 2\pi/T = 2\pi/86\,164$ s ≈ $7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s. b) $v = \omega R = 7{,}292 \times 10^{-5}$ rad/s × $6{,}378 \times 10^6$ m ≈ 465 m/s; × 3,6 ≈ $1{,}67 \times 10^3$ km/h. c) $a_c = \omega^2 R = (7{,}292 \times 10^{-5})^2 \times 6{,}378 \times 10^6$ m/s^2 ≈ $3{,}39 \times 10^{-2}$ m/s^2; rapporto con g: 0,0339/9,8 ≈ $3{,}5 \times 10^{-3}$, cioè circa lo 0,35% di g.

24. a) Roma ruota intorno all'asse terrestre: la circonferenza che descrive ha il centro sull'asse e raggio uguale alla distanza di Roma dall'asse. Nel triangolo rettangolo formato dal raggio terrestre R (ipotenusa), dal segmento dell'asse e dalla distanza r dall'asse, r è il cateto adiacente all'angolo di 41,9°: $r = R \cos 41{,}9°$. b) $r = 6378$ km × cos 41,9° ≈ 6378 km × 0,744 ≈ $4{,}75 \times 10^3$ km. c) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 4{,}747 \times 10^6$ m / 86 164 s ≈ 346 m/s ≈ $1{,}25 \times 10^3$ km/h.

25. a) $\omega_1 = 2\pi \times 75/60$ Hz ≈ 7,85 rad/s. b) $v = \omega_1 r_1$ = 7,854 rad/s × 0,090 m ≈ 0,71 m/s. c) Il pignone ha la stessa v sul bordo: $\omega_2 = v/r_2 = 0{,}7069$ m/s / 0,036 m ≈ 19,6 rad/s; la ruota gira con il pignone: 19,6 rad/s. d) $v_{\text{bici}} = \omega_2 R = 19{,}63$ rad/s × 0,33 m ≈ 6,5 m/s ≈ 23 km/h.

26. a) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 0{,}80\text{ m} / 0{,}40\text{ s} \approx 12{,}6\text{ m/s}$; $a_c = v^2/r = (12{,}57\text{ m/s})^2/0{,}80\text{ m} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ m/s}^2$, diretta verso il centro. b) Lungo la tangente alla circonferenza nel punto di rottura, cioè in orizzontale, con la velocità che aveva in quell'istante: venuta meno la trazione dello spago, la pallina compie un lancio orizzontale (moto del proiettile). c) Tempo di caduta: $t_v = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 1{,}5\text{ m} / 9{,}8\text{ m/s}^2)} \approx 0{,}553\text{ s}$; distanza: $x_G = 12{,}57\text{ m/s} \times 0{,}553\text{ s} \approx 7{,}0\text{ m}$.

27. a) $a_c = v^2/r \Rightarrow v_{max} = \sqrt{(a_c r)} = \sqrt{(5{,}0\text{ m/s}^2 \times 80\text{ m})} = 20\text{ m/s} = 72\text{ km/h}$. b) $v_{max} = \sqrt{(5{,}0 \times 40)}\text{ m/s} \approx 14\text{ m/s} \approx 51\text{ km/h}$: la velocità massima si riduce del fattore $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, non della metà, perché v è proporzionale alla radice quadrata del raggio.

28. a) $\omega = 2\pi \times 7200/60\text{ Hz} = 2\pi \times 120\text{ Hz} \approx 754\text{ rad/s}$. b) $v = \omega r = 754\text{ rad/s} \times 0{,}040\text{ m} \approx 30\text{ m/s}$; $a_c = \omega^2 r = (754\text{ rad/s})^2 \times 0{,}040\text{ m} \approx 2{,}3 \times 10^4\text{ m/s}^2$; $22\,740/9{,}8 \approx 2{,}3 \times 10^3$: circa 2300 g. c) Stessa ω: v e a_c sono proporzionali a r, quindi si dimezzano: ≈ 15 m/s e ≈ $1{,}1 \times 10^4\text{ m/s}^2$. d) Un angolo retto è un quarto di giro: $T/4 = (1/120\text{ s})/4 \approx 2{,}1 \times 10^{-3}\text{ s} = 2{,}1\text{ ms}$.

29. a) $l = \pi r = \pi \times 36{,}5\text{ m} \approx 115\text{ m}$. b) $t = l/v = 114{,}7\text{ m} / 9{,}0\text{ m/s} \approx 13\text{ s}$. c) $a_c = v^2/r = (9{,}0\text{ m/s})^2/36{,}5\text{ m} \approx 2{,}2\text{ m/s}^2$. d) Minore: a parità di velocità a_c è inversamente proporzionale al raggio.

30. Errore: nella formula $v = \omega r$ la velocità angolare va in rad/s. Un giro al secondo è $\omega = 2\pi\text{ rad/s} \approx 6{,}28\text{ rad/s}$, quindi $v \approx 6{,}28 \times 0{,}50\text{ m/s} \approx 3{,}1\text{ m/s}$. Controllo: in un secondo il punto percorre una circonferenza, $2\pi \times 0{,}50\text{ m} \approx 3{,}1\text{ m}$, non 180 m.

31. Traccia di risposta. Il tachimetro indica il modulo della velocità, che è costante; ma in curva la direzione della velocità cambia, quindi il vettore velocità cambia e l'auto accelera. Se la velocità scalare è costante l'accelerazione è centripeta, diretta verso il centro della rotatoria. Il suo modulo è v^2/r: a parità di velocità, con un raggio minore la direzione deve cambiare più rapidamente e l'accelerazione è maggiore (inversamente proporzionale al raggio).

32. Traccia di risposta. $v = 130\text{ km/h} \approx 36\text{ m/s}$; rispetto all'asse della ruota il battistrada gira con questa velocità tangenziale (la ruota rotola senza strisciare). $a_c = v^2/r \approx (36\text{ m/s})^2/0{,}30\text{ m} \approx 4 \times 10^3\text{ m/s}^2$, cioè circa 400–450 g. Per restare attaccato, il sassolino deve essere «tirato» verso l'asse con grande intensità: se l'incastro cede, parte lungo la tangente, ed è per questo che i pneumatici lanciano sassolini.

33. Traccia di risposta. Fissa lo smartphone con l'accelerometro a distanza r dall'asse (misurata con un righello, fino al punto in cui si trova il sensore, che va individuato, per esempio, dalle specifiche del telefono o con una prima misura di prova). Prima serie: ω costante (periodo misurato con il cronometro su 10 giri) e r variabile su 4–5 valori: grafico a–r, atteso una retta per l'origine con pendenza ω^2. Seconda serie: r costante e ω variabile: grafico a–ω^2, atteso una retta per l'origine con pendenza r (il grafico a–ω sarebbe invece una curva). Ripeti ogni misura più volte per stimare l'incertezza; attenzione a usare la componente dell'accelerazione lungo il raggio e a mantenere costante la rotazione durante la misura.