CAPITOLO

2

Il moto del proiettile

Un proiettile, mentre si muove di un moto composto da un moto orizzontale uniforme e da un moto naturalmente accelerato verso il basso, descrive nel suo percorso una linea semiparabolica. — Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638), Giornata quarta (traduzione dal latino)

OBIETTIVI

1. Descrivere il moto di un proiettile come composizione di un moto orizzontale uniforme e di un moto verticale uniformemente accelerato, e riconoscere quando si può trascurare l'aria.
2. Calcolare tempo di volo, gittata e velocità d'arrivo nel lancio orizzontale.
3. Usare la tangente di un angolo e il tasto $\tan^{-1}$ per trovare la direzione di un vettore dalle sue componenti.
4. Ricavare l'equazione della traiettoria e riconoscere che è una parabola.
5. Calcolare tempo di volo, altezza massima e gittata nel lancio obliquo, e spiegare perché la gittata è massima a 45°.
6. Risolvere per componenti un lancio da un'altezza e confrontare il modello con i lanci reali.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Il modello del proiettile 2
2.2 Il lancio orizzontale 3
2.3 La traiettoria è una parabola 6
2.4 Il lancio obliquo 8
2.5 Il proiettile reale: l'aria e lo sport 14

Fisica 2 · Parte I · Il moto nel piano · versione 1.0
Capitolo 2: Il moto del proiettile · pagine 45–66 del volume completo · estratto per lo studio

Un pallone calciato dal portiere, il getto d'acqua di una fontana, una pallina che rotola giù dal bordo del tavolo, il sasso lanciato a pelo d'acqua: tutti questi corpi, una volta lasciati liberi, descrivono nell'aria una curva elegante, che sale, si piega e ridiscende. Per secoli capire la forma di questa curva fu un problema aperto, con importanti risvolti pratici: chi puntava un cannone voleva sapere dove sarebbe caduta la palla.

Nel capitolo precedente hai imparato che un moto nel piano si può studiare come due moti rettilinei che avvengono contemporaneamente, ciascuno per conto suo, e hai visto che un moto uniforme composto con un moto uniformemente accelerato perpendicolare dà una parabola. In questo capitolo applichiamo questa idea al caso più importante: il moto di un corpo lanciato vicino alla superficie della Terra. Scopriremo che il moto orizzontale e la caduta verticale procedono indipendenti, calcoleremo quanto lontano e quanto in alto arriva un proiettile e capiremo perché l'angolo di 45° è speciale. Lungo la strada incontreremo un nuovo strumento della trigonometria, la **tangente** di un angolo.

2.1 Il modello del proiettile

2.1.1 Che cosa intendiamo per proiettile

In fisica si chiama **proiettile** qualsiasi corpo che, dopo aver ricevuto una velocità iniziale, si muove soggetto soltanto al proprio peso: una palla da bocce, un pallone, un sasso, un pacco lasciato cadere da un elicottero in volo, un getto d'acqua. La parola non indica quindi solo le palle di cannone: conta il modo in cui il corpo si muove, non che cosa è. Il moto che un proiettile compie dopo il lancio si chiama **moto del proiettile**; per la forma della sua traiettoria è detto anche moto parabolico.

Per descriverlo costruiamo un modello, cioè una versione semplificata della realtà, basata su tre ipotesi.

- Il corpo è un punto materiale: non ci interessa come ruota su sé stesso, né la sua forma.
- Durante il volo il corpo ha un'accelerazione costante, diretta verso il basso, di modulo $g = 9{,}8$ m/s^2: è l'accelerazione di gravità che hai studiato nella caduta libera (*Fisica 1*, capitolo 16). Vale vicino alla superficie terrestre, per lanci lunghi al massimo qualche centinaio di metri, su cui la Terra si può considerare piatta.
- La **resistenza dell'aria è trascurabile**.

La terza ipotesi è la più delicata. È accettabile per corpi densi e compatti, lanciati con velocità moderate e per tragitti brevi: una palla da bocce, un sasso, una pallina di metallo che cade da un tavolo, una pesante palla da lancio. Non lo è, per esempio, per una pallina da ping-pong colpita con forza, un volano da badminton o una foglia, che l'aria frena in modo evidente; e diven-

ta grossolana anche per un pallone calciato a grande velocità. Nell'ultima sezione vedremo che cosa cambia nella realtà; fino ad allora, «senza aria» sarà sottinteso in ogni calcolo.

2.1.2 Due moti con lo stesso orologio

Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, rivolto verso l'alto. L'accelerazione del proiettile è $\boldsymbol{a} = (0; -g)$: la componente orizzontale è nulla, quella verticale vale $-g$. Per il principio di indipendenza dei moti del capitolo 1, i due moti si possono studiare separatamente:

- lungo x nessuna accelerazione: il moto orizzontale è **rettilineo uniforme**, con la componente orizzontale v_x della velocità che resta costante per tutto il volo;
- lungo y accelerazione $-g$: il moto verticale è **uniformemente accelerato**, esattamente come una caduta libera o un lancio verticale.

I due moti condividono soltanto il tempo t. Tutto il capitolo è un'applicazione di questa idea, e il metodo per ogni problema sarà lo stesso: scomporre la velocità iniziale, scrivere le leggi dei due moti con lo stesso t, e usare l'uno per ricavare ciò che serve all'altro.

2.2 Il lancio orizzontale

2.2.1 Le leggi orarie

Una pallina rotola su un tavolo alto h e ne lascia il bordo con velocità orizzontale v_0. Mettiamo l'origine sul pavimento, sotto il bordo del tavolo, e facciamo partire il cronometro nell'istante del distacco. All'istante $t = 0$ la pallina si trova in $(0; h)$ e la sua velocità ha componenti $v_x = v_0$ e $v_y = 0$. Il **lancio orizzontale** è dunque la composizione di un moto uniforme con velocità v_0 lungo x e di una caduta libera da ferma lungo y:

$$x = v_0 t \qquad y = h - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Anche le componenti della velocità seguono le leggi dei due moti: $v_x = v_0$ in ogni istante, mentre $v_y = -g t$ (il segno meno indica che la pallina scende, perché l'asse y è rivolto verso l'alto).

2.2.2 Il tempo di caduta non dipende dalla velocità orizzontale

La pallina tocca il pavimento quando $y = 0$, cioè quando $\tfrac{1}{2} g t^2 = h$. Il **tempo di volo**, l'intervallo di tempo fra il lancio e l'arrivo al suolo, è quindi

$$t_v = \sqrt{(2h/g)}$$

È lo stesso tempo che hai trovato nel primo volume per un corpo lasciato cadere da fermo dalla stessa altezza, e nella formula v_0 **non compare**. Una pallina spinta forte e una appena sfiorata cadono dal tavolo nello stesso tempo; quella più veloce arriva solo più lontano. La Figura 2.1 lo

mostra con una «fotografia stroboscopica»: in ogni istante le due palline, quella lasciata cadere e quella lanciata, si trovano alla stessa altezza.

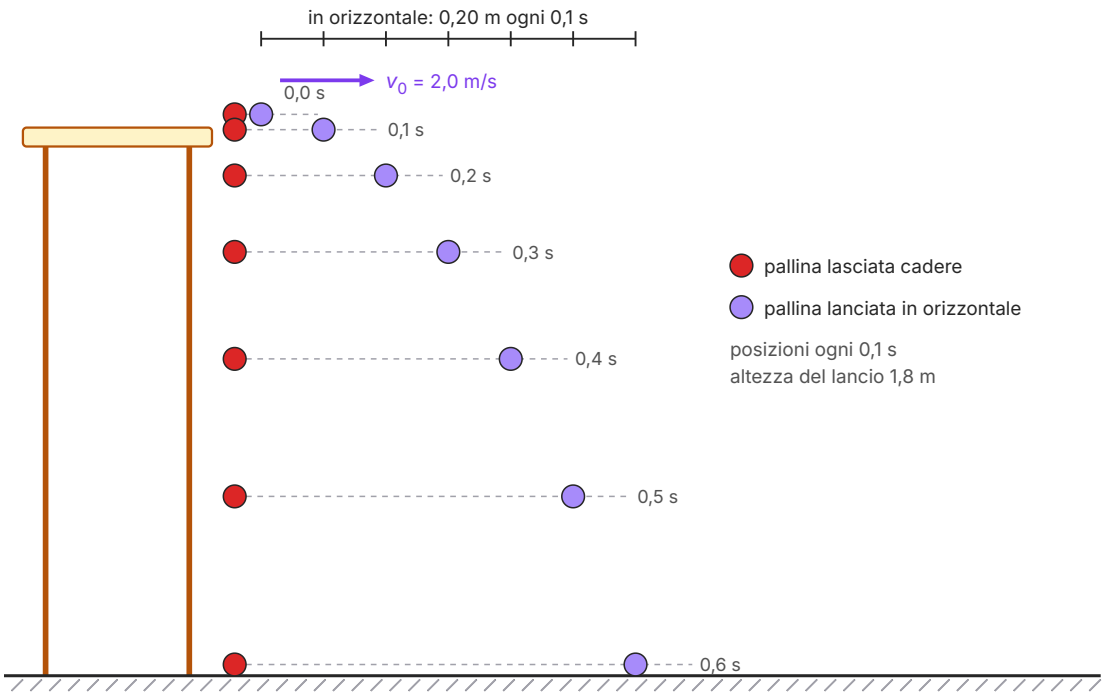


Figura 2.1 Una pallina lasciata cadere da ferma (in rosso) e una lanciata in orizzontale a 2,0 m/s (in viola) dalla stessa altezza di 1,8 m, nelle posizioni occupate ogni 0,1 s (calcolate senza aria). In ogni istante le due palline sono alla stessa altezza; in orizzontale la pallina lanciata percorre 0,20 m ogni 0,1 s. Le linee tratteggiate uniscono le posizioni allo stesso istante.

Si può verificarlo con un esperimento semplicissimo. Metti una moneta sul bordo di un tavolo e un'altra appoggiata sul piano, poco più indietro; con un righello tenuto orizzontale colpisci di lato la seconda moneta, in modo che parta in orizzontale e che lo stesso righello, nel suo movimento, faccia cadere dal bordo anche la prima. Le due monete toccano il pavimento contemporaneamente: si sente un solo «tic». Da un tavolo alto 0,80 m la caduta dura $\sqrt{(2 \times 0{,}80\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 0{,}40$ s, comunque veloce parta la moneta lanciata.

2.2.3 La gittata

Durante il tempo di volo il moto orizzontale procede uniforme. La distanza orizzontale fra il punto di lancio e quello di arrivo si chiama **gittata** e si indica con x_G:

$$x_G = v_0 t_v = v_0 \sqrt{(2h/g)}$$

La gittata è direttamente proporzionale alla velocità di lancio: raddoppiando v_0 raddoppia. Dipende invece dall'altezza attraverso una radice quadrata: per raddoppiare la gittata alzando il punto di lancio, l'altezza va quadruplicata.

2.2.4 La velocità all'arrivo e la tangente di un angolo

Nell'istante in cui tocca terra il corpo ha $v_x = v_0$ e $v_y = -g\,t_v$, cioè, in modulo, $|v_y| = \sqrt{(2g\,h)}$: la stessa velocità verticale di un corpo caduto da fermo. Il modulo della velocità si trova con il teorema di Pitagora, $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$. Per conoscerne la direzione ci serve l'angolo β che la velocità forma con l'orizzontale: nel triangolo rettangolo formato dalle due componenti, $|v_y|$ è il cateto opposto a β e v_x il cateto adiacente.

Nel primo volume (capitolo 6) hai usato il seno e il coseno, che legano un cateto all'ipotenusa. Quando si conoscono i due cateti conviene un terzo rapporto: si chiama **tangente** dell'angolo α, e si scrive tan α, il rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente all'angolo. Poiché il cateto opposto è l'ipotenusa per sen α e quello adiacente l'ipotenusa per cos α, la tangente è anche il rapporto fra seno e coseno:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

In molti testi italiani la tangente si indica anche con «tg α». Alcuni valori da conoscere: tan 45° = 1 (i due cateti sono uguali), la tangente di un angolo acuto è minore di 1 sotto i 45° e maggiore di 1 sopra, e cresce senza limite quando l'angolo si avvicina a 90°. Per un vettore di componenti v_x e v_y, l'angolo con l'asse x si ottiene direttamente dalle componenti: $\tan\beta = |v_y|/v_x$. Per passare dal valore della tangente all'angolo si usa la **funzione inversa della tangente**, il tasto $\tan^{-1}$ della calcolatrice (a volte indicato «atan» o «arctan»), che va usata in modalità gradi (DEG), come per sen^{-1} e $\cos^{-1}$.

ESEMPIO SVOLTO

Un sasso lanciato da un ponte

Problema. Da un ponte alto 20 m sopra un fiume un ragazzo lancia un sasso in orizzontale, a 12 m/s. Trascurando l'aria, calcola a) quanto tempo il sasso resta in volo; b) a che distanza orizzontale dal punto di lancio tocca l'acqua; c) la velocità con cui arriva sull'acqua, in modulo e direzione.

Soluzione. Assi: x orizzontale nel verso del lancio, y verticale verso l'alto, origine sull'acqua sotto il punto di lancio. Dati: $h = 20$ m, $v_0 = 12$ m/s. a) Il moto verticale è una caduta libera da ferma:

$$t_v = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 20\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} = \sqrt{(4{,}08\ \text{s}^2)} \approx 2{,}0\ \text{s}$$

b) Il moto orizzontale è uniforme: $x_G = v_0\, t_v = 12\ \text{m/s} \times 2{,}02\ \text{s} \approx 24$ m.

c) All'arrivo $v_x = 12$ m/s e $|v_y| = g\, t_v = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2{,}02\ \text{s} \approx 19{,}8$ m/s. Il modulo è $v = \sqrt{(12^2 + 19{,}8^2)}$ m/s ≈ 23 m/s. Per la direzione: $\tan\beta = 19{,}8/12 = 1{,}65$, quindi $\beta = \tan^{-1} 1{,}65 \approx 59°$: il sasso entra nell'acqua inclinato di circa 59° sotto l'orizzontale.

Controllo. Il tempo di volo è quello di un sasso lasciato cadere dal ponte; $|v_y| = \sqrt{(2g\,h)} = \sqrt{(392)}$ m/s $\approx 19{,}8$ m/s, come trovato. L'angolo è maggiore di 45° perché la componente verticale finale supera quella orizzontale ($\tan\beta > 1$). Abbiamo usato nei passaggi intermedi una cifra in più (2,02 s) e arrotondato solo i risultati a due cifre significative, come i dati.

ERRORE FREQUENTE

«La pallina lanciata più forte cade più tardi, perché la velocità la tiene su»: **falso**, senza aria. La velocità orizzontale non ha alcun effetto sul moto verticale, che è una caduta libera da ferma per qualunque v_0: il tempo di volo dipende solo dall'altezza. Attenzione anche al contrario: un lancio orizzontale non è «un po' più lento» a cadere perché la traiettoria è più lunga. La traiettoria è più lunga, ma è percorsa più velocemente.

2.3 La traiettoria è una parabola

2.3.1 L'equazione della traiettoria

Le leggi orarie dicono dove si trova il proiettile in ogni istante. Se ci interessa soltanto la forma della curva, e non i tempi, possiamo eliminare t, come hai fatto nel capitolo 1 per la barca che accelera. Dalla legge del moto orizzontale $t = x/v_0$; sostituendo nella legge del moto verticale si ottiene

$$y = h - \frac{g}{2{v_0}^2} x^2$$

È l'**equazione della traiettoria** del lancio orizzontale: un legame diretto fra y e x, in cui il tempo non compare più. Nel linguaggio della matematica y è una funzione di secondo grado di x, del tipo $y = a\,x^2 + c$ con $a = -g/(2v_0^2)$ negativo: il suo grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e il vertice nel punto di lancio. La pallina che cade dal tavolo descrive metà di questa parabola, il ramo che scende.

L'equazione mostra anche come la forma della curva dipende dalla velocità: più v_0 è grande, più il coefficiente di x^2 è piccolo in valore assoluto, e la parabola è «aperta». Con $v_0 = 2{,}0$ m/s, come nella Figura 2.1, il coefficiente vale $9{,}8/(2 \times 4{,}0) \approx 1{,}2$ m^{-1}: dopo 0,50 m di avanzamento la pallina è scesa di $1{,}2 \times 0{,}25$ m $\approx 0{,}31$ m; con $v_0 = 4{,}0$ m/s sarebbe scesa di un quarto, circa 8 cm.

APPROFONDIMENTO

Da Tartaglia a Galileo

Nel Cinquecento la balistica era un problema pratico di grande importanza. Niccolò Tartaglia, matematico bresciano, pubblicò nel 1537 la *Nova scientia*, dedicata al tiro delle artiglierie. Secondo le idee del tempo, ancora legate alla fisica di Aristotele, il moto di una palla di cannone era fatto di un tratto rettilineo nella direzione del tiro, un tratto curvo e una caduta finale; Tartaglia sostenne che nessun tratto della traiettoria è perfettamente rettilineo e che la gittata massima si ottiene puntando il pezzo con un'inclinazione di 45°. Mancava però una teoria che spiegasse la forma della traiettoria.

La risposta arrivò un secolo dopo con Galileo Galilei. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, pubblicati nel 1638, la Giornata quarta è dedicata al moto dei proiettili e si apre con un teorema, scritto in latino come le altre proposizioni sul moto delle Giornate terza e quarta (lo riportiamo in grafia moderna): «*Proiectum, dum fertur motu composito ex horizontali aequabili et ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione*» (Un proiettile, mentre si muove di un moto composto da un moto orizzontale uniforme e da un moto naturalmente accelerato verso il basso, descrive nel suo percorso una linea semiparabolica). È esattamente il risultato di questa sezione: Galileo lo ottenne componendo il moto uniforme con la legge di caduta dei gravi, che aveva studiato nella Giornata terza, ed era consapevole che la resistenza dell'aria rende la parabola solo un'ottima approssimazione.

Il nome «semiparabola» si riferisce al lancio orizzontale, che descrive metà della parabola; nella stessa Giornata Galileo tratta anche i tiri obliqui e mostra che due tiri con la stessa velocità e inclinazioni che differiscono da 45° per la stessa quantità, in più e in meno, hanno la stessa gittata: lo ritroveremo nella prossima sezione.

2.4 Il lancio obliquo

2.4.1 Scomporre la velocità iniziale

Nella maggior parte dei lanci la velocità iniziale non è orizzontale: un pallone calciato, un giavellotto, il getto di una fontana partono verso l'alto, formando con l'orizzontale un angolo α detto **angolo di lancio** (o di alzo). È il **lancio obliquo**. Studiamolo nel caso più semplice, in cui il corpo parte dal suolo e ricade alla stessa quota, su un terreno orizzontale. Mettiamo l'origine nel punto di lancio. La velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$, di modulo v_0, ha componenti

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$$

Lungo x il moto è uniforme con velocità v_{0x}; lungo y il corpo ha velocità iniziale v_{0y} verso l'alto e accelerazione $-g$: è il lancio verticale del primo volume. Le leggi orarie e le componenti della velocità sono

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g\, t^2$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\, t$$

La Figura 2.2 mostra la velocità in cinque istanti equidistanti. La componente orizzontale (in blu) è sempre la stessa; quella verticale (in rosso) diminuisce in salita, si annulla nel punto più alto e cresce verso il basso in discesa; la velocità (in viola), somma delle due, è in ogni punto tangente alla traiettoria. Eliminando il tempo, come nella sezione precedente, si trova che anche questa traiettoria è una parabola, che passa per l'origine: $y = (\tan\alpha)\, x - g\, x^2/(2v_0^{\,2} \cos^2\alpha)$.

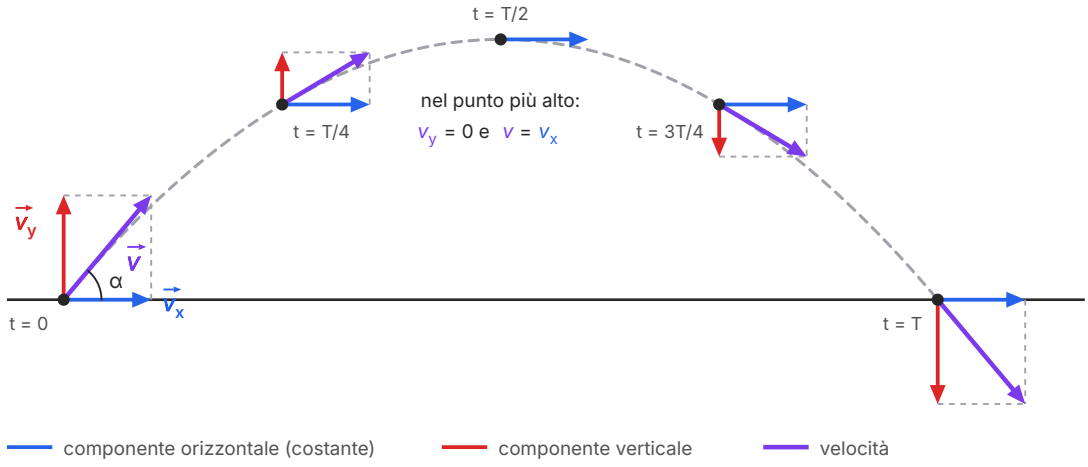


Figura 2.2 Lancio obliquo con v_0 = 20 m/s e α = 50°, senza aria (traiettoria calcolata). Nei cinque istanti 0, $T/4$, $T/2$, $3T/4$ e T, dove $T \approx 3{,}1$ s è il tempo di volo, sono disegnate la velocità e le sue componenti, in scala. La componente orizzontale non cambia; quella verticale passa da +15,3 m/s a zero e poi a −15,3 m/s.

2.4.2 Tempo di volo, altezza massima e gittata

Il punto più alto. Il corpo sale finché la componente verticale della velocità è positiva. Nel punto più alto della traiettoria $v_y = 0$, cioè $v_0 \operatorname{sen} \alpha - g\,t = 0$: il **tempo di salita** è $t_s = v_0 \operatorname{sen} \alpha / g$. L'altezza raggiunta si ricava dalla relazione indipendente dal tempo del primo volume, $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\,y$, ponendo $v_y = 0$. È l'**altezza massima**:

$$h_{max} = \frac{(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{2g}$$

Il tempo di volo. Il moto verticale è un lancio verticale, che è simmetrico: il corpo impiega a scendere dal punto più alto lo stesso tempo che ha impiegato a salire. Il tempo di volo è il doppio del tempo di salita (lo stesso risultato si ottiene ponendo $y = 0$ nella legge oraria):

$$t_v = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

La gittata. Durante tutto il tempo di volo il corpo avanza in orizzontale con velocità $v_0 \cos \alpha$. La gittata è quindi

$$x_G = v_0 \cos \alpha \cdot t_v = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

Notiamo che, per la simmetria, il punto più alto si trova esattamente a metà della gittata, e che il corpo ricade al suolo con una velocità che ha lo stesso modulo di quella di lancio e forma con

l'orizzontale lo stesso angolo α, ma rivolto verso il basso.

ERRORE FREQUENTE

«Nel punto più alto il pallone si ferma per un istante»: **falso**. Si annulla solo la componente verticale v_y; la componente orizzontale vale sempre $v_0 \cos \alpha$, quindi nel punto più alto la velocità è orizzontale e vale $v = v_0 \cos \alpha$, che è diversa da zero (a meno che il lancio non sia verticale). E nemmeno l'accelerazione si annulla: nel punto più alto, come in ogni altro, vale g verso il basso. Errore collegato: usare per l'altezza massima la formula del lancio verticale $v_0^2/(2g)$, con la velocità intera al posto della sola componente verticale $v_0 \operatorname{sen} \alpha$.

ESEMPIO SVOLTO

Il calcio di punizione

Problema. Un pallone viene calciato da terra con velocità di 20 m/s, inclinata di 30° rispetto al terreno orizzontale. Trascurando l'aria, calcola a) le componenti della velocità iniziale; b) dopo quanto tempo raggiunge il punto più alto e a che altezza; c) il tempo di volo e la gittata; d) la velocità nel punto più alto.

Soluzione. a) $v_{0x} = 20 \text{ m/s} \times \cos 30° = 20 \times 0{,}866 \text{ m/s} \approx 17{,}3 \text{ m/s}$; $v_{0y} = 20 \text{ m/s} \times \operatorname{sen} 30° = 20 \times 0{,}500 \text{ m/s} = 10{,}0 \text{ m/s}$.

b) $t_s = v_{0y}/g = 10{,}0 \text{ m/s} / 9{,}8 \text{ m/s}^2 \approx 1{,}02 \text{ s}$; $h_{max} = v_{0y}^2/(2g) = (10{,}0 \text{ m/s})^2/(19{,}6 \text{ m/s}^2) \approx 5{,}1 \text{ m}$.

c) $t_v = 2t_s \approx 2{,}04 \text{ s}$; $x_G = v_{0x}\, t_v = 17{,}3 \text{ m/s} \times 2{,}04 \text{ s} \approx 35 \text{ m}$. Con la formula: $x_G = 2 \times (20 \text{ m/s})^2 \times 0{,}500 \times 0{,}866 / 9{,}8 \text{ m/s}^2 \approx 35{,}3 \text{ m}$.

d) Nel punto più alto $v_y = 0$ e la velocità è orizzontale: $v = v_{0x} \approx 17 \text{ m/s}$.

Controllo. Il punto più alto si trova a metà della gittata: 17,3 m/s × 1,02 s ≈ 17,7 m ≈ 35,3 m / 2. Dimensionalmente, $(\text{m/s})^2/(\text{m/s}^2) = \text{m}$. Un pallone vero, frenato dall'aria, arriverebbe un po' meno lontano.

2.4.3 Qual è l'angolo migliore?

Con la stessa velocità di lancio, come cambia la gittata al variare dell'angolo? Se α è piccolo il corpo avanza veloce ma resta in aria pochissimo; se α è vicino a 90° resta in aria a lungo ma avanza lentamente. Deve esistere un angolo intermedio che realizza il miglior compromesso. La Figura 2.3 mostra le traiettorie calcolate per cinque angoli, con $v_0 = 15$ m/s, e la tabella seguente riporta i valori numerici.

Tabella 2.1 Lancio con v_0 = 15 m/s da terreno orizzontale, senza aria (valori calcolati con le formule della sezione).

α	2 sen α cos α	t_v (s)	h_{max} (m)	x_G (m)
15°	0,500	0,79	0,77	11,5
30°	0,866	1,53	2,87	19,9
45°	1,000	2,16	5,74	23,0
60°	0,866	2,65	8,61	19,9
75°	0,500	2,96	10,71	11,5

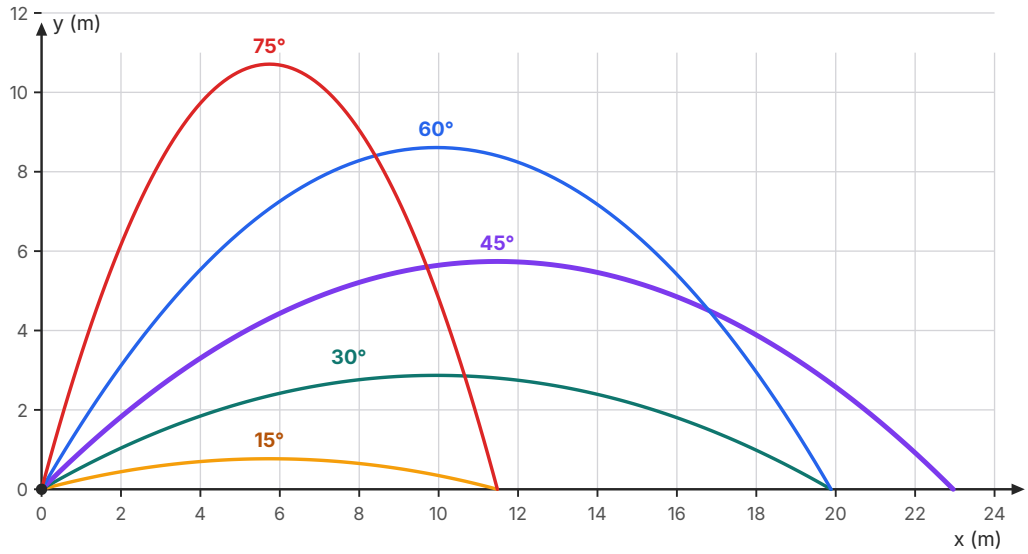


Figura 2.3 Traiettorie di proiettili lanciati con la stessa velocità v_0 = 15 m/s e angoli di 15°, 30°, 45°, 60° e 75°, senza aria (curve calcolate). La gittata è massima a 45°; angoli complementari, come 30° e 60°, danno la stessa gittata ma altezze e tempi di volo diversi.

Due fatti saltano all'occhio. Primo: fra gli angoli considerati la gittata più grande si ha per α = 45°. In generale, la gittata dipende dall'angolo solo attraverso il prodotto 2 sen α cos α, e la seconda colonna della tabella mostra che questo prodotto vale al massimo 1, proprio per α = 45° (prova con la calcolatrice qualche angolo vicino, come 40° e 50°: troverai valori un po' minori di 1). La **gittata massima** è quindi $x_G = v_0^2/g$, che per 15 m/s vale 23,0 m. Secondo: **angoli complementari**, cioè con somma 90°, come 30° e 60° o 15° e 75°, danno la stessa gittata. Il motivo è che sen 60° = cos 30° e cos 60° = sen 30°: scambiando α con 90° − α, seno e coseno si scambiano e il

prodotto non cambia. Il tiro più alto resta in aria più a lungo, ma avanza più lentamente, e i due effetti si compensano esattamente.

DA RICORDARE

La gittata massima a 45° e l'uguaglianza delle gittate per angoli complementari valgono **solo** se il punto di lancio e quello di arrivo sono alla stessa quota e se l'aria è trascurabile. Se si lancia da un'altezza maggiore di quella di arrivo, come fa un atleta nel getto del peso, l'angolo migliore è minore di 45°; anche la resistenza dell'aria abbassa l'angolo migliore.

In matematica scoprirai che il prodotto $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ si può scrivere in modo più compatto con una funzione dell'angolo 2α; qui lo usiamo così com'è.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico delle traiettorie

Problema. Usando la Figura 2.3 e la tabella, rispondi. a) Un getto d'acqua esce da un ugello a terra a 15 m/s e deve colpire un punto a 19,9 m: con quali angoli si può orientare? b) Fra le due soluzioni, quale conviene se fra l'ugello e il bersaglio c'è un muretto alto 2,5 m a metà strada? c) Stima dal grafico l'altezza della traiettoria a 45° quando $x = 4{,}0$ m e controlla il valore con l'equazione della traiettoria.

Soluzione. a) Dalla tabella la gittata 19,9 m si ottiene con $\alpha = 30°$ e con l'angolo complementare $\alpha = 60°$. b) A metà strada il getto è nel suo punto più alto: 2,87 m a 30° e 8,61 m a 60°. Entrambi passano sopra un muretto di 2,5 m, ma a 30° con un margine di soli 0,4 m; il tiro a 30° arriva prima (1,53 s contro 2,65 s). Se il getto è disturbato, per esempio dal vento, il margine di 0,4 m potrebbe non bastare: il tiro a 60° è più sicuro. c) Sul grafico, sopra $x = 4$ m, la curva viola dei 45° è a poco più di 3 m. Con l'equazione: per $\alpha = 45°$, $\tan\alpha = 1$ e $\cos^2\alpha = 0{,}5$, quindi $y = x - g\,x^2/v_0^{\,2} = 4{,}0\text{ m} - 9{,}8 \times 16/225\text{ m} \approx 4{,}0\text{ m} - 0{,}70\text{ m} = 3{,}3\text{ m}$.

Controllo. Un grafico si legge con un'incertezza pari a una frazione della divisione della griglia (qui circa 0,2 m): la lettura «poco più di 3 m» è compatibile con il valore calcolato di 3,3 m.

2.4.4 Lanciare da un'altezza

Spesso il punto di lancio è più in alto di quello di arrivo: una palla lanciata dal balcone, il peso spinto da un atleta all'altezza della spalla, un tuffatore che salta verso l'alto da un trampolino. Le formule del tempo di volo, dell'altezza massima e della gittata non valgono più così come sono, perché sono state ricavate per arrivo e partenza alla stessa quota. Il metodo, invece, è lo stesso: si scompone la velocità iniziale e si studiano separatamente i due moti. Un modo comodo di procedere è dividere il moto verticale in due tratti, la salita fino al punto più alto e la successiva caduta, che dal punto più alto è una caduta libera da ferma.

ESEMPIO SVOLTO

Un lancio dall'alto, passo per passo

Problema. Una palla viene lanciata da un'altezza di 2,0 m dal suolo con velocità di 14 m/s, inclinata di 40° verso l'alto. Trascurando l'aria, calcola a) l'altezza massima raggiunta rispetto al suolo; b) il tempo di volo; c) la distanza orizzontale a cui la palla tocca terra; d) il confronto con la gittata che avrebbe lo stesso lancio da terra.

Soluzione. Componenti: $v_{0x} = 14\ \text{m/s} \times \cos 40° \approx 10{,}72\ \text{m/s}$; $v_{0y} = 14\ \text{m/s} \times \text{sen}\ 40° \approx 9{,}00\ \text{m/s}$. a) Salita: $t_s = 9{,}00 / 9{,}8\ \text{s} \approx 0{,}918\ \text{s}$; dislivello percorso in salita $(9{,}00\ \text{m/s})^2/(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 4{,}13\ \text{m}$. Altezza massima rispetto al suolo: $H = 2{,}0\ \text{m} + 4{,}13\ \text{m} \approx 6{,}1\ \text{m}$.

b) Dal punto più alto la palla cade con $v_y = 0$ da 6,13 m: il tempo di discesa è $\sqrt{(2 \times 6{,}13\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 1{,}12\ \text{s}$. Tempo di volo: $t_v = 0{,}918\ \text{s} + 1{,}12\ \text{s} \approx 2{,}04\ \text{s}$.

c) Distanza orizzontale: $10{,}72\ \text{m/s} \times 2{,}04\ \text{s} \approx 21{,}8\ \text{m} \approx 22\ \text{m}$ (Figura 2.4).

d) Da terra: $x_G = 2 \times 10{,}72\ \text{m/s} \times 9{,}00\ \text{m/s} / 9{,}8\ \text{m/s}^2 \approx 19{,}7\ \text{m}$. Partendo da 2,0 m di altezza la palla resta in aria più a lungo e arriva circa 2 m più lontano.

Controllo. La discesa (1,12 s) dura più della salita (0,92 s), perché la palla scende di 6,1 m ma sale solo di 4,1 m. Dividendo il moto in salita e caduta da ferma abbiamo evitato di risolvere un'equazione di secondo grado in t.

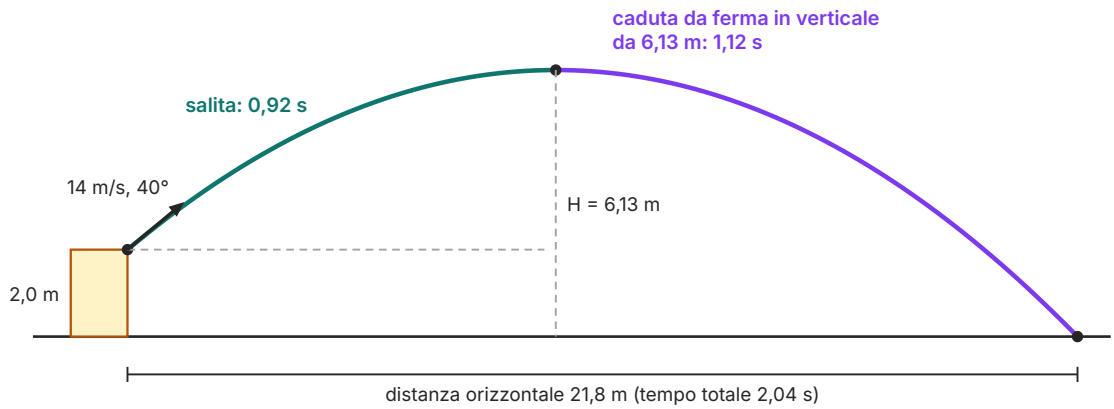


Figura 2.4 Il lancio dell'esempio svolto: partenza da 2,0 m con 14 m/s a 40° (traiettoria calcolata, senza aria). Il moto verticale si studia in due tratti: la salita fino all'altezza massima di 6,13 m (0,92 s), poi la caduta da ferma da quella quota (1,12 s). Intanto il moto orizzontale procede uniforme a 10,7 m/s.

2.5 Il proiettile reale: l'aria e lo sport

2.5.1 Che cosa cambia con la resistenza dell'aria

Il modello della parabola descrive bene il volo di una pallina di metallo che cade da un tavolo, ma per molti lanci reali l'aria non si può trascurare. Mentre il corpo si muove, l'aria esercita su di esso una forza, la resistenza dell'aria, opposta alla velocità, che cresce rapidamente con la velocità stessa: la studierai nel capitolo 7. Le conseguenze principali si vedono confrontando le due traiettorie della Figura 2.5:

- la componente orizzontale della velocità non è più costante, ma diminuisce durante tutto il volo;
- il corpo arriva meno in alto e soprattutto meno lontano: per un pallone o una pallina da golf la differenza rispetto alla parabola è grande;
- la traiettoria non è più simmetrica: il ramo di discesa è più ripido di quello di salita, e il punto più alto si sposta oltre la metà del percorso;
- l'angolo che dà la gittata massima diventa minore di 45°.

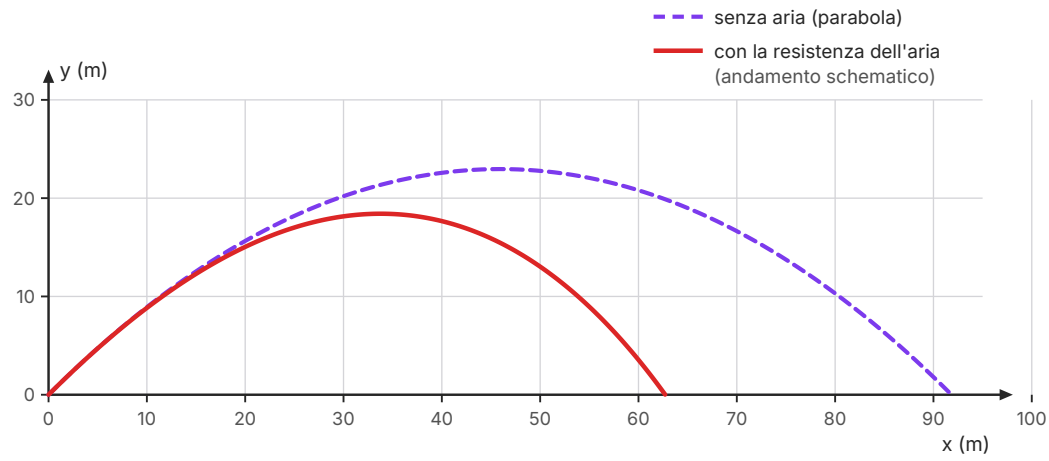


Figura 2.5 Un lancio con v_0 = 30 m/s a 45°: la parabola senza aria (tratteggiata) e la traiettoria con la resistenza dell'aria (in rosso), calcolata con un modello semplificato e da intendere come andamento schematico, non come la traiettoria di una palla reale. Con l'aria il corpo arriva meno lontano e meno in alto, e la discesa è più ripida della salita.

La resistenza conta di più per i corpi leggeri rispetto alla loro superficie (un volano, una pallina da ping-pong) e cresce con la velocità: per questo il modello del proiettile è adatto ai lanci lenti

di corpi compatti e pesanti, e solo approssimato per un pallone calciato con forza. Nei palloni che ruotano su sé stessi intervengono anche altri effetti dell'aria, che fanno curvare la traiettoria lateralmente, come nei tiri «a effetto»; sono fuori dal nostro modello.

COLLEGAMENTI

Il pacco dall'aereo e la nave di Galileo

Un aereo che vola in orizzontale a velocità costante lascia cadere un pacco di soccorsi. Trascurando l'aria, nell'istante del rilascio il pacco ha la stessa velocità orizzontale dell'aereo; da quel momento il suo moto orizzontale procede uniforme alla stessa velocità, e il pacco resta **sempre esattamente sotto l'aereo**. Visto da terra il pacco descrive un arco di parabola, un lancio orizzontale; visto dal pilota cade lungo la verticale. È la stessa situazione del sasso lasciato cadere dall'albero della nave, discussa da Galileo nel *Dialogo* (capitolo 1): la regola di composizione delle velocità ci dice che i due osservatori vedono lo stesso moto verticale, a cui chi sta a terra aggiunge il moto orizzontale dell'aereo.

Per centrare il bersaglio, quindi, il pacco va lasciato quando l'aereo è ancora lontano, a una distanza orizzontale pari alla gittata del lancio orizzontale. Nella realtà la resistenza dell'aria rallenta il pacco, che resta un po' indietro rispetto all'aereo: per questo i pacchi pesanti vengono spesso frenati di proposito con un paracadute, che rende la discesa più lenta e l'arrivo meno violento, a scapito della precisione.

COLLEGAMENTI

Sport: l'arte dell'angolo giusto

Molti sport sono, in fondo, problemi di moto del proiettile. Nel basket la palla deve entrare in un canestro più alto del punto di lancio: un tiro più arcuato arriva sul ferro più dall'alto, «vede» un'apertura più grande, ma richiede più velocità ed è più sensibile agli errori di forza; i giocatori trovano il proprio compromesso con l'allenamento. Nel getto del peso l'attrezzo è pesante e compatto, e l'aria conta poco, ma viene lanciato dall'altezza della spalla, più su del punto di arrivo, e per come sono fatti i muscoli un atleta riesce a imprimere più velocità con un angolo più basso: per entrambi i motivi gli angoli di lancio dei pesisti sono in genere sensibilmente inferiori a 45°.

Nel salto in lungo è il corpo stesso dell'atleta a essere un proiettile, almeno il suo baricentro, cioè il punto medio rappresentativo della sua massa (*Fisica 1*, capitolo 11). Una volta staccato da terra, nessun movimento di braccia o gambe può cambiare la parabola descritta dal baricentro: l'atleta può solo cambiare la posizione del corpo intorno ad esso, per esempio portare avanti le gambe per toccare la sabbia il più lontano possibile. La velocità e l'angolo di stacco decidono tutto il resto.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: prevedere dove cade una pallina

Materiali. Una pallina d'acciaio di qualche centimetro di diametro; una guida (un profilato a U o due righelli affiancati) inclinata e raccordata con un tratto orizzontale fissato su un tavolo; un metro a nastro (sensibilità 1 mm) o un'asta metrica; due fotocellule con un cronometro elettronico (sensibilità 0,001 s), oppure uno smartphone che riprenda al rallentatore il tratto orizzontale con un righello inquadrato; un filo a piombo; un foglio bianco con sopra un foglio di carta carbone, fissati sul pavimento con il nastro adesivo.

Procedimento. 1) Misura l'altezza del bordo del tavolo dal pavimento: h = (0,850 ± 0,002) m. Con il filo a piombo segna sul pavimento il punto esattamente sotto il bordo. 2) Fai partire la pallina sempre dallo stesso segno sulla guida e misura il tempo che impiega a percorrere gli ultimi (0,300 ± 0,001) m del tratto orizzontale, che finisce sul bordo del tavolo; ripeti cinque volte. 3) Calcola la velocità di lancio e prevedi la gittata con $x_G = v_0 \sqrt{(2h/g)}$, con la sua incertezza. 4) Metti il foglio con la carta carbone intorno al punto previsto, lascia cadere la pallina cinque volte dallo stesso segno e misura la distanza di ciascuna impronta dal punto segnato con il filo a piombo.

Tabella 2.2 Misure ripetute (dati tipici di una prova).

Prova	1	2	3	4	5
tempo sui 0,300 m (s)	0,248	0,252	0,250	0,246	0,254
distanza dell'impronta (m)	0,489	0,494	0,486	0,492	0,489

Che cosa concludere. Il tempo medio è (0,250 ± 0,004) s (incertezza: semidispersione), quindi v_0 = 0,300 m / 0,250 s = 1,20 m/s, con incertezza relativa 0,001/0,300 + 0,004/0,250 ≈ 1,9%: v_0 = (1,20 ± 0,02) m/s. Il tempo di caduta è $\sqrt{(2 \times 0{,}850 / 9{,}8)}$ s ≈ 0,416 s (l'incertezza relativa di h, 0,24%, entra dimezzata per la radice). La previsione è x_G = 1,20 m/s × 0,416 s ≈ 0,500 m con incertezza relativa ≈ 2,0%, cioè x_G = (0,50 ± 0,01) m. La misura dà (0,490 ± 0,004) m. La differenza, 0,010 m, è minore della somma delle incertezze, 0,014 m: previsione e misura sono compatibili. Tutte e cinque le impronte cadono però un po' prima del valore previsto: è il segnale di un piccolo errore sistematico.

Sicurezza. Lavora con la pallina sempre sul tavolo o sul foglio; raccogli subito le palline che rotolano sul pavimento, per non scivolarci sopra.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 1*, capitolo 5. Riporta la tabella delle misure, il calcolo della velocità di lancio e della gittata prevista con la propagazione delle incertezze, e il risultato della misura con la sua incertezza; disegna su una retta graduata l'intervallo previsto e quello misurato e discuti la loro compatibilità. Discuti gli errori sistematici: la pallina rallenta per attrito lungo il tratto orizzontale, quindi sul bordo è un po' più lenta della velocità media misurata (con i dati della tabella, la gittata misurata corrisponde a 1,18 m/s); il tratto finale

della guida potrebbe non essere perfettamente orizzontale; la resistenza dell'aria, invece, su meno di mezzo secondo di volo è trascurabile per una pallina d'acciaio. Proponi come ripetere l'esperimento per ridurre l'effetto principale, per esempio misurando la velocità su un tratto più corto vicino al bordo.

IN SINTESI

Le formule del moto del proiettile

v_x = costante, $v_y = v_{0y} - g\,t$ — senza aria il moto orizzontale è uniforme e quello verticale uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8$ m/s^2 verso il basso; i due moti hanno in comune solo il tempo.

$x = v_0\,t$, $y = h - \frac{1}{2}\,g\,t^2$; $t_v = \sqrt{(2h/g)}$; $x_G = v_0\,\sqrt{(2h/g)}$ — lancio orizzontale dall'altezza h: il tempo di volo (s) non dipende da v_0; la gittata (m) è proporzionale a v_0.

$y = h - g\,x^2/(2v_0^2)$ — equazione della traiettoria: una parabola con la concavità verso il basso.

$\tan\alpha = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha$ = cateto opposto / cateto adiacente — dalle componenti si ricava l'angolo di un vettore con $\tan^{-1}$: $\tan\beta = |v_y|/v_x$.

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\,\text{sen}\,\alpha$ — scomposizione della velocità di lancio (m/s) con l'angolo di lancio α.

$t_v = 2v_0\,\text{sen}\,\alpha/g$; $h_{max} = (v_0\,\text{sen}\,\alpha)^2/(2g)$; $x_G = 2v_0^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha/g$ — lancio obliquo con partenza e arrivo alla stessa quota: tempo di volo (s), altezza massima (m), gittata (m). Nel punto più alto $v = v_0\cos\alpha \neq 0$.

x_G massima = v_0^2/g per $\alpha = 45°$; angoli complementari danno la stessa gittata — solo per arrivo alla stessa quota e senza aria.

Nel prossimo capitolo studieremo un altro moto nel piano molto comune: il moto lungo una circonferenza, in cui il modulo della velocità può restare costante mentre la sua direzione cambia di continuo.

SINTESI

- Un proiettile è un corpo che, dopo aver ricevuto una velocità iniziale, si muove soggetto solo al proprio peso; nel modello è un punto materiale con accelerazione costante g verso il basso e senza resistenza dell'aria.
- Il modello è adatto a corpi densi e compatti, lanciati con velocità moderate su tragitti brevi; non a corpi leggeri o molto veloci, che l'aria frena in modo evidente.
- Per il principio di indipendenza, il moto del proiettile è la composizione di un moto orizzontale uniforme (v_x costante) e di un moto verticale uniformemente accelerato, che hanno in comune solo il tempo.
- Nel lancio orizzontale dall'altezza h il tempo di volo è $\sqrt{(2h/g)}$, lo stesso di un corpo lasciato cadere da fermo, e non dipende da v_0; la gittata è $v_0\sqrt{(2h/g)}$.
- Eliminando il tempo dalle leggi orarie si ottiene l'equazione della traiettoria: y è una funzione di secondo grado di x, e la traiettoria è una parabola.
- La tangente di un angolo acuto è il rapporto fra cateto opposto e cateto adiacente, $\tan\alpha = \text{sen}\,\alpha/\cos\alpha$; l'angolo di un vettore con l'orizzontale si ricava con $\tan^{-1}$ dalle componenti.
- Nel lancio obliquo la velocità iniziale si scompone in $v_0\cos\alpha$ (orizzontale) e $v_0\,\text{sen}\,\alpha$ (verticale); il moto verticale è un lancio verticale.
- Con partenza e arrivo alla stessa quota: tempo di volo $2v_0\,\text{sen}\,\alpha/g$, altezza massima $(v_0\,\text{sen}\,\alpha)^2/(2g)$, gittata $2v_0^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha/g$; il punto più alto è a metà della gittata.
- Nel punto più alto si annulla solo la componente verticale della velocità: la velocità vale $v_0\cos\alpha$ e l'accelerazione resta g.
- A parità di velocità la gittata è massima per $\alpha = 45°$ e vale v_0^2/g; angoli complementari danno la stessa gittata. Entrambe le regole valgono solo per lanci senza aria con arrivo alla stessa quota.
- Un lancio da un'altezza si risolve con lo stesso metodo, per esempio dividendo il moto verticale in salita e caduta da ferma dal punto più alto.
- Con la resistenza dell'aria il proiettile arriva meno lontano e meno in alto, la traiettoria diventa asimmetrica e l'angolo migliore scende sotto i 45°.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Durante il volo di un proiettile, trascurando l'aria, l'accelerazione:

   A. è nulla nel punto più alto

   B. vale sempre g ed è diretta verso il basso

   C. ha la direzione della velocità

   D. diminuisce man mano che il corpo sale

2. ● Trascurando l'aria, la componente orizzontale della velocità di un proiettile:

   A. aumenta durante la discesa

   B. diminuisce durante tutto il volo

   C. si annulla nel punto più alto

   D. resta costante

3. ● Dal bordo dello stesso tavolo una pallina viene lasciata cadere da ferma e un'altra viene lanciata in orizzontale a 3 m/s. Trascurando l'aria:

   A. tocca terra per prima quella lasciata cadere

   B. tocca terra per prima quella lanciata

   C. toccano terra nello stesso istante

   D. dipende dalle masse delle palline

4. ● Nel punto più alto della traiettoria di un lancio obliquo la velocità:

   A. è orizzontale e vale $v_0 \cos \alpha$

   B. è nulla

   C. è verticale

   D. vale v_0

5. ● La tangente di un angolo acuto α di un triangolo rettangolo è uguale a:

   A. sen α · cos α

   B. cos α / sen α

   C. cateto adiacente / cateto opposto

   D. sen α / cos α

6. ●● Senza aria, la traiettoria di un sasso lanciato in direzione obliqua è:

   A. un segmento di retta

   B. un arco di circonferenza

   C. un arco di parabola

   D. un arco di parabola solo nel tratto di discesa

7. ●● A parità di velocità di lancio e con arrivo alla stessa quota, la gittata è massima per un angolo di lancio di:

   A. 30°

   B. 45°

   C. 60°

   D. 90°

8. ●● Senza aria e su terreno orizzontale, un proiettile lanciato a 25° ha la stessa gittata di uno lanciato con la stessa velocità a:
   A. 50°
   B. 55°
   C. 75°
   D. 65°

9. ●● In un lancio orizzontale l'altezza di lancio viene quadruplicata, con la stessa v_0. Il tempo di volo:
   A. raddoppia
   B. quadruplica
   C. non cambia
   D. si dimezza

Vero o falso

10. ● In un lancio orizzontale, più è grande v_0, più a lungo il corpo resta in volo. V / F

11. ● Trascurando l'aria, il moto orizzontale di un proiettile è uniforme e quello verticale è uniformemente accelerato. V / F

12. ●● Nel punto più alto di un lancio obliquo l'accelerazione è nulla. V / F

13. ●● Senza aria e su terreno orizzontale, un pallone calciato a 70° resta in aria più a lungo di uno calciato con la stessa velocità a 20°, ma arriva alla stessa distanza. V / F

14. ●● Una pallina da ping-pong colpita con forza segue una traiettoria ben descritta da una parabola. V / F

Applicare

15. ● Una rampa sale di 1,5 m su una distanza orizzontale di 6,0 m. Calcola la tangente del suo angolo di inclinazione α e, con la calcolatrice, l'angolo α.

16. ● Un pallone viene calciato a 25 m/s con un angolo di 37° sopra l'orizzontale. Calcola le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale.

17. ● Una biglia rotola fuori dal bordo di un tavolo alto 0,90 m con velocità orizzontale 1,5 m/s. Calcola il tempo di caduta e la distanza dal piede del tavolo a cui tocca il pavimento.

18. ● Un sasso lanciato in orizzontale a 8,0 m/s dal bordo di una scogliera tocca il mare dopo 1,5 s. Calcola l'altezza della scogliera e la distanza orizzontale percorsa dal sasso.

19. ●● Un oggetto viene lanciato in orizzontale a 8,0 m/s da un'altezza di 5,0 m. Calcola il modulo della sua velocità quando tocca terra e l'angolo che essa forma con l'orizzontale.

20. ●● Una palla viene lanciata da terra a 18 m/s con un angolo di 40°, su un terreno orizzontale. Calcola il tempo di volo, l'altezza massima e la gittata.

21. ●● Osserva la Figura 2.3. a) Quali angoli danno una gittata di circa 20 m? b) Quale traiettoria raggiunge l'altezza più grande, e quanto vale circa? c) Stima l'altezza massima del lancio a 60°.

22. ● Completa. Nel lancio obliquo il tempo per raggiungere il punto più alto è v_0 sen α diviso _____. Nel punto più alto la componente verticale della velocità è _____, mentre quella orizzontale vale _____. Con partenza e arrivo alla stessa quota, il punto più alto si trova a _____ della gittata.

Problemi

23. ●●● Un aereo di soccorso vola in orizzontale a 180 m di quota, alla velocità costante di 50 m/s, e deve lanciare un pacco su una zona di atterraggio. Trascurando l'aria, a) quanto tempo dura la caduta del pacco? b) A che distanza orizzontale dalla zona va sganciato il pacco? c) Dove si trova l'aereo quando il pacco tocca terra? Spiegalo con la regola di composizione delle velocità del capitolo 1. d) Con che velocità il pacco arriva al suolo?

24. ●● Il getto d'acqua di una fontana esce in orizzontale da un tubo posto a 1,2 m dal bordo della vasca e tocca l'acqua a 1,8 m di distanza orizzontale. Calcola la velocità con cui l'acqua esce dal tubo.

25. ●● Un portiere rinvia il pallone calciandolo da terra a 24 m/s con un angolo di 40°. Trascurando l'aria e considerando il campo orizzontale, calcola a) il tempo di volo; b) l'altezza massima; c) la gittata. d) Il pallone vero arriverà più vicino o più lontano? Perché?

26. ●● Un tuffatore prende la rincorsa e si lancia in orizzontale dal bordo di una scogliera alta 28 m. Alla base della scogliera ci sono rocce che sporgono per 6,0 m in orizzontale. Qual è la velocità orizzontale minima con cui deve staccarsi per superarle? Con quale velocità verticale arriva in acqua?

27. ●●● Da un balcone alto 12 m una ragazza lancia una palla verso l'alto, a 10 m/s con un angolo di 30° sopra l'orizzontale. Trascurando l'aria, calcola a) l'altezza massima rispetto al suolo; b) il tempo di volo (suggerimento: dividi il moto verticale in salita e caduta da ferma dal punto più alto); c) la distanza orizzontale dal piede del palazzo a cui la palla tocca terra.

28. ●●● Un calciatore riesce a calciare il pallone al massimo a 17 m/s. Trascurando l'aria e considerando il campo orizzontale, a) può mandare il pallone al volo, cioè senza che tocchi terra prima, a un compagno che si trova a 30 m? b) Qual è la velocità minima necessaria per una gittata di 30 m, e con quale angolo va calciato il pallone?

29. ●●● Collegati al primo volume (*Fisica 1*, capitolo 16). Una palla viene lanciata a 15 m/s una volta in verticale e una volta con un angolo di 60° sopra l'orizzontale. a) Calcola l'altezza massima nel lancio verticale. b) Calcola la componente verticale della velocità iniziale e l'altezza massima nel lancio obliquo. c) Mostra che il rapporto fra le due altezze è $(\text{sen } 60°)^2$ e spiega perché, usando il principio di indipendenza dei moti.

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Un compagno risolve così: «Un pallone è calciato a 20 m/s con un angolo di 30°. Nel punto più alto la velocità è zero, quindi l'altezza massima è $h = v_0^2/(2g) = 400/19{,}6 \text{ m} \approx 20 \text{ m}$». Individua gli errori e correggi il risultato.

31. ●● Stima. Un tuo amico afferma di riuscire a lanciare una palla da tennis, nel migliore dei casi, a 30 m di distanza su un prato. Stima, con il modello del proiettile, la velocità minima con cui la lancia, in m/s e in km/h. Il valore reale sarà maggiore o minore della stima?

32. ●●● Progetta un esperimento. Hai a disposizione un lanciatore a molla giocattolo che spara palline sempre con la stessa velocità, un goniometro e un metro a nastro. Descrivi come verificheresti che la gittata è massima a 45° e che angoli complementari danno la stessa gittata. Quali condizioni devi rispettare perché il confronto con la teoria sia corretto? Quali errori sistematici prevedi?

PER APPROFONDIRE

- [GAL] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: la Giornata quarta, sul moto dei proiettili, con il teorema della semiparabola e il confronto fra tiri con inclinazioni diverse.
- [HEW] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics*: le pagine sul moto dei proiettili, con molti esempi tratti dallo sport e quasi senza formule.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sul moto in due dimensioni, con un'ampia raccolta di problemi sul moto del proiettile.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sul moto, per vedere come il principio di indipendenza dei moti porta alla parabola.

Glossario del capitolo

Altezza massima
Quota del punto più alto della traiettoria rispetto al punto di lancio: $h_{max} = (v_0 \text{ sen } \alpha)^2/(2g)$.

Angoli complementari
Due angoli la cui somma è 90°; senza aria e con arrivo alla stessa quota, lanci con la stessa velocità e angoli complementari hanno la stessa gittata.

Angolo di lancio
Angolo α che la velocità iniziale di un proiettile forma con l'orizzontale (detto anche angolo di alzo).

Equazione della traiettoria
Relazione fra le coordinate x e y dei punti della traiettoria, ottenuta eliminando il tempo dalle leggi orarie; per un proiettile è l'equazione di una parabola.

Funzione inversa della tangente
Il tasto $\tan^{-1}$ della calcolatrice (in modalità gradi) che, dato il valore della tangente, restituisce l'angolo acuto corrispondente.

Gittata
Distanza orizzontale fra il punto di lancio e il punto di arrivo di un proiettile, x_G.

Gittata massima
La gittata più grande ottenibile con una data velocità di lancio: v_0^2/g, per $\alpha = 45°$, senza aria e con arrivo alla stessa quota.

Lancio obliquo
Lancio di un proiettile con velocità iniziale inclinata dell'angolo α sull'orizzontale; le componenti iniziali sono $v_0 \cos \alpha$ e $v_0 \text{ sen } \alpha$.

Lancio orizzontale
Lancio di un proiettile con velocità iniziale orizzontale da un'altezza h: moto uniforme in orizzontale e caduta libera da ferma in verticale.

Moto del proiettile
Moto di un proiettile; senza aria è la composizione di un moto orizzontale uniforme e di un moto verticale uniformemente accelerato con accelerazione g verso il basso. È detto anche moto parabolico.

Proiettile
Corpo che, dopo aver ricevuto una velocità iniziale, si muove soggetto soltanto al proprio peso.

Tangente
Per un angolo acuto α di un triangolo rettangolo, il rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente: $\tan \alpha = \text{sen } \alpha/\cos \alpha$ (scritta anche tg α).

Tempo di salita
Tempo impiegato da un proiettile per raggiungere il punto più alto, in cui $v_y = 0$: $t_s = v_0 \text{ sen } \alpha/g$.

Tempo di volo
Intervallo di tempo fra il lancio di un proiettile e il suo arrivo al suolo; nel lancio orizzontale vale $\sqrt{(2h/g)}$.

Soluzioni

1. B. Nel modello l'unica forza è il peso: l'accelerazione è g verso il basso in ogni punto, anche nel punto più alto.

2. D. Lungo l'orizzontale non c'è accelerazione: il moto orizzontale è uniforme.

3. C. Il moto verticale è una caduta da ferma per entrambe: il tempo $\sqrt{(2h/g)}$ non dipende dalla velocità orizzontale (né dalla massa).

4. A. Nel punto più alto $v_y = 0$, mentre $v_x = v_0 \cos \alpha$ resta invariata.

5. D. $\tan \alpha$ = cateto opposto/cateto adiacente = $\text{sen } \alpha/\cos \alpha$.

6. C. Eliminando il tempo, y risulta una funzione di secondo grado di x: un arco di parabola, sia in salita sia in discesa.

7. B. La gittata dipende da $2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$, che è massimo (vale 1) per $\alpha = 45°$.

8. D. Angoli complementari ($25° + 65° = 90°$) danno la stessa gittata.

9. A. $t_v = \sqrt{(2h/g)}$: quadruplicando h il tempo si moltiplica per $\sqrt{4} = 2$.

10. F. Il tempo di volo $\sqrt{(2h/g)}$ dipende solo dall'altezza; v_0 cambia solo la gittata.

11. V. L'accelerazione è $(0; -g)$: nulla in orizzontale, costante in verticale.

12. F. Si annulla la componente verticale della velocità, non l'accelerazione, che vale sempre g verso il basso: è per questo che il corpo, subito dopo, scende.

13. V. Il tempo di volo $2v_0 \text{ sen } \alpha/g$ è maggiore per 70° ($\text{sen } 70° > \text{sen } 20°$); gli angoli sono complementari, quindi le gittate sono uguali.

14. F. La pallina è leggera rispetto alla sua superficie e veloce: la resistenza dell'aria la frena molto, e la traiettoria si accorcia e diventa asimmetrica.

15. $\tan \alpha$ = cateto opposto/cateto adiacente = 1,5 m / 6,0 m = 0,25; $\alpha = \tan^{-1} 0{,}25 \approx 14°$.

16. $v_{0x} = 25 \text{ m/s} \times \cos 37° \approx 25 \times 0{,}799 \text{ m/s} \approx 20 \text{ m/s}$; $v_{0y} = 25 \text{ m/s} \times \text{sen } 37° \approx 25 \times 0{,}602 \text{ m/s} \approx 15 \text{ m/s}$.

17. $t_v = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 0{,}90 \text{ m} / 9{,}8 \text{ m/s}^2)} \approx 0{,}43 \text{ s}$; $x_G = 1{,}5 \text{ m/s} \times 0{,}429 \text{ s} \approx 0{,}64 \text{ m}$.

18. $h = \frac{1}{2} g t^2 = 0{,}5 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times (1{,}5 \text{ s})^2 \approx 11 \text{ m}$; $x = 8{,}0 \text{ m/s} \times 1{,}5 \text{ s} = 12 \text{ m}$.

19. $|v_y| = \sqrt{(2gh)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 5{,}0)} \text{ m/s} \approx 9{,}9 \text{ m/s}$; $v_x = 8{,}0 \text{ m/s}$. $v = \sqrt{(8{,}0^2 + 9{,}9^2)} \text{ m/s} \approx 13 \text{ m/s}$ (12,7 m/s). $\tan \beta = 9{,}9/8{,}0 \approx 1{,}24$, $\beta = \tan^{-1} 1{,}24 \approx 51°$ sotto l'orizzontale.

20. $v_{0x} = 18 \cos 40° \text{ m/s} \approx 13{,}8 \text{ m/s}$; $v_{0y} = 18 \text{ sen } 40° \text{ m/s} \approx 11{,}6 \text{ m/s}$. $t_v = 2 \times 11{,}57 / 9{,}8 \text{ s} \approx 2{,}4 \text{ s}$; $h_{max} = (11{,}57 \text{ m/s})^2/(2 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2) \approx 6{,}8 \text{ m}$; $x_G = 13{,}79 \text{ m/s} \times 2{,}36 \text{ s} \approx 33 \text{ m}$ (32,6 m).

21. a) 30° e 60° (gittata ≈ 19,9 m). b) Quella a 75°, che arriva a circa 10,7 m (poco sotto la riga degli 11 m). c) Circa 8,6 m: la curva a 60° culmina poco sopra la riga degli 8 m. I valori letti sul grafico hanno un'incertezza di qualche decimo di metro.

22. g; nulla; $v_0 \cos \alpha$ (la stessa del lancio); metà.

23. Moto orizzontale uniforme a 50 m/s, moto verticale di caduta da ferma. a) $t_v = \sqrt{(2 \times 180 \text{ m} / 9{,}8 \text{ m/s}^2)} \approx 6{,}1 \text{ s}$. b) $d = 50 \text{ m/s} \times 6{,}06 \text{ s} \approx 3{,}0 \times 10^2 \text{ m}$. c) Esattamente sopra il pacco: rispetto all'aereo la velocità orizzontale del pacco è $\boldsymbol{v}_{\text{pacco,aereo}} = \boldsymbol{v}_{\text{pacco,suolo}} - \boldsymbol{v}_{\text{aereo,suolo}}$, con componente orizzontale $50 - 50 = 0$; il pilota lo vede cadere in verticale. d) $|v_y| = 9{,}8 \times 6{,}06 \text{ m/s} \approx 59 \text{ m/s}$; $v = \sqrt{(50^2 + 59{,}4^2)} \text{ m/s} \approx 78 \text{ m/s}$.

24. Tempo di caduta: $t_v = \sqrt{(2 \times 1{,}2 \text{ m} / 9{,}8 \text{ m/s}^2)} \approx 0{,}495 \text{ s}$. $v_0 = x_G/t_v = 1{,}8 \text{ m} / 0{,}495 \text{ s} \approx 3{,}6 \text{ m/s}$.

25. $v_{0x} = 24 \cos 40° \text{ m/s} \approx 18{,}4 \text{ m/s}$; $v_{0y} = 24 \text{ sen } 40° \text{ m/s} \approx 15{,}4 \text{ m/s}$. a) $t_v = 2 \times 15{,}43/9{,}8 \text{ s} \approx 3{,}1 \text{ s}$. b) $h_{max} = 15{,}43^2/19{,}6 \text{ m} \approx 12 \text{ m}$. c) $x_G = 18{,}39 \text{ m/s} \times 3{,}15 \text{ s} \approx 58 \text{ m}$. d) Più vicino: la resistenza dell'aria, importante

per un pallone a questa velocità, riduce la componente orizzontale della velocità durante il volo.

26. Tempo di caduta: $\sqrt{(2 \times 28\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 2{,}39$ s. Per superare le rocce: $v_0 \geq 6{,}0\ \text{m} / 2{,}39\ \text{s} \approx 2{,}5$ m/s. Velocità verticale all'arrivo: $9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2{,}39\ \text{s} \approx 23$ m/s, indipendente da v_0.

27. $v_{0x} = 10 \cos 30°$ m/s $\approx 8{,}66$ m/s; $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 30°$ m/s $= 5{,}0$ m/s. a) Salita: $t_s = 5{,}0/9{,}8$ s $\approx 0{,}510$ s, dislivello $5{,}0^2/19{,}6$ m $\approx 1{,}28$ m; $H = 12$ m $+ 1{,}28$ m ≈ 13 m (13,3 m). b) Caduta da ferma da 13,28 m: $\sqrt{(2 \times 13{,}28/9{,}8)}$ s $\approx 1{,}65$ s; $t_v = 0{,}510$ s $+ 1{,}65$ s $\approx 2{,}2$ s (2,16 s). c) $x = 8{,}66$ m/s $\times 2{,}16$ s ≈ 19 m.

28. a) La gittata massima, a 45°, è $v_0^2/g = (17\ \text{m/s})^2/9{,}8\ \text{m/s}^2 \approx 29{,}5$ m < 30 m: no, nemmeno nel caso migliore (e con l'aria arriverebbe ancora meno lontano). b) $x_G = v_0^2/g$ con $\alpha = 45°$: $v_0 = \sqrt{(g\, x_G)} = \sqrt{(9{,}8 \times 30)}$ m/s $\approx 17{,}1$ m/s, a 45°.

29. a) Lancio verticale: $h_{max} = v_0^2/(2g) = 225/19{,}6$ m $\approx 11{,}5$ m. b) $v_{0y} = 15 \operatorname{sen} 60°$ m/s $\approx 13{,}0$ m/s; $h_{max} = 13{,}0^2/19{,}6$ m $\approx 8{,}6$ m. c) $8{,}61/11{,}48 = 0{,}750 = (0{,}866)^2 = (\operatorname{sen} 60°)^2$. Il moto verticale del lancio obliquo è un lancio verticale con velocità iniziale $v_0 \operatorname{sen} \alpha$: la componente orizzontale non influisce sulla salita, e l'altezza, proporzionale al quadrato della velocità verticale, si riduce del fattore $(\operatorname{sen} \alpha)^2$.

30. Errori: nel punto più alto non è nulla la velocità, ma solo la sua componente verticale (resta $v_0 \cos 30° \approx 17$ m/s); e nella formula va usata la componente verticale iniziale $v_0 \operatorname{sen} 30° = 10$ m/s, non il modulo intero. Corretto: $h_{max} = (10\ \text{m/s})^2/(19{,}6\ \text{m/s}^2) \approx 5{,}1$ m, un quarto del valore sbagliato.

31. Traccia di risposta. Con il lancio migliore (45°, arrivo circa alla stessa quota) $x_G = v_0^2/g$, quindi $v_0 \approx \sqrt{(9{,}8 \times 30)}$ m/s ≈ 17 m/s ≈ 60 km/h. Nella realtà l'aria riduce la gittata, quindi per arrivare a 30 m serve una velocità un po' maggiore: la stima è un valore minimo. (Il lancio parte dall'altezza della spalla, che invece aiuta un poco: è un effetto più piccolo per un lancio di 30 m.)

32. Traccia di risposta. Fissa il lanciatore a terra (o fai atterrare la pallina su un piano alla stessa quota della bocca), regola l'angolo con il goniometro da 15° a 75° a passi di 15° (e intorno a 45°, per esempio 40° e 50°); per ogni angolo fai almeno cinque lanci, misura la gittata (carta carbone o sabbia) e calcola media e semidispersione. Riporta la gittata in funzione dell'angolo con le barre d'incertezza: il massimo deve cadere a 45°, e le coppie 15°–75°, 30°–60° devono dare gittate compatibili. Confronta anche con il rapporto previsto $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ (per esempio, la gittata a 30° deve essere 0,866 volte quella a 45°). Condizioni: stessa velocità a ogni lancio, partenza e arrivo alla stessa quota, pallina pesante e lanci lenti, per poter trascurare l'aria. Errori sistematici: la bocca del lanciatore sopra il livello di arrivo (sposta il massimo sotto i 45°), la velocità di uscita che può dipendere dall'angolo (la pallina sale lungo la canna), la resistenza dell'aria per palline leggere, l'errore nella lettura dell'angolo.