CAPITOLO

16

Il moto rettilineo uniformemente accelerato

Per capire un moto non basta sapere quanto è veloce: bisogna sapere quanto in fretta cambia la sua velocità.

OBIETTIVI

1. Definire l'accelerazione media e istantanea, con il segno, e distinguere fra accelerazione negativa e rallentamento.
2. Leggere un grafico velocità-tempo: la pendenza è l'accelerazione, l'area è lo spostamento.
3. Ricavare e usare le leggi del moto uniformemente accelerato e la relazione fra velocità e spostamento che non contiene il tempo.
4. Descrivere la caduta libera e il lancio verso l'alto, scegliendo l'asse e i segni in modo coerente.
5. Calcolare la distanza di arresto di un veicolo come somma dello spazio di reazione e dello spazio di frenata.

INDICE DEL CAPITOLO

16.1 L'accelerazione 2
16.2 Il grafico velocità-tempo 5
16.3 Il moto uniformemente accelerato 8
16.4 La caduta libera 14
16.5 Il lancio verso l'alto 17
16.6 Frenare in tempo: la distanza di arresto 19

Fisica 1 · Parte V · Il movimento · versione 1.0
Capitolo 16: Il moto rettilineo uniformemente accelerato · pagine 427–450 del volume completo · estratto per lo studio

Quando un semaforo diventa verde, l'auto ferma in prima fila parte, prende velocità e in pochi secondi viaggia a 50 km/h. Più avanti un ciclista vede un ostacolo e frena fino a fermarsi. Un sasso lasciato cadere da un ponte cade sempre più veloce finché non tocca l'acqua. Nessuno di questi moti è uniforme: in tutti la velocità *cambia* nel tempo.

Nel capitolo 15 abbiamo imparato a descrivere un moto con la posizione s, lo spostamento Δs e la velocità v, e abbiamo studiato il caso più semplice, il moto rettilineo uniforme, in cui la velocità resta costante. Ora facciamo il passo successivo: introduciamo una nuova grandezza, l'accelerazione, che misura quanto rapidamente cambia la velocità, e studiamo il moto in cui l'accelerazione è costante. È il moto di un corpo che cade, di una biglia che rotola lungo una guida inclinata, di un'auto che frena con regolarità. Con le stesse idee capiremo finalmente perché nel capitolo 7 abbiamo chiamato g «accelerazione di gravità», e perché, come anticipato nel capitolo 1, i corpi pesanti non cadono più in fretta di quelli leggeri.

16.1 L'accelerazione

16.1.1 Quanto rapidamente cambia la velocità

Due automobili partono da ferme e raggiungono entrambe 100 km/h: la prima in 8 s, la seconda in 12 s. Alla fine hanno la stessa velocità, ma la prima l'ha cambiata più in fretta. Per confrontare situazioni come questa serve una grandezza che metta in rapporto la variazione di velocità con il tempo impiegato a produrla.

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una retta su cui abbiamo fissato un asse orientato. All'istante t_1 la sua velocità è v_1, all'istante t_2 è v_2. Si chiama **accelerazione media** nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ il rapporto fra la variazione di velocità $\Delta v = v_2 - v_1$ e l'intervallo di tempo:

$$a_{\text{m}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

La definizione ha la stessa struttura di quella della velocità media $v_{\text{m}} = \Delta s / \Delta t$ del capitolo 15: là si divideva una variazione di posizione per un tempo, qui si divide una variazione di velocità per un tempo. L'accelerazione è quindi la «velocità con cui cambia la velocità».

L'unità di misura nel SI si ottiene dividendo l'unità della velocità per quella del tempo: (m/s)/s = **m/s²**, che si legge «**metri al secondo quadrato**». Il significato è concreto: un'accelerazione di 3 m/s² vuol dire che la velocità aumenta di 3 m/s in ogni secondo. Per le auto si usa spesso un'unità mista più intuitiva, (km/h)/s; per tornare al SI basta ricordare che 1 m/s = 3,6 km/h.

Torniamo alle due automobili. In unità SI, 100 km/h = 100/3,6 m/s ≈ 27,8 m/s. Per la prima a_m = 27,8 m/s / 8 s ≈ 3,5 m/s^2, per la seconda a_m = 27,8 m/s / 12 s ≈ 2,3 m/s^2: la prima accelera di più. La Tabella 16.1 raccoglie alcuni esempi per farsi un'idea degli ordini di grandezza.

Tabella 16.1 Accelerazioni medie in alcune situazioni. I primi tre valori sono calcolati con dati indicativi scelti come esempio; gli ultimi due sono valori di riferimento.

Situazione	Dati	$\lvert a_m \rvert$ (m/s^2)
treno che parte dalla stazione	da 0 a 72 km/h in 50 s	0,40
auto che accelera	da 0 a 100 km/h in 10 s	2,8
auto in frenata decisa su asfalto asciutto	da 90 km/h a 0 in 3,6 s	6,9
corpo in caduta libera sulla Luna	valore di riferimento	1,62
corpo in caduta libera sulla Terra	valore di riferimento	9,8

16.1.2 Il segno dell'accelerazione

Nel moto rettilineo la velocità ha un segno, che indica il verso del moto rispetto all'asse scelto (capitolo 15). Anche l'accelerazione, che nasce da una differenza di velocità, ha un segno: è una grandezza vettoriale che, nel moto lungo una retta, si rappresenta con un numero positivo o negativo. Il segno di a dice in quale verso *cambia* la velocità, non in quale verso si muove il corpo.

Fissiamo un asse orientato verso destra e vediamo quattro casi.

- Un'auto va verso destra e passa da 10 m/s a 16 m/s in 2,0 s: a_m = (16 − 10) m/s / 2,0 s = +3,0 m/s^2. Velocità e accelerazione sono concordi: l'auto va più veloce.
- La stessa auto, sempre verso destra, frena da 16 m/s a 4 m/s in 3,0 s: a_m = (4 − 16) m/s / 3,0 s = −4,0 m/s^2. Velocità e accelerazione sono discordi: l'auto rallenta.
- Un'auto va verso sinistra e frena da −15 m/s a −5 m/s in 4,0 s: a_m = (−5 − (−15)) m/s / 4,0 s = +2,5 m/s^2. L'accelerazione è **positiva**, eppure l'auto rallenta: velocità e accelerazione sono di nuovo discordi.
- Un'auto va verso sinistra e passa da −5 m/s a −15 m/s: Δv = −10 m/s, l'accelerazione è negativa e l'auto va più veloce verso sinistra.

La regola generale è semplice: **se velocità e accelerazione hanno lo stesso segno, il modulo della velocità aumenta; se hanno segni opposti, diminuisce**. Nel linguaggio comune si chiama **decelerazione** un moto in cui la velocità diminuisce in modulo, cioè il corpo rallenta. In fisica conviene usare questa parola con prudenza, perché rallentare non significa avere $a < 0$.

ERRORE FREQUENTE

«Accelerazione negativa» **non** vuol dire «rallentamento». Il segno di a dipende dall'asse che abbiamo scelto: un corpo che va nel verso negativo e frena ha accelerazione positiva. Per sapere se un corpo rallenta bisogna confrontare i segni di v e di a: rallenta quando sono opposti. Allo stesso modo, «accelerare» in fisica non significa soltanto «andare più veloce»: c'è accelerazione ogni volta che la velocità cambia, in aumento o in diminuzione.

16.1.3 L'accelerazione istantanea

L'accelerazione media descrive l'intero intervallo, ma non dice che cosa succede istante per istante. Un'auto può accelerare molto all'inizio e poco alla fine, e avere la stessa accelerazione media di un'auto che accelera sempre allo stesso modo. Come abbiamo fatto nel capitolo 15 per la velocità, possiamo calcolare l'accelerazione media su intervalli sempre più brevi attorno a un istante: il valore a cui si avvicinano questi rapporti è l'**accelerazione istantanea** a in quell'istante. In pratica, è l'accelerazione misurata su un intervallo così breve che, al suo interno, la variazione di velocità avviene in modo regolare.

Il tachimetro di un'auto indica la velocità istantanea; non esiste un comune «accelerometro» sul cruscotto, ma un accelerometro è presente in ogni smartphone: è il sensore che capisce come teniamo il telefono e ruota lo schermo. Molte applicazioni gratuite permettono di leggerne i valori in $\mathrm{m/s^2}$, e sono utili anche in laboratorio.

ESEMPIO SVOLTO

Un treno parte e si ferma

Problema. Un treno regionale parte da fermo e in 50 s raggiunge la velocità di 72 km/h. Più tardi, mentre viaggia a 72 km/h, frena e si ferma in 40 s. Calcola l'accelerazione media nelle due fasi, scegliendo l'asse nel verso del moto.

Soluzione. Convertiamo la velocità in m/s: 72 km/h / 3,6 = 20 m/s. Asse orientato nel verso del moto, quindi $v > 0$.

Partenza: $a_\mathrm{m} = (20\ \mathrm{m/s} - 0) / 50\ \mathrm{s} = +0{,}40\ \mathrm{m/s^2}$. In ogni secondo la velocità cresce in media di 0,40 m/s, cioè di 1,44 km/h.

Frenata: $a_\mathrm{m} = (0 - 20\ \mathrm{m/s}) / 40\ \mathrm{s} = -0{,}50\ \mathrm{m/s^2}$. Il segno meno indica che l'accelerazione ha verso opposto alla velocità: il treno rallenta.

Controllo. Il modulo dell'accelerazione in frenata è un po' maggiore che in partenza, perché il treno impiega meno tempo a perdere la stessa velocità. Gli ordini di grandezza sono coerenti con la Tabella 16.1.

16.2 Il grafico velocità-tempo

16.2.1 La pendenza è l'accelerazione

Nel capitolo 15 abbiamo usato il **grafico velocità-tempo** (o grafico v–t) del moto uniforme: una retta orizzontale. Quando la velocità cambia, il grafico non è più orizzontale. Osserviamo la Figura 16.1, che riporta tre moti diversi.

- Nel moto A la velocità parte da 2,0 m/s e cresce in modo regolare: ogni secondo aumenta di 1,5 m/s. Il grafico è una retta che sale.
- Nel moto B la velocità parte da 12 m/s e diminuisce di 2,0 m/s ogni secondo, fino ad annullarsi a $t = 6{,}0$ s. Il grafico è una retta che scende.
- Nel moto C la velocità resta 8,0 m/s: è un moto uniforme e il grafico è orizzontale.

Prendiamo due punti sulla retta A, per esempio a $t = 1{,}0$ s e $t = 5{,}0$ s. Fra questi istanti la velocità passa da 3,5 m/s a 9,5 m/s: $\Delta v = 6{,}0$ m/s in $\Delta t = 4{,}0$ s. Il rapporto $\Delta v/\Delta t = 1{,}5$ m/s^2 è, per definizione, l'accelerazione media; dal punto di vista geometrico è la **pendenza** della retta, la stessa idea di pendenza del capitolo 5. Vale quindi una regola generale:

nel grafico v–t, la pendenza è l'accelerazione

Se il grafico è una retta, la pendenza è la stessa ovunque e l'accelerazione è costante; la retta B ha pendenza $-2{,}0$ m/s^2, la retta C pendenza zero. Se il grafico è una curva, l'accelerazione cambia, e l'accelerazione istantanea in un punto è la pendenza della retta tangente alla curva in quel punto: è esattamente lo stesso ragionamento con cui, nel capitolo 15, abbiamo ricavato la velocità istantanea dal grafico s–t.

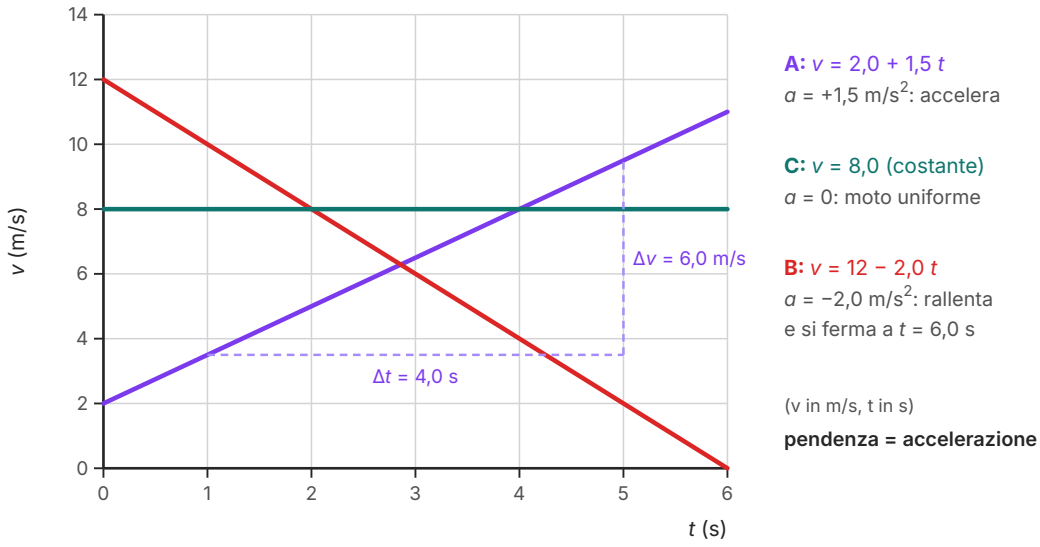


Figura 16.1 Grafici velocità-tempo di tre moti rettilinei, calcolati dalle leggi indicate. A: la velocità cresce di 1,5 m/s ogni secondo; il triangolo tratteggiato (Δv = 6,0 m/s in Δt = 4,0 s) mostra che la pendenza è 1,5 m/s^2. B: la velocità diminuisce di 2,0 m/s ogni secondo e si annulla a t = 6,0 s. C: moto uniforme, pendenza zero.

16.2.2 L'area è lo spostamento

Nel capitolo 15 abbiamo visto che, nel moto uniforme, lo spostamento $\Delta s = v\,\Delta t$ è l'area del rettangolo compreso fra il grafico v–t e l'asse dei tempi. La proprietà resta vera anche quando la velocità cambia. Possiamo convincercene così: dividiamo l'intervallo di tempo in tanti intervalli brevissimi; in ciascuno la velocità è quasi costante, e lo spostamento corrispondente è l'area di un rettangolino sottile. Sommando tutti i rettangolini si ottiene l'area sotto il grafico, e il risultato diventa sempre più preciso quanto più stretti sono i rettangoli.

Quando la velocità è negativa, il grafico sta sotto l'asse dei tempi e l'area va contata con il segno meno: lo spostamento è nel verso negativo. L'area misura lo *spostamento*, non la distanza percorsa; le due grandezze coincidono solo se il corpo non inverte mai il verso del moto.

DA RICORDARE

In un grafico velocità-tempo si leggono due informazioni diverse, una «locale» e una «globale»:

- la **pendenza** in un punto è l'accelerazione in quell'istante;
- l'**area** fra il grafico e l'asse dei tempi in un intervallo è lo spostamento in quell'intervallo (con il segno).

Le unità tornano: la pendenza ha le unità di (m/s)/s = m/s^2, l'area quelle di (m/s) · s = m.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico di uno scooter

Problema. Il grafico della Figura 16.2 descrive il moto di uno scooter lungo un viale rettilineo, con l'asse orientato nel verso del moto. Calcola a) l'accelerazione in ciascuno dei tre tratti; b) lo spostamento totale; c) la velocità media sull'intero percorso.

Soluzione. a) Tratto 1 (da 0 a 4 s): la velocità passa da 0 a 10 m/s, a = 10 m/s / 4 s = 2,5 m/s^2. Tratto 2 (da 4 s a 10 s): velocità costante, a = 0. Tratto 3 (da 10 s a 15 s): la velocità passa da 10 m/s a 0, a = −10 m/s / 5 s = −2,0 m/s^2.

b) Calcoliamo le aree. Tratto 1, triangolo: ½ × 4 s × 10 m/s = 20 m. Tratto 2, rettangolo: 6 s × 10 m/s = 60 m. Tratto 3, triangolo: ½ × 5 s × 10 m/s = 25 m. Spostamento totale: Δs = 20 m + 60 m + 25 m = 105 m.

c) $v_m = \Delta s/\Delta t$ = 105 m / 15 s = 7,0 m/s.

Controllo. La velocità media è minore della velocità massima (10 m/s), come deve essere, perché per più di metà del tempo (9 s su 15 s, mentre accelerava e mentre frenava) lo scooter ha viaggiato più piano. Non è la media aritmetica delle velocità dei tre tratti: la velocità media si calcola sempre come spostamento totale diviso tempo totale.

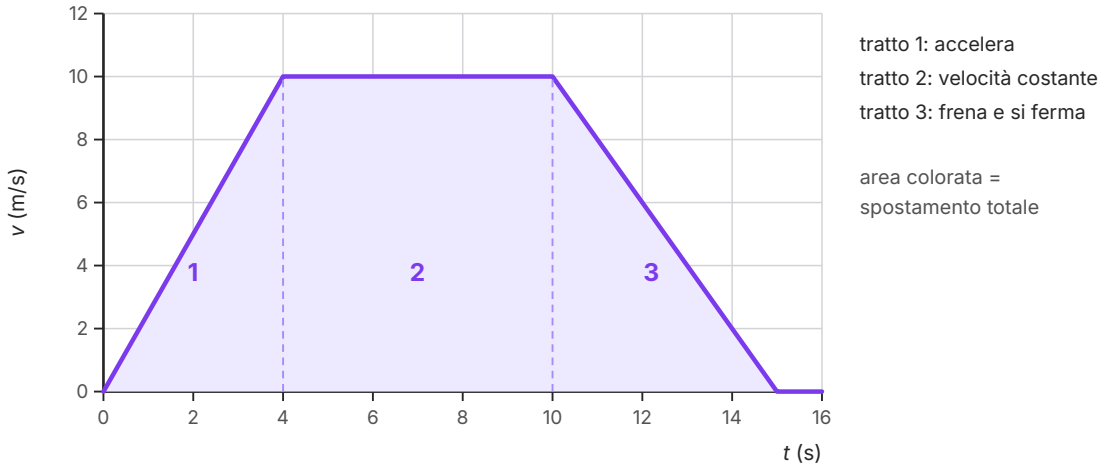


Figura 16.2 Grafico velocità-tempo di uno scooter che parte, viaggia a velocità costante e si ferma (Esempio svolto del paragrafo 16.2). L'area colorata, somma di due triangoli e di un rettangolo, è lo spostamento totale.

16.3 Il moto uniformemente accelerato

16.3.1 Definizione e legge della velocità

Un punto materiale si muove di **moto rettilineo uniformemente accelerato** (MRUA) quando percorre una traiettoria rettilinea con accelerazione costante. In questo moto la velocità cambia della stessa quantità in intervalli di tempo uguali, e l'accelerazione media su qualunque intervallo coincide con l'accelerazione istantanea a. Il grafico v–t è una retta, come le rette A e B della Figura 16.1.

Facciamo partire il cronometro ($t = 0$) nell'istante in cui il corpo ha la **velocità iniziale** v_0. In un istante successivo t la velocità è v; per la definizione di accelerazione, $a = (v - v_0)/(t - 0)$. Moltiplicando per t e isolando v si ottiene la **legge della velocità** del MRUA:

$$v = v_0 + a\,t$$

In parole: la velocità all'istante t è quella iniziale più l'aumento $a\,t$ accumulato in quel tempo. Dal punto di vista matematico è una dipendenza lineare $y = m\,x + q$ (capitolo 5), con pendenza a e intercetta v_0. Per la retta A della Figura 16.1, $v = 2{,}0\ \text{m/s} + (1{,}5\ \text{m/s}^2)\,t$; per la retta B, $v = 12\ \text{m/s} - (2{,}0\ \text{m/s}^2)\,t$.

16.3.2 La legge oraria

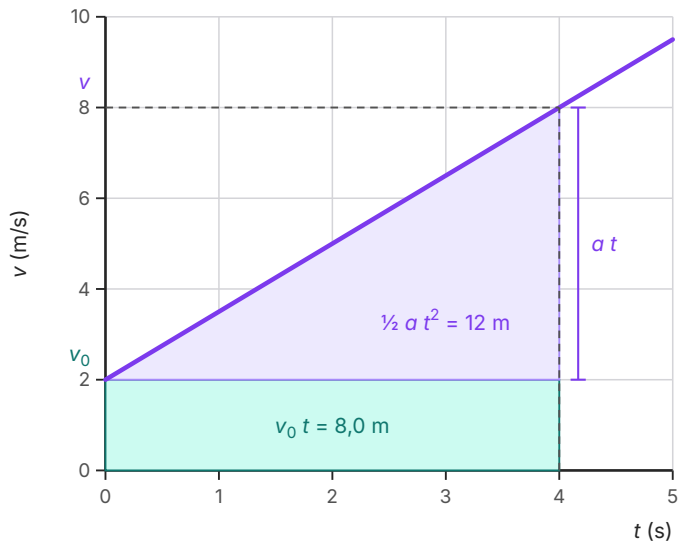
Per conoscere la posizione in ogni istante usiamo la proprietà dell'area. Nella Figura 16.3 il grafico v–t fra 0 e t delimita un trapezio, che possiamo dividere in due parti:

- un **rettangolo** di base t e altezza v_0, di area $v_0\,t$: è lo spostamento che il corpo avrebbe se continuasse a muoversi con la velocità iniziale;
- un **triangolo** di base t e altezza $v - v_0 = a\,t$, di area $\frac{1}{2} \cdot t \cdot a\,t = \frac{1}{2}\,a\,t^2$: è lo spostamento «in più» dovuto all'accelerazione.

Lo spostamento fino all'istante t è la somma delle due aree: $\Delta s = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$. Poiché $\Delta s = s - s_0$, dove s_0 è la posizione all'istante zero, otteniamo la **legge oraria** del moto uniformemente accelerato:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Con i dati della Figura 16.3 (v_0 = 2,0 m/s, a = 1,5 m/s^2, t = 4,0 s) lo spostamento vale 2,0 m/s × 4,0 s + ½ × 1,5 m/s^2 × (4,0 s)^2 = 8,0 m + 12 m = 20 m. Controlliamo le dimensioni, come nel capitolo 2: (m/s) · s = m e (m/s^2) · s^2 = m. Ogni termine è una lunghezza: la formula è omogenea.



Dati dell'esempio

v_0 = 2,0 m/s, a = 1,5 m/s^2
t = 4,0 s → v = 8,0 m/s

area = Δs

rettangolo + triangolo

$\Delta s = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$

= 8,0 m + 12 m = 20 m

oppure, come trapezio:

$\Delta s = \frac{1}{2}\,(v_0 + v)\,t$

= ½ (2,0 + 8,0) m/s × 4,0 s = 20 m

Figura 16.3 Lo spostamento nel moto uniformemente accelerato è l'area sotto il grafico v–t. Con v_0 = 2,0 m/s, a = 1,5 m/s^2 e t = 4,0 s il trapezio si divide in un rettangolo ($v_0 t$ = 8,0 m) e in un triangolo di altezza $a\,t$ (½$a\,t^2$ = 12 m): in tutto 20 m.

Il trapezio suggerisce anche un'altra strada. La sua area è (base maggiore + base minore) × altezza / 2, cioè $\Delta s = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$. Confrontando con $\Delta s = v_m\,t$, si vede che **nel MRUA la velocità media è la media aritmetica fra la velocità iniziale e quella finale**:

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} \quad \text{(solo se } a \text{ è costante)}$$

Attenzione alla condizione: per lo scooter della Figura 16.2, che non ha accelerazione costante sull'intero percorso, questa formula non vale.

16.3.3 I grafici del moto

La legge oraria contiene il quadrato del tempo, quindi il grafico spazio-tempo non è una retta: è un arco di **parabola** (Figura 16.4a). Se l'accelerazione è positiva la parabola curva verso l'alto, sempre più ripida: il corpo percorre in ogni secondo una distanza maggiore del secondo precedente. Se l'accelerazione è negativa la parabola curva verso il basso.

Ricordiamo dal capitolo 15 che la pendenza della tangente al grafico s–t è la velocità istantanea. Nella Figura 16.4a la tangente a $t = 1{,}0$ s ha pendenza 3,5 m/s, quella a $t = 4{,}0$ s ha pendenza 8,0 m/s: proprio i valori dati dalla legge della velocità, $2{,}0 + 1{,}5 \times 1{,}0 = 3{,}5$ e $2{,}0 + 1{,}5 \times 4{,}0 = 8{,}0$ (in m/s). Le tre rappresentazioni sono collegate: la parabola s–t diventa più ripida perché la velocità cresce (retta v–t, Figura 16.4b), e la velocità cresce in modo regolare perché l'accelerazione è costante (retta orizzontale nel grafico a–t, Figura 16.4c).

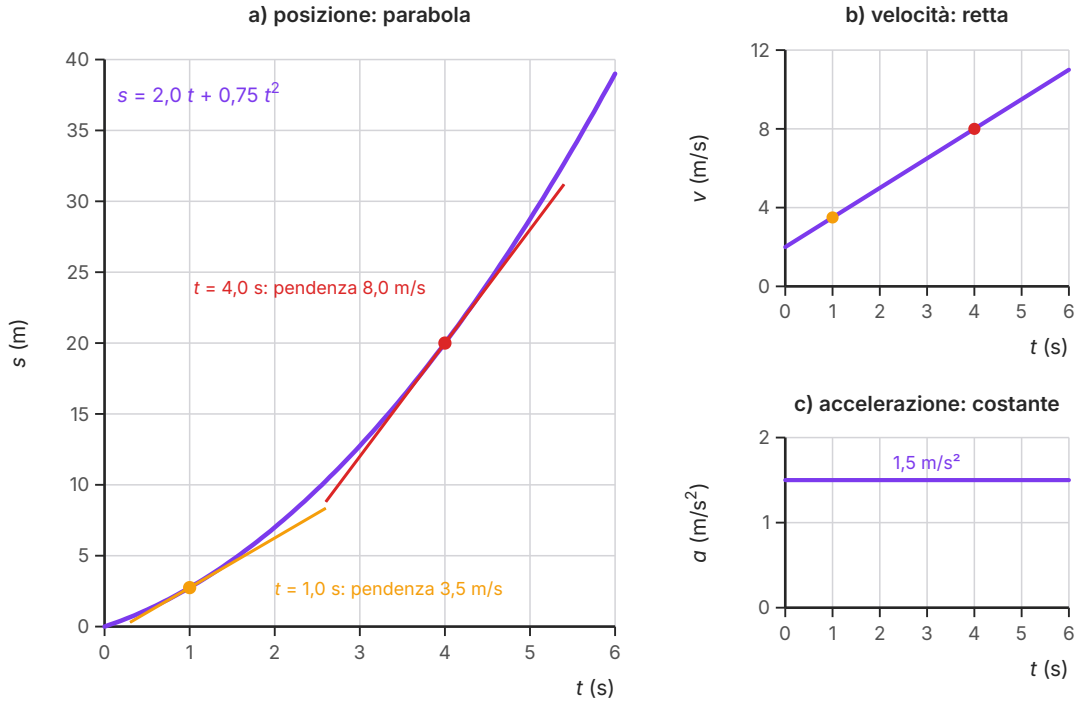


Figura 16.4 Lo stesso moto uniformemente accelerato ($s_0 = 0$, $v_0 = 2{,}0$ m/s, $a = 1{,}5$ m/s^2) in tre grafici calcolati con le leggi del moto. a) La posizione è un arco di parabola; le tangenti a $t = 1{,}0$ s e $t = 4{,}0$ s hanno pendenza 3,5 m/s e 8,0 m/s, uguale alla velocità in quegli istanti (punti dello stesso colore in b). b) La velocità è una retta di pendenza 1,5 m/s^2. c) L'accelerazione è costante.

16.3.4 Una relazione senza il tempo

In molti problemi il tempo non è dato e non interessa: si conoscono le velocità e l'accelerazione, e si cerca lo spostamento (per esempio, la strada necessaria per fermarsi). Possiamo eliminare t dalle due leggi. Dalla legge della velocità ricaviamo $t = (v - v_0)/a$; sostituiamo nella formula del trapezio:

$$\Delta s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}$$

dove abbiamo usato il prodotto notevole $(v + v_0)(v - v_0) = v^2 - {v_0}^2$. Moltiplicando per $2a$ otteniamo la **relazione indipendente dal tempo**:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a\,\Delta s$$

IN SINTESI

Le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato

$a_m = \Delta v / \Delta t$ — l'accelerazione media è la variazione di velocità divisa per il tempo in cui avviene; si misura in m/s^2.

$v = v_0 + a\,t$ — con accelerazione costante, la velocità cambia della stessa quantità in tempi uguali.

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$ — la posizione è quella iniziale, più lo spostamento «a velocità iniziale», più il contributo dell'accelerazione, che cresce con il quadrato del tempo.

$v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta s$ — lega velocità e spostamento quando il tempo non serve.

$v_m = (v_0 + v)/2$ — nel solo MRUA, la velocità media è la media fra velocità iniziale e finale.

Partenza da ferma ($v_0 = 0$, $s_0 = 0$): $v = a\,t$, $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$, $v^2 = 2a\,s$.

ESEMPIO SVOLTO

Un sorpasso e una frenata

Problema. Un'auto viaggia a 54 km/h su una strada rettilinea. Per sorpassare accelera in modo uniforme con $a = 1{,}2\ m/s^2$ per 5,0 s. a) Quale velocità raggiunge? b) Quanta strada percorre durante l'accelerazione? c) Subito dopo frena con accelerazione costante di modulo $6{,}0\ m/s^2$ fino a fermarsi: quanta strada percorre in frenata?

Soluzione. Asse orientato nel verso del moto, origine nel punto in cui l'auto comincia ad accelerare. $v_0 = 54\ km/h\ /\ 3{,}6 = 15\ m/s$.

a) $v = v_0 + a\,t = 15\ m/s + 1{,}2\ m/s^2 \times 5{,}0\ s = 21\ m/s$ (circa 76 km/h).

b) $\Delta s = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 15\ m/s \times 5{,}0\ s + \frac{1}{2} \times 1{,}2\ m/s^2 \times (5{,}0\ s)^2 = 75\ m + 15\ m = 90\ m$. Controllo con la velocità media: $(15 + 21)/2\ m/s = 18\ m/s$; $18\ m/s \times 5{,}0\ s = 90\ m$.

c) In frenata la velocità è positiva e l'auto rallenta, quindi $a = -6{,}0\ m/s^2$; la velocità finale è zero. Dalla relazione indipendente dal tempo: $0 = v_0^2 + 2a\,\Delta s$, quindi $\Delta s = -v_0^2/(2a) = -(21\ m/s)^2\ /\ (2 \times (-6{,}0\ m/s^2)) = 441/12\ m \approx 37\ m$.

Controllo. Il risultato è positivo, come deve essere: l'auto continua ad avanzare mentre frena. Il segno di a va inserito nella formula; dimenticarlo darebbe uno spostamento negativo, cioè assurdo.

16.3.5 Partire da fermi: la regola dei numeri dispari

Il caso più semplice è un corpo che parte da fermo dall'origine: $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$. La posizione è direttamente proporzionale al quadrato del tempo, cioè in proporzionalità quadratica con t: se il tempo raddoppia, lo spazio percorso quadruplica; se triplica, diventa nove volte maggiore.

Questo è esattamente ciò che avevamo trovato nel capitolo 5 per la biglia lasciata scendere lungo una guida inclinata: il rapporto s/t^2 era costante e valeva 0,20 m/s^2. Ora sappiamo che cosa significa quella costante: è $\frac{1}{2}\,a$. La biglia si muoveva quindi di moto uniformemente accelerato con $a = 2 \times 0{,}20$ m/s^2 = 0,40 m/s^2.

Immaginiamo che la guida sia abbastanza lunga e guardiamo la biglia a intervalli di 1,0 s, come in una foto stroboscopica (Figura 16.5). Le posizioni sono 0; 0,20 m; 0,80 m; 1,80 m; 3,20 m, proporzionali a 0, 1, 4, 9, 16. Le distanze percorse in ciascun secondo sono le differenze: 0,20 m; 0,60 m; 1,00 m; 1,40 m, che stanno fra loro come **1 : 3 : 5 : 7**. In un moto uniformemente accelerato che parte da fermo, le distanze percorse in intervalli di tempo uguali e successivi stanno fra loro come i numeri dispari. È la **regola dei numeri dispari**, enunciata da Galileo nei *Discorsi* del 1638. Il motivo è aritmetico: le differenze fra quadrati consecutivi sono 1 − 0 = 1, 4 − 1 = 3, 9 − 4 = 5, 16 − 9 = 7, cioè proprio i numeri dispari.

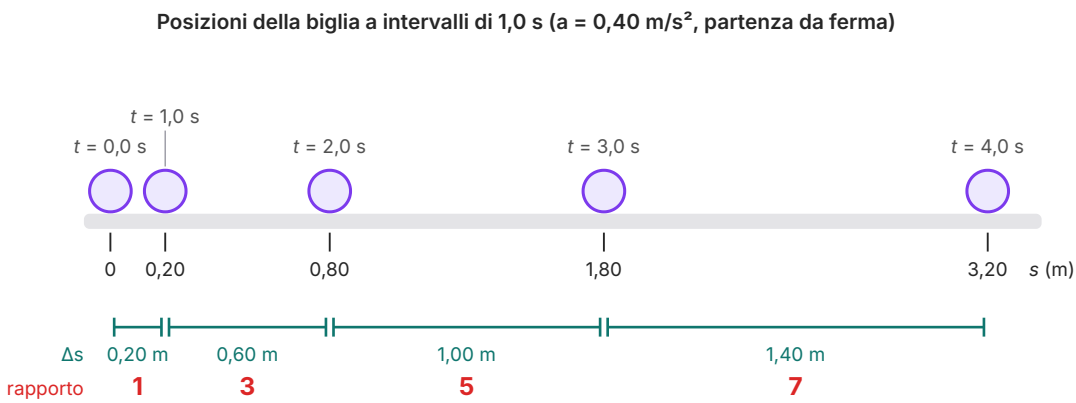


Figura 16.5 Schema stroboscopico, in scala, della biglia del capitolo 5 che parte da ferma con a = 0,40 m/s^2: posizioni calcolate con $s = \frac{1}{2}a\,t^2$ ogni 1,0 s. Le distanze percorse nei secondi successivi (0,20 m, 0,60 m, 1,00 m, 1,40 m) stanno come 1 : 3 : 5 : 7.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la biglia sul piano inclinato

Materiali. Una guida rettilinea lunga circa 1,5 m (un profilato di alluminio a U o un'asta con una scanalatura), alcuni libri per inclinarla di pochi gradi, una biglia d'acciaio, un metro a nastro (sensibilità 1 mm), un cronometro (sensibilità 0,01 s) oppure lo smartphone che riprende la scena con un righello sullo sfondo.

Procedimento. Segna sulla guida le distanze 0,20 m, 0,40 m, … fino a 1,20 m dal punto di partenza. Lascia andare la biglia da ferma, senza spingerla, e misura il tempo che impiega a raggiungere ciascun segno; ripeti tre volte per ogni distanza e calcola il tempo medio. Poi completa la tabella con t^2 e con il rapporto s/t^2.

Tabella 16.2 Dati raccolti da un gruppo di studenti: tempi medi su tre prove.

s (m)	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000	1,200
t (s)	0,95	1,34	1,63	1,90	2,12	2,31
t^2 (s^2)	0,90	1,80	2,66	3,61	4,49	5,34
s/t^2 (m/s^2)	0,222	0,223	0,226	0,222	0,222	0,225

Che cosa concludere. Il grafico di s in funzione di t è un arco di parabola; quello di s in funzione di t^2 è una retta per l'origine (linearizzazione, capitolo 5). Il rapporto s/t^2 è costante entro le incertezze, quindi il moto è uniformemente accelerato con $a = 2 \cdot s/t^2$. I sei valori di a vanno da 0,443 m/s^2 a 0,452 m/s^2: con il valore medio e la semidispersione massima, $a = (0{,}446 \pm 0{,}004)$ m/s^2. Ripetendo con un'inclinazione maggiore si trova un'accelerazione maggiore, ma il moto resta uniformemente accelerato.

Attenzione. Ferma la biglia in fondo alla guida con un fermo morbido, per non farla cadere a terra.

Per la relazione. Riporta la tabella con t, t^2 e s/t^2 e i due grafici, s–t e s–t^2. Ricava a anche come il doppio della pendenza del secondo grafico e confronta il risultato con quello ottenuto dalla media. Nelle conclusioni discuti quale misura pesa di più sull'incertezza nei primi segni, dove i tempi sono brevi, e come si potrebbe migliorare l'esperimento, per esempio riprendendolo al rallentatore.

16.4 La caduta libera

16.4.1 Tutti i corpi cadono allo stesso modo

Lasciamo cadere insieme, dalla stessa altezza, un libro e un foglio di carta: il libro arriva a terra molto prima. Ora appallottoliamo il foglio e ripetiamo: libro e pallina di carta arrivano quasi in-

sieme, anche se la loro massa è rimasta molto diversa. La differenza fra i due esperimenti non è il peso del foglio, che non è cambiato, ma la sua forma: il foglio disteso incontra una resistenza dell'aria molto maggiore. È l'*attrito viscoso* del capitolo 8.

Per quasi duemila anni si è creduto, sulla scia di Aristotele, che i corpi più pesanti cadessero più velocemente di quelli leggeri. Galileo mostrò che non è così: se si potesse eliminare l'aria, **tutti i corpi, qualunque sia la loro massa, cadrebbero con la stessa accelerazione**. Si chiama **caduta libera** il moto di un corpo che cade soggetto soltanto al proprio peso, senza resistenza dell'aria. In prossimità della superficie terrestre, e per cadute di altezza piccola rispetto al raggio della Terra, è un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione

$$g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

diretta verticalmente verso il basso. Ecco spiegato il nome del capitolo 7: la grandezza g = 9,8 N/kg che lega peso e massa ($P = m\,g$) è proprio l'accelerazione con cui cadono i corpi, e le due unità coincidono, perché 1 N/kg = 1 m/s^2. Come abbiamo visto nel capitolo 7, il valore di g varia leggermente con la latitudine e con la quota; sulla Luna vale circa 1,62 m/s^2.

La prova più spettacolare è arrivata dallo spazio. Nel 1971, durante la missione Apollo 15, l'astronauta David Scott lasciò cadere contemporaneamente, sulla superficie della Luna, dove non c'è un'atmosfera apprezzabile, un martello e una piuma di falco: i due oggetti toccarono il suolo nello stesso istante, davanti alle telecamere. Sulla Terra lo stesso esperimento si può fare in un lungo tubo da cui si è estratta l'aria con una pompa: una piuma e una moneta cadono affiancate.

APPROFONDIMENTO

Galileo, la torre e il piano inclinato

Secondo un racconto del suo allievo e biografo Vincenzo Viviani, Galileo, giovane professore a Pisa, avrebbe lasciato cadere dal campanile pendente corpi di peso diverso per mostrare che arrivavano a terra insieme. Galileo però non descrive mai questo esperimento nelle sue opere, e gli storici considerano l'episodio incerto: può essere stato abbellito, o non essere mai avvenuto in quella forma.

Sappiamo invece con certezza come ragionava. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) Galileo propone un argomento logico contro Aristotele: se i corpi pesanti cadessero più in fretta, legando un sasso grande a uno piccolo il piccolo, più lento, dovrebbe frenare il grande, e la coppia dovrebbe cadere più piano del sasso grande da solo; ma la coppia pesa più del sasso grande, quindi dovrebbe cadere più in fretta. Le due conclusioni si contraddicono: l'ipotesi di partenza è sbagliata.

Per misurare la caduta, troppo rapida per gli orologi del tempo, Galileo la «diluì» facendo rotolare una sfera lungo un piano poco inclinato, dove il moto è più lento ma dello stesso tipo. Misurando i tempi con un orologio ad acqua trovò che gli spazi crescono come i quadrati dei tempi, per qualsiasi inclinazione, e ne dedusse che lo stesso vale per la caduta verticale, il caso limite di un piano inclinato «in piedi». È il metodo sperimentale del capitolo 1 al lavoro: un'ipotesi matematica, un esperimento progettato per controllarla, una generalizzazione prudente.

16.4.2 Le leggi della caduta

Per un corpo lasciato cadere da fermo conviene scegliere l'asse verticale **orientato verso il basso**, con l'origine nel punto di partenza. Con questa scelta $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ e $a = +g$, e le leggi del MRUA diventano

$$v = g\,t \qquad s = \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad v^2 = 2\,g\,s$$

dove s è la distanza percorsa cadendo. La Tabella 16.3 mostra quanto rapidamente crescono velocità e distanza: dopo 1 s un sasso è già sceso di quasi 5 m e va a quasi 10 m/s, cioè circa 35 km/h; dopo 3 s è sceso di oltre 40 m. Nel secondo secondo percorre 19,6 − 4,9 = 14,7 m, il triplo del primo: è di nuovo la regola dei numeri dispari.

Tabella 16.3 Caduta libera da ferma, senza resistenza dell'aria (g = 9,8 m/s^2).

t (s)	0	1,0	2,0	3,0	4,0
v (m/s)	0	9,8	19,6	29,4	39,2
s (m)	0	4,9	19,6	44,1	78,4

Spesso si conosce l'altezza h da cui il corpo cade e si vuole il tempo di caduta. Da $h = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ si ricava $t^2 = 2h/g$, quindi

$$t = \sqrt{(2h/g)} \quad \text{e} \quad v = g\, t = \sqrt{(2g\, h)}$$

Per esempio, un sasso lasciato cadere da un ponte alto 20 m impiega $t = \sqrt{(2 \times 20\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} = \sqrt{(4{,}08\ \text{s}^2)} \approx 2{,}0$ s e arriva all'acqua a $v = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2{,}02\ \text{s} \approx 20$ m/s, oltre 70 km/h. Sulla Luna, dove $g = 1{,}62\ \text{m/s}^2$, un oggetto lasciato cadere da 1,5 m impiega $\sqrt{(2 \times 1{,}5 / 1{,}62)}$ s $\approx 1{,}4$ s, contro circa 0,55 s sulla Terra: per questo, nei filmati delle missioni Apollo, gli oggetti sembrano cadere al rallentatore. Notiamo che nelle formule non compare la massa: il tempo di caduta è lo stesso per un sasso e per un chiodo.

16.4.3 La resistenza dell'aria

Nell'aria la caduta è libera solo in modo approssimato. La resistenza dell'aria cresce con la velocità (capitolo 8): per un sasso compatto che cade per pochi metri è trascurabile, e le formule precedenti funzionano bene; per una piuma, un foglio o un paracadute è importante fin da subito. Quando un corpo cade da grande altezza, la resistenza cresce finché non bilancia il peso; da quel momento la velocità smette di aumentare e il corpo scende a una velocità costante, detta **velocità limite**. Il perché lo studierai il prossimo anno, con i principi della dinamica. Un paracadute funziona proprio così: aprendosi aumenta enormemente la resistenza dell'aria e abbassa la velocità limite a valori che permettono di atterrare senza danni.

Il fatto che nell'aria una piuma cada più piano di un sasso non contraddice dunque Galileo: la differenza è dovuta all'aria, non alla massa.

16.5 Il lancio verso l'alto

16.5.1 Salita, punto più alto, discesa

Lanciamo una palla verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0. Dopo il lancio, trascurando l'aria, sulla palla agisce solo il peso, e il moto è ancora un MRUA con accelerazione di modulo g diretta verso il basso, sia mentre sale sia mentre scende. Per descrivere un moto che va prima in su e poi in giù conviene scegliere l'asse verticale **orientato verso l'alto**, con l'origine nel punto di lancio. Questo moto si chiama **lancio verticale** verso l'alto. Con questa convenzione $v_0 > 0$ e $a = -g$, e le leggi del moto sono

$$v = v_0 - g\, t \quad s = v_0 t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

Seguiamo il moto con $v_0 = 15$ m/s (Figura 16.6). La velocità diminuisce di 9,8 m/s ogni secondo: la palla sale sempre più piano. Nel punto più alto la velocità è zero; da lì in poi la velocità diventa negativa, cioè la palla scende, sempre più veloce. Il grafico v–t è un'unica retta con pendenza

$-9{,}8\ \text{m/s}^2$ che attraversa l'asse dei tempi; il grafico s–t è un arco di parabola rivolto verso il basso.

- **Tempo di salita.** Nel punto più alto $v = 0$, quindi $0 = v_0 - g\,t_s$, da cui $t_s = v_0/g$. Con $v_0 = 15$ m/s: $t_s = 15/9{,}8$ s $\approx 1{,}53$ s.
- **Altezza massima.** Dalla relazione indipendente dal tempo, con $v = 0$ e $a = -g$: $0 = v_0^2 - 2g\,h_{max}$, quindi $h_{max} = v_0^2/(2g) = (15\ \text{m/s})^2/(19{,}6\ \text{m/s}^2) \approx 11{,}5$ m.
- **Simmetria.** La palla torna al punto di lancio ($s = 0$) all'istante $2t_s \approx 3{,}06$ s: il tempo di discesa è uguale al tempo di salita. In quell'istante $v = 15 - 9{,}8 \times 3{,}06 \approx -15$ m/s: la palla torna con la stessa velocità in modulo, ma verso il basso. In generale, a ogni quota la palla passa due volte, salendo e scendendo, con velocità uguali e opposte.

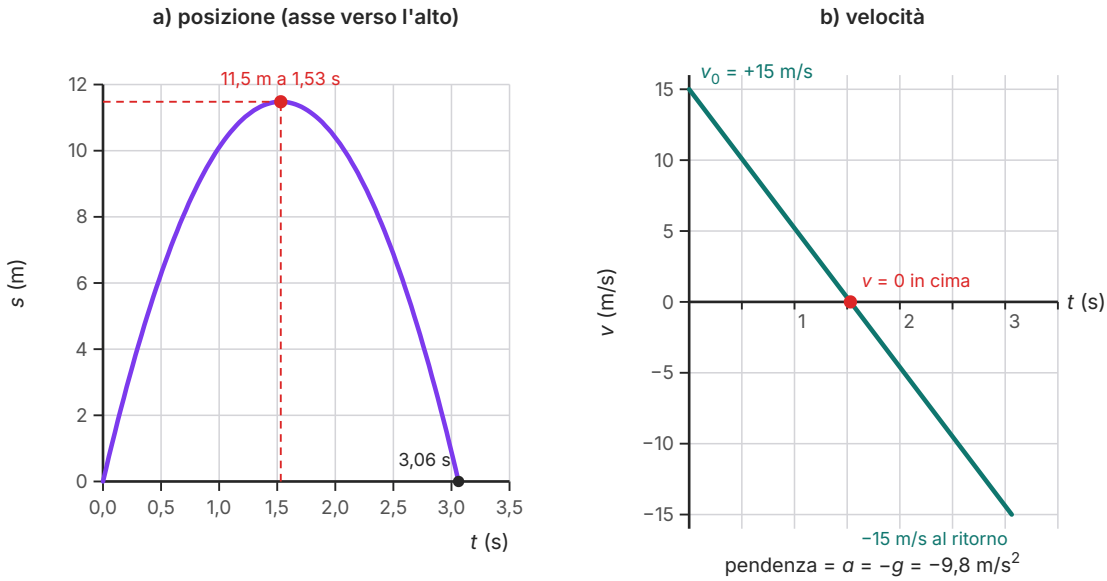


Figura 16.6 Lancio verticale verso l'alto con $v_0 = 15$ m/s, senza resistenza dell'aria; asse verso l'alto con l'origine nel punto di lancio, $a = -g$. a) La posizione è un arco di parabola: l'altezza massima, 11,5 m, è raggiunta a 1,53 s e la palla torna al punto di lancio a 3,06 s. b) La velocità diminuisce in modo lineare, si annulla nel punto più alto e diventa negativa durante la discesa; la pendenza è sempre $-9{,}8\ \text{m/s}^2$.

ERRORE FREQUENTE

Nel punto più alto la velocità è zero, ma l'accelerazione **non** è zero: è sempre $-g$, diretta verso il basso. Se in quell'istante l'accelerazione fosse nulla, la velocità resterebbe zero e la palla rimarrebbe sospesa a mezz'aria. Un secondo errore riguarda i segni: con l'asse verso l'alto si scrive $a = -9{,}8\ \text{m/s}^2$, con l'asse verso il basso $a = +9{,}8\ \text{m/s}^2$. Entrambe le scelte sono corrette, purché siano dichiarate e mantenute in tutto il problema.

ESEMPIO SVOLTO

Un lancio da pallavolo

Problema. Durante il palleggio una pallavolista lancia il pallone verticalmente verso l'alto: il pallone sale di 2,5 m sopra le sue mani. Trascurando l'aria, calcola a) la velocità con cui il pallone ha lasciato le mani; b) il tempo che impiega a tornare nelle mani; c) la velocità del pallone 0,50 s dopo il lancio.

Soluzione. Asse verticale verso l'alto, origine nelle mani: $a = -9{,}8\ \text{m/s}^2$.

a) Nel punto più alto $v = 0$: $0 = v_0^2 - 2g\,h_{\max}$, quindi $v_0 = \sqrt{(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2{,}5\ \text{m})} = \sqrt{(49\ \text{m}^2/\text{s}^2)} = 7{,}0$ m/s.

b) $t_s = v_0/g = 7{,}0/9{,}8\ \text{s} \approx 0{,}71$ s; per la simmetria il pallone torna nelle mani dopo $2t_s \approx 1{,}4$ s.

c) $v = v_0 - g\,t = 7{,}0\ \text{m/s} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 0{,}50\ \text{s} = 2{,}1$ m/s. Il segno è positivo: dopo 0,50 s il pallone sta ancora salendo, come ci aspettiamo dato che 0,50 s < 0,71 s.

16.6 Frenare in tempo: la distanza di arresto

Le leggi del moto hanno un'applicazione che riguarda tutti: la sicurezza stradale. Un automobilista che vede un ostacolo non comincia subito a frenare. Prima deve accorgersi del pericolo, decidere e spostare il piede sul pedale del freno; questo intervallo è il **tempo di reazione**, che per una persona attenta vale in genere attorno a un secondo, e cresce con la stanchezza, l'alcol o la distrazione (per esempio guardando il telefono). Durante il tempo di reazione l'auto continua a muoversi a velocità costante: è un tratto di moto uniforme. Poi i freni la rallentano: se la frenata è regolare è un tratto di moto uniformemente accelerato, con a di segno opposto alla velocità.

La **distanza di arresto** è quindi la somma di due termini:

- lo **spazio di reazione**, $d_r = v \cdot t_r$, proporzionale alla velocità;
- lo **spazio di frenata**, $d_f = v^2/(2|a|)$, dalla relazione indipendente dal tempo con velocità finale zero: è proporzionale al **quadrato** della velocità.

$$d_{\text{arresto}} = v\,t_r + \frac{v^2}{2|a|}$$

La Figura 16.7 mostra i valori calcolati con un tempo di reazione di 1,0 s e una frenata di 7,0 m/s² in modulo, un valore indicativo per un'auto con buoni pneumatici su asfalto asciutto. A 30 km/h (8,3 m/s) l'auto si ferma in circa 13 m: 8,3 m di reazione e 5,0 m di frenata. A 90 km/h la distanza è di circa 70 m, a 130 km/h di circa 129 m: più della lunghezza di un campo da calcio. Si noti che passando da 30 a 90 km/h la velocità triplica, ma lo spazio di frenata diventa nove volte maggiore (da 5,0 m a 44,6 m). Su strada bagnata la frenata possibile è minore, e tutti gli spazi di frenata aumentano.

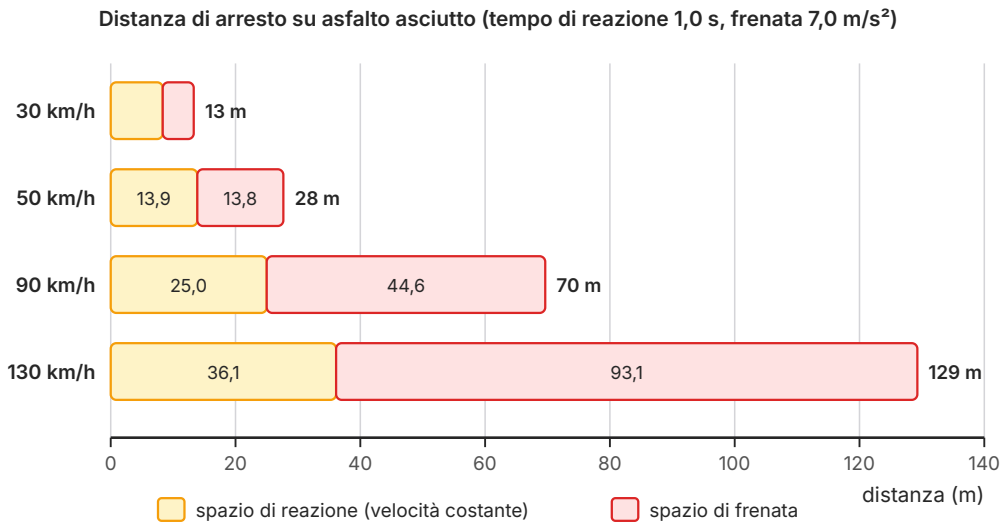


Figura 16.7 Distanza di arresto di un'auto a quattro velocità, calcolata come spazio di reazione $v\,t_r$ (con t_r = 1,0 s) più spazio di frenata $v^2/(2|a|)$ (con $|a|$ = 7,0 m/s^2, valore indicativo su asfalto asciutto). Le barre sono in scala; a 30 km/h i due tratti valgono 8,3 m e 5,0 m. Lo spazio di frenata cresce con il quadrato della velocità.

COLLEGAMENTI

Educazione stradale: perché i limiti di velocità contano

I numeri della Figura 16.7 spiegano alcune regole del Codice della strada meglio di qualunque raccomandazione. La distanza di sicurezza dal veicolo che precede deve tenere conto almeno dello spazio di reazione: se l'auto davanti frena di colpo, noi percorriamo $v\,t_r$ prima ancora di toccare il freno. Una distrazione che allunga il tempo di reazione di mezzo secondo, a 90 km/h (25 m/s), aggiunge 25 m/s × 0,5 s ≈ 12,5 m alla distanza di arresto, a parità di tutto il resto.

I limiti di 30 km/h nelle zone vicine alle scuole hanno una giustificazione fisica precisa: a 50 km/h, con gli stessi valori della figura, la distanza di arresto è circa 28 m, più del doppio che a 30 km/h. Un pedone che attraversa a 15 m di distanza viene evitato nel primo caso; nel secondo l'auto percorre 13,9 m solo durante il tempo di reazione, comincia a frenare a poco più di un metro dal pedone e lo investe a quasi 50 km/h.

Il moto uniformemente accelerato chiude il nostro primo studio del movimento. Abbiamo imparato a *descrivere* come si muove un corpo, con posizione, velocità e accelerazione; non ci siamo ancora chiesti *perché* accelera. Il legame fra le forze, studiate nelle parti II e III, e l'accelerazione è l'argomento dei principi della dinamica, che affronterai il prossimo anno.

SINTESI

- L'accelerazione media è $a_m = \Delta v/\Delta t$; si misura in m/s^2 e indica di quanto cambia la velocità in ogni secondo.
- L'accelerazione ha un segno: se v e a sono concordi il corpo va più veloce, se sono discordi rallenta. Accelerazione negativa non significa rallentamento.
- L'accelerazione istantanea è il valore a cui tende l'accelerazione media su intervalli sempre più brevi.
- Nel grafico v–t la pendenza è l'accelerazione e l'area fra il grafico e l'asse dei tempi è lo spostamento (negativa se $v < 0$).
- Nel moto rettilineo uniformemente accelerato l'accelerazione è costante: $v = v_0 + a\,t$ (retta) e $s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a\,t^2$ (parabola).
- Eliminando il tempo si ottiene $v^2 = v_0^{\,2} + 2a\,\Delta s$; nel solo MRUA la velocità media è $(v_0 + v)/2$.
- Partendo da fermo, lo spazio è proporzionale al quadrato del tempo e gli spazi percorsi in intervalli uguali e successivi stanno come 1 : 3 : 5 : 7 (Galileo).
- Nel vuoto tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione $g \approx 9{,}8$ m/s^2; nell'aria le differenze sono dovute alla resistenza dell'aria, non alla massa.
- Caduta da ferma da un'altezza h: $t = \sqrt{(2h/g)}$, $v = \sqrt{(2g\,h)}$.
- Nel lancio verso l'alto (asse verso l'alto, $a = -g$): $t_s = v_0/g$, $h_{max} = v_0^{\,2}/(2g)$; salita e discesa durano lo stesso tempo; in cima $v = 0$ ma $a = -g$.
- Distanza di arresto = spazio di reazione $v\,t_r$ + spazio di frenata $v^2/(2|a|)$; lo spazio di frenata cresce con il quadrato della velocità.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'unità di misura dell'accelerazione nel SI è:

   A. m/s
   B. m/s^2
   C. m^2/s
   D. m·s

2. ● Un'auto passa da ferma a 20 m/s in 8,0 s. La sua accelerazione media è:

   A. 160 m/s^2
   B. 0,40 m/s^2
   C. 2,5 m/s^2
   D. 12 m/s^2

3. ● In un grafico velocità-tempo, la pendenza della retta rappresenta:
   - **A.** l'accelerazione
   - **B.** lo spostamento
   - **C.** la posizione
   - **D.** la distanza percorsa

4. ●● Un corpo ha velocità negativa e accelerazione positiva. Il corpo:
   - **A.** si muove nel verso positivo sempre più veloce
   - **B.** si muove a velocità costante
   - **C.** è certamente fermo
   - **D.** si muove nel verso negativo e sta rallentando

5. ● Un corpo parte da fermo con accelerazione costante. In un tempo doppio percorre uno spazio:
   - **A.** doppio
   - **B.** quadruplo
   - **C.** triplo
   - **D.** uguale

6. ● Nel vuoto si lasciano cadere insieme, dalla stessa altezza, un martello e una piuma. Si osserva che:
   - **A.** il martello arriva prima
   - **B.** arrivano insieme
   - **C.** la piuma arriva prima
   - **D.** dipende dall'altezza di partenza

7. ●● Una palla lanciata verticalmente verso l'alto raggiunge il punto più alto. In quell'istante:
   - **A.** velocità e accelerazione sono entrambe nulle
   - **B.** la velocità è massima e l'accelerazione è nulla
   - **C.** la velocità è nulla e l'accelerazione vale 9,8 m/s^2 verso il basso
   - **D.** la velocità è nulla e l'accelerazione è diretta verso l'alto

8. ●● Se un'auto raddoppia la velocità, a parità di accelerazione in frenata, il suo spazio di frenata:
   - **A.** quadruplica
   - **B.** si dimezza
   - **C.** raddoppia
   - **D.** non cambia

9. ●● In un moto uniformemente accelerato che parte da fermo, gli spazi percorsi in intervalli di tempo uguali e successivi stanno fra loro come:
   A. 1 : 2 : 3 : 4
   B. 1 : 4 : 9 : 16
   C. 1 : 2 : 4 : 8
   D. 1 : 3 : 5 : 7

Vero o falso

10. ● Un corpo con accelerazione negativa sta sempre rallentando. V / F

11. ● Nel moto uniformemente accelerato il grafico velocità-tempo è una retta. V / F

12. ●● Un sasso lasciato cadere da fermo percorre nel secondo secondo di caduta la stessa distanza che nel primo. V / F

13. ● Sulla Luna un martello e una piuma lasciati cadere insieme toccano il suolo nello stesso istante. V / F

14. ●● In un lancio verticale verso l'alto, trascurando l'aria, il tempo di salita è uguale al tempo di discesa. V / F

Applicare

15. ● Un'auto passa da 36 km/h a 90 km/h in 6,0 s. Calcola la sua accelerazione media in m/s^2.

16. ● Un treno che viaggia a 25 m/s frena con accelerazione costante $a = -0{,}50\ m/s^2$. Quanto tempo impiega a fermarsi? Quanta strada percorre in frenata?

17. ● Uno scooter parte da fermo con accelerazione costante di $2{,}0\ m/s^2$. Calcola la velocità e lo spazio percorso dopo 5,0 s.

18. ●● Il grafico della Figura 16.8 descrive la velocità di un ascensore che sale (asse verso l'alto). a) Calcola l'accelerazione nei tre tratti. b) Di quanti metri sale l'ascensore? c) Qual è la sua velocità media fra 0 e 14 s?

19. ● Un sasso cade da fermo per 1,5 s senza resistenza dell'aria. Calcola la velocità raggiunta e lo spazio percorso.

20. ●● Completa: in un moto che parte da fermo con accelerazione costante, lo spazio percorso è direttamente proporzionale al _____ del tempo; se il tempo triplica, lo spazio diventa _____ volte maggiore e la velocità _____ volte maggiore.

21. ●● Un'auto che viaggia a 20 m/s frena con accelerazione costante e si ferma in 40 m. Calcola l'accelerazione, con il segno (asse nel verso del moto).

22. ● La tabella riporta la velocità di un carrello a diversi istanti. a) Il moto è uniformemente accelerato? Con quale accelerazione? b) Scrivi la legge della velocità. c) Calcola lo spostamento fra 0 e 4,0 s.

t (s)	0	1,0	2,0	3,0	4,0
v (m/s)	3,0	5,5	8,0	10,5	13,0

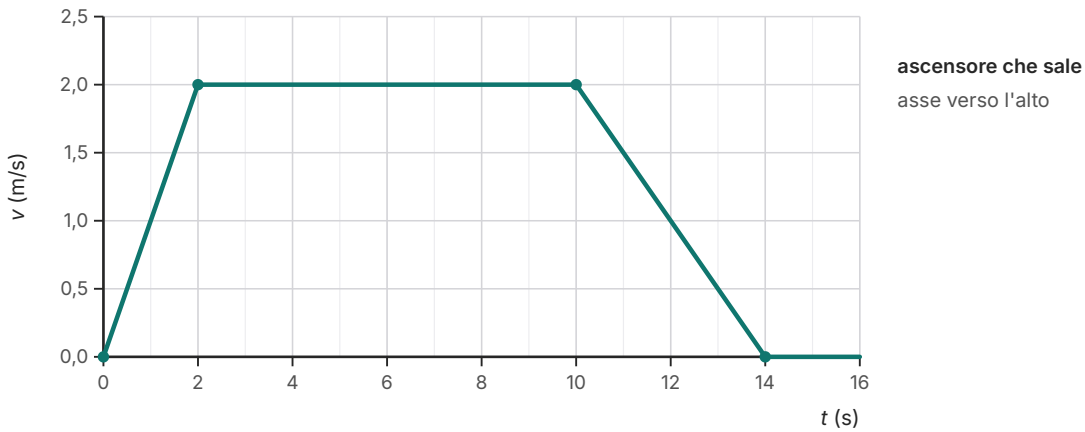


Figura 16.8 Velocità di un ascensore che sale, per l'esercizio 18 (asse verticale verso l'alto). I punti segnano gli istanti in cui cambia il tipo di moto.

Problemi

23. ●● Un aereo da turismo parte da fermo sulla pista e decolla quando raggiunge 30 m/s, dopo aver percorso 600 m con accelerazione costante. Calcola a) l'accelerazione; b) il tempo impiegato per il decollo.

24. ●● Un vaso cade da fermo da un balcone alto 12 m. Trascurando l'aria, calcola a) il tempo di caduta; b) la velocità con cui arriva a terra, in m/s e in km/h.

25. ●● Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità 12 m/s. Trascurando l'aria e scegliendo l'asse verso l'alto, calcola a) il tempo di salita; b) l'altezza massima; c) dopo quanto tempo torna al punto di lancio e con quale velocità.

26. ●●● Un'auto passa a velocità costante di 20 m/s davanti a un'auto della polizia ferma. Nello stesso istante la polizia parte all'inseguimento con accelerazione costante di 2,0 m/s^2. a) Scrivi le leggi orarie dei due veicoli, con origine nel punto di partenza della polizia. b) Dopo quanto tempo e a quale distanza la polizia raggiunge l'auto? c) Quale velocità ha la polizia in quell'istante? Confrontala con quella dell'auto.

27. ●●● Un automobilista viaggia a 72 km/h quando vede un ostacolo a 45 m. Il suo tempo di reazione è 0,80 s e la frenata ha un'accelerazione di modulo 6,5 m/s^2. a) Riesce a fermarsi prima dell'ostacolo? b) E se viaggiasse a 60 km/h? c) Di quanto aumenterebbe la distanza di arresto a 72 km/h se, distratto dal telefono, avesse un tempo di reazione di 1,5 s?

28. ●●● Un treno parte da fermo con accelerazione costante di 0,50 m/s^2 per 40 s; poi viaggia a velocità costante per 2,0 min; infine frena in modo uniforme e si ferma in 50 s. a) Disegna il grafico v–t. b) Qual è la velocità massima, in m/s e in km/h? c) Quanto vale l'accelerazione in frenata? d) Quanta strada percorre in tutto? e) Qual è la sua velocità media?

29. ●●● In laboratorio una biglia, lasciata da ferma su una guida inclinata, percorre 1,60 m in 2,50 s. a) Calcola l'accelerazione. b) Quale velocità ha alla fine della guida? c) Quanta strada aveva percorso dopo 1,25 s? d) Dividi i 2,50 s in cinque intervalli di 0,50 s: quanti centimetri percorre la biglia nel primo e nell'ultimo intervallo?

Ragionare e argomentare

30. ●●● Trova l'errore. «Un'auto si muove nel verso negativo dell'asse e frena da −20 m/s a −5,0 m/s in 3,0 s. Soluzione di Sara: l'auto rallenta, quindi l'accelerazione è negativa: $a = (5{,}0 - 20)/3{,}0 = -5{,}0$ m/s^2.» Individua l'errore e scrivi la soluzione corretta.

31. ●●● Progetta un esperimento per misurare il tuo tempo di reazione con un righello da 30 cm tenuto da un compagno e lasciato cadere senza preavviso. Indica che cosa misuri, quale formula usi e calcola il tempo di reazione se il righello scende di 15 cm prima che tu lo afferri.

32. ● Spiega perché, nell'aria, un foglio disteso cade più lentamente dello stesso foglio appallottolato, e perché questa osservazione non contraddice l'affermazione di Galileo che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione.

PER APPROFONDIRE

- [GAL] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: nella prima giornata l'argomento contro Aristotele sulla caduta dei gravi, nella terza il moto «naturalmente accelerato», il piano inclinato e la regola dei numeri dispari.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le prime pagine raccontano come Galileo abbia cambiato il modo di pensare al moto, e perché la domanda giusta riguarda l'accelerazione e non la velocità.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sul moto spiega velocità e accelerazione come «rapidità di variazione», con esempi numerici sulla caduta dei corpi.
- [HEW] P.G. Hewitt, *Conceptual Physics*: i capitoli sul moto rettilineo e sulla caduta libera, con molte domande concettuali sul lancio verso l'alto e sui grafici.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sul moto in una dimensione propone numerosi problemi sul moto con accelerazione costante e sulla caduta libera.

Glossario del capitolo

Accelerazione istantanea
Valore a cui tende l'accelerazione media calcolata su intervalli di tempo sempre più brevi attorno a un istante; è la pendenza della tangente al grafico velocità-tempo.

Accelerazione media
Rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene: $a_m = \Delta v/\Delta t$; si misura in m/s^2.

Altezza massima
Nel lancio verticale verso l'alto, quota raggiunta quando la velocità si annulla: $h_{max} = v_0^2/(2g)$.

Caduta libera
Moto di un corpo che cade soggetto solo al proprio peso, senza resistenza dell'aria; vicino alla superficie terrestre è un MRUA con accelerazione $g \approx 9{,}8$ m/s^2 verso il basso.

Decelerazione
Termine comune per un moto in cui il modulo della velocità diminuisce; avviene quando velocità e accelerazione hanno segni opposti, non necessariamente con $a < 0$.

Distanza di arresto
Somma dello spazio di reazione e dello spazio di frenata: la strada che un veicolo percorre da quando il pericolo compare a quando si ferma.

Legge della velocità
Nel MRUA, $v = v_0 + a\,t$: la velocità dipende linearmente dal tempo.

Metro al secondo quadrato
Unità SI dell'accelerazione (m/s^2): un'accelerazione di 1 m/s^2 fa variare la velocità di 1 m/s in ogni secondo.

Moto rettilineo uniformemente accelerato
Moto lungo una retta con accelerazione costante (MRUA): $v = v_0 + a\,t$ e $s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a\,t^2$.

Regola dei numeri dispari
In un moto uniformemente accelerato che parte da fermo, gli spazi percorsi in intervalli di tempo uguali e successivi stanno come 1 : 3 : 5 : 7 … (Galileo).

Relazione indipendente dal tempo
Nel MRUA, $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta s$: lega velocità, accelerazione e spostamento senza usare il tempo.

Spazio di frenata
Distanza percorsa durante la frenata fino all'arresto: $d_f = v^2/(2|a|)$; cresce con il quadrato della velocità.

Spazio di reazione
Distanza percorsa a velocità costante durante il tempo di reazione: $d_r = v\,t_r$.

Tempo di reazione
Intervallo fra la percezione di un evento e l'inizio della risposta (per esempio, la pressione sul freno); per una persona attenta vale in genere attorno a un secondo.

Tempo di salita
Nel lancio verticale verso l'alto, tempo per raggiungere il punto più alto: $t_s = v_0/g$; è uguale al tempo di discesa.

Velocità limite
Velocità costante raggiunta da un corpo che cade nell'aria quando la resistenza dell'aria bilancia il peso.

Soluzioni

1. B. m/s^2: (m/s)/s, variazione di velocità al secondo.

2. C. $a_m = \Delta v/\Delta t = 20\ m/s / 8{,}0\ s = 2{,}5\ m/s^2$.

3. A. Pendenza = $\Delta v/\Delta t$ = accelerazione; l'area è lo spostamento.

4. D. Velocità e accelerazione hanno segni opposti: il corpo va nel verso negativo e il modulo della velocità diminuisce.

5. B. $s = \frac{1}{2} a\, t^2$: con tempo doppio lo spazio è $2^2 = 4$ volte maggiore.

6. B. Nel vuoto tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione g.

7. C. In cima $v = 0$, ma l'accelerazione resta $g = 9{,}8\ m/s^2$ verso il basso.

8. A. $d_f = v^2/(2|a|)$: raddoppiando v lo spazio di frenata quadruplica.

9. D. Regola dei numeri dispari di Galileo: le differenze fra quadrati consecutivi sono 1, 3, 5, 7.

10. F. Rallenta solo se anche la velocità è positiva; con $v < 0$ e $a < 0$ il corpo va sempre più veloce nel verso negativo.

11. V. $v = v_0 + a\, t$ è una dipendenza lineare: retta di pendenza a.

12. F. Nel primo secondo percorre 4,9 m, nel secondo 19,6 m − 4,9 m = 14,7 m, il triplo.

13. V. Sulla Luna non c'è un'atmosfera apprezzabile: entrambi cadono con $1{,}62\ m/s^2$ (esperimento di Apollo 15, 1971).

14. V. Senza aria il moto è simmetrico: salita e discesa durano entrambe v_0/g.

15. 36 km/h = 10 m/s; 90 km/h = 25 m/s. $a_m = (25 - 10)\ m/s / 6{,}0\ s = 2{,}5\ m/s^2$.

16. $t = (0 - 25\ m/s)/(-0{,}50\ m/s^2) = 50$ s. $\Delta s = -v_0^2/(2a) = (25\ m/s)^2/(1{,}0\ m/s^2) = 625\ m \approx 6{,}3 \times 10^2$ m (oppure $\Delta s = v_m\, t = 12{,}5\ m/s \times 50\ s$).

17. $v = a\, t = 2{,}0\ m/s^2 \times 5{,}0\ s = 10\ m/s$; $s = \frac{1}{2} a\, t^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 25\ m = 25$ m.

18. a) Da 0 a 2 s: $a = 2{,}0\ m/s / 2{,}0\ s = +1{,}0\ m/s^2$; da 2 s a 10 s: $a = 0$; da 10 s a 14 s: $a = -2{,}0\ m/s / 4{,}0\ s = -0{,}50\ m/s^2$ (l'ascensore sale e rallenta). b) Area: $\frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 2{,}0 + 8{,}0 \times 2{,}0 + \frac{1}{2} \times 4{,}0 \times 2{,}0 = 2{,}0 + 16 + 4{,}0 = 22$ m. c) $v_m = 22\ m / 14\ s \approx 1{,}6\ m/s$.

19. Asse verso il basso: $v = g\, t = 9{,}8 \times 1{,}5\ m/s = 14{,}7\ m/s \approx 15\ m/s$; $s = \frac{1}{2} g\, t^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 2{,}25\ m \approx 11$ m.

20. quadrato; 9 (3^2); 3 ($v = a\, t$ è proporzionale a t).

21. $0 = v_0^2 + 2a\, \Delta s \rightarrow a = -v_0^2/(2\Delta s) = -(20\ m/s)^2/(80\ m) = -5{,}0\ m/s^2$.

22. a) Sì: la velocità aumenta sempre di 2,5 m/s ogni secondo, quindi $a = 2{,}5\ m/s^2$ costante. b) $v = 3{,}0\ m/s + (2{,}5\ m/s^2)\, t$. c) $\Delta s = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t = \frac{1}{2} \times (3{,}0 + 13{,}0)\ m/s \times 4{,}0\ s = 32$ m (oppure $3{,}0 \times 4{,}0 + \frac{1}{2} \times 2{,}5 \times 16 = 12 + 20 = 32$ m).

23. a) $v^2 = 2a\, s \rightarrow a = v^2/(2s) = (30\ m/s)^2/(1200\ m) = 0{,}75\ m/s^2$. b) $t = v/a = 30/0{,}75\ s = 40$ s (controllo: $v_m = 15\ m/s$, $15 \times 40 = 600$ m).

24. a) $t = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 12\ /\ 9{,}8)}\ s = \sqrt{2{,}45}\ s \approx 1{,}6$ s. b) $v = \sqrt{(2g\, h)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 12)}\ m/s \approx 15\ m/s \approx 55\ km/h$.

25. $a = -9{,}8\ m/s^2$. a) $t_s = v_0/g = 12/9{,}8\ s \approx 1{,}2$ s. b) $h_{max} = v_0^2/(2g) = 144/19{,}6\ m \approx 7{,}3$ m. c) Dopo $2t_s \approx 2{,}4$ s, con velocità −12 m/s (stesso modulo, verso il basso).

26. a) Auto: $s_A = (20\ m/s)\, t$; polizia: $s_P = \frac{1}{2}\ (2{,}0\ m/s^2)\, t^2 = (1{,}0\ m/s^2)\, t^2$. b) $s_A = s_P$: $20\, t = 1{,}0\, t^2 \rightarrow t(t - 20) = 0$; la soluzione $t = 0$ è la partenza, quindi $t = 20$ s, a $s = 20 \times 20\ m = 400$ m. c) $v_P = a\, t = 2{,}0 \times 20\ m/s = 40\ m/s$ (144 km/h): il doppio della velocità dell'auto, perché la velocità media della polizia, $(0 + 40)/2 = 20\ m/s$, deve essere uguale a quella dell'auto.

27. $v = 72\ km/h = 20\ m/s$. a) $d_r = 20 \times 0{,}80\ m = 16$ m; $d_f = 20^2/(2 \times 6{,}5)\ m \approx 30{,}8$ m; totale ≈ 47 m > 45 m: non riesce a fermarsi. b) $v = 60/3{,}6 \approx 16{,}7\ m/s$: $d_r \approx 13{,}3$ m, $d_f \approx 16{,}7^2/13\ m \approx 21{,}4$ m, totale ≈ 35 m < 45 m: si ferma. c) $d_r = 20 \times 1{,}5\ m = 30$ m invece di 16 m: la di-

stanza di arresto aumenta di 14 m (da circa 47 m a circa 61 m).

28. a) Grafico v–t: retta da (0; 0) a (40 s; 20 m/s), tratto orizzontale fino a 160 s, retta fino a (210 s; 0). b) $v_{max} = a\,t = 0{,}50 \times 40$ m/s = 20 m/s = 72 km/h. c) $a = (0 - 20\text{ m/s})/50\text{ s} = -0{,}40\text{ m/s}^2$. d) Aree: $\frac{1}{2} \times 40 \times 20 = 400$ m; $120 \times 20 = 2400$ m; $\frac{1}{2} \times 50 \times 20 = 500$ m; totale 3300 m = 3,3 km. e) $v_m = 3300\text{ m} / 210\text{ s} \approx 16$ m/s.

29. a) $s = \frac{1}{2}a\,t^2 \rightarrow a = 2s/t^2 = 2 \times 1{,}60/(2{,}50)^2\text{ m/s}^2 = 0{,}512\text{ m/s}^2 \approx 0{,}51\text{ m/s}^2$. b) $v = a\,t = 0{,}512 \times 2{,}50$ m/s = 1,28 m/s ≈ 1,3 m/s (controllo: $v_m = 0{,}64$ m/s è la metà). c) Tempo dimezzato → spazio diviso per 4: 1,60 m / 4 = 0,400 m. d) Gli spazi nei cinque intervalli stanno come 1 : 3 : 5 : 7 : 9, con somma 25: primo intervallo 1,60 m / 25 = 0,064 m = 6,4 cm; ultimo 9 × 6,4 cm ≈ 58 cm.

30. Sara sbaglia i segni delle velocità e confonde rallentamento con accelerazione negativa. Corretto: $a = (v_2 - v_1)/\Delta t = (-5{,}0 - (-20))$ m/s / 3,0 s = +5,0 m/s^2. L'accelerazione è positiva e l'auto rallenta, perché velocità e accelerazione hanno segni opposti.

31. Traccia: il compagno tiene il righello verticale con lo zero fra le tue dita aperte e lo lascia cadere senza avvisare; tu lo afferri appena lo vedi muoversi. Si misura la distanza d percorsa dal righello (lettura fra le dita); il righello cade da fermo, quindi $d = \frac{1}{2}g\,t^2$ e $t = \sqrt{(2d/g)}$. Con $d = 15$ cm: $t = \sqrt{(2 \times 0{,}15/9{,}8)}$ s ≈ 0,17 s. Conviene ripetere almeno 5–10 volte e calcolare valore medio e semidispersione; il compagno non deve dare segnali (variabile controllata).

32. Traccia: il foglio disteso ha una superficie grande rispetto alla massa e subisce una resistenza dell'aria (attrito viscoso) molto maggiore; appallottolato, con la stessa massa, la resistenza diventa piccola e il moto si avvicina alla caduta libera. L'affermazione di Galileo riguarda la caduta nel vuoto: la differenza osservata è dovuta all'aria, non alla massa, che nei due casi è la stessa.