CAPITOLO

11

Leve, baricentro e stabilità

Nessuna macchina regala qualcosa: quella che risparmi in forza la paghi in strada percorsa.

OBIETTIVI

1. Spiegare che cosa fa una macchina semplice e calcolarne il vantaggio meccanico.
2. Applicare la condizione di equilibrio della leva e classificare le leve nei tre generi, riconoscendole negli oggetti e nel corpo umano.
3. Calcolare la forza necessaria con una carrucola mobile e con un paranco ideali.
4. Definire il baricentro, calcolarne la posizione per due o tre corpi su un'asta e trovarlo sperimentalmente.
5. Distinguere equilibrio stabile, instabile e indifferente e prevedere quando un corpo appoggiato si ribalta.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 Le macchine semplici 2
11.2 Le leve 3
11.3 La carrucola mobile e il paranco 11
11.4 Il baricentro 13
11.5 Equilibrio e stabilità 17

Fisica 1 · Parte III · L'equilibrio dei solidi · versione 1.0
Capitolo 11: Leve, baricentro e stabilità · pagine 281–308 del volume completo · estratto per lo studio

Con una sbarra di ferro lunga un metro una ragazza solleva l'angolo di un armadio che, a mani nude, non riuscirebbe nemmeno a smuovere. Un muratore porta in una carriola un carico di sabbia che pesa più di lui. Un meccanico solleva il motore di un'auto tirando una catena con una mano sola. In tutti questi casi c'è un attrezzo semplicissimo, senza motore né circuiti, che permette di equilibrare una forza grande con una forza piccola.

Nel capitolo 10 abbiamo imparato a calcolare il momento di una forza e a scrivere le condizioni di equilibrio di un corpo rigido. In questo capitolo le mettiamo al lavoro su tre questioni molto concrete. La prima: come funzionano le *macchine semplici*, cioè le leve e le carrucole? La seconda: in quale punto di un corpo agisce il suo peso, il *baricentro*, e come lo si trova? La terza: perché certi oggetti stanno in piedi senza problemi e altri si rovesciano al primo urto? Le risposte ci porteranno dal braccio umano alle gru, dai mobili di casa alla Torre di Pisa.

11.1 Le macchine semplici

11.1.1 Che cosa fa una macchina semplice

Una **macchina semplice** è un dispositivo che permette di equilibrare (o di vincere) una forza, detta **forza resistente** F_r, applicando un'altra forza, detta **forza motrice** F_m, che può avere modulo, direzione o punto di applicazione diversi. La forza resistente è quella «da vincere»: il peso del carico da sollevare, la resistenza di un chiodo da estrarre, la durezza del guscio di una noce. La forza motrice è quella che esercitiamo noi, o un motore.

Le macchine semplici studiate fin dall'antichità sono la leva, la carrucola, il piano inclinato (che abbiamo già incontrato nel capitolo 9), il cuneo, la vite e il verricello. In questo capitolo ci occupiamo delle prime due, che si studiano con gli strumenti dell'equilibrio del corpo rigido.

Una macchina semplice può fare due cose diverse. Può **ridurre la forza** necessaria: con il piede di porco basta una spinta modesta per sollevare un oggetto pesante. Oppure può **rendere la forza più comoda** da esercitare: la carrucola fissa del capitolo 9 non riduce la forza, ma permette di tirare verso il basso invece che verso l'alto. A volte, come vedremo, una macchina richiede addirittura una forza *maggiore* della resistenza, ma in cambio offre velocità e ampiezza di movimento: è il caso del nostro avambraccio.

11.1.2 Il vantaggio meccanico

Per confrontare le macchine fra loro si usa il **vantaggio meccanico**, il rapporto fra il modulo della forza resistente e quello della forza motrice che la equilibra:

$$\text{vantaggio meccanico} = \frac{F_\text{r}}{F_\text{m}}$$

È un numero puro, senza unità di misura. Se vale 4, con una forza motrice di 50 N si equilibra una forza resistente di 200 N. Se vale 1, la macchina non cambia il modulo della forza; se è minore di 1, la forza motrice deve essere più grande della resistenza.

C'è però un prezzo da pagare, e l'esperienza lo mostra sempre. Con un vantaggio meccanico pari a 4, per sollevare il carico di 10 cm la mano deve spostarsi di circa 40 cm. Una macchina semplice permette di usare **una forza più piccola lungo un percorso più lungo**, oppure una forza più grande lungo un percorso più breve, ma non permette di ottenere una forza grande e uno spostamento grande insieme. Il prossimo anno, con il concetto di *lavoro*, potrai dare a questa osservazione una forma precisa; per ora ci basta averla ben presente.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «Con la leva si fa meno fatica, quindi la leva crea forza dal nulla.» Non è così. La leva permette di equilibrare una forza grande con una forza piccola, ma il punto in cui agisce la forza piccola deve muoversi di più. Se una leva dimezza la forza necessaria, la mano deve percorrere un tratto doppio di quello percorso dal carico. Nessuna macchina semplice ideale permette di ridurre la forza *e* la strada percorsa nello stesso tempo.

11.2 Le leve

11.2.1 Gli elementi di una leva

Una **leva** è un corpo rigido (un'asta, una sbarra, un osso) che può ruotare attorno a un punto fisso, o a un asse fisso, chiamato **fulcro**. Sulla leva agiscono la forza motrice e la forza resistente; il fulcro esercita a sua volta una reazione vincolare, che impedisce alla leva di spostarsi.

Come abbiamo visto nel capitolo 10, l'effetto di rotazione di una forza dipende dal suo braccio, cioè dalla distanza fra il fulcro e la *retta d'azione* della forza. In una leva si chiamano:

- **braccio della forza motrice** b_m: la distanza fra il fulcro e la retta d'azione della forza motrice;
- **braccio della forza resistente** b_r: la distanza fra il fulcro e la retta d'azione della forza resistente.

Negli esempi di questo capitolo le forze sono quasi sempre perpendicolari all'asta, e allora il braccio coincide con la distanza, misurata lungo l'asta, fra il fulcro e il punto di applicazione. Se una forza è obliqua, invece, bisogna ricordare che il braccio va misurato fino alla retta d'azione ed è più corto della distanza dal punto di applicazione.

11.2.2 La condizione di equilibrio della leva

Una leva in equilibrio è un corpo rigido in equilibrio: devono quindi valere le due condizioni del capitolo 10, risultante nulla e momento totale nullo. Scegliamo come polo il fulcro. La rea-

zione del fulcro ha braccio zero, perché la sua retta d'azione passa per il polo, e non compare nell'equazione dei momenti. Restano la forza motrice, che tende a far girare la leva in un verso, e la forza resistente, che tende a farla girare nel verso opposto. I due momenti devono avere lo stesso modulo:

$$F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r$$

Questa è la **condizione di equilibrio della leva**: **una leva è in equilibrio quando il momento della forza motrice è uguale, in modulo, al momento della forza resistente**. Se ricaviamo la forza motrice otteniamo

$$F_m = F_r \cdot \frac{b_r}{b_m}$$

A parità di forza resistente, la forza motrice è **inversamente proporzionale** al suo braccio: raddoppiando b_m la forza necessaria si dimezza. È per questo che una maniglia si mette lontano dai cardini e che, per svitare un bullone molto stretto, si allunga la chiave con un tubo.

Per esempio, con una sbarra appoggiata su un sasso a 20 cm dall'estremità infilata sotto un masso, e spinta all'altra estremità a 1,0 m dal sasso, una forza di 150 N equilibra una forza resistente di 150 N × 1,0 m / 0,20 m = 750 N.

La seconda condizione, risultante nulla, serve per calcolare la reazione del fulcro. Nel caso dell'esempio la forza motrice (la spinta della mano) e la forza resistente (la spinta del masso sulla sbarra) sono entrambe dirette verso il basso, e il sasso deve reggerle tutte e due: la sua reazione vale 150 N + 750 N = 900 N, verso l'alto.

11.2.3 Leve vantaggiose, svantaggiose e indifferenti

Dalla condizione di equilibrio segue che il vantaggio meccanico di una leva è uguale al rapporto fra i bracci:

$$\frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r}$$

Una leva si dice:

- **vantaggiosa** se $b_m > b_r$: la forza motrice è minore della resistenza (piede di porco, schiaccianoci);
- **svantaggiosa** se $b_m < b_r$: la forza motrice è maggiore della resistenza (pinzette, avambraccio);
- **indifferente** se $b_m = b_r$: le due forze hanno lo stesso modulo (bilancia a bracci uguali, altalena a bilico con il fulcro al centro).

«Svantaggiosa» non vuol dire inutile. In una leva svantaggiosa il punto in cui agisce la forza resistente si sposta *più* della mano: è quello che serve quando contano l'ampiezza e la rapidità del

movimento più che la forza, come nel lancio con una canna da pesca o nel movimento del braccio.

11.2.4 I tre generi di leve

Le leve si classificano secondo la posizione del fulcro rispetto ai punti in cui agiscono le due forze (Figura 11.1).

Nella **leva di primo genere** il fulcro si trova **fra** la forza motrice e la forza resistente. A seconda della lunghezza dei bracci può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente. Sono leve di primo genere le forbici e le pinze (il perno è fra le impugnature e le lame), il piede di porco appoggiato sotto il carico, l'altalena a bilico, la bilancia a bracci uguali. Nelle leve di primo genere le due forze hanno lo stesso verso, per esempio entrambe verso il basso, e il fulcro deve reggerle tutte e due.

Nella **leva di secondo genere** la forza resistente si trova fra il fulcro e la forza motrice. Il braccio della forza motrice è quindi sempre più lungo di quello della resistenza: **la leva di secondo genere è sempre vantaggiosa**. Esempi: la carriola (il fulcro è l'asse della ruota, il carico sta in mezzo, le mani all'estremità dei manici), lo schiaccianoci, il levacapsule, il remo di una barca nel modello in cui si considera la pala ferma nell'acqua.

Nella **leva di terzo genere** la forza motrice si trova fra il fulcro e la forza resistente. Il braccio della resistenza è sempre il più lungo: **la leva di terzo genere è sempre svantaggiosa**, ma permette alla punta di muoversi molto e in fretta. Esempi: le pinzette, le molle per il ghiaccio, la canna da pesca, l'avambraccio.

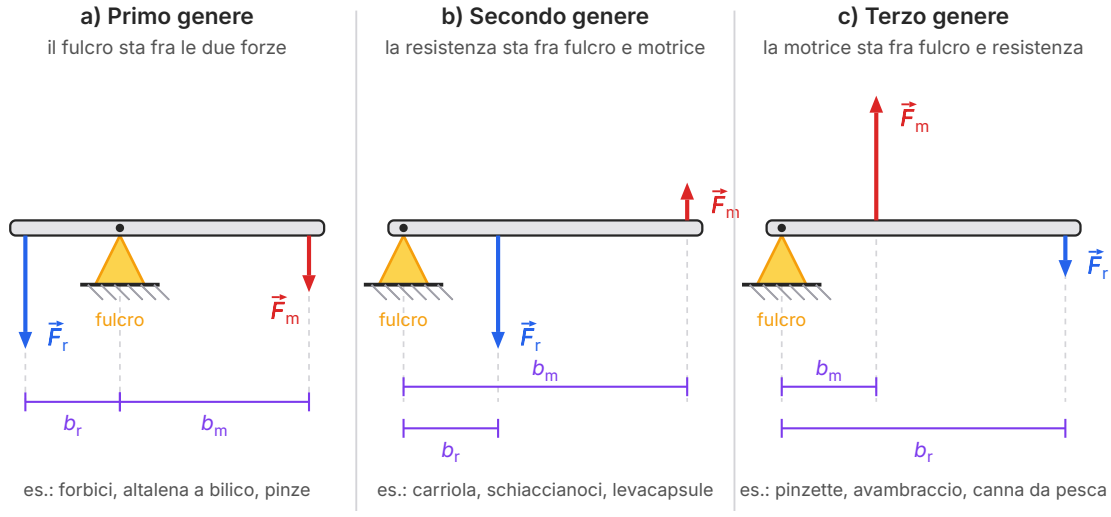


Figura 11.1 I tre generi di leve. Le forze sono disegnate in scala e soddisfano la condizione di equilibrio $F_m\, b_m = F_r\, b_r$: a) primo genere con $b_m = 2\, b_r$, quindi $F_m = F_r/2$; b) secondo genere con $b_m = 3\, b_r$, quindi $F_m = F_r/3$; c) terzo genere con $b_r = 3\, b_m$, quindi $F_m = 3\, F_r$. La reazione del fulcro non è disegnata.

DA RICORDARE

Per riconoscere il genere di una leva chiediti **che cosa sta in mezzo**. Al centro il fulcro: primo genere. Al centro la resistenza: secondo genere, sempre vantaggiosa. Al centro la forza motrice: terzo genere, sempre svantaggiosa. Solo la leva di primo genere può essere, a seconda dei bracci, vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente.

Tabella 11.1 I tre generi di leve.

Genere	Che cosa sta in mezzo	Bracci	Esempi
primo	il fulcro	b_m maggiore, minore o uguale a b_r	forbici, pinze, piede di porco, altalena a bilico, bilancia a bracci uguali, testa sulla colonna vertebrale
secondo	la forza resistente	$b_m > b_r$: sempre vantaggiosa	carriola, schiaccianoci, levacapsule, piede sollevato in punta
terzo	la forza motrice	$b_m < b_r$: sempre svantaggiosa	pinzette, molle per il ghiaccio, canna da pesca, avambraccio

ESEMPIO SVOLTO

Quanta forza per la carriola?

Problema. Una carriola carica ha massa complessiva 80 kg. Il suo baricentro si trova, in orizzontale, a 0,40 m dall'asse della ruota; le mani impugnano i manici a 1,40 m dall'asse, sempre in orizzontale. Quale forza verticale devono esercitare le mani per tenere sollevati i manici? Quanto vale la reazione del terreno sulla ruota?

Soluzione. La carriola è una leva di secondo genere con il fulcro nell'asse della ruota. Il peso è $P = m\,g = 80\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 784\ \text{N}$. Le forze sono verticali, quindi i bracci sono le distanze orizzontali dall'asse: $b_r = 0{,}40\ \text{m}$, $b_m = 1{,}40\ \text{m}$. Dalla condizione di equilibrio:

$$F_m = P \cdot \frac{b_r}{b_m} = 784\ \text{N} \times \frac{0{,}40\ \text{m}}{1{,}40\ \text{m}} = 224\ \text{N} \approx 2{,}2 \times 10^2\ \text{N}$$

Per la reazione della ruota usiamo la risultante nulla, con l'asse verticale verso l'alto: $N + F_m - P = 0$, quindi $N = 784\ \text{N} - 224\ \text{N} = 560\ \text{N} \approx 5{,}6 \times 10^2\ \text{N}$.

Controllo. Il vantaggio meccanico è 1,40/0,40 = 3,5: le mani reggono meno di un terzo del peso, il resto grava sulla ruota. Caricando la sabbia più vicino alla ruota, b_r diminuisce e la carriola diventa ancora più leggera da sollevare.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la regola della leva

Materiali. Un'asta forata e graduata, imperniata nel suo punto di mezzo su un sostegno; ganci; pesetti per un totale di 2,00 N (circa 204 g); un dinamometro con portata 5 N e sensibilità 0,05 N; una livella a bolla.

Procedimento. Controlla che l'asta scarica stia in equilibrio orizzontale: poiché è imperniata nel suo centro, il suo peso agisce sul fulcro e non dà momento. Appendi i pesetti (F_r = 2,00 N) a sinistra del fulcro, a b_r = 10,0 cm. Azzera il dinamometro tenendolo capovolto, nella posizione in cui lo userai; agganciane la punta all'asta a destra del fulcro, alla distanza b_m, e tira verticalmente verso il basso finché la livella indica che l'asta è orizzontale. Leggi F_m. Ripeti per sei valori di b_m.

Tabella 11.2 Dati raccolti da un gruppo di studenti (F_r = 2,00 N, b_r = 10,0 cm).

b_m (cm)	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
F_m (N) ± 0,05 N	3,95	2,00	1,35	1,00	0,80	0,65
$F_m \cdot b_m$ (N·cm)	19,8	20,0	20,3	20,0	20,0	19,5

Che cosa concludere. Il prodotto $F_m \cdot b_m$ è costante entro le incertezze ed è uguale al momento della forza resistente, 2,00 N × 10,0 cm = 20,0 N·cm. **Sicurezza:** non lasciare cadere i pesetti sui piedi e non tirare il dinamometro oltre la sua portata.

Per la relazione. Calcola per ogni prova il prodotto $F_m \cdot b_m$ con la sua incertezza (incertezza relativa di un prodotto, capitolo 4) e controlla se 20,0 N·cm cade in ogni intervallo. Nelle conclusioni distingui le posizioni in cui la leva è vantaggiosa da quelle in cui è svantaggiosa e spiega perché il dinamometro va azzerato capovolto.

ESEMPIO SVOLTO

Analisi dei dati della leva

Problema. Con i dati della Tabella 11.2: a) verifica che F_m e b_m sono inversamente proporzionali e scrivi il valore della costante con la sua incertezza; b) rappresenta i dati in modo da ottenere una retta.

Soluzione. a) La media dei sei prodotti (calcolati con tutte le cifre) è 119,5 N·cm / 6 ≈ 19,9 N·cm. Il valore massimo è 20,25 N·cm, il minimo 19,50 N·cm: la semidispersione massima è (20,25 − 19,50) N·cm / 2 ≈ 0,4 N·cm. Quindi $F_m \cdot b_m$ = (19,9 ± 0,4) N·cm: il prodotto è costante entro le incertezze, e le due grandezze sono inversamente proporzionali. Il valore atteso, 20,0 N·cm, cade nell'intervallo, quindi la misura è compatibile con la condizione di equilibrio della leva.

b) Nel grafico di F_m in funzione di b_m i punti stanno su un ramo di iperbole (Figura 11.2a). Come nel capitolo 5, per linearizzare la relazione mettiamo sull'asse orizzontale $1/b_m$: i valori sono 0,200; 0,100; 0,0667; 0,0500; 0,0400; 0,0333 cm^{-1}. I punti si allineano su una retta passante per l'origine (Figura 11.2b), la cui pendenza è proprio il momento della forza resistente, circa 20 N·cm, cioè 0,20 N·m.

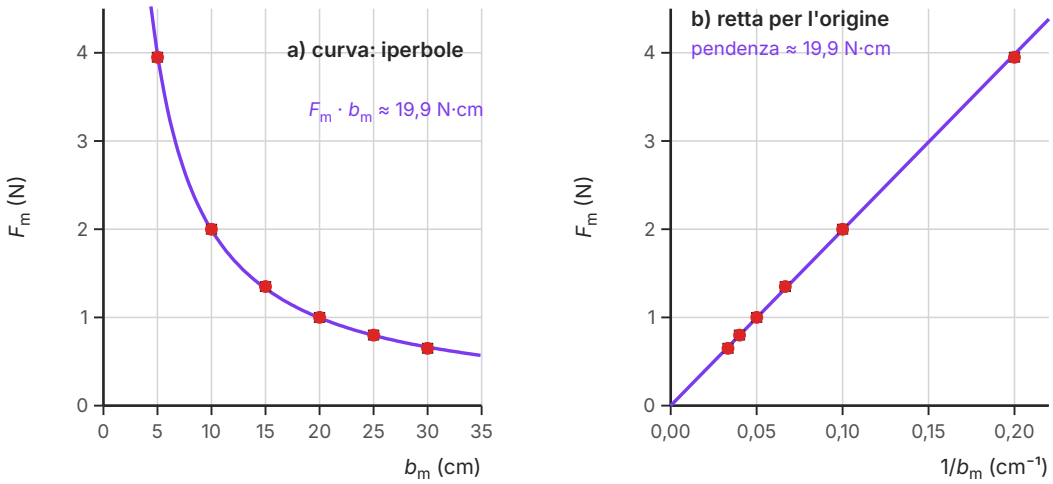


Figura 11.2 I dati della Tabella 11.2 (F_r = 2,00 N applicata a b_r = 10,0 cm dal fulcro). a) La forza motrice in funzione del suo braccio: i punti stanno sull'iperbole F_m = (19,9 N·cm)/b_m. b) La stessa forza in funzione di $1/b_m$: i punti si allineano su una retta passante per l'origine, con pendenza 19,9 N·cm. Le barre di incertezza (± 0,05 N) sono più piccole dei punti.

APPROFONDIMENTO

Archimede e la legge della leva

Le leve si usavano da millenni quando Archimede di Siracusa (circa 287–212 a.C.) ne diede la prima trattazione matematica che ci sia pervenuta, nell'opera *Sull'equilibrio dei piani*. Partendo da pochi postulati, per esempio che pesi uguali a distanze uguali dal fulcro si fanno equilibrio, dimostrò che due pesi sono in equilibrio quando le loro distanze dal fulcro sono inversamente proporzionali ai pesi: è la nostra $F_m\, b_m = F_r\, b_r$.

Alla scoperta sono legati due racconti tramandati da autori vissuti molti secoli dopo, che vanno letti come tradizioni e non come cronache. Pappo di Alessandria gli attribuisce la frase: «Dammi un punto su cui stare, e smuoverò la Terra» (traduzione nostra dal greco). Plutarco, nella *Vita di Marcello*, racconta che il re Gerone, incuriosito da queste affermazioni, gli chiese una dimostrazione, e che Archimede, seduto a distanza, trascinò da solo una nave da carico tirata in secca, usando un sistema di carrucole: un paranco, la macchina che studieremo nel paragrafo 11.3.

11.2.5 Il corpo umano come sistema di leve

Lo scheletro e i muscoli formano un vero sistema di leve. Le ossa sono le aste rigide, le articolazioni fanno da fulcro, i muscoli applicano la forza motrice tirando i tendini che si inseriscono sulle ossa; la forza resistente è il peso della parte del corpo da muovere, più quello di un eventuale oggetto. Ritroviamo tutti e tre i generi.

- **Primo genere: la testa.** Il cranio è in equilibrio sulla prima vertebra cervicale, che fa da fulcro. Il baricentro della testa si trova davanti all'articolazione, e i muscoli della nuca tirano dietro di essa per impedire alla testa di cadere in avanti. Quando ci si addormenta seduti, i muscoli si rilassano e la testa «ciondola» in avanti.
- **Secondo genere: sollevarsi in punta di piedi.** Il fulcro è la zona delle dita appoggiata a terra, il peso del corpo scende lungo la tibia fino alla caviglia, e il muscolo del polpaccio tira verso l'alto il tallone attraverso il tendine d'Achille, che è il punto più lontano dal fulcro.
- **Terzo genere: l'avambraccio.** Il fulcro è il gomito, il carico è nella mano, e il bicipite si inserisce sul radio a pochi centimetri dal gomito (Figura 11.3).

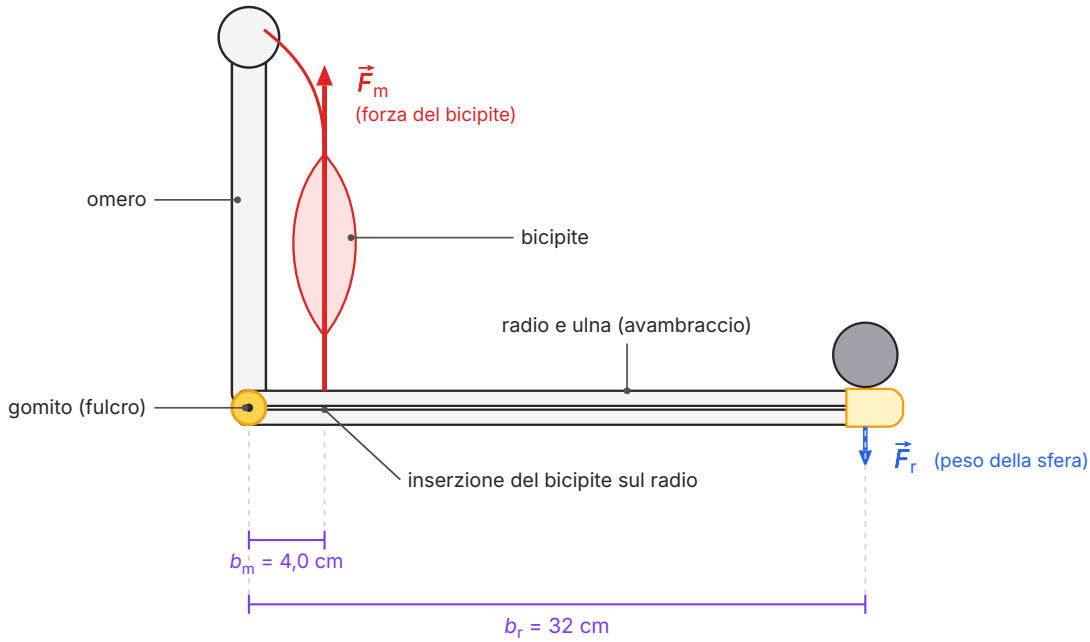


Figura 11.3 L'avambraccio come leva di terzo genere (schema). Il fulcro è il gomito; il bicipite si inserisce sul radio a 4,0 cm dal gomito e la sfera di 4,0 kg è nella mano, a 32 cm. Le frecce sono in scala: la forza del bicipite (circa 314 N) è otto volte il peso della sfera (39,2 N). Valori indicativi; il peso dell'avambraccio è trascurato e la forza del muscolo è considerata verticale.

COLLEGAMENTI

Scienze motorie: quanto tira il bicipite?

Teniamo in mano una sfera di 4,0 kg con l'avambraccio orizzontale e il braccio verticale, come nella Figura 11.3. Usiamo valori indicativi: il carico è a 32 cm dal gomito e il bicipite si inserisce a 4,0 cm dal gomito; trascuriamo il peso dell'avambraccio e consideriamo verticale la forza del muscolo. Il peso della sfera è 4,0 kg × 9,8 N/kg = 39,2 N, e la condizione di equilibrio della leva dà

$$F_{\text{m}} = 39{,}2\ \text{N} \times \frac{32\ \text{cm}}{4{,}0\ \text{cm}} \approx 314\ \text{N} \approx 3{,}1 \times 10^{2}\ \text{N}$$

Il bicipite deve tirare con una forza otto volte maggiore del peso sostenuto, quella che servirebbe a reggere una massa di circa 32 kg! E il gomito? La forza del muscolo verso l'alto supera il peso della sfera, quindi l'articolazione deve spingere l'avambraccio verso il *basso* con 314 N − 39 N ≈ 2,7 × 10^2 N. In cambio di questo svantaggio, un accorciamento del muscolo di 1 cm sposta la mano di circa 8 cm: il nostro braccio è costruito per muoversi in fretta e in ampiezza, non per sollevare con poco sforzo. È anche per questo che, in palestra, i preparatori raccomandano di tenere i carichi vicino al corpo: accorciare il braccio della resistenza riduce la forza richiesta ai muscoli e alle articolazioni, in particolare alla schiena quando si solleva un peso da terra.

11.3 La carrucola mobile e il paranco

11.3.1 La carrucola mobile

Nel capitolo 9 abbiamo visto che la carrucola fissa ideale cambia la direzione della tensione di una fune senza cambiarne il modulo. Le cose cambiano se la carrucola non è fissata al soffitto ma **si sposta insieme al carico**. Una **carrucola mobile** è una carrucola appesa a una fune che ha un estremo fissato a un sostegno, mentre all'altro estremo si applica la forza motrice; il carico è appeso al perno della carrucola (Figura 11.4a).

Consideriamo il caso ideale: fune inestensibile e di massa trascurabile, carrucola senza attrito e di massa trascurabile, tratti di fune verticali. Isoliamo la carrucola con il suo carico. Verso il basso agisce il peso P del carico; verso l'alto agiscono **due** tratti di fune, ciascuno con la stessa tensione T, perché la fune è una sola e la carrucola è ideale. La condizione di equilibrio dà $2T - P = 0$, cioè $T = P/2$. La mano tiene l'estremo libero della fune, quindi esercita una forza uguale alla tensione:

$$F = \frac{P}{2} \quad \text{(carrucola mobile ideale)}$$

Metà del peso è retta dal sostegno a cui è fissata la fune, metà dalla mano. Il prezzo è quello che ci aspettiamo: per sollevare il carico di 1 m, *entrambi* i tratti di fune devono accorciarsi di 1 m, e

la mano deve quindi tirare 2 m di fune.

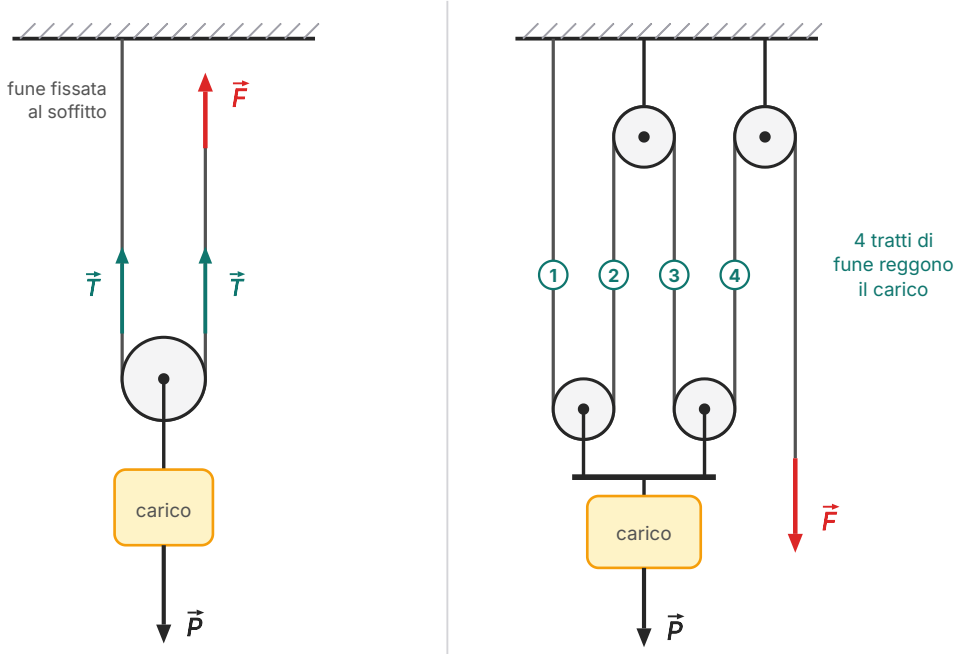
Nella carrucola mobile la forza va esercitata verso l'alto, cosa poco comoda. Per questo la si combina quasi sempre con una carrucola fissa, che riporta la fune verso il basso senza cambiare il modulo della forza.

11.3.2 Il paranco

Un **paranco** è un sistema di più carrucole: un gruppo di carrucole fisse è collegato al sostegno, un gruppo di carrucole mobili è collegato al carico, e un'unica fune passa alternativamente sulle une e sulle altre (Figura 11.4b). Il ragionamento è lo stesso della carrucola mobile: se il blocco mobile è sostenuto da n tratti di fune, tutti con la stessa tensione, in equilibrio $n\,T = P$, e la forza da esercitare all'estremo libero è

$$F = \frac{P}{n} \quad \text{(paranco ideale con } n \text{ tratti che reggono il carico)}$$

Per sollevare il carico di un tratto h, ciascuno degli n tratti si deve accorciare di h, e la mano deve tirare una lunghezza di fune pari a $n\,h$. Con un paranco a quattro tratti un operaio regge un carico di 800 N tirando con 200 N, ma per alzarlo di 1 m deve tirare 4 m di fune.



a) carrucola mobile: F = P/2 **b) paranco con 4 tratti: F = P/4**

Figura 11.4 a) Carrucola mobile ideale: il carico è retto da due tratti della stessa fune, con la stessa tensione T, quindi $F = T = P/2$. b) Paranco ideale con due carrucole fisse e due mobili: il blocco mobile è retto da 4 tratti di fune (numerati), quindi $F = P/4$; il tratto che scende verso la mano non regge il blocco mobile e non si conta. Lunghezze delle frecce non in scala.

Nel contare i tratti bisogna fare attenzione: valgono solo i tratti che **tengono il blocco mobile**. Nella Figura 11.4b il tratto libero, che dalla seconda carrucola fissa scende verso la mano, non è attaccato al blocco mobile e non va contato. Nei paranchi reali il peso delle carrucole mobili si aggiunge a quello del carico, e l'attrito sui perni fa sì che la forza necessaria sia un po' maggiore di P/n. I paranchi sono usati nelle gru, nei montacarichi delle officine, nelle barche a vela per cazzare le scotte e in montagna per le manovre di soccorso.

11.4 Il baricentro

11.4.1 Dove agisce il peso

Ogni piccola parte di un corpo è attratta dalla Terra: il peso è la somma di tantissime forze parallele, tutte verticali e rivolte verso il basso. Nel capitolo 10 abbiamo visto che più forze parallele e concordi si possono sostituire con un'unica forza, la loro risultante, applicata in un punto ben preciso. Per il peso questo punto ha un nome speciale.

Il **baricentro** (o centro di gravità), indicato con G, è il punto di applicazione della forza-peso di un corpo. In altre parole, ai fini dell'equilibrio possiamo immaginare che tutto il peso del corpo sia concentrato nel suo baricentro. Ecco perché un corpo appoggiato su un solo punto, o appeso a un solo filo, sta in equilibrio soltanto se il baricentro si trova sulla verticale del punto di appoggio o di sospensione: altrimenti il peso ha un braccio diverso da zero e fa ruotare il corpo.

Per gli oggetti di dimensioni ordinarie la posizione del baricentro dipende solo da come è distribuita la massa del corpo: se il corpo è rigido, il baricentro occupa sempre la stessa posizione rispetto al corpo, comunque lo si giri.

11.4.2 Il baricentro dei corpi simmetrici

Se un corpo è **omogeneo** (fatto dello stesso materiale in ogni sua parte) e ha un centro di simmetria, il baricentro coincide con quel centro: sta nel centro di una sfera, di un cubo, di un cilindro, a metà di un'asta uniforme. Se il corpo ha un asse o un piano di simmetria, il baricentro si trova su quell'asse o su quel piano: in un cono omogeneo, per esempio, sta sull'asse del cono, più vicino alla base che al vertice.

Per una lamina omogenea a forma di triangolo il baricentro si trova nel punto di incontro delle mediane, che si chiama infatti baricentro anche in geometria.

11.4.3 Il baricentro di due corpi su un'asta

Due corpi di masse m_1 e m_2 sono fissati a un'asta di massa trascurabile, nelle posizioni x_1 e x_2 misurate lungo l'asta. Dove si trova il baricentro del sistema? È il punto in cui dovremmo appoggiare l'asta su un solo supporto perché resti in equilibrio. Se x_G è quel punto, le condizioni del capitolo 10, scritte con polo nel supporto, richiedono che i momenti dei due pesi siano uguali e opposti:

$$m_1 g\,(x_G - x_1) = m_2 g\,(x_2 - x_G)$$

Il fattore g si semplifica. Risolvendo l'equazione di primo grado si trova

$$x_G = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2}$$

La posizione del baricentro è una **media pesata** delle posizioni, in cui ogni posizione «pesa» quanto la massa che vi si trova. Se le masse sono uguali il baricentro è a metà strada; se una massa è maggiore, il baricentro si avvicina a essa. Con tre o più corpi la formula si estende nel modo naturale: al numeratore la somma di tutti i prodotti $m\,x$, al denominatore la massa totale. Un corpo esteso e simmetrico, come un'asta omogenea, si tratta come una massa concentrata nel suo centro.

ESEMPIO SVOLTO

Un manubrio sbilanciato

Problema. Un manubrio da palestra ha una barra omogenea lunga 40 cm e di massa 2,0 kg; a un estremo è montato un disco di 5,0 kg e all'altro un disco di 2,5 kg (considera i dischi concentrati agli estremi della barra). Dove si trova il baricentro? Dove andrebbe impugnato per tenerlo orizzontale senza fatica di polso?

Soluzione. Asse x lungo la barra con origine nel disco di 5,0 kg, verso positivo verso l'altro disco. Posizioni: disco grande $x_1 = 0$, barra (nel suo centro) $x_2 = 20$ cm, disco piccolo $x_3 = 40$ cm.

$$x_G = \frac{5{,}0\ \text{kg} \times 0 + 2{,}0\ \text{kg} \times 20\ \text{cm} + 2{,}5\ \text{kg} \times 40\ \text{cm}}{5{,}0\ \text{kg} + 2{,}0\ \text{kg} + 2{,}5\ \text{kg}} = \frac{140\ \text{kg·cm}}{9{,}5\ \text{kg}} \approx 15\ \text{cm}$$

Il baricentro è a circa 15 cm dal disco più pesante: è lì che va impugnato il manubrio, perché la mano lo regga senza che il polso debba equilibrare un momento.

Controllo. Il risultato è compreso fra 0 e 20 cm, cioè dalla parte del disco più pesante, come deve essere. Trascurando la barra si otterrebbe 2,5 × 40 / 7,5 ≈ 13 cm: la barra, che ha il suo baricentro a metà, sposta G un po' verso il centro.

11.4.4 Trovare il baricentro con un filo a piombo

Per un corpo di forma irregolare il calcolo è difficile, ma c'è un metodo sperimentale semplice ed elegante, che vale per una lamina piana (una sagoma di cartone, una piastra di compensato). Si fanno due piccoli fori A e B vicino al bordo, lontani fra loro (Figura 11.5).

1. Si appende la lamina a un chiodo attraverso il foro A, lasciandola libera di ruotare. Quando si ferma, il suo baricentro è sulla verticale di A. Si appende allo stesso chiodo un **filo a piombo**, cioè un filo con un pesetto, che si dispone esattamente lungo la verticale, e si traccia sulla lamina la retta che esso individua.
2. Si ripete appendendo la lamina in B e si traccia la seconda retta.
3. Il baricentro si trova su entrambe le rette, quindi nel loro **punto di incontro**. Per controllo si può appendere la lamina a un terzo foro: la terza verticale passerà per lo stesso punto.

Una verifica ancora più semplice: una lamina appoggiata su una punta di matita esattamente sotto G resta in equilibrio orizzontale.

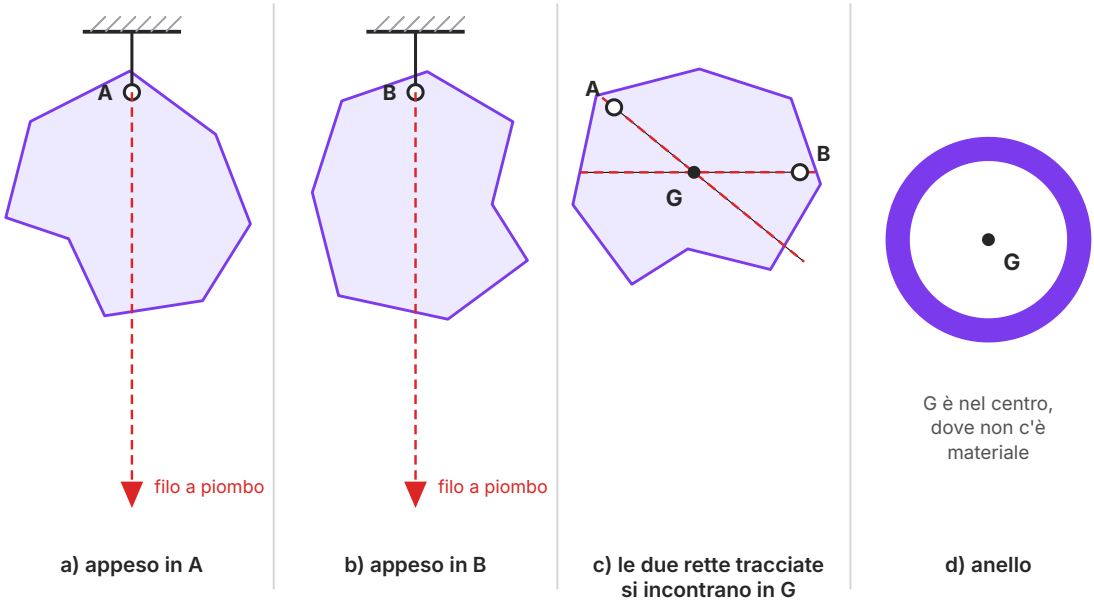


Figura 11.5 Come si trova il baricentro di una lamina. a) Appesa nel foro A, la lamina ruota finché G si trova sulla verticale di A, indicata dal filo a piombo. b) Lo stesso con il foro B. c) Le due rette tracciate sulla lamina si incontrano nel baricentro G (la sua posizione è stata calcolata per la sagoma disegnata). d) In un anello omogeneo G è nel centro, fuori dal materiale.

11.4.5 Un baricentro fuori dal corpo

Il baricentro non è necessariamente un punto del materiale di cui il corpo è fatto. In un anello omogeneo, per simmetria, G si trova nel centro, dove non c'è materiale (Figura 11.5d). Lo stesso accade in un ferro di cavallo, in un boomerang, in una sedia, in una tazza: in tutti questi oggetti il baricentro si trova in una zona «vuota». Anche il corpo umano cambia la posizione del proprio baricentro quando cambia postura: in piedi con le braccia lungo i fianchi, G si trova all'altezza del bacino, dentro il corpo; piegandosi in avanti a toccare le punte dei piedi, G finisce fuori dal corpo, nello spazio sotto il busto.

ERRORE FREQUENTE

«Il baricentro sta sempre a metà del corpo» e «il baricentro è sempre dentro il corpo» sono due errori diffusi. Il baricentro sta nel centro geometrico solo nei corpi omogenei e simmetrici: in una scopa è molto più vicino alla spazzola che all'estremità del manico, in un martello è molto vicino alla testa di acciaio. E può trovarsi fuori dal materiale, come nell'anello. Ricorda la definizione: G è il punto di applicazione del peso, e la sua posizione dipende da come è distribuita la massa.

11.5 Equilibrio e stabilità

11.5.1 Tre tipi di equilibrio

Un corpo può essere in equilibrio, ma che cosa succede se lo spostiamo di poco? Una matita appesa per un estremo e una matita in piedi sulla punta sono entrambe in equilibrio, ma la prima, se la tocchiamo, torna nella sua posizione, la seconda cade. Distinguiamo tre casi (Figura 11.6).

- L'**equilibrio stabile**: spostato di poco dalla posizione di equilibrio, il corpo tende a **tornarci**.
- L'**equilibrio instabile**: spostato di poco, il corpo tende ad **allontanarsene** sempre di più.
- L'**equilibrio indifferente**: spostato di poco, il corpo resta in equilibrio **anche nella nuova posizione**.

Per un corpo che può ruotare attorno a un perno O il tipo di equilibrio dipende dalla posizione del baricentro rispetto al perno. Se G si trova **sotto** O, ruotando il corpo di poco il baricentro si alza e il peso, che ora ha un braccio diverso da zero, produce un momento che riporta il corpo indietro: l'equilibrio è stabile. È il caso di un quadro appeso al chiodo, di un'altalena, di un pendolo. Se G si trova **sopra** O, ruotando il corpo il baricentro si abbassa e il momento del peso allontana il corpo dalla posizione iniziale: l'equilibrio è instabile, come per un bastone in equilibrio sulla punta di un dito. Se il perno passa **per** G, il peso ha sempre braccio nullo e il corpo sta fermo in qualsiasi posizione: l'equilibrio è indifferente, come per una ruota di bicicletta ben centrata sul suo asse.

Si può riassumere tutto in un criterio solo: un equilibrio è stabile se ogni piccolo spostamento **alza** il baricentro, instabile se lo **abbassa**, indifferente se lo lascia alla stessa quota. Lo stesso criterio vale per una pallina appoggiata sul fondo di una ciotola (stabile), in cima a una cupola (instabile) o su un tavolo orizzontale (indifferente).

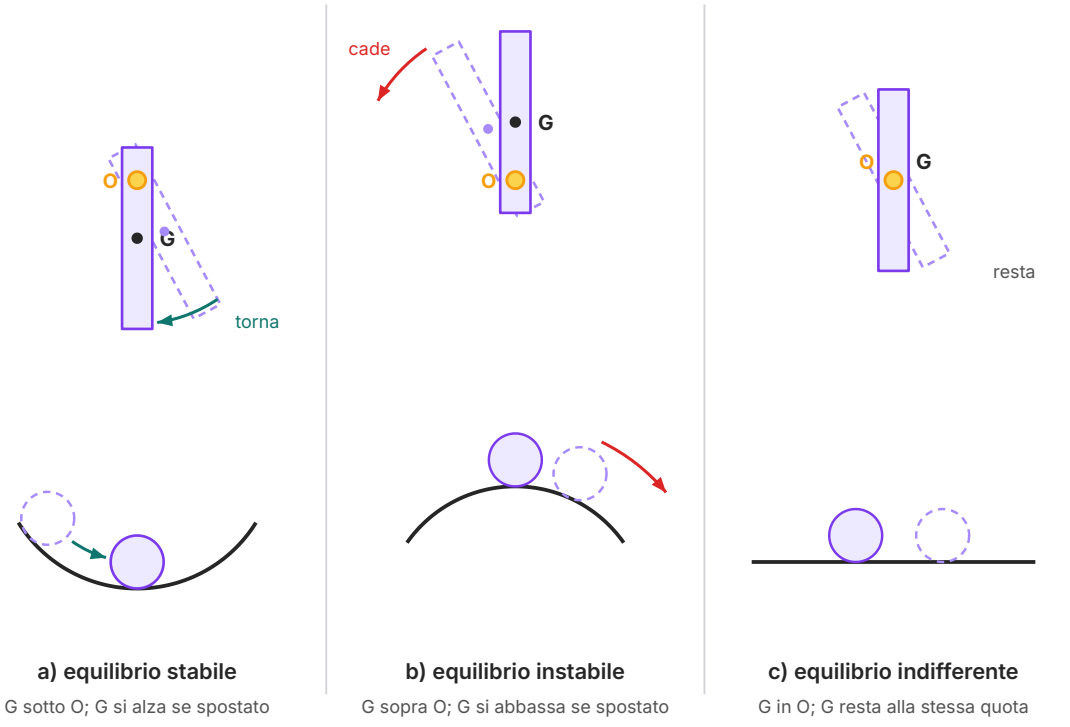


Figura 11.6 I tre tipi di equilibrio. In alto un'asta che può ruotare attorno a un perno O, in basso una pallina appoggiata; in tratteggio una posizione spostata di poco. a) G sotto O, pallina in una ciotola: il corpo torna indietro. b) G sopra O, pallina su una cupola: il corpo si allontana sempre di più. c) Perno nel baricentro, pallina su un piano orizzontale: il corpo resta in equilibrio anche nella nuova posizione.

11.5.2 Corpi appoggiati: la base d'appoggio

Un corpo appoggiato su un piano lo tocca in uno o più punti: le quattro gambe di un tavolo, i due piedi di una persona, l'intera faccia inferiore di una scatola. Il poligono che si ottiene unendo i punti di contatto più esterni si chiama **base d'appoggio** (o poligono d'appoggio). Per un tavolo è il rettangolo che ha per vertici le quattro gambe; per una persona in piedi è la zona che comprende i due piedi e lo spazio fra di essi.

La condizione perché un corpo appoggiato resti in equilibrio senza ribaltarsi è semplice: **la verticale passante per il baricentro deve cadere dentro la base d'appoggio**. Se cade fuori, il peso ha un momento rispetto allo spigolo più vicino che il piano d'appoggio non può equilibrare, perché il piano può solo spingere, non tirare: il corpo si ribalta.

Guardiamo la Figura 11.7. Una cassa alta viene inclinata facendola ruotare attorno a uno spigolo inferiore, che fa da perno. Finché la verticale per G cade dalla parte della cassa rispetto al perno, il momento del peso la riporta giù sulla sua base: la cassa era in equilibrio stabile. Quando la verticale per G supera il perno, il momento del peso cambia verso e la cassa si ribalta. Al

limite fra le due situazioni il baricentro si trova esattamente sulla verticale del perno: è un equilibrio instabile, e basta un soffio per decidere da che parte cadrà.

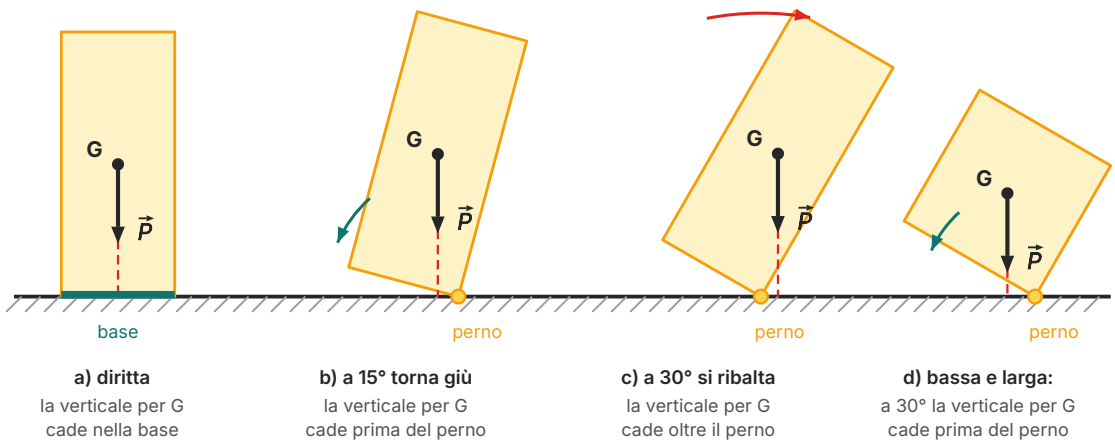


Figura 11.7 Una cassa omogenea larga 60 cm e alta 140 cm viene inclinata facendola ruotare attorno allo spigolo destro della base (il perno). a) Diritta, la verticale per G cade nella base. b) A 15° la verticale per G cade ancora prima del perno e il peso riporta la cassa sulla base. c) A 30° la verticale supera il perno e la cassa si ribalta: l'angolo limite è circa 23° (pendenza 30/70 ≈ 0,43). d) Una cassa larga e alta 80 cm, inclinata di 30°, torna sulla base: il suo angolo limite è 45°.

11.5.3 Come si rende stabile un corpo

Nella situazione limite della Figura 11.7 il segmento che va dallo spigolo al baricentro è verticale. Il triangolo che ha per vertici lo spigolo, il centro della base e G ha cateti uguali alla semilarghezza della base e all'altezza del baricentro. Ripetendo il ragionamento sui triangoli simili del capitolo 9, si trova che un corpo omogeneo con base rettangolare, posato su un piano inclinato abbastanza ruvido da non scivolare, si ribalta quando la pendenza del piano supera il rapporto

$$\frac{h}{b} = \frac{\text{semilarghezza della base}}{\text{altezza del baricentro}}$$

Lo stesso rapporto dice di quanto si può inclinare il corpo, sollevandolo da un lato, prima che si rovesci. Per la cassa alta della Figura 11.7, larga 60 cm e alta 140 cm, il rapporto vale 30/70 ≈ 0,43, cioè circa 23°; per la cassa bassa, larga e alta 80 cm, vale 40/40 = 1, cioè 45°. Ne seguono due regole pratiche: un corpo è tanto più stabile quanto **più larga è la sua base d'appoggio** e quanto **più in basso si trova il suo baricentro**.

Queste regole si vedono applicate ovunque. Le auto da corsa hanno il baricentro molto vicino all'asfalto e le ruote molto distanziate, per non ribaltarsi nelle curve. Nei camion e negli scaffali i carichi pesanti vanno messi in basso; per lo stesso motivo un bicchiere riempito fino all'orlo si rovescia più facilmente di uno che contiene solo un dito d'acqua, perché l'acqua sul fondo abbassa il baricentro, mentre quella in alto lo alza. Le gru da cantiere portano sul braccio opposto un pesante contrappeso e alla base grandi blocchi di zavorra. Il funambolo usa un'asta lunga, spesso piegata verso il basso alle estremità: l'asta abbassa il baricentro del sistema funambolo più asta e rende più lente le sue oscillazioni, dando al funambolo il tempo di correggerle. Una persona in piedi allarga i piedi quando il bus frena, e quando porta una valigia pesante in una mano si piega dal lato opposto, per riportare la verticale del baricentro comune dentro la base d'appoggio.

L'esempio più celebre è la Torre di Pisa, il campanile del Duomo, alto circa 56 m. La sua costruzione cominciò nel 1173, e la torre iniziò a inclinarsi già durante i lavori, perché il terreno sotto le fondazioni è soffice e cedette di più da un lato. La torre sta in piedi perché la verticale del suo baricentro cade ancora dentro la base d'appoggio. Nel 1990 fu chiusa al pubblico per il timore che l'inclinazione continuasse a crescere; dopo lavori di consolidamento, in cui fra l'altro fu asportato con cautela del terreno da sotto il lato opposto a quello pendente, l'inclinazione si è ridotta e la torre è stata riaperta nel 2001.

ESEMPIO SVOLTO

Quando si ribalta una libreria?

Problema. Una libreria omogenea vuota, di massa 60 kg, è alta 1,80 m e profonda 0,30 m, e poggia su un pavimento orizzontale. a) Di quanto la si può inclinare in avanti, facendola ruotare attorno allo spigolo anteriore della base, prima che si ribalti? b) Si riempiono i ripiani bassi con libri pesanti e il baricentro scende a 0,60 m da terra: come cambia il risultato? c) Libreria vuota: quale forza orizzontale, applicata in cima e diretta in avanti, basta a cominciare a ribaltarla (supponi che la base non scivoli)?

Soluzione. a) La libreria è omogenea: G sta a metà dell'altezza (0,90 m) e a metà della profondità (0,15 m dallo spigolo anteriore). Il rapporto limite è 0,15 m / 0,90 m ≈ 0,17: la libreria si ribalta se la si inclina oltre una pendenza di 0,17, cioè circa 9,5°.

b) Con G a 0,60 m il rapporto diventa 0,15 / 0,60 = 0,25, cioè circa 14°: la libreria è più stabile, anche se la base è la stessa.

c) Prendiamo come polo lo spigolo anteriore della base, attorno al quale avverrebbe la rotazione. Il peso $P = 60\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 588\ \text{N}$ ha braccio 0,15 m (distanza orizzontale dello spigolo dalla verticale per G) e tende a tenere giù la libreria; la forza F orizzontale applicata in cima ha braccio 1,80 m (distanza verticale dello spigolo dalla sua retta d'azione) e tende a ribaltarla. La libreria comincia a sollevarsi quando il momento di F supera quello del peso:

$$F \cdot 1{,}80\ \text{m} = 588\ \text{N} \times 0{,}15\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad F = 49\ \text{N}$$

Controllo. Una forza di circa 49 N, pari al peso di un oggetto di 5 kg, basta a rovesciare un mobile di 60 kg: è il motivo per cui le librerie alte vanno fissate al muro, specialmente nelle case dove ci sono bambini che potrebbero arrampicarsi sui ripiani.

IN SINTESI

vantaggio meccanico = F_r/F_m: quante volte la forza resistente è più grande della forza motrice che la equilibra; un vantaggio maggiore di 1 si paga con uno spostamento maggiore della mano.

$F_m\ b_m = F_r\ b_r$: una leva è in equilibrio quando i momenti delle due forze rispetto al fulcro hanno lo stesso modulo; la forza motrice è inversamente proporzionale al suo braccio.

$F_r/F_m = b_m/b_r$: la leva è vantaggiosa se $b_m > b_r$, svantaggiosa se $b_m < b_r$, indifferente se i bracci sono uguali.

$F = P/2$ (carrucola mobile) e **$F = P/n$** (paranco con n tratti che reggono il carico): la forza si divide fra i tratti di fune, ma la mano tira una lunghezza di fune n volte maggiore dello spostamento del carico.

$x_G = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$: il baricentro di due corpi è la media delle loro posizioni pesata con le masse; è più vicino al corpo più pesante.

Stabilità: un corpo appeso è in equilibrio stabile se G è sotto il punto di sospensione; un corpo appoggiato non si ribalta finché la verticale per G cade dentro la base d'appoggio, e si ribalta su un piano inclinato quando la pendenza supera il rapporto fra la semilarghezza della base e l'altezza di G.

Con questo capitolo si chiude lo studio dell'equilibrio dei solidi. Nella prossima parte applicheremo le stesse idee, forza, equilibrio e peso, ai corpi che non hanno forma propria: i liquidi e i gas.

SINTESI

- Una macchina semplice equilibra una forza resistente con una forza motrice di modulo, direzione o punto di applicazione diversi; il vantaggio meccanico è il rapporto F_r/F_m.
- Nessuna macchina semplice riduce insieme la forza e lo spostamento: una forza minore va esercitata lungo un percorso più lungo.
- Una leva è un corpo rigido che ruota attorno a un fulcro; i bracci sono le distanze dal fulcro alle rette d'azione delle forze.
- Condizione di equilibrio della leva: $F_m\, b_m = F_r\, b_r$; la reazione del fulcro si trova imponendo che la risultante sia nulla.
- Una leva è vantaggiosa se $b_m > b_r$, svantaggiosa se $b_m < b_r$, indifferente se i bracci sono uguali.
- Primo genere: fulcro in mezzo (forbici); secondo genere: resistenza in mezzo, sempre vantaggiosa (carriola); terzo genere: forza motrice in mezzo, sempre svantaggiosa (pinzette, avambraccio).
- Il corpo umano è un sistema di leve; l'avambraccio è una leva di terzo genere che sacrifica la forza in cambio di ampiezza e rapidità di movimento.
- Con una carrucola mobile ideale $F = P/2$; con un paranco ideale $F = P/n$, dove n è il numero di tratti di fune che reggono il blocco mobile.
- Il baricentro è il punto di applicazione del peso; nei corpi omogenei e simmetrici coincide con il centro di simmetria e può trovarsi fuori dal materiale.
- Il baricentro di più corpi è la media delle posizioni pesata con le masse; quello di una lamina si trova con due fili a piombo.
- Un corpo sospeso è in equilibrio stabile se G è sotto il perno, instabile se è sopra, indifferente se coincide con il perno.
- Un corpo appoggiato non si ribalta finché la verticale per G cade dentro la base d'appoggio; la stabilità aumenta allargando la base e abbassando il baricentro.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In una leva di secondo genere:
   - **A.** il fulcro si trova fra la forza motrice e la forza resistente
   - **B.** la forza resistente si trova fra il fulcro e la forza motrice
   - **C.** la forza motrice si trova fra il fulcro e la forza resistente
   - **D.** le due forze agiscono nello stesso punto

2. ● Una leva è in equilibrio quando:

   A. $F_m = F_r$
   B. $F_m\, b_r = F_r\, b_m$
   C. $b_m = b_r$
   D. $F_m\, b_m = F_r\, b_r$

3. ●● Con un piede di porco si vuole equilibrare una forza resistente di 600 N che agisce a 5,0 cm dal fulcro, spingendo a 75 cm dal fulcro. La forza necessaria è:

   A. 40 N
   B. 120 N
   C. 600 N
   D. $9{,}0 \times 10^3$ N

4. ● Le pinzette per sopracciglia sono una leva:

   A. di primo genere, vantaggiosa
   B. di secondo genere, vantaggiosa
   C. di terzo genere, svantaggiosa
   D. di primo genere, indifferente

5. ● Una leva è vantaggiosa quando:

   A. il braccio della forza motrice è più corto di quello della resistenza
   B. il braccio della forza motrice è più lungo di quello della resistenza
   C. la forza motrice è maggiore della forza resistente
   D. il fulcro si trova a un'estremità

6. ●● Un carico di 600 N è appeso a un paranco ideale in cui il blocco mobile è retto da 4 tratti di fune. Per tenerlo fermo serve una forza di:

   A. 600 N
   B. 300 N
   C. 2400 N
   D. 150 N

7. ● Il baricentro di un anello omogeneo si trova:

   A. nel centro dell'anello, dove non c'è materiale
   B. in un punto qualsiasi del bordo
   C. nel punto più basso dell'anello
   D. non esiste, perché l'anello è vuoto al centro

8. ●● Un corpo che può ruotare attorno a un perno è in equilibrio stabile quando il suo baricentro:
   A. coincide con il perno
   B. si trova sulla verticale del perno, sopra di esso
   C. si trova sulla verticale del perno, sotto di esso
   D. si trova sulla stessa orizzontale del perno

9. ●● Su un'asta di massa trascurabile sono fissate una massa di 2,0 kg nel punto $x = 0$ e una massa di 6,0 kg nel punto $x = 0{,}80$ m. Il baricentro del sistema è in:
   A. $x = 0{,}40$ m
   B. $x = 0{,}20$ m
   C. $x = 0{,}53$ m
   D. $x = 0{,}60$ m

10. ● Un corpo appoggiato su un piano si ribalta quando:
    A. la verticale per il baricentro cade fuori dalla base d'appoggio
    B. il baricentro si trova più in alto della metà della sua altezza
    C. la base è più stretta dell'altezza
    D. il peso supera la reazione del piano

Vero o falso

11. ● Una macchina semplice permette di equilibrare un carico con una forza minore del suo peso, ma il punto in cui agisce la forza deve compiere uno spostamento maggiore. V / F

12. ● Una leva di secondo genere può essere svantaggiosa. V / F

13. ●● Con una carrucola mobile ideale, per sollevare un carico di 20 cm bisogna tirare 40 cm di fune. V / F

14. ● Il baricentro di un corpo si trova sempre all'interno del materiale di cui il corpo è fatto. V / F

15. ●● A parità di base d'appoggio, abbassare il baricentro di un corpo appoggiato ne aumenta la stabilità. V / F

Applicare

16. ● Indica il genere di ciascuna leva e se è vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente: a) forbici da potatura con manici lunghi e lame corte; b) schiaccianoci; c) canna da pesca; d) altalena a bilico con due bambini seduti alla stessa distanza dal fulcro; e) levacapsule.

17. ● In una leva di primo genere la forza resistente, di 450 N, agisce a 0,30 m dal fulcro; la forza motrice agisce dalla parte opposta, a 1,5 m dal fulcro. Entrambe le forze sono verticali e dirette verso il basso. Calcola la forza motrice necessaria per l'equilibrio e la reazione del fulcro.

18. ●● Una carriola carica pesa in tutto 900 N; il suo baricentro si trova, in orizzontale, a 0,45 m dall'asse della ruota e le mani impugnano i manici a 1,35 m dall'asse. Calcola la forza verticale esercitata dalle mani e la reazione del terreno sulla ruota.

19. ● Con una carrucola mobile ideale si solleva un secchio di malta di 12 kg. Calcola la forza necessaria e la lunghezza di fune da tirare per alzare il secchio di 1,5 m.

20. ●● Usa il grafico della Figura 11.2a. a) Quanto vale la forza motrice quando $b_m = 20$ cm? b) Per quale braccio la forza motrice vale 2,0 N? c) Che cosa rappresenta il prodotto $F_m \cdot b_m$, e quanto vale? d) Prevedi la forza motrice per $b_m = 40$ cm.

21. ●● Un'asta di massa trascurabile, lunga 1,20 m, porta a un estremo una massa di 3,0 kg e all'altro una massa di 1,0 kg. A quale distanza dalla massa di 3,0 kg si trova il baricentro?

22. ● Completa: in una leva di terzo genere la forza _____ si trova fra il fulcro e la forza _____ ; il braccio della forza motrice è sempre _____ di quello della forza resistente, quindi la leva è sempre _____ .

23. ●●● a) Di quale angolo si può inclinare un cubo omogeneo, facendolo ruotare attorno a uno spigolo della base, prima che si ribalti? b) E un parallelepipedo omogeneo a base quadrata di lato 30 cm e alto 90 cm, posato sulla base quadrata? Esprimi il secondo risultato come pendenza.

Problemi

24. ●●● Una ragazza tiene in mano un manubrio di 5,0 kg con l'avambraccio orizzontale; il manubrio è a 30 cm dal gomito e il bicipite, che consideriamo verticale, si inserisce a 4,0 cm dal gomito. a) Calcola la forza del bicipite trascurando il peso dell'avambraccio. b) Ripeti il calcolo tenendo conto del peso dell'avambraccio, 15 N, applicato a 14 cm dal gomito. c) Nel caso b, calcola modulo e verso della forza che il gomito esercita sull'avambraccio.

25. ●●● Un'altalena a bilico è formata da un'asse lunga 4,0 m, di peso 200 N, imperniata nel suo centro. Un bambino di 30 kg siede a 1,8 m dal fulcro. a) A quale distanza dal fulcro, dall'altra parte, deve sedersi un bambino di 36 kg perché l'asse resti in equilibrio orizzontale? b) Quanto vale la reazione del fulcro? c) Il bambino di 36 kg si sposta all'estremità dell'asse. Quale forza verticale, diretta verso il basso, deve esercitare un adulto sull'asse, a 1,0 m dal fulcro dalla parte del bambino più leggero, per mantenere l'equilibrio?

26. ●● In un'officina un motore di 180 kg è sollevato con un paranco ideale in cui il blocco mobile è retto da 6 tratti di fune. a) Quale forza bisogna esercitare sull'estremo libero della fune? b) Quanti metri di fune bisogna tirare per alzare il motore di 50 cm? c) Un meccanico di 70 kg può reggere il motore appendendosi con tutto il suo peso all'estremo libero della fune?

27. ●● Un'asta omogenea lunga 1,0 m e di massa 2,0 kg porta a un estremo una massa di 3,0 kg e all'altro una massa di 5,0 kg. a) Trova la posizione del baricentro del sistema, misurata dall'estremo con la massa di 3,0 kg. b) Si appende il sistema a un filo legato nel baricentro: calcola la tensione del filo.

28. ●●● Un armadio omogeneo di 80 kg è alto 2,0 m e profondo 0,60 m e poggia su un pavimento orizzontale. a) Di quanto lo si può inclinare in avanti, facendolo ruotare attorno allo spigolo anteriore della base, prima che si ribalti? Esprimi il risultato come pendenza e, con la calcolatrice, come angolo. b) Quale forza orizzontale, applicata sul bordo superiore e diretta in avanti, basta per cominciare a ribaltarlo, se la base non scivola? c) Spiega perché si raccomanda di fissare al muro gli armadi alti.

29. ● Uno schiaccianoci ha la cerniera a un estremo; la noce è a 2,5 cm dalla cerniera e la mano stringe i bracci a 15 cm dalla cerniera. Il guscio si rompe quando la forza su di esso raggiunge 300 N. Quale forza deve esercitare la mano? Quanto vale il vantaggio meccanico?

30. ●●● Un carico di 20 kg è appeso a una carrucola mobile di massa 1,0 kg; un estremo della fune è legato a un gancio del soffitto e l'altro è tirato verso l'alto dalla mano, con i due tratti verticali. a) Quale forza esercita la mano per tenere fermo il carico? b) Con quale forza la fune tira il gancio del soffitto? c) Quanta fune bisogna tirare per sollevare il carico di 2,0 m?

Ragionare e argomentare

31. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Con una leva di vantaggio meccanico 4 posso alzare di 10 cm un sasso di 400 N spingendo con soli 100 N e muovendo la mano di 10 cm: così faccio quattro volte meno fatica». Che cosa c'è di sbagliato?

32. ●● Per alzarsi da una sedia senza aiutarsi con le mani bisogna prima portare il busto in avanti, oppure spostare i piedi sotto la sedia. Spiega perché, usando i concetti di baricentro e di base d'appoggio.

33. ●●● Progetta un esperimento per trovare il baricentro di una scopa usando solo le dita e un metro a nastro. Poi rispondi: se si tagliasse la scopa nel punto del baricentro, i due pezzi avrebbero la stessa massa? Motiva la risposta con la condizione di equilibrio della leva.

PER APPROFONDIRE

- [ARC] Archimede, *Sui corpi galleggianti*: vi si ritrova lo stesso metodo rigoroso con cui, nel trattato *Sull'equilibrio dei piani*, Archimede aveva dimostrato la legge della leva e trovato il baricentro di varie figure piane; ti servirà anche nella parte sui fluidi.
- [HEW] P.G. Hewitt, *Conceptual Physics*: i capitoli sul momento e sul baricentro propongono molti esempi quotidiani di stabilità, dal corpo umano agli edifici.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla statica discute le macchine semplici e il principio che «non si ottiene niente per niente».
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sull'equilibrio contiene problemi sulle leve, sui baricentri e sul ribaltamento.

Glossario del capitolo

Baricentro
Punto di applicazione della forza-peso di un corpo, indicato con G; nei corpi omogenei e simmetrici coincide con il centro di simmetria e può trovarsi fuori dal materiale.

Base d'appoggio
Poligono che ha per vertici i punti di contatto più esterni fra un corpo e il piano su cui poggia; il corpo non si ribalta finché la verticale per il baricentro cade al suo interno.

Carrucola mobile
Carrucola che si sposta insieme al carico, appesa a una fune con un estremo fisso; nel caso ideale la forza necessaria è metà del peso.

Condizione di equilibrio della leva
$F_m\, b_m = F_r\, b_r$: i momenti della forza motrice e della forza resistente rispetto al fulcro hanno lo stesso modulo.

Equilibrio indifferente
Equilibrio in cui il corpo, spostato di poco, resta in equilibrio anche nella nuova posizione; il baricentro resta alla stessa quota.

Equilibrio instabile
Equilibrio in cui il corpo, spostato di poco, tende ad allontanarsi sempre di più dalla posizione iniziale; ogni piccolo spostamento abbassa il baricentro.

Equilibrio stabile
Equilibrio in cui il corpo, spostato di poco, tende a tornare nella posizione iniziale; ogni piccolo spostamento alza il baricentro.

Filo a piombo
Filo con un pesetto all'estremo, che in equilibrio si dispone lungo la verticale; si usa per trovare sperimentalmente il baricentro di una lamina.

Forza motrice
In una macchina semplice, la forza che si applica per equilibrare o vincere la forza resistente; simbolo F_m.

Forza resistente
In una macchina semplice, la forza da equilibrare o vincere, per esempio il peso del carico; simbolo F_r.

Fulcro
Punto, o asse, fisso attorno al quale ruota una leva.

Leva
Corpo rigido che può ruotare attorno a un punto o a un asse fisso, il fulcro, sotto l'azione di una forza motrice e di una forza resistente.

Leva di primo genere
Leva in cui il fulcro si trova fra la forza motrice e la forza resistente; può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente (forbici, altalena a bilico).

Leva di secondo genere
Leva in cui la forza resistente si trova fra il fulcro e la forza motrice; è sempre vantaggiosa (carriola, schiaccianoci).

Leva di terzo genere
Leva in cui la forza motrice si trova fra il fulcro e la forza resistente; è sempre svantaggiosa (pinzette, avambraccio).

Leva vantaggiosa
Leva in cui il braccio della forza motrice è maggiore di quello della forza resistente, così che $F_m < F_r$; se i bracci sono uguali la leva è indifferente, se $b_m < b_r$ è svantaggiosa.

Macchina semplice
Dispositivo che permette di equilibrare una forza resistente con una forza motrice di modulo, direzione o punto di applicazione diversi; per esempio la leva e la carrucola.

Paranco
Sistema di carrucole fisse e mobili percorse da un'unica fune; nel caso ideale, se il blocco mobile è retto da n tratti, la forza necessaria è P/n.

Vantaggio meccanico
Rapporto F_r/F_m fra la forza resistente e la forza motrice che la equilibra; per una leva è uguale a b_m/b_r.

Soluzioni

1. B. Nella leva di secondo genere la resistenza sta fra il fulcro e la forza motrice.

2. D. In equilibrio i momenti rispetto al fulcro hanno lo stesso modulo: $F_m\, b_m = F_r\, b_r$.

3. A. $F_m = F_r\, b_r / b_m$ = 600 N × 5,0 cm / 75 cm = 40 N.

4. C. La forza delle dita è applicata fra la cerniera (fulcro) e le punte che stringono (resistenza): terzo genere, sempre svantaggiosa.

5. B. Dalla condizione di equilibrio, $F_m < F_r$ se e solo se $b_m > b_r$.

6. D. $F = P/n$ = 600 N / 4 = 150 N.

7. A. Per simmetria il baricentro è nel centro, anche se lì non c'è materiale.

8. C. Con G sotto il perno, un piccolo spostamento alza G e il momento del peso riporta il corpo indietro.

9. D. x_G = (2,0 kg × 0 + 6,0 kg × 0,80 m)/(8,0 kg) = 0,60 m, più vicino alla massa maggiore.

10. A. Se la verticale per G esce dalla base, il peso ha un momento rispetto allo spigolo che il piano non può equilibrare.

11. V. Una forza minore si paga con uno spostamento maggiore: nessuna macchina semplice riduce insieme forza e spostamento.

12. F. Nella leva di secondo genere la resistenza sta fra fulcro e forza motrice, quindi $b_m > b_r$: è sempre vantaggiosa.

13. V. Il carico è retto da due tratti di fune, ciascuno dei quali deve accorciarsi di 20 cm: in tutto si tirano 40 cm di fune.

14. F. Il baricentro può trovarsi fuori dal materiale, come nel centro di un anello o di un ferro di cavallo.

15. V. Con G più basso il corpo si può inclinare di più prima che la verticale per G esca dalla base (rapporto semilarghezza/altezza di G maggiore).

16. a) Primo genere, vantaggiosa (manici più lunghi delle lame). b) Secondo genere, vantaggiosa. c) Terzo genere, svantaggiosa. d) Primo genere, indifferente (bracci uguali). e) Secondo genere, vantaggiosa (il fulcro è il punto in cui l'apribottiglie poggia sulla sommità del tappo, la resistenza agisce nel dente che aggancia il bordo del tappo, la mano è all'estremità del manico).

17. F_m = 450 N × 0,30 m / 1,5 m = 90 N. Le due forze sono verso il basso, quindi la reazione del fulcro è verso l'alto e vale 450 N + 90 N = 540 N ≈ 5,4 × 10^2 N.

18. Leva di secondo genere: F_m = 900 N × 0,45 m / 1,35 m = 300 N = 3,0 × 10^2 N. Reazione della ruota: N = 900 N − 300 N = 600 N = 6,0 × 10^2 N.

19. P = 12 kg × 9,8 N/kg = 117,6 N; $F = P/2$ = 58,8 N ≈ 59 N. Fune da tirare: 2 × 1,5 m = 3,0 m.

20. a) Circa 1,0 N. b) Circa 10 cm. c) È il momento della forza resistente rispetto al fulcro, circa 20 N·cm = 0,20 N·m (dai dati: 19,9 N·cm). d) F_m ≈ 20 N·cm / 40 cm = 0,50 N.

21. Origine nella massa di 3,0 kg: x_G = (3,0 kg × 0 + 1,0 kg × 1,20 m)/(4,0 kg) = 0,30 m dalla massa di 3,0 kg.

22. motrice; resistente; più corto; svantaggiosa.

23. a) Il baricentro del cubo è nel centro: semilarghezza della base e altezza di G sono entrambe metà dello spigolo, il rapporto vale 1 e l'angolo limite è 45° (la diagonale della faccia diventa verticale). b) Semilarghezza 15 cm, altezza di G 45 cm: pendenza limite 15/45 ≈ 0,33, cioè circa 18°.

24. a) P = 5,0 kg × 9,8 N/kg = 49 N; F_m = 49 N × 30 cm / 4,0 cm ≈ 368 N ≈ 3,7 × 10^2 N. b) Momenti rispetto al gomito: F_m × 4,0 cm = 49 N × 30 cm + 15 N × 14 cm = 1680 N·cm, quindi F_m = 420 N ≈ 4,2 × 10^2 N. c) Asse verticale verso l'alto: 420 N − 49 N − 15 N + R = 0,

quindi $R = -356$ N: il gomito spinge l'avambraccio verso il basso con circa $3{,}6 \times 10^2$ N.

25. a) Il peso dell'asse agisce sul fulcro e non dà momento: $30\ \text{kg} \times g \times 1{,}8\ \text{m} = 36\ \text{kg} \times g \times d$, quindi $d = 30 \times 1{,}8\ \text{m} / 36 = 1{,}5$ m. b) $N = (30 + 36)\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} + 200\ \text{N} = 646{,}8\ \text{N} + 200\ \text{N} \approx 8{,}5 \times 10^2$ N. c) Momenti rispetto al fulcro: $36\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} \times 2{,}0\ \text{m} = 705{,}6\ \text{N·m}$ da una parte; $30\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} \times 1{,}8\ \text{m} + F \times 1{,}0\ \text{m} = 529{,}2\ \text{N·m} + F \times 1{,}0\ \text{m}$ dall'altra. Quindi $F = 176{,}4\ \text{N} \approx 1{,}8 \times 10^2$ N.

26. a) $P = 180\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 1764$ N; $F = P/6 = 294\ \text{N} \approx 2{,}9 \times 10^2$ N. b) $6 \times 0{,}50\ \text{m} = 3{,}0$ m. c) Sì, se l'estremo libero scende verso il basso (passando su una carrucola fissa): il peso del meccanico è $70\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 686$ N, più del doppio dei 294 N necessari; anzi, appendendosi con tutto il peso farebbe salire il motore.

27. a) Origine nella massa di 3,0 kg; l'asta conta come 2,0 kg nel suo centro (0,50 m): $x_G = (3{,}0 \times 0 + 2{,}0 \times 0{,}50 + 5{,}0 \times 1{,}0)\ \text{kg·m} / 10{,}0\ \text{kg} = 0{,}60$ m. b) $T = m\,g = 10{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 98$ N.

28. a) G è a 1,0 m da terra e a 0,30 m dallo spigolo anteriore: pendenza limite $0{,}30\ \text{m} / 1{,}0\ \text{m} = 0{,}30$, cioè circa 17°. b) $P = 80\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 784$ N; momenti rispetto allo spigolo anteriore: $F \times 2{,}0\ \text{m} = 784\ \text{N} \times 0{,}30\ \text{m}$, quindi $F \approx 118\ \text{N} \approx 1{,}2 \times 10^2$ N. c) Una forza di poco più di 100 N, che un bambino può esercitare arrampicandosi o tirando un'anta, basta a rovesciare un mobile di 80 kg; il fissaggio al muro fornisce la forza che impedisce la rotazione attorno allo spigolo.

29. Leva di secondo genere: $F_m = 300\ \text{N} \times 2{,}5\ \text{cm} / 15\ \text{cm} = 50$ N. Vantaggio meccanico $= 300\ \text{N} / 50\ \text{N} = 6$ (= 15/2,5).

30. a) Il peso da reggere comprende la carrucola: $P = 21\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 205{,}8$ N; $F = P/2 \approx 103\ \text{N} \approx 1{,}0 \times 10^2$ N. b) La fune ha la stessa tensione in tutti i tratti: tira il gancio verso il basso con circa $1{,}0 \times 10^2$ N. c) $2 \times 2{,}0\ \text{m} = 4{,}0$ m di fune.

31. Traccia di risposta: con un vantaggio meccanico pari a 4 la forza di 100 N equilibra il sasso, ma la mano deve muoversi di circa $4 \times 10\ \text{cm} = 40$ cm, non di 10 cm. La leva riduce la forza ma allunga il percorso; non si ottengono insieme una forza minore e uno spostamento uguale.

32. Traccia di risposta: da seduti il baricentro del corpo si trova sopra il sedile, dietro i piedi; quando si sollevano le natiche dalla sedia la base d'appoggio diventa la sola zona dei piedi, e la verticale per G cadrebbe fuori di essa, dietro i talloni: si ricadrebbe indietro. Portando il busto in avanti si sposta G sopra i piedi, oppure spostando i piedi sotto la sedia si porta la base d'appoggio sotto G.

33. Traccia di risposta: si appoggia la scopa orizzontale su due indici tenuti lontani e si avvicinano lentamente le dita; esse si incontrano sotto il baricentro (oppure si cerca il punto in cui la scopa resta in equilibrio su un solo dito). Si misura con il metro la distanza di quel punto dall'estremità del manico e si ripete più volte. I due pezzi non avrebbero la stessa massa: la scopa appoggiata in G è come una leva in equilibrio, in cui il peso di ciascun pezzo agisce nel baricentro del pezzo stesso; il pezzo con la spazzola ha il suo baricentro vicino al punto di taglio (braccio corto), quello del manico lontano (braccio lungo). Dalla condizione $P_1\,b_1 = P_2\,b_2$, il pezzo con il braccio corto, cioè quello con la spazzola, è il più pesante.