CAPITOLO

10

Il corpo rigido e il momento delle forze

Per far girare un corpo non conta solo quanto spingi, ma anche dove e in quale direzione.

OBIETTIVI

1. Spiegare perché, per un corpo esteso, una risultante nulla non basta a garantire l'equilibrio.
2. Individuare la retta d'azione e il braccio di una forza e calcolare il momento $M = F\,b$, con il segno.
3. Riconoscere una coppia di forze e calcolarne il momento, che non dipende dal polo.
4. Trovare modulo, verso e punto di applicazione della risultante di due forze parallele.
5. Scrivere e usare le due condizioni di equilibrio del corpo rigido, scegliendo il polo in modo conveniente.
6. Calcolare le reazioni degli appoggi di una trave e le forze su mensole, tiranti e corpi imperniati.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Dal punto materiale al corpo rigido 2
10.2 Il momento di una forza 3
10.3 La coppia di forze 8
10.4 La somma di forze parallele 10
10.5 L'equilibrio del corpo rigido 13

Fisica 1 · Parte III · L'equilibrio dei solidi · versione 1.0
Capitolo 10: Il corpo rigido e il momento delle forze · pagine 255–280 del volume completo · estratto per lo studio

Prova ad aprire la porta dell'aula spingendola vicino ai cardini: devi fare molta forza, e la porta si muove a fatica. Spingi invece vicino alla maniglia: basta un dito. Eppure la porta è la stessa e la forza che le applichi può essere la stessa. Che cosa è cambiato? Il punto in cui spingi. Lo stesso succede con una chiave inglese: per svitare un bullone molto stretto impugni la chiave all'estremità del manico, non vicino al bullone, e se non basta ancora cerchi una chiave più lunga.

Nel capitolo 9 abbiamo trattato i corpi come punti materiali: tutte le forze erano applicate allo stesso punto e l'unica domanda era se la loro risultante fosse nulla. Per una porta, una chiave, una trave o una mensola questo modello non basta, perché le forze agiscono in punti diversi e il corpo, oltre a spostarsi, può *ruotare*. In questo capitolo introdurremo la grandezza che misura la capacità di una forza di far ruotare un corpo, il **momento**, e scopriremo che per l'equilibrio di un corpo esteso servono due condizioni invece di una.

10.1 Dal punto materiale al corpo rigido

10.1.1 Traslazioni e rotazioni

Un corpo esteso si può muovere in due modi fondamentali. Quando un cassetto scorre nella sua guida, tutti i suoi punti si spostano nello stesso modo, nella stessa direzione e della stessa lunghezza: questo movimento si chiama **traslazione**. Quando invece una porta si apre, i punti vicini ai cardini si muovono pochissimo e quelli vicini al bordo libero descrivono archi lunghi, mentre i punti dell'asse dei cardini restano fermi: è una **rotazione** attorno a un asse. Il moto di una ruota di bicicletta che avanza sulla strada è una combinazione dei due: il mozzo trasla e intanto la ruota gira.

Per un punto materiale la rotazione non ha senso: un punto non ha dimensioni e non può «girare su sé stesso». Ecco perché nel capitolo 9 la condizione di equilibrio riguardava soltanto la risultante delle forze. Per un corpo esteso, invece, dobbiamo chiederci anche se le forze lo fanno ruotare.

10.1.2 Il modello del corpo rigido

Ogni corpo reale si deforma un po' quando è sottoposto a forze: una trave si incurva, una chiave si flette, perfino un tavolo si schiaccia di una quantità invisibile, come abbiamo visto nel capitolo 8. In moltissime situazioni, però, queste deformazioni sono così piccole che non cambiano le distanze fra i punti in modo apprezzabile. Conviene allora usare un modello: si chiama **corpo rigido** un corpo esteso che non si deforma, nel quale cioè la distanza fra due punti qualsiasi resta sempre la stessa, qualunque siano le forze applicate.

Come il punto materiale, il corpo rigido è un'idealizzazione: nessun oggetto è perfettamente indeformabile. Il modello funziona bene per una porta, una chiave, una trave d'acciaio, un'asta di legno; funziona male per una molla, un elastico o una corda, che sotto l'azione delle forze cambiano forma in modo evidente. Rispetto al punto materiale, il corpo rigido conserva un'informazione in più, fondamentale: *dove* sono applicate le forze.

10.1.3 Una risultante nulla non basta

Appoggia un righello su un tavolo liscio e spingilo con due dita, in versi opposti, con forze uguali. Se le due dita spingono lungo la stessa retta, una contro l'altra, il righello resta fermo: le forze hanno risultante nulla e, come per un punto materiale, si fanno equilibrio. Ma se una delle due dita spinge vicino a un estremo e l'altra vicino all'estremo opposto, lungo rette parallele distinte, il righello comincia a girare, anche se le due forze sono ancora uguali e opposte e la loro risultante è ancora zero. Lo stesso succede quando giri il volante di un'automobile con due mani, o quando apri un rubinetto con il pollice e l'indice.

La conclusione è importante: per un corpo rigido la condizione $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ garantisce che il corpo non cominci a traslare, ma **non** garantisce che non cominci a ruotare. Serve una seconda condizione, che riguarda la tendenza delle forze a far ruotare il corpo. Per scriverla dobbiamo prima capire da che cosa dipende questa tendenza.

10.2 Il momento di una forza

10.2.1 Retta d'azione e braccio

Torniamo alla porta, immaginando di guardarla dall'alto. La porta può solo ruotare attorno all'asse dei cardini, che nel disegno si riduce a un punto. Le esperienze dell'introduzione si possono rendere quantitative con un dinamometro: per far ruotare la porta serve una forza tanto più piccola quanto più lontano dai cardini la si applica, e a parità di punto di applicazione conta anche la direzione della forza. Una spinta perpendicolare alla porta è la più efficace; una spinta inclinata lo è meno; una spinta diretta lungo la porta, verso i cardini, non la fa ruotare affatto, per quanto sia intensa.

Tutte queste osservazioni si riassumono con due concetti geometrici. Il punto attorno al quale si studia la rotazione si chiama **polo** e si indica di solito con O; quando il corpo è imperniato, come la porta, il polo naturale è il perno. La **retta d'azione** di una forza è la retta che passa per il punto di applicazione e ha la direzione della forza. Il **braccio** b di una forza rispetto al polo O è la distanza di O dalla retta d'azione, cioè la lunghezza del segmento che parte da O e cade perpendicolarmente sulla retta d'azione (figura 10.1).

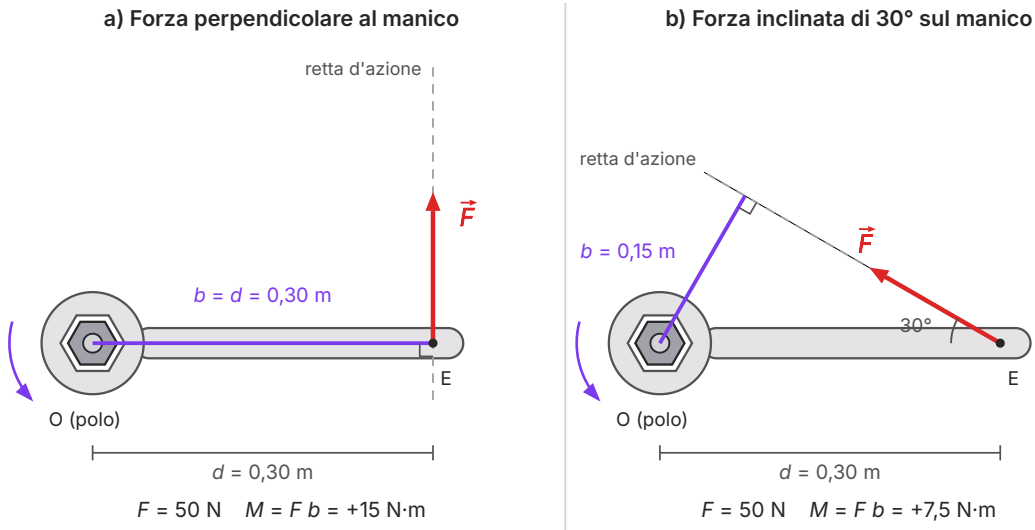

Figura 10.1 Momento di una forza di 50 N applicata nel punto E di una chiave, a d = 0,30 m dal centro O del bullone. a) Forza perpendicolare al manico: il braccio b, distanza di O dalla retta d'azione, coincide con d. b) Forza inclinata di 30° sul manico: il braccio è il segmento perpendicolare tracciato da O alla retta d'azione (tratteggiata) e vale d sen 30° = 0,15 m, quindi il momento si dimezza. In entrambi i casi la chiave tende a ruotare in senso antiorario (freccia curva): momento positivo.

10.2.2 La definizione di momento

L'esperienza mostra che l'effetto di rotazione di una forza raddoppia se si raddoppia il suo modulo e raddoppia anche se, lasciando invariato il modulo, si raddoppia il braccio. Si definisce allora **momento di una forza** rispetto a un polo O il prodotto del modulo della forza per il suo braccio:

$$M = F \cdot b$$

Nel SI il momento si misura in **newton per metro** (N·m), cioè newton moltiplicato per metro: da non confondere con il newton al metro (N/m), l'unità della costante elastica. Una forza di 50 N con un braccio di 0,30 m ha un momento di 15 N·m; la stessa forza con un braccio di 0,15 m ha un momento di 7,5 N·m, metà del precedente (figura 10.1). Per svitare un bullone che richiede 15 N·m puoi quindi applicare 50 N a 30 cm dal bullone oppure 100 N a 15 cm: il momento è lo stesso, ed è il momento che conta per la rotazione.

Il momento dipende dal polo scelto: la stessa forza ha bracci diversi rispetto a poli diversi. Per questo bisogna sempre dire rispetto a quale punto lo si calcola, e scrivere, quando serve, M_O per indicare il momento rispetto al polo O.

ERRORE FREQUENTE

Il braccio **non** è la distanza fra il polo e il punto di applicazione della forza: è la distanza fra il polo e la *retta d'azione*. Le due distanze coincidono soltanto quando la forza è perpendicolare al segmento che congiunge il polo con il punto di applicazione, come nella figura 10.1a. Nella figura 10.1b la forza è applicata nello stesso punto E, a 0,30 m dal bullone, ma è inclinata: il suo braccio è 0,15 m, e il suo momento è la metà.

Per non sbagliare, segui sempre la stessa procedura: prolunga la forza con una linea tratteggiata (la retta d'azione), poi traccia da O il segmento perpendicolare a questa retta. Il braccio è la lunghezza di quel segmento.

10.2.3 Il segno del momento

Due forze con lo stesso modulo e lo stesso braccio possono avere effetti opposti: una tende a far ruotare il corpo in un verso, l'altra nel verso contrario. Per distinguere i due casi si dà un segno al momento. In questo libro useremo la **convenzione dei segni** più diffusa: **il momento è positivo se la forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario, negativo se tende a farlo ruotare in senso orario**, guardando la figura così come è disegnata.

$$M = +F\,b \text{ (rotazione antioraria)} \qquad M = -F\,b \text{ (rotazione oraria)}$$

Per capire in quale verso una forza tende a far ruotare un corpo, immagina che il corpo sia fissato con un chiodo nel polo O e che agisca soltanto quella forza: da che parte girerebbe? Nella figura 10.1 entrambe le forze tendono a far girare la chiave in senso antiorario, quindi i loro momenti sono positivi. La convenzione è arbitraria, come la scelta del verso positivo di un asse: l'importante è dichiararla all'inizio di ogni problema e rispettarla fino alla fine.

10.2.4 Il ruolo della direzione della forza

La figura 10.2 mostra quattro modi di spingere una porta larga 0,80 m con una forza di 20 N. Calcoliamo il momento rispetto ai cardini in ciascun caso.

a) Forza perpendicolare alla porta, applicata vicino alla maniglia, a 0,75 m dai cardini: la retta d'azione è perpendicolare alla porta, quindi il braccio coincide con la distanza, $b = 0{,}75$ m, e $M = 20\ \text{N} \times 0{,}75\ \text{m} = +15\ \text{N·m}$.

b) Stessa forza, perpendicolare, applicata a 0,25 m dai cardini: $M = 20\ \text{N} \times 0{,}25\ \text{m} = +5{,}0\ \text{N·m}$. Per ottenere lo stesso effetto del caso a) servirebbe una forza tre volte più grande, 60 N.

c) Forza applicata a 0,75 m, inclinata di 30° rispetto alla porta: il braccio è il cateto opposto all'angolo di 30° in un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la distanza $d = 0{,}75$ m, quindi $b = d \operatorname{sen} 30° = 0{,}75\ \text{m} \times 0{,}500 = 0{,}375$ m, e $M = 20\ \text{N} \times 0{,}375\ \text{m} = +7{,}5\ \text{N·m}$.

d) Forza diretta lungo la porta, verso i cardini: la retta d'azione passa per il polo, il braccio è zero e anche il momento è zero. La porta non ruota, qualunque sia l'intensità della spinta.

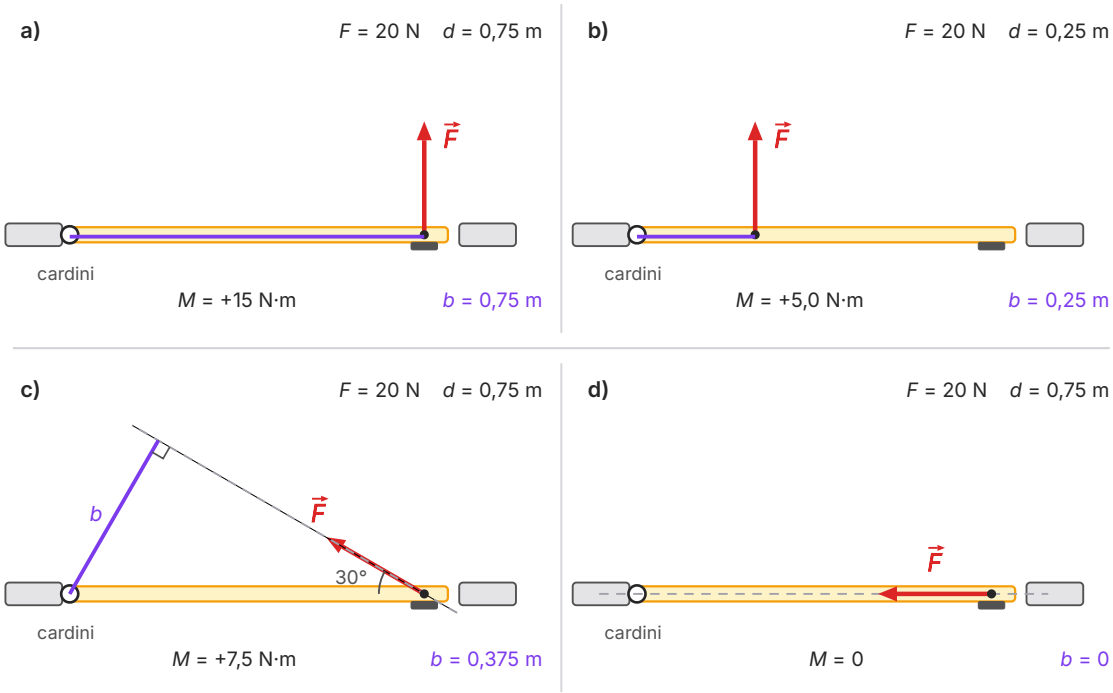

Figura 10.2 Una porta larga 0,80 m vista dall'alto, spinta con una forza di 20 N; il polo è l'asse dei cardini. a) Forza perpendicolare vicino alla maniglia. b) Forza perpendicolare vicino ai cardini: braccio e momento tre volte più piccoli. c) Forza inclinata di 30° sulla porta: il braccio $b = d$ sen 30° è metà della distanza. d) Forza diretta lungo la porta, verso i cardini: la retta d'azione passa per il polo, braccio e momento nulli. Frecce in scala.

Il caso c) suggerisce una seconda formula per il momento, utile quando si conoscono la distanza d fra il polo e il punto di applicazione e l'angolo α fra la forza e il segmento che congiunge il polo con il punto di applicazione. Poiché il braccio è $b = d$ sen α, si ha

$$M = F \cdot d \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Questa formula contiene tutti i casi della figura 10.2: per $\alpha = 90°$ si ha sen $\alpha = 1$ e il braccio è massimo, uguale a d; per $\alpha = 30°$ il braccio è la metà di d; per $\alpha = 0°$ (o 180°) la forza è diretta lungo il segmento, sen $\alpha = 0$ e il momento è nullo. Un momento è nullo, quindi, in due casi: quando la forza è nulla, oppure quando la sua retta d'azione passa per il polo.

DA RICORDARE

Una forza la cui retta d'azione passa per il polo ha momento nullo rispetto a quel polo. È il motivo per cui la reazione dei cardini non compare mai nei calcoli dei momenti di una porta rispetto ai cardini, e per cui, come vedremo nel paragrafo 10.5, conviene spesso mettere il polo proprio nel punto in cui agisce una forza sconosciuta.

ESEMPIO SVOLTO

Svitare un bullone

Problema. Un meccanico applica una forza di 50 N all'estremità del manico di una chiave lunga 30 cm (dal centro del bullone al punto di presa). Calcola il momento rispetto al centro del bullone quando la forza è: a) perpendicolare al manico; b) inclinata di 30° rispetto al manico; c) diretta lungo il manico. d) Con quale forza, inclinata di 30°, otterrebbe lo stesso momento del caso a)?

Soluzione. Polo O nel centro del bullone, d = 0,30 m; la forza tende a far ruotare la chiave in senso antiorario (figura 10.1), quindi i momenti sono positivi.

a) $\alpha = 90°$, $b = d$ = 0,30 m: M = 50 N × 0,30 m = +15 N·m.
b) $\alpha = 30°$, $b = d$ sen 30° = 0,30 m × 0,500 = 0,15 m: M = 50 N × 0,15 m = +7,5 N·m.
c) La retta d'azione passa per O: $b = 0$, $M = 0$. Tirare il manico «in fuori» non svita il bullone.
d) Serve $F \cdot 0{,}15$ m = 15 N·m, cioè F = 15 N·m / 0,15 m = 100 N.

Controllo. Il braccio nel caso b) è la metà di quello del caso a); per avere lo stesso momento la forza deve essere doppia. Le unità tornano: N·m / m = N.

10.2.5 Il momento di più forze

Se su un corpo rigido agiscono più forze, ciascuna ha il proprio momento rispetto allo stesso polo O. Il **momento risultante** (o momento totale) rispetto a O è la somma algebrica dei momenti, ciascuno con il suo segno:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

Se il momento risultante è positivo, le forze nel loro insieme tendono a far ruotare il corpo in senso antiorario; se è negativo, in senso orario; se è zero, gli effetti di rotazione si compensano. Per esempio, un'asta imperniata in O è spinta verso l'alto da una forza di 20 N a 0,50 m da O (momento +10 N·m) e verso il basso da una forza di 10 N a 1,0 m da O, dalla stessa parte (momento −10 N·m): il momento risultante è zero e le due forze, pur essendo molto diverse, non fanno ruotare l'asta.

COLLEGAMENTI

Il momento nella vita di tutti i giorni

Una volta riconosciuto, il momento si trova dappertutto. Le maniglie delle porte sono montate sul lato opposto ai cardini per avere il braccio più lungo possibile. Il manico di un cacciavite è molto più largo della lama: ruotandolo con le dita, la forza che esercitiamo ha un braccio maggiore e produce un momento maggiore. I rubinetti a croce, le manopole e i volanti sono tanto più facili da girare quanto più sono grandi.

In bicicletta il momento della forza del piede rispetto all'asse dei pedali dipende dalla posizione della pedivella: è massimo quando la pedivella è orizzontale e la spinta verso il basso è perpendicolare a essa, ed è nullo quando la pedivella è verticale, perché la retta d'azione della spinta passa per l'asse (i cosiddetti «punti morti»). Anche il nostro corpo funziona così: muscoli e tendini si attaccano alle ossa a qualche centimetro dalle articolazioni, e i momenti delle loro forze fanno ruotare le ossa attorno alle articolazioni. Lo studieremo nel capitolo 11.

APPROFONDIMENTO

Il momento come vettore

In questo libro tutte le forze stanno in un piano, e il momento si può trattare come un numero con segno. Nei problemi nello spazio, per esempio quando si studia una trottola o un giroscopio, si usa invece un vettore $\boldsymbol{M}$. Il suo modulo è $F\,b$, come abbiamo visto; la sua direzione è perpendicolare al piano che contiene la forza e il polo, cioè lungo l'asse attorno al quale la forza tende a far ruotare il corpo; il verso si stabilisce con la **regola della mano destra**: se le dita della mano destra, chiuse a pugno, seguono il verso della rotazione, il pollice indica il verso del momento.

Con questa regola una rotazione antioraria nel piano del foglio corrisponde a un vettore momento che esce dal foglio verso chi guarda, e una rotazione oraria a un vettore che entra nel foglio. La nostra convenzione dei segni (antiorario positivo) equivale quindi a considerare positivi i momenti che escono dal foglio. Il formalismo vettoriale completo, basato su un'operazione chiamata prodotto vettoriale, lo incontrerai negli anni successivi.

10.3 La coppia di forze

10.3.1 Che cos'è una coppia

Torniamo al righello del paragrafo 10.1.3, spinto con due dita in versi opposti lungo rette parallele distinte. Un sistema di due forze **uguali in modulo, parallele e di verso opposto**, con rette d'azione distinte, si chiama **coppia di forze**. La distanza d fra le due rette d'azione si chiama **braccio della coppia**.

La risultante di una coppia è nulla, perché le due forze sono una l'opposta dell'altra: una coppia non fa traslare un corpo. Il suo momento, però, non è nullo: entrambe le forze tendono a far ruotare il corpo nello stesso verso (figura 10.3a). Una coppia è quindi il caso più puro di «rotazione senza traslazione». Le mani che girano un volante, le dita che aprono un rubinetto o che ruotano la chiave in una serratura, le due braccia di una chiave a croce usata per svitare i bulloni di una ruota applicano tutte, con buona approssimazione, coppie di forze.

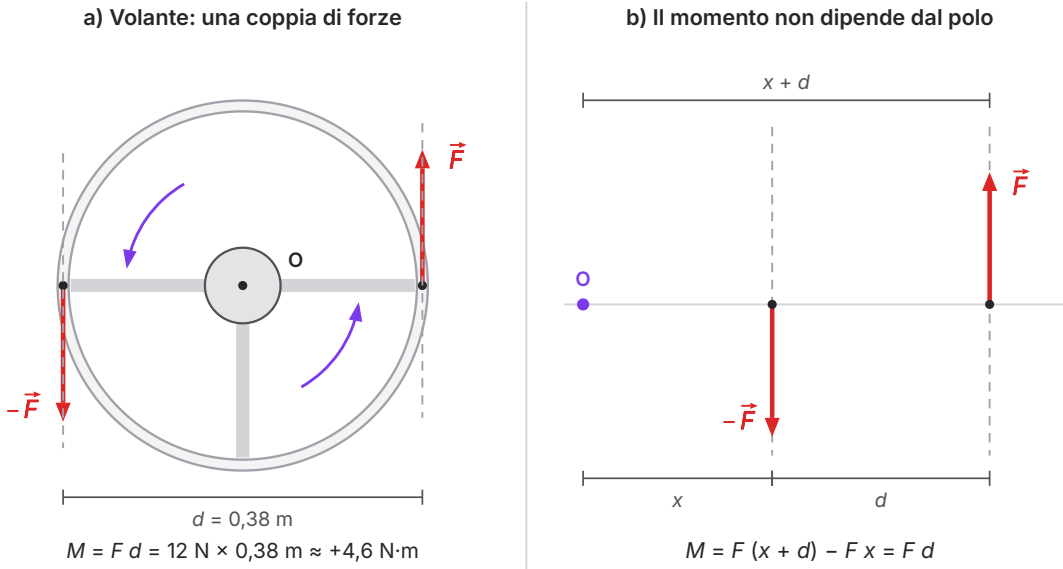

Figura 10.3 a) Le mani sul volante applicano una coppia di forze: due forze di 12 N, uguali, parallele e opposte, con rette d'azione (tratteggiate) distanti d = 0,38 m. La risultante è nulla, ma il momento non lo è. b) Rispetto a un polo O qualsiasi, i momenti delle due forze sono $+F\,(x + d)$ e $-F\,x$: la loro somma, $F\,d$, non dipende da x.

10.3.2 Il momento di una coppia

Calcoliamo il momento di una coppia rispetto a un polo O qualsiasi, nel piano delle due forze. Nella figura 10.3b le due forze sono verticali, di modulo F; il polo O si trova a distanza x dalla retta d'azione della prima forza, quella diretta verso il basso, e quindi a distanza $x + d$ dalla retta d'azione della seconda, diretta verso l'alto. La forza verso l'alto tende a far ruotare il corpo in senso antiorario attorno a O, con momento $+F\,(x + d)$; quella verso il basso in senso orario, con momento $-F\,x$. Sommando:

$$M = F\,(x + d) - F\,x = F\,d$$

La distanza x è scomparsa: **il momento di una coppia è uguale al prodotto del modulo di una delle due forze per il braccio della coppia, e non dipende dal polo.** Puoi verificarlo mettendo O fra le due rette d'azione o dall'altra parte: il risultato è sempre $F\,d$, con il segno dato dal verso

in cui la coppia tende a far ruotare il corpo. È una proprietà speciale delle coppie: il momento di una singola forza, invece, cambia se si cambia il polo.

Per esempio, un guidatore che tiene le mani su due punti opposti di un volante di 38 cm di diametro e spinge con 12 N in versi opposti, tangenti al volante, applica una coppia di momento $M = 12\ \text{N} \times 0{,}38\ \text{m} \approx 4{,}6\ \text{N·m}$ (figura 10.3a). Con una sola mano, per ottenere lo stesso momento, dovrebbe spingere con 24 N, e in più il volante riceverebbe una forza risultante non nulla, che deve essere equilibrata dal suo perno.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> «Una coppia si equilibra con una forza abbastanza grande applicata nel punto giusto.» Non è possibile. Una sola forza non nulla ha sempre risultante diversa da zero, mentre la risultante della coppia è zero: aggiungendola, la risultante totale non sarebbe più nulla e il corpo comincerebbe a traslare. Una coppia si può equilibrare soltanto con un'altra coppia di momento opposto, o comunque con un insieme di forze che abbia risultante nulla e momento opposto. Quando apri un barattolo, la mano che tiene il vasetto applica proprio la coppia opposta a quella della mano che gira il coperchio.

10.4 La somma di forze parallele

10.4.1 La forza equivalente

Per un punto materiale sommare due forze significa trovarne la risultante con la regola del parallelogramma. Per un corpo rigido questo non basta: bisogna anche dire *dove* applicare la risultante, perché il punto di applicazione determina il suo momento. Diremo che una forza $\boldsymbol{R}$ è **equivalente** a un sistema di forze se ha lo stesso effetto sul corpo rigido, cioè se soddisfa due condizioni:

- $\boldsymbol{R}$ è uguale alla somma vettoriale delle forze (stesso effetto di traslazione);
- il momento di $\boldsymbol{R}$ rispetto a un polo qualsiasi è uguale al momento risultante delle forze rispetto allo stesso polo (stesso effetto di rotazione).

Il caso più importante, nella statica dei solidi, è quello delle forze parallele: i pesi delle varie parti di un corpo, i carichi appoggiati su una trave, le reazioni degli appoggi sono quasi sempre forze verticali.

10.4.2 Forze parallele concordi

Consideriamo due forze parallele e con lo stesso verso, cioè **concordi**, applicate a un'asta nei punti A e B: $F_1 = 30$ N in A e $F_2 = 60$ N in B, entrambe verticali verso il basso, con AB = 1,20 m (figura 10.4a).

Modulo, direzione e verso. La risultante è verticale, verso il basso, e il suo modulo è la somma dei moduli: $R = 30\ \text{N} + 60\ \text{N} = 90\ \text{N}$.

Punto di applicazione. Sia C il punto dell'asta in cui va applicata $\boldsymbol{R}$. Scegliamo come polo proprio C: il momento di $\boldsymbol{R}$ rispetto a C è zero, quindi anche il momento risultante delle due forze rispetto a C deve essere zero. F_1, a sinistra di C, tende a far ruotare l'asta in senso antiorario; F_2, a destra, in senso orario. I due momenti si compensano se

$$F_1 \cdot \text{AC} = F_2 \cdot \text{CB}$$

Il punto C divide quindi il segmento AB in parti **inversamente proporzionali** alle forze: è più vicino alla forza maggiore. Nel nostro caso, con $\text{AC} = x$ e $\text{CB} = 1{,}20\ \text{m} - x$, si ha $30\ \text{N} \cdot x = 60\ \text{N} \cdot (1{,}20\ \text{m} - x)$, da cui $90\ \text{N} \cdot x = 72\ \text{N·m}$ e $x = 0{,}80\ \text{m}$. La risultante, di 90 N, è applicata a 0,80 m da A e a 0,40 m da B. Controllo: $30\ \text{N} \times 0{,}80\ \text{m} = 24\ \text{N·m}$ e $60\ \text{N} \times 0{,}40\ \text{m} = 24\ \text{N·m}$.

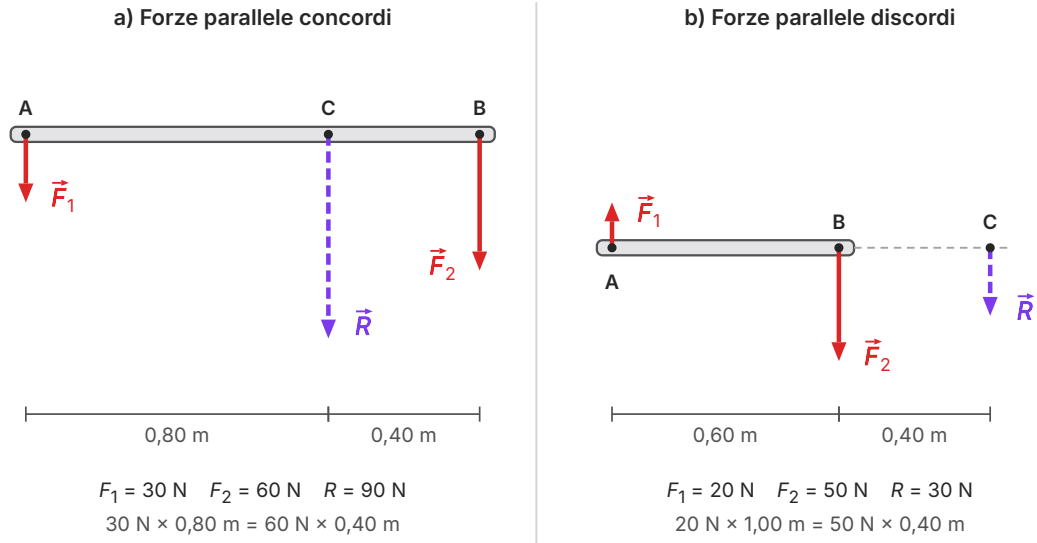

Figura 10.4 Risultante $\boldsymbol{R}$ (tratteggiata) di due forze parallele applicate a un'asta. a) Forze concordi: R è la somma dei moduli ed è applicata fra le due forze, più vicino alla maggiore. b) Forze discordi: R è la differenza dei moduli, ha il verso della forza maggiore ed è applicata all'esterno del segmento AB, dalla sua parte. In entrambi i casi i momenti delle due forze rispetto a C si compensano (righe in basso). Frecce in scala.

10.4.3 Forze parallele discordi

Se le due forze parallele hanno versi opposti, si dicono **discordi**. Nella figura 10.4b $F_1 = 20\ \text{N}$ è applicata in A verso l'alto e $F_2 = 50\ \text{N}$ è applicata in B verso il basso, con $\text{AB} = 0{,}60\ \text{m}$.

Modulo, direzione e verso. La risultante è verticale, ha il verso della forza maggiore (verso il basso) e modulo uguale alla differenza dei moduli: $R = 50\ \text{N} - 20\ \text{N} = 30\ \text{N}$.

Punto di applicazione. Anche questa volta imponiamo che il momento risultante delle due forze rispetto al punto C di applicazione di $\boldsymbol{R}$ sia zero. Se C fosse fra A e B, entrambe le forze ten-

derebbero a far ruotare l'asta nello stesso verso (prova a immaginarlo) e i loro momenti non potrebbero compensarsi. C si trova quindi **fuori dal segmento AB, dalla parte della forza maggiore**, e vale ancora la relazione $F_1 \cdot CA = F_2 \cdot CB$. Con $CB = x$ e $CA = 0{,}60\ \text{m} + x$: $20\ \text{N} \cdot (0{,}60\ \text{m} + x) = 50\ \text{N} \cdot x$, da cui $12\ \text{N·m} = 30\ \text{N} \cdot x$ e $x = 0{,}40\ \text{m}$. La risultante, di 30 N verso il basso, è applicata 0,40 m oltre B. Controllo: $20\ \text{N} \times 1{,}00\ \text{m} = 20\ \text{N·m}$ e $50\ \text{N} \times 0{,}40\ \text{m} = 20\ \text{N·m}$.

Che cosa succede se le due forze discordi hanno lo stesso modulo? La risultante avrebbe modulo zero e dovrebbe stare «infinitamente lontano»: in realtà non esiste nessuna forza singola equivalente, perché le due forze formano una coppia, il cui effetto è solo di rotazione. Un sistema di forze parallele con risultante nulla ma momento diverso da zero equivale a una coppia: è l'unico caso in cui non si può sostituire con una forza sola.

10.4.4 Molte forze parallele: il peso di un'asta

La regola delle forze parallele concordi si applica anche a più di due forze: si sommano le prime due, poi si somma la loro risultante con la terza, e così via. Un caso molto utile è il peso di un'asta omogenea, cioè fatta dello stesso materiale e con la stessa sezione in ogni punto. Immaginiamo di dividerla in tanti pezzetti uguali: ciascuno ha lo stesso piccolo peso. Prendiamo i due pezzetti estremi: sono due forze parallele concordi uguali, e la loro risultante è applicata esattamente a metà dell'asta. Lo stesso vale per la seconda coppia di pezzetti, per la terza e così via: tutte le risultanti parziali sono applicate nel punto medio. Quindi **il peso di un'asta omogenea si può considerare applicato nel suo punto medio**. È un primo esempio di *baricentro*, il punto di applicazione del peso, che studieremo in generale nel capitolo 11.

IN SINTESI

Momento di una forza rispetto al polo O: $M = F\,b = F\,d \operatorname{sen}\alpha$ — misura la capacità della forza di far ruotare il corpo attorno a O; b è la distanza di O dalla retta d'azione. Positivo se la rotazione è antioraria, negativo se oraria; nullo se la retta d'azione passa per O. Unità: N·m.

Momento di una coppia: $M = F\,d$, con d distanza fra le rette d'azione — lo stesso rispetto a qualsiasi polo; la risultante della coppia è nulla.

Forze parallele: concordi → $R = F_1 + F_2$, applicata fra le due forze; discordi → $R = |F_1 - F_2|$, applicata all'esterno, dalla parte della maggiore. In entrambi i casi $F_1\,b_1 = F_2\,b_2$, con b_1, b_2 distanze delle due forze dal punto di applicazione della risultante.

Equilibrio del corpo rigido: $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ (non trasla) e $\Sigma M = 0$ rispetto a un polo qualsiasi (non ruota).

10.5 L'equilibrio del corpo rigido

10.5.1 Le due condizioni di equilibrio

Siamo pronti per enunciare le condizioni di equilibrio di un corpo rigido. Un corpo rigido inizialmente fermo resta fermo se, e solo se, sono soddisfatte **entrambe** queste condizioni:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0 \qquad \text{e} \qquad \Sigma M = 0$$

La prima, la stessa del punto materiale, impedisce al corpo di cominciare a traslare: con le forze nel piano, equivale alle due equazioni per componenti $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. La seconda impedisce al corpo di cominciare a ruotare: la somma algebrica dei momenti di tutte le forze, calcolati rispetto a uno stesso polo, deve essere zero. Queste due condizioni si chiamano **condizioni di equilibrio del corpo rigido**. Per un corpo fermo esprimono l'equilibrio statico; il prossimo anno vedrai che le stesse condizioni valgono anche per un corpo che trasla con velocità costante senza ruotare.

Un fatto notevole rende queste condizioni comode da usare: **se la risultante delle forze è nulla e il momento risultante è nullo rispetto a un polo, allora il momento risultante è nullo rispetto a qualsiasi altro polo**. Non serve dimostrarlo in generale: lo verificherai in tutti gli esempi che seguono, calcolando i momenti rispetto a due poli diversi. Ne segue che il polo si può scegliere liberamente, e conviene sceglierlo con astuzia.

10.5.2 Come si sceglie il polo

Nei problemi di equilibrio alcune forze sono note (i pesi, i carichi) e altre sono incognite (le reazioni degli appoggi, la tensione di un tirante, la forza di una cerniera). Ricordando che una forza la cui retta d'azione passa per il polo ha momento nullo, conviene mettere il polo nel punto di applicazione di una forza incognita: nell'equazione dei momenti quella forza scompare, e si può ricavare subito un'altra incognita. Il metodo generale per risolvere un problema di equilibrio di un corpo rigido è il seguente.

1. **Isola il corpo** e disegna il suo diagramma di corpo libero, come nel capitolo 9, con una differenza: ogni forza va disegnata *nel suo punto di applicazione*, perché per il corpo rigido conta dove agisce.
2. **Scegli gli assi** e il verso positivo delle rotazioni (in questo libro, antiorario), e dichiarali.
3. **Scegli il polo** nel punto in cui agisce una forza incognita, o dove se ne incontrano più di una.
4. **Scrivi l'equazione dei momenti** e quelle delle componenti delle forze; risolvi il sistema.
5. **Controlla** il risultato, per esempio ricalcolando la somma dei momenti rispetto a un altro polo, e verifica che le reazioni di appoggi e funi abbiano un verso possibile (un appoggio

può solo spingere, un filo può solo tirare).

10.5.3 Una trave su due appoggi

Una **trave appoggiata** è un'asta rigida sostenuta da due appoggi che possono esercitare su di essa soltanto forze verticali verso l'alto: le **reazioni degli appoggi**. Sono travi appoggiate un'asse che fa da ponte su un fosso, una panca appoggiata su due cavalletti, una mensola di libreria che poggia sui due reggimensola. Se sulla trave c'è un carico al centro, ciascun appoggio ne sostiene metà, come ci si aspetta per simmetria. Se il carico è spostato verso uno dei due appoggi, quel-l'appoggio «lavora di più». Di quanto? Lo stabilisce la condizione sui momenti.

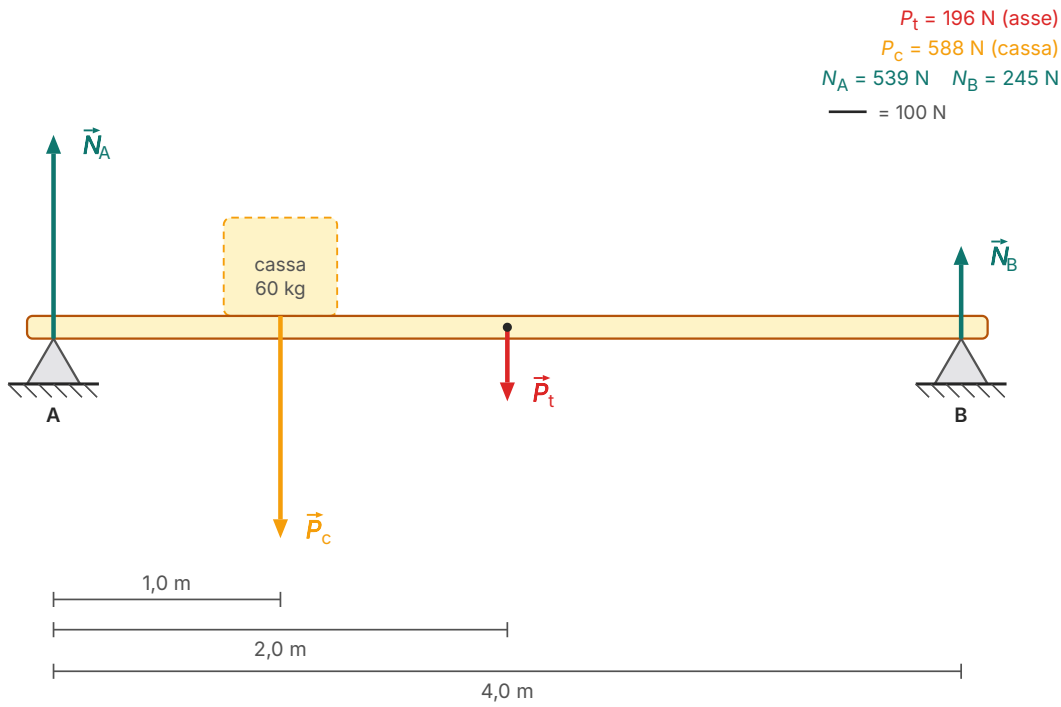

Figura 10.5 Diagramma di corpo libero di un'asse lunga 4,0 m e di massa 20 kg appoggiata alle estremità, con una cassa di 60 kg (contorno tratteggiato) posata a 1,0 m da A. Agiscono sull'asse il suo peso P_t, applicato nel punto medio, la forza P_c con cui la cassa preme sull'asse e le reazioni degli appoggi N_A e N_B. Frecce in scala (segmento di riferimento: 100 N).

ESEMPIO SVOLTO

Le reazioni degli appoggi di un'asse

Problema. Un'asse omogenea lunga 4,0 m e di massa 20 kg è appoggiata alle estremità A e B su due cavalletti. Una cassa di 60 kg è posata sull'asse a 1,0 m da A (figura 10.5). Calcola le reazioni dei due appoggi.

Soluzione. Le forze sull'asse sono tutte verticali: il peso dell'asse P_t = 20 kg × 9,8 N/kg = 196 N, applicato nel punto medio, a 2,0 m da A; la forza con cui la cassa, ferma, preme sull'asse, uguale in modulo al peso della cassa, P_c = 60 kg × 9,8 N/kg = 588 N, applicata a 1,0 m da A; le reazioni incognite N_A e N_B, verso l'alto. Asse y verso l'alto, rotazioni antiorarie positive.

Momenti rispetto ad A (così N_A non compare): i due pesi, a destra di A e verso il basso, hanno momenti negativi; N_B, a destra di A e verso l'alto, ha momento positivo.

$$N_B \cdot 4{,}0\ \text{m} - 196\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} - 588\ \text{N} \cdot 1{,}0\ \text{m} = 0$$

$$N_B = \frac{392\ \text{N·m} + 588\ \text{N·m}}{4{,}0\ \text{m}} = 245\ \text{N} \approx 2{,}5 \times 10^2\ \text{N}$$

Forze verticali: $N_A + N_B - 196\ \text{N} - 588\ \text{N} = 0$, da cui $N_A = 784\ \text{N} - 245\ \text{N} = 539\ \text{N} \approx 5{,}4 \times 10^2$ N. Nei calcoli intermedi conserviamo le cifre in più, e arrotondiamo a due cifre significative solo il risultato.

Controllo con un altro polo. Rispetto a B: N_A, a sinistra di B e verso l'alto, ha momento negativo; i pesi, a sinistra di B e verso il basso, positivo. −539 N × 4,0 m + 196 N × 2,0 m + 588 N × 3,0 m = −2156 N·m + 392 N·m + 1764 N·m = 0. ✓ Come previsto, l'appoggio più vicino alla cassa sostiene la parte maggiore del carico: 539 N contro 245 N.

Nota che il problema contiene due incognite e che la sola condizione sulle forze, $N_A + N_B$ = 784 N, non basterebbe a determinarle: ci sono infinite coppie di numeri che hanno quella somma. È la condizione sui momenti a dire come il carico si ripartisce fra i due appoggi. Per questo, per il corpo rigido, la seconda condizione di equilibrio non è un dettaglio ma un'informazione indispensabile.

DA RICORDARE

Nell'equazione dei momenti le distanze da usare sono sempre i bracci, misurati dal polo scelto. Se il polo è in A, il braccio di una forza verticale applicata in un punto dell'asta orizzontale è la distanza di quel punto da A; se il polo è in B, la distanza da B. Cambiando polo cambiano i singoli momenti, ma per un corpo in equilibrio la loro somma resta zero.

10.5.4 Mensole, staffe e tiranti

Una mensola fissata al muro, un'insegna appesa a un braccio orizzontale, un balcone sono corpi rigidi vincolati da una sola parte: la loro forma «a sbalzo» richiede che il vincolo eserciti non solo forze ma anche un momento capace di impedire la rotazione. Vediamo due soluzioni molto comuni.

Una staffa avvitata al muro. Nella figura 10.6b una mensola poggia su una staffa a forma di L, fissata al muro con una vite S nella parte alta; lo spigolo inferiore C della staffa appoggia contro il muro, 0,20 m sotto la vite. Sulla mensola c'è un carico di 120 N (comprendendo il peso della mensola) applicato a 0,15 m dal muro. Rispetto a C il carico ha momento $-120\ \text{N} \times 0{,}15\ \text{m} = -18\ \text{N·m}$: tende a far ruotare mensola e staffa in senso orario, staccando la parte alta dal muro. Per impedirlo la vite deve tirare la staffa verso il muro con una forza orizzontale che abbia, rispetto a C, momento +18 N·m; il suo braccio è la distanza verticale fra la vite e lo spigolo, 0,20 m, quindi la forza vale $18\ \text{N·m} / 0{,}20\ \text{m} = 90\ \text{N}$. Per l'equilibrio delle forze orizzontali, il muro spinge lo spigolo C in fuori con 90 N; per quello delle forze verticali, la vite sostiene anche i 120 N del carico. Questa analisi spiega un'esperienza comune: le viti superiori delle staffe tendono a sfilarsi dal muro, e lo fanno tanto più facilmente quanto più la mensola è profonda e la staffa è corta. Raddoppiando la distanza del carico dal muro, la forza che tende a strappare la vite raddoppia.

Un'asta incernierata e un tirante. Nella figura 10.6a un'asta orizzontale è fissata al muro con una cerniera A e sostenuta da un cavo d'acciaio, detto **tirante**, che va dall'estremo libero B a un punto C del muro. La cerniera, come abbiamo visto nel capitolo 8, esercita una reazione di direzione sconosciuta: è il punto ideale in cui mettere il polo.

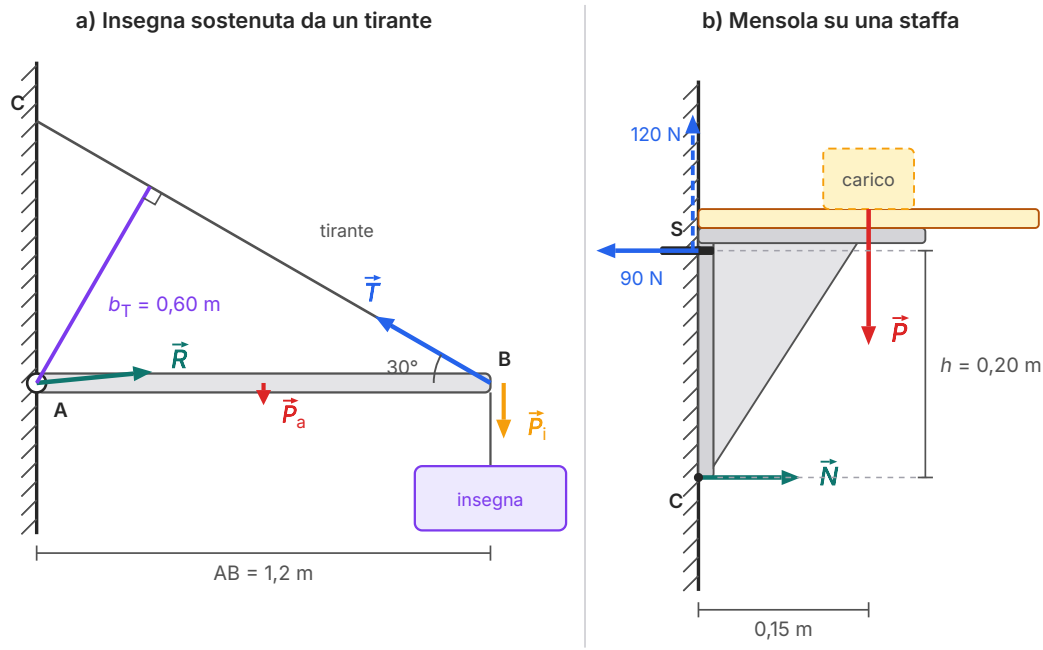

Figura 10.6 a) Asta AB di 1,2 m e 4,0 kg, incernierata al muro in A e sostenuta dal tirante BC inclinato di 30°; in B è appesa un'insegna di 10 kg. Sull'asta agiscono il peso P_a, la tensione del gancio dell'insegna P_i, la tensione T del tirante e la reazione R della cerniera; il braccio di T rispetto ad A è b_T = 0,60 m. Frecce in scala. b) Mensola su una staffa a L con un carico di 120 N a 0,15 m dal muro: la vite S trattiene la staffa verso il muro (90 N) e la sostiene verso l'alto (120 N, tratteggiata); il muro spinge lo spigolo C in fuori con N (90 N). Frecce in scala diverse nelle due parti.

ESEMPIO SVOLTO

Un'insegna appesa a un'asta

Problema. Un'asta omogenea AB lunga 1,2 m e di massa 4,0 kg è incernierata al muro in A e mantenuta orizzontale da un tirante BC che forma un angolo di 30° con l'asta. All'estremo B è appesa un'insegna di massa 10 kg (figura 10.6a). Calcola la tensione del tirante e le componenti della reazione della cerniera. Considera il tirante e i ganci dell'insegna come fili ideali.

Soluzione. Forze sull'asta: il peso dell'asta $P_a = 4{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 39{,}2\ \text{N}$, nel punto medio (0,60 m da A); la tensione del gancio dell'insegna, uguale al peso dell'insegna, $P_i = 10\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 98\ \text{N}$, in B; la tensione $\boldsymbol{T}$ del tirante, applicata in B e diretta da B verso C; la reazione $\boldsymbol{R}$ della cerniera, in A, di componenti incognite R_x e R_y. Asse x orizzontale, positivo uscendo dal muro; asse y verso l'alto; rotazioni antiorarie positive (il muro è a sinistra, come nella figura).

Momenti rispetto ad A ($\boldsymbol{R}$ non compare). Il braccio di $\boldsymbol{T}$ è la distanza di A dalla retta BC: nel triangolo rettangolo che ha per ipotenusa AB e un angolo di 30° in B, è il cateto opposto a questo angolo, $b_T = \text{AB} \cdot \text{sen}\ 30° = 1{,}2\ \text{m} \times 0{,}500 = 0{,}60\ \text{m}$. $\boldsymbol{T}$ tende a far ruotare l'asta in senso antiorario, i due pesi in senso orario:

$$T \cdot 0{,}60\ \text{m} - 39{,}2\ \text{N} \cdot 0{,}60\ \text{m} - 98\ \text{N} \cdot 1{,}2\ \text{m} = 0$$

$$T = \frac{23{,}52\ \text{N·m} + 117{,}6\ \text{N·m}}{0{,}60\ \text{m}} \approx 235\ \text{N}$$

Componenti di $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{T}$ punta verso il muro e verso l'alto, con $T_x = -T\cos 30° = -235\ \text{N} \times 0{,}866 \approx -204\ \text{N}$ e $T_y = T\ \text{sen}\ 30° \approx 118\ \text{N}$.

Forze orizzontali: $R_x - 204\ \text{N} = 0$, da cui $R_x \approx 204\ \text{N}$: la cerniera spinge l'asta lontano dal muro.
Forze verticali: $R_y + 117{,}6\ \text{N} - 39{,}2\ \text{N} - 98\ \text{N} = 0$, da cui $R_y \approx 19{,}6\ \text{N}$, verso l'alto.

Controllo. Rispetto a B (dove passano $\boldsymbol{T}$ e P_i): $-R_y \cdot 1{,}2\ \text{m} + 39{,}2\ \text{N} \cdot 0{,}60\ \text{m} = -23{,}5\ \text{N·m} + 23{,}5\ \text{N·m} = 0$ ✓ (R_x ha retta d'azione lungo l'asta e quindi braccio nullo). Con i dati a due cifre significative i risultati si scrivono $T \approx 2{,}4 \times 10^2\ \text{N}$, $R_x \approx 2{,}0 \times 10^2\ \text{N}$ e $R_y \approx 20\ \text{N}$. Osserva che il tirante deve tirare con circa 235 N, quasi il doppio del peso complessivo di asta e insegna (137 N): è il prezzo di un braccio piccolo, 0,60 m. Un tirante più inclinato avrebbe un braccio maggiore e sarebbe meno sollecitato.

10.5.5 Un corpo imperniato in un punto

Un'asta libera di ruotare attorno a un perno fisso, come il giogo di una bilancia a bracci uguali o un'altalena a bilico, è il caso più semplice di corpo rigido vincolato. Se il perno passa per il punto medio di un'asta omogenea, il peso dell'asta ha retta d'azione passante per il perno e non dà momento. L'asta resta allora in equilibrio quando i momenti delle altre forze rispetto al perno si compensano: per esempio, appendendo 2,94 N (il peso di una massa di 300 g) a 0,200 m a sinistra del perno, si ha un momento di +0,588 N·m, e per equilibrarlo occorre a destra una

forza verso il basso con momento −0,588 N·m: 2,94 N a 0,200 m, oppure 5,88 N a 0,100 m, oppure 1,47 N a 0,400 m. La reazione del perno, verticale verso l'alto, si ricava poi dalla prima condizione: è uguale alla somma di tutte le forze verso il basso, peso dell'asta compreso. È proprio questo il dispositivo dell'attività di laboratorio che segue.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: l'equilibrio dei momenti

Materiali. Un'asta graduata di legno o di alluminio lunga 1 m, forata al centro (alla tacca dei 50 cm); un perno orizzontale fissato a un sostegno; una massa da 300 g con un gancio e un cordino; un dinamometro con portata 10 N e sensibilità 0,05 N; un filo a piombo o una livella.

Procedura. 1) Infila l'asta sul perno attraverso il foro centrale e verifica che, scarica, resti orizzontale in qualsiasi posizione: il suo peso non dà momento. 2) Appendi la massa a 20,0 cm a sinistra del perno. 3) Aggancia il dinamometro a destra del perno, a una distanza b, e tira verticalmente verso il basso fino a riportare l'asta orizzontale; controlla la verticalità con il filo a piombo. 4) Leggi la forza F indicata dal dinamometro. 5) Ripeti per diverse distanze b, da 10 cm a 40 cm. 6) Calcola per ogni coppia di valori il prodotto $F\,b$ e confrontalo con il momento della massa appesa, 2,94 N × 0,200 m = 0,588 N·m.

Tabella 10.1 Dati tipici dell'esperimento (sensibilità del dinamometro 0,05 N).

b (m)	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,400
F (N)	5,85	3,95	2,95	2,35	1,95	1,45
$F\,b$ (N·m)	0,5850	0,5925	0,5900	0,5875	0,5850	0,5800

Che cosa si conclude. Il prodotto $F\,b$ resta costante entro le incertezze, ed è uguale al momento della massa appesa: la forza necessaria per l'equilibrio è inversamente proporzionale al braccio, come prevede la condizione $\Sigma M = 0$. L'analisi grafica dei dati è nell'esempio svolto che segue. **Sicurezza.** Fissa bene il sostegno al banco con un morsetto e non lasciare mai il dinamometro in tensione senza tenerlo: se scatta può colpire chi è vicino.

Per la relazione. Aggiungi alla tabella la colonna del prodotto $F\,b$ e, nell'elaborazione, il grafico di F in funzione di $1/b$ (linearizzazione, capitolo 5). Nelle conclusioni confronta la pendenza di questo grafico con il momento atteso, 0,588 N·m, e discuti le cause concrete delle differenze: un dinamometro non perfettamente verticale, un'asta non perfettamente orizzontale, la lettura della scala.

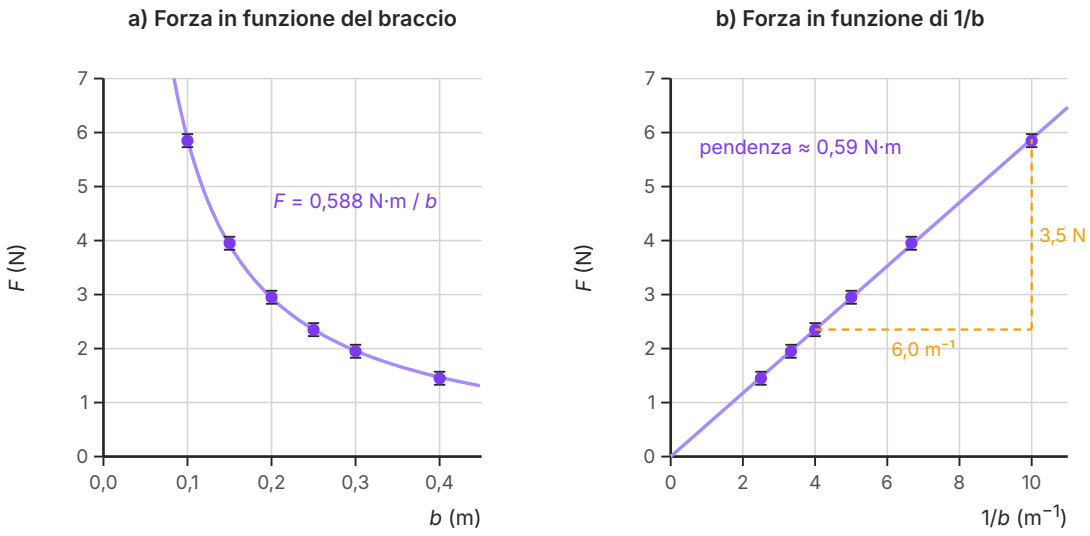

Figura 10.7 Dati tipici dell'esperimento di laboratorio (tabella 10.1), con barre d'incertezza di ±0,05 N. a) La forza F necessaria per l'equilibrio in funzione del braccio b: i punti seguono l'iperbole $F = M/b$ con M = 0,588 N·m. b) Riportando F in funzione di $1/b$ si ottiene una retta per l'origine, la cui pendenza (triangolo tratteggiato) è il momento della massa appesa.

ESEMPIO SVOLTO

Analizzare i dati dell'esperimento

Problema. Usando i dati della tabella 10.1, stabilisci che tipo di relazione lega F e b, ricava il momento della massa appesa con la sua incertezza e prevedi la lettura del dinamometro per b = 0,350 m.

Soluzione. Il grafico di F in funzione di b (figura 10.7a) è un ramo di iperbole: quando b raddoppia, da 0,200 m a 0,400 m, F si dimezza circa, da 2,95 N a 1,45 N. È il comportamento della proporzionalità inversa, che abbiamo imparato a riconoscere nel capitolo 5. Per verificarlo, linearizziamo: riportiamo F in funzione di $1/b$ (figura 10.7b). I punti si allineano su una retta che passa per l'origine, quindi $F = M \cdot (1/b)$, cioè $F\,b = M$. La pendenza della retta, letta con il triangolo tracciato fra $1/b$ = 4,0 m^{-1} e 10,0 m^{-1}, è circa 3,5 N / 6,0 m^{-1} ≈ 0,59 N·m.

In modo equivalente, dalla tabella: il valore medio dei sei prodotti $F\,b$ è 0,587 N·m e la semidispersione massima è (0,5925 − 0,5800)/2 N·m ≈ 0,006 N·m. Il risultato è M = (0,587 ± 0,006) N·m, compatibile con il valore atteso 0,588 N·m. (Un'analisi più accurata dovrebbe considerare anche la sensibilità del dinamometro, che pesa di più sulle letture piccole, cioè sui bracci lunghi.)

Previsione. Per b = 0,350 m: F = 0,587 N·m / 0,350 m ≈ 1,68 N; il dinamometro, con sensibilità 0,05 N, dovrebbe segnare circa 1,70 N.

Le idee di questo capitolo, il momento e le due condizioni di equilibrio, sono gli strumenti con cui nel capitolo 11 studieremo le leve e le altre macchine semplici, il baricentro dei corpi e la stabilità del loro equilibrio: perché un bicchiere pieno si rovescia più facilmente di uno mezzo vuoto, perché un funambolo usa un'asta lunga e perché una torre inclinata può restare in piedi.

SINTESI

- Un corpo rigido è un corpo esteso che non si deforma; oltre a traslare, può ruotare. Per il suo equilibrio una risultante nulla non basta.
- La retta d'azione di una forza passa per il punto di applicazione e ha la direzione della forza; il braccio b rispetto a un polo O è la distanza di O dalla retta d'azione, non dal punto di applicazione.
- Il momento di una forza rispetto a O è $M = F\,b = F\,d$ sen α e si misura in N·m; dipende dal polo scelto.
- Convenzione: momento positivo se la forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario, negativo se in senso orario.
- Il momento è nullo quando la retta d'azione passa per il polo; è massimo, a parità di F e d, quando la forza è perpendicolare al segmento che congiunge il polo con il punto di applicazione.
- Il momento risultante di più forze è la somma algebrica dei loro momenti rispetto allo stesso polo.
- Una coppia è formata da due forze uguali, parallele, opposte, con rette d'azione distinte: risultante nulla, momento $F\,d$ uguale rispetto a ogni polo. Non si può equilibrare con una sola forza.
- Due forze parallele concordi hanno risultante $F_1 + F_2$, applicata fra le due forze, più vicino alla maggiore; due forze discordi di modulo diverso hanno risultante $|F_1 - F_2|$, applicata all'esterno, dalla parte della maggiore.
- Il peso di un'asta omogenea si può considerare applicato nel suo punto medio.
- Un corpo rigido fermo resta in equilibrio se $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ e $\Sigma M = 0$; se valgono rispetto a un polo, i momenti si annullano rispetto a ogni polo.
- Conviene scegliere il polo nel punto di applicazione di una forza incognita: nell'equazione dei momenti quella forza scompare.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Il braccio di una forza rispetto a un polo O è:
   A. la distanza fra O e il punto di applicazione della forza
   B. la lunghezza del vettore che rappresenta la forza
   C. la distanza fra O e la retta d'azione della forza
   D. la distanza fra il punto di applicazione e il suolo

2. ● Nel SI il momento di una forza si misura in:
   A. N/m
   B. N·m
   C. kg·m
   D. N

3. ● Una forza non nulla la cui retta d'azione passa per il polo ha, rispetto a quel polo, momento:
   A. massimo
   B. uguale al modulo della forza
   C. che dipende dal punto di applicazione
   D. nullo

4. ●● Con la convenzione dei segni di questo libro, una forza che tende a far ruotare un corpo in senso orario ha momento:
   A. negativo
   B. positivo
   C. nullo
   D. positivo o negativo a seconda del modulo della forza

5. ●● Una coppia è formata da due forze di 15 N con rette d'azione distanti 0,40 m. Il suo momento vale, in modulo:
   A. 3,0 N·m
   B. 37,5 N·m
   C. 6,0 N·m
   D. 12 N·m

6. ● Un corpo rigido inizialmente fermo resta in equilibrio se:
   A. la risultante delle forze è nulla
   B. il momento risultante rispetto a un polo è nullo
   C. tutte le forze hanno lo stesso modulo
   D. sono nulli sia la risultante delle forze sia il momento risultante

7. ●● Due forze parallele concordi di 20 N e 60 N sono applicate a un'asta. La loro risultante:
   A. vale 40 N ed è applicata vicino alla forza di 60 N
   B. vale 80 N ed è applicata più vicino alla forza di 60 N
   C. vale 80 N ed è applicata a metà strada fra le due forze
   D. vale 80 N ed è applicata più vicino alla forza di 20 N

8. ●● Spingi una porta perpendicolarmente con la stessa forza, ma a una distanza doppia dai cardini. Il momento della forza rispetto ai cardini:
   A. raddoppia
   B. si dimezza
   C. resta lo stesso
   D. quadruplica

9. ●● Una forza di 40 N è applicata all'estremità di una chiave, a 0,20 m dal centro del bullone, con un angolo di 30° rispetto al manico. Il suo momento vale, in modulo:
   A. 8,0 N·m
   B. 6,9 N·m
   C. 4,0 N·m
   D. 0 N·m

Vero o falso

10. ● Il momento di una forza dipende dal polo rispetto al quale lo si calcola. V / F

11. ● Se la risultante delle forze applicate a un corpo rigido è nulla, il corpo non può cominciare a ruotare. V / F

12. ●● Il momento di una coppia di forze ha lo stesso valore rispetto a qualsiasi polo. V / F

13. ●● La risultante di due forze parallele discordi di moduli diversi è applicata in un punto compreso fra le due forze. V / F

14. ● Una coppia di forze può essere equilibrata da una sola forza, purché abbastanza intensa e applicata nel punto giusto. V / F

Applicare

15. ● Spingi una porta con una forza di 60 N, perpendicolare alla porta, a 0,70 m dai cardini. Calcola il modulo del momento della forza rispetto ai cardini.

16. ● Per svitare un bullone serve un momento di 30 N·m. Usando una chiave e spingendo perpendicolarmente al manico a 0,25 m dal bullone, quale forza devi applicare?

17. ● Per aprire un rubinetto applichi con pollice e indice due forze opposte di 8,0 N, con rette d'azione distanti 4,0 cm. Calcola il momento della coppia.

18. ●● Una forza di 50 N è applicata a 0,40 m dal polo O e forma un angolo di 60° con il segmento che congiunge O con il punto di applicazione. Calcola il braccio e il modulo del momento.

19. ●● Completa. Due forze parallele concordi di 30 N e 90 N sono applicate a un'asta in due punti distanti 80 cm. La loro risultante vale _____ N ed è applicata a _____ cm dalla forza di 30 N.

20. ●● Un gruppo di studenti ripete l'esperimento del laboratorio con una massa diversa e misura la forza F necessaria per tenere l'asta orizzontale con il dinamometro a varie distanze b dal perno. Stabilisci che tipo di relazione lega F e b, ricava il momento della massa appesa e prevedi F per b = 50 cm.

b (cm)	10	20	25	40
F (N)	4,8	2,4	1,9	1,2

21. ●● Un'asta lunga 1,0 m è imperniata nel suo estremo sinistro O. Su di essa agiscono una forza di 30 N verticale verso l'alto a 0,40 m da O, una forza di 8,0 N verticale verso il basso all'estremo destro e una forza di 25 N diretta lungo l'asta. Calcola il momento di ciascuna forza rispetto a O, con il segno, e il momento risultante. L'asta comincia a ruotare? In quale verso?

22. ● Un volante ha un diametro di 36 cm. Per girarlo serve un momento di 5,4 N·m. Con quale forza deve spingere ciascuna mano, se le due mani applicano una coppia di forze tangenti al volante in punti diametralmente opposti?

Problemi

23. ●● Un'asse omogenea lunga 3,0 m e di massa 15 kg è appoggiata alle estremità A e B su due mattoni. Sull'asse è posata una cassa di 40 kg, a 1,0 m da A. Calcola le reazioni dei due appoggi e controlla il risultato calcolando i momenti rispetto a B.

24. ●● Un'altalena a bilico è formata da un'asse omogenea lunga 4,0 m e di massa 20 kg, imperniata nel suo punto medio. Una bambina di 25 kg siede a 1,8 m dal perno. a) A quale distanza dal perno, dall'altra parte, deve sedersi il fratello, di massa 30 kg, perché l'altalena stia in equilibrio orizzontale? b) Quanto vale in questo caso la reazione del perno?

25. ●●● Un'asta omogenea lunga 2,0 m e di massa 5,0 kg è incernierata a un muro nel suo estremo A ed è tenuta orizzontale da un tirante fissato all'altro estremo B, che forma un angolo di 30° con l'asta. A 1,5 m da A è appesa una lanterna di massa 12 kg. Calcola: a) la tensione del tirante; b) le componenti orizzontale e verticale della reazione della cerniera.

26. ● Per svitare i bulloni di una ruota serve un momento di 100 N·m. a) Usando una chiave a croce e applicando una coppia di forze con le mani distanti 0,40 m, quale forza deve esercitare ciascuna mano? b) Usando un solo braccio della chiave e una sola mano a 0,20 m dal bullone, con una forza perpendicolare al braccio, quale forza serve?

27. ●●● Una mensola è sostenuta da staffe a L come quella della figura 10.6b. Su una staffa grava un carico di 150 N, applicato a 12 cm dal muro; la vite superiore si trova 18 cm più in alto dello spigolo inferiore, che appoggia contro il muro. a) Calcola la forza orizzontale con cui la vite deve trattenere la staffa. b) Quanto varrebbe questa forza se lo stesso carico fosse applicato a 24 cm dal muro? c) Proponi due modifiche alla staffa che riducano la forza sulla vite.

28. ●●● Tieni orizzontale una scopa omogenea lunga 1,2 m e di massa 0,60 kg impugnandola con due mani: la mano sinistra all'estremo A del manico, la mano destra a 0,30 m da A. Le due mani esercitano forze verticali. a) Calcola le forze delle due mani, specificandone il verso. b) Spiega perché una delle due forze è maggiore del peso della scopa.

29. ●●● Un trampolino lungo 4,0 m, di massa trascurabile, è fissato a una piattaforma in due punti: l'estremo A è imbullonato e un appoggio B si trova a 1,0 m da A. Un tuffatore di 60 kg sta fermo all'estremo libero. Calcola le forze che il bullone in A e l'appoggio in B esercitano sul trampolino, specificandone il verso.

Ragionare e argomentare

30. ● Spiega, usando il concetto di momento, perché le maniglie delle porte sono montate sul lato opposto ai cardini e perché è inutile spingere una porta lungo la sua superficie, verso i cardini.

31. ●● Trova l'errore. Un compagno scrive: «Una forza di 20 N è applicata all'estremità di un'asta, a 0,50 m dal perno, ed è inclinata di 30° rispetto all'asta. Il suo momento vale 20 N × 0,50 m = 10 N·m». Che cosa ha sbagliato? Qual è il valore corretto?

32. ●● Stima l'ordine di grandezza del momento, rispetto alla spalla, del peso di uno zaino pieno di libri tenuto con il braccio teso in orizzontale. Indica i valori che ipotizzi per la massa dello zaino e la lunghezza del braccio, e giustificali.

33. ●●● Progetta un esperimento per verificare che, per un'asta in equilibrio sotto l'azione di più forze, la somma dei momenti è nulla rispetto a qualsiasi polo e non solo rispetto al perno. Usa un'asta graduata, due dinamometri e alcune masse; indica che cosa misuri, come calcoli i momenti e quale risultato ti aspetti.

PER APPROFONDIRE

- [HEW] P.G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sulla rotazione introduce il momento di una forza con molti esempi quotidiani, dalle chiavi alle altalene.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sulla rotazione nel piano trattano il momento della forza e le sue proprietà.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo su equilibrio ed elasticità contiene molti problemi su travi, mensole e tiranti.

Glossario del capitolo

Braccio
Distanza del polo dalla retta d'azione di una forza (non dal punto di applicazione).

Braccio della coppia
Distanza d fra le rette d'azione delle due forze di una coppia.

Condizioni di equilibrio del corpo rigido
Un corpo rigido fermo resta in equilibrio se la risultante delle forze è nulla ($\Sigma F = 0$) e il momento risultante rispetto a un polo qualsiasi è nullo ($\Sigma M = 0$).

Convenzione dei segni
Regola adottata nel libro: il momento è positivo se la forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario, negativo se in senso orario.

Coppia di forze
Sistema di due forze uguali in modulo, parallele e di verso opposto, con rette d'azione distinte; ha risultante nulla e momento $F\,d$.

Forza equivalente
Forza singola che ha lo stesso effetto di un sistema di forze su un corpo rigido: stessa somma vettoriale e stesso momento rispetto a qualsiasi polo.

Forze parallele concordi
Forze parallele con lo stesso verso; la risultante è la somma dei moduli ed è applicata fra le forze, più vicino alla maggiore.

Forze parallele discordi
Forze parallele di verso opposto; se i moduli sono diversi, la risultante è la differenza dei moduli ed è applicata all'esterno, dalla parte della forza maggiore.

Momento di una forza
Prodotto del modulo della forza per il suo braccio, $M = F\,b = F\,d\,\text{sen}\,\alpha$; misura la capacità della forza di far ruotare un corpo attorno al polo. Si misura in $N{\cdot}m$.

Momento risultante
Somma algebrica, con i rispettivi segni, dei momenti di tutte le forze che agiscono su un corpo, calcolati rispetto allo stesso polo.

Polo
Punto rispetto al quale si calcola il momento di una forza; per un corpo imperniato è di solito il perno.

Reazione d'appoggio
Forza che un appoggio esercita su una trave; si ricava dalle condizioni di equilibrio, in particolare da quella sui momenti.

Regola della mano destra
Regola per trovare il verso del momento come vettore: se le dita della mano destra seguono il verso della rotazione, il pollice indica il verso del momento.

Rotazione
Movimento in cui i punti di un corpo descrivono archi attorno a un asse, i cui punti restano fermi.

Tirante
Cavo o asta che sostiene una struttura lavorando a trazione, come il cavo che regge un'asta incernierata al muro.

Traslazione
Movimento in cui tutti i punti di un corpo si spostano nello stesso modo, nella stessa direzione e della stessa lunghezza.

Trave appoggiata
Asta rigida sostenuta da due appoggi che esercitano su di essa soltanto forze verticali verso l'alto.

Soluzioni

1. C. Il braccio è la distanza del polo dalla retta d'azione della forza, non dal punto di applicazione.

2. B. $M = F\,b$: newton per metro, N·m (N/m è l'unità della costante elastica).

3. D. Se la retta d'azione passa per il polo il braccio è zero, quindi $M = 0$.

4. A. Per convenzione i momenti antiorari sono positivi e quelli orari negativi.

5. C. $M = F\,d = 15\ \text{N} \times 0{,}40\ \text{m} = 6{,}0\ \text{N·m}$.

6. D. Servono entrambe le condizioni: $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ (nessuna traslazione) e $\Sigma M = 0$ (nessuna rotazione).

7. B. $R = 20\ \text{N} + 60\ \text{N} = 80\ \text{N}$, applicata fra le due forze e più vicino alla maggiore (le distanze sono inversamente proporzionali alle forze).

8. A. Con la forza perpendicolare il braccio è uguale alla distanza; raddoppiando il braccio, $M = F\,b$ raddoppia.

9. C. $b = 0{,}20\ \text{m} \times \text{sen}\ 30° = 0{,}10\ \text{m}$; $M = 40\ \text{N} \times 0{,}10\ \text{m} = 4{,}0\ \text{N·m}$.

10. V. Cambiando il polo cambia la distanza dalla retta d'azione, cioè il braccio (fanno eccezione le coppie).

11. F. Una coppia ha risultante nulla ma momento diverso da zero e fa ruotare il corpo.

12. V. $M = F\,(x + d) - F\,x = F\,d$, indipendente dalla posizione del polo.

13. F. È applicata all'esterno del segmento che congiunge i due punti di applicazione, dalla parte della forza maggiore.

14. F. Una sola forza ha risultante non nulla, mentre quella della coppia è nulla: il corpo traslerebbe. Una coppia si equilibra solo con un'altra coppia (o forze a risultante nulla) di momento opposto.

15. $M = F\,b = 60\ \text{N} \times 0{,}70\ \text{m} = 42\ \text{N·m}$.

16. $F = M/b = 30\ \text{N·m} / 0{,}25\ \text{m} = 1{,}2 \times 10^2\ \text{N}$ (120 N).

17. $M = F\,d = 8{,}0\ \text{N} \times 0{,}040\ \text{m} = 0{,}32\ \text{N·m}$.

18. $b = d\ \text{sen}\ 60° = 0{,}40\ \text{m} \times 0{,}866 \approx 0{,}35\ \text{m}$; $M = F\,b = 50\ \text{N} \times 0{,}346\ \text{m} \approx 17\ \text{N·m}$.

19. $R = 30\ \text{N} + 90\ \text{N} = 120\ \text{N}$; da $30\ \text{N} \cdot x = 90\ \text{N} \cdot (80\ \text{cm} - x)$ si ottiene $x = 60$ cm dalla forza di 30 N (e 20 cm da quella di 90 N).

20. I prodotti $F\,b$ valgono 0,48; 0,48; 0,475; 0,48 N·m: sono costanti, quindi F è inversamente proporzionale a b e $M \approx 0{,}48\ \text{N·m}$. Per $b = 0{,}50$ m: $F = 0{,}48\ \text{N·m} / 0{,}50\ \text{m} \approx 0{,}96\ \text{N}$.

21. Rotazioni antiorarie positive, asta a destra di O. Forza di 30 N verso l'alto: $M_1 = +30\ \text{N} \times 0{,}40\ \text{m} = +12\ \text{N·m}$; forza di 8,0 N verso il basso: $M_2 = -8{,}0\ \text{N} \times 1{,}0\ \text{m} = -8{,}0\ \text{N·m}$; forza lungo l'asta: retta d'azione per O, $M_3 = 0$. $\Sigma M = +4{,}0\ \text{N·m} \neq 0$: l'asta comincia a ruotare in senso antiorario.

22. $M = F\,d \Longrightarrow F = 5{,}4\ \text{N·m} / 0{,}36\ \text{m} = 15\ \text{N}$ per ciascuna mano.

23. $P_{\text{asse}} = 15\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 147\ \text{N}$ (a 1,5 m da A), $P_{\text{cassa}} = 40\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 392\ \text{N}$ (a 1,0 m da A). Momenti rispetto ad A: $N_B \cdot 3{,}0\ \text{m} - 147\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m} - 392\ \text{N} \cdot 1{,}0\ \text{m} = 0 \Longrightarrow N_B = 612{,}5\ \text{N·m} / 3{,}0\ \text{m} \approx 204\ \text{N} \approx 2{,}0 \times 10^2\ \text{N}$. Forze: $N_A = 147\ \text{N} + 392\ \text{N} - 204\ \text{N} \approx 335\ \text{N} \approx 3{,}3 \times 10^2\ \text{N}$. Controllo rispetto a B: $-335\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} + 147\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m} + 392\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = -1005 + 220{,}5 + 784 \approx 0\ \text{N·m}$ ✓.

24. a) Il peso dell'asse passa per il perno e non dà momento: $25\ \text{kg} \cdot g \cdot 1{,}8\ \text{m} = 30\ \text{kg} \cdot g \cdot x \Longrightarrow x = 25 \times 1{,}8\ \text{m} / 30 = 1{,}5\ \text{m}$. b) $R = (25 + 30 + 20)\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 735\ \text{N} \approx 7{,}4 \times 10^2\ \text{N}$, verso l'alto.

25. $P_a = 5{,}0 \times 9{,}8 = 49\ \text{N}$ (a 1,0 m da A), $P_l = 12 \times 9{,}8 = 117{,}6\ \text{N}$ (a 1,5 m). Braccio del tirante rispetto ad A: $b_T = 2{,}0\ \text{m} \times \text{sen}\ 30° = 1{,}0\ \text{m}$. a) $T \cdot 1{,}0\ \text{m} = 49\ \text{N} \cdot 1{,}0\ \text{m} + 117{,}6\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m} = 225{,}4\ \text{N·m} \Longrightarrow T \approx 225\ \text{N} \approx 2{,}3 \times 10^2\ \text{N}$. b) $R_x = T \cos 30° \approx 225{,}4 \times 0{,}866 \approx 195\ \text{N} \approx 2{,}0 \times 10^2\ \text{N}$, diretta lontano dal muro; $R_y = 49\ \text{N} + 117{,}6\ \text{N} - T\ \text{sen}\ 30° = 166{,}6\ \text{N} - 112{,}7\ \text{N} \approx 54\ \text{N}$, verso l'alto.

26. a) Coppia: $F = M/d = 100\ \text{N·m} / 0{,}40\ \text{m} = 250\ \text{N}$ per mano. b) Una forza sola: $F = 100\ \text{N·m} / 0{,}20\ \text{m} = 500\ \text{N}$ (il doppio, e in più il bullone riceve una forza risultante non nulla).

27. Momenti rispetto allo spigolo C. a) $F_{\text{vite}} \cdot 0{,}18\ \text{m} = 150\ \text{N} \cdot 0{,}12\ \text{m} \Longrightarrow F_{\text{vite}} = 18\ \text{N·m} / 0{,}18\ \text{m} = 100\ \text{N}$. b) Con il carico a 0,24 m: $F_{\text{vite}} = 150\ \text{N} \times 0{,}24\ \text{m} / 0{,}18\ \text{m} = 200\ \text{N}$ (raddoppia). c) Allungare il tratto verticale della staffa, così che la vite sia più lontana da C (braccio maggiore); usare staffe meno profonde o avvicinare il carico al muro (momento del carico minore); distribuire il carico su più staffe.

28. $P = 0{,}60\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 5{,}88\ \text{N}$, applicato a 0,60 m da A. a) Momenti rispetto ad A: $F_{\text{dx}} \cdot 0{,}30\ \text{m} = 5{,}88\ \text{N} \cdot 0{,}60\ \text{m} \Longrightarrow F_{\text{dx}} = 11{,}76\ \text{N} \approx 12\ \text{N}$ verso l'alto. Forze: $F_{\text{sx}} = 5{,}88\ \text{N} - 11{,}76\ \text{N} = -5{,}88\ \text{N}$, cioè la mano sinistra preme verso il basso con circa 5,9 N. b) La mano destra ha un braccio (0,30 m) pari a metà di quello del peso (0,60 m): per compensarne il momento deve esercitare una forza doppia del peso; l'eccesso verso l'alto è compensato dalla spinta verso il basso della mano sinistra.

29. $P = 60\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 588\ \text{N}$ a 4,0 m da A. Momenti rispetto ad A: $N_{\text{B}} \cdot 1{,}0\ \text{m} - 588\ \text{N} \cdot 4{,}0\ \text{m} = 0 \Longrightarrow N_{\text{B}} = 2352\ \text{N} \approx 2{,}4 \times 10^{3}\ \text{N}$ verso l'alto. Forze: $F_{\text{A}} = 588\ \text{N} - 2352\ \text{N} = -1764\ \text{N}$: il bullone tira il trampolino verso il basso con circa $1{,}8 \times 10^{3}\ \text{N}$.

30. Traccia: il momento è $F\,b$; montando la maniglia lontano dai cardini il braccio è massimo e basta una forza piccola. Una spinta lungo la porta verso i cardini ha retta d'azione passante per il polo: braccio nullo, momento nullo, nessuna rotazione.

31. Ha usato come braccio la distanza dal perno al punto di applicazione (0,50 m) invece della distanza dalla retta d'azione: $b = 0{,}50\ \text{m} \times \text{sen}\ 30° = 0{,}25\ \text{m}$, quindi $M = 20\ \text{N} \times 0{,}25\ \text{m} = 5{,}0\ \text{N·m}$.

32. Traccia: zaino di circa 5 kg (peso ≈ 50 N), braccio teso lungo circa 0,6 m dalla spalla alla mano; $M \approx 50\ \text{N} \times 0{,}6\ \text{m} \approx 30\ \text{N·m}$, ordine di grandezza 10^{1} N·m. Ipotesi diverse ma ragionevoli (3–8 kg, 0,5–0,7 m) danno valori fra circa 15 e 55 N·m: in ogni caso alcune decine di newton per metro, cioè un ordine di grandezza fra 10^{1} e 10^{2} N·m, secondo il valore stimato.

33. Traccia: appendere l'asta a due dinamometri verticali (o imperniarla e usarne uno), applicare masse note in posizioni misurate; quando l'asta è ferma e orizzontale, leggere le forze dei dinamometri e misurare tutte le posizioni sulla scala graduata. Calcolare i momenti di tutte le forze (pesi delle masse, peso dell'asta nel punto medio, forze dei dinamometri) rispetto ad almeno tre poli diversi, per esempio un estremo, il centro e un punto qualsiasi, con la convenzione antiorario positivo. Ci si aspetta che la somma sia zero in tutti i casi, entro l'incertezza dovuta alla sensibilità dei dinamometri e alla lettura delle posizioni.