CAPITOLO

9

L'equilibrio del punto materiale

Un corpo fermo non è un corpo senza forze: è un corpo in cui tutte le forze, sommate, fanno zero.

OBIETTIVI

1. Usare il modello del punto materiale e riconoscere quando un corpo è in equilibrio.
2. Scrivere la condizione di equilibrio in forma vettoriale e per componenti.
3. Disegnare il diagramma di corpo libero e seguire un metodo ordinato per risolvere i problemi di equilibrio.
4. Calcolare le tensioni delle funi che reggono un corpo appeso.
5. Scomporre il peso sul piano inclinato e calcolare la forza necessaria per tenere fermo un corpo, con e senza attrito.
6. Descrivere il funzionamento di una carrucola fissa ideale.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Il punto materiale e l'equilibrio 2
9.2 La condizione di equilibrio 3
9.3 Corpi appoggiati e corpi appesi 5
9.4 Il piano inclinato liscio 10
9.5 Il piano inclinato con attrito 13
9.6 La carrucola fissa 17

Fisica 1 · Parte III · L'equilibrio dei solidi · versione 1.0
Capitolo 9: L'equilibrio del punto materiale · pagine 231–254 del volume completo · estratto per lo studio

Un lampadario pende dal soffitto, un libro riposa sul banco, un'auto è parcheggiata in una strada in salita, un funambolo sta immobile a metà del suo cavo. Sono situazioni tranquille, in cui «non succede niente»: eppure su ciascuno di questi corpi agiscono forze anche intense. Il lampadario è tirato verso il basso dal suo peso e verso l'alto dal cavo; l'auto è attirata dalla Terra, sorretta dall'asfalto e trattenuta dall'attrito delle gomme. Se nulla si muove, è perché queste forze si compensano esattamente.

In questo capitolo, il primo della parte dedicata all'equilibrio dei solidi, studiamo il caso più semplice: quello di un corpo che possiamo trattare come un *punto*. Useremo tutti gli strumenti costruiti finora: i vettori e le loro componenti (capitolo 6), il peso e la forza elastica (capitolo 7), le reazioni vincolari, la tensione delle funi e l'attrito (capitolo 8). Alla fine sapremo calcolare quanto deve essere robusta una fune, con quale forza si trattiene una cassa su una rampa e fino a quale inclinazione un oggetto resta fermo su un piano senza scivolare.

9.1 Il punto materiale e l'equilibrio

9.1.1 Il modello del punto materiale

Nel capitolo 1 abbiamo visto che la fisica lavora con *modelli*: descrizioni semplificate della realtà che tengono solo ciò che conta per il problema. Il primo modello della meccanica è il **punto materiale**: un corpo di cui consideriamo la massa, ma di cui trascuriamo le dimensioni, come se tutta la materia fosse concentrata in un punto.

Trascurare le dimensioni significa, in pratica, ammettere che tutte le forze agiscano nello stesso punto e che il corpo non possa ruotare. È una buona approssimazione quando le dimensioni del corpo non hanno importanza per il fenomeno studiato. Un lampadario appeso a un solo cavo, una valigia appoggiata sul pavimento, una cassa trattenuta su una rampa da una fune parallela al piano: in tutti questi casi le forze hanno rette d'azione che passano (almeno con buona approssimazione) per uno stesso punto, e il corpo non ha alcuna tendenza a girare su se stesso. Si dice che le forze sono **concorrenti**.

Il modello smette di funzionare quando la rotazione diventa importante: una porta che spingiamo vicino ai cardini, una scala appoggiata al muro, un'altalena a bilico. Per questi casi servirà il modello del *corpo rigido*, con il concetto di momento di una forza, che è l'argomento del capitolo 10.

9.1.2 Che cosa significa «essere in equilibrio»

Diciamo che un corpo è in **equilibrio** quando, se si trova fermo, **resta fermo**. Questa è la situazione che studiamo in tutta la terza parte del libro, e si chiama più precisamente **equilibrio sta-**

tico.

La definizione contiene due condizioni distinte. Non basta che il corpo sia fermo in un certo istante: un sasso lanciato verso l'alto è fermo per un attimo nel punto più alto della traiettoria, ma non resta fermo, e infatti non è in equilibrio. Deve invece accadere che le forze che agiscono sul corpo non abbiano alcun effetto sul suo stato di quiete.

Una curiosità che riprenderai il prossimo anno, quando studierai i principi della dinamica: le stesse condizioni che garantiscono l'equilibrio statico valgono anche per un corpo che si muove in linea retta a velocità costante. Un'auto che viaggia a velocità costante su un rettilineo, per esempio, è soggetta a forze che si compensano. In questo capitolo ci occupiamo però solo di corpi fermi.

9.2 La condizione di equilibrio

9.2.1 La risultante deve essere nulla

L'esperienza mostra che un punto materiale inizialmente fermo resta fermo se, e solo se, la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è il vettore nullo. È la **condizione di equilibrio del punto materiale**:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}$$

Attenzione: la condizione non dice che sul corpo non agiscono forze, ma che le forze presenti si compensano. Se su un corpo agiscono due sole forze, la condizione è soddisfatta quando le due forze hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti. Se le forze sono tre o più, la situazione è più ricca: nessuna forza deve essere uguale e opposta a un'altra, ma ciascuna deve essere uguale e opposta alla *risultante di tutte le altre*. Per questo motivo una forza che, aggiunta a un sistema di forze, lo porta in equilibrio si chiama **forza equilibrante**: è il vettore opposto della risultante.

C'è anche un modo grafico per controllare l'equilibrio. Con il metodo punta-coda del capitolo 6 disegniamo i vettori delle forze uno dopo l'altro, ciascuno con la coda sulla punta del precedente. La risultante è il vettore che va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo; se la risultante è nulla, la punta dell'ultimo vettore torna esattamente alla coda del primo. In equilibrio il **poligono delle forze** è quindi **chiuso** (vedi la Figura 9.2c).

9.2.2 Le equazioni per componenti

Un'equazione vettoriale come $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ è comoda da scrivere ma non si risolve direttamente con la calcolatrice. Ci viene in aiuto un fatto visto nel capitolo 6: un vettore è nullo se, e solo se, sono nulle tutte le sue componenti cartesiane. Scelti due assi perpendicolari x e y, la condizione di equilibrio diventa quindi un sistema di due equazioni fra numeri:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0 \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0$$

Le componenti hanno un segno: sono positive se la forza punta nel verso dell'asse, negative nel verso opposto. Per esempio, se due operai tirano un anello con una forza di 30 N verso est (asse x) e una di 40 N verso nord (asse y), per tenere fermo l'anello serve una terza forza con componenti $F_{3x} = -30$ N e $F_{3y} = -40$ N, cioè una forza di modulo $\sqrt{(30^2 + 40^2)}$ N = 50 N che punta verso il basso a sinistra (fra sud e ovest), nel verso opposto alla risultante delle prime due. È la forza equilibrante delle prime due.

Il vantaggio del metodo per componenti è che con due equazioni si possono trovare **due incognite**: per esempio le tensioni di due funi, o la reazione di un piano e la forza che serve per trattenere un corpo. Il trucco sta nello scegliere gli assi in modo che il maggior numero possibile di forze stia lungo uno di essi: una forza parallela a un asse ha una sola componente diversa da zero, e le equazioni si semplificano.

9.2.3 Il diagramma di corpo libero

Il passo più importante nella soluzione di un problema di equilibrio arriva prima di qualsiasi calcolo: decidere *quali* forze agiscono sul corpo. Lo strumento per farlo è il **diagramma di corpo libero**: un disegno in cui il corpo è isolato da tutto ciò che lo circonda (piani, funi, mani, molle) e ciascuno di questi oggetti è sostituito dalla forza che esercita sul corpo.

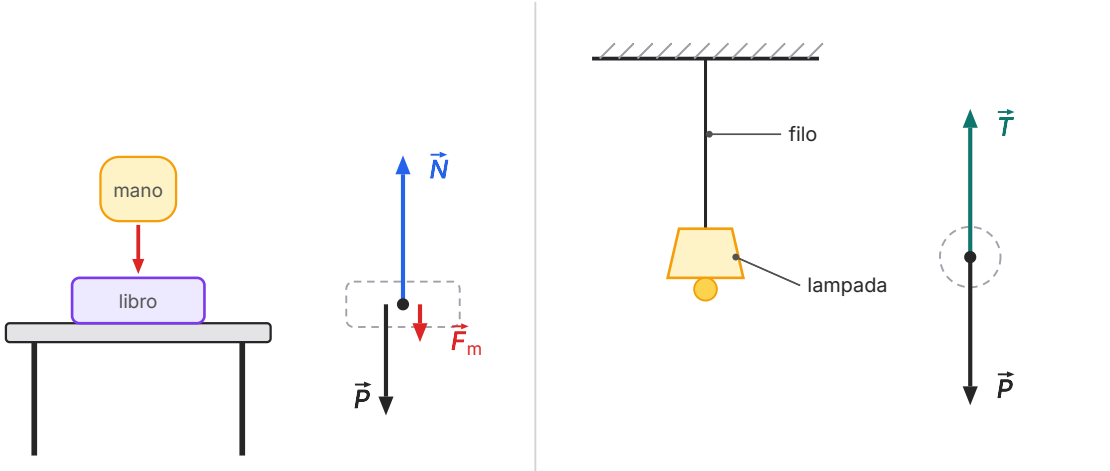


Figura 9.1 Dalla situazione al diagramma di corpo libero. a) Un libro di 1,5 kg sul tavolo, premuto da una mano. b) Nel diagramma del libro il tavolo e la mano sono sostituiti dalle forze che esercitano: la reazione N (circa 20 N) equilibra il peso P (circa 15 N) più la spinta F_m (5,0 N); le frecce sono in scala e, per leggibilità, affiancate. c) Una lampada di 2,0 kg appesa a un filo. d) Il suo diagramma: tensione T e peso P, entrambi di circa 20 N.

Guardiamo la Figura 9.1. Un libro di massa 1,5 kg è appoggiato sul tavolo e una mano lo spinge verso il basso con una forza di 5,0 N. Nel diagramma di corpo libero del libro ci sono tre forze: il peso $\boldsymbol{P}$, di modulo $m\,g = 1{,}5\text{ kg} \times 9{,}8\text{ N/kg} \approx 15\text{ N}$; la spinta della mano $\boldsymbol{F}_\text{m}$, di 5,0 N verso il basso; la reazione vincolare del tavolo $\boldsymbol{N}$, verso l'alto. Il tavolo non compare: al suo posto c'è la forza $\boldsymbol{N}$. La mano non compare: al suo posto c'è $\boldsymbol{F}_\text{m}$. La lampada appesa ha un diagramma ancora più semplice: il peso verso il basso e la tensione del filo verso l'alto.

Ogni problema di equilibrio si affronta con lo stesso **metodo**, in cinque passi.

1. **Isola il corpo** di cui vuoi studiare l'equilibrio. Se i corpi sono più di uno (per esempio due masse legate da una fune), studiali uno alla volta.
2. **Disegna il diagramma di corpo libero**: il peso, poi una forza per ogni oggetto che tocca il corpo (piano, fune, molla, mano). Indica le forze note con il loro valore e le incognite con un simbolo.
3. **Scegli gli assi** e dichiara il verso positivo di ciascuno. Conviene orientare un asse lungo il maggior numero possibile di forze.
4. **Scrivi le equazioni** $R_\text{x} = 0$ e $R_\text{y} = 0$, calcolando le componenti di ogni forza con il loro segno, e risolvile.
5. **Controlla** il risultato: le unità di misura, l'ordine di grandezza, i casi limite (che cosa succede se un angolo diventa 0° o 90°?).

> **DA RICORDARE**
>
> Nel diagramma di corpo libero vanno **solo le forze che agiscono sul corpo**, non quelle che il corpo esercita sugli altri. Il libro preme sul tavolo, ma quella forza agisce sul tavolo e non entra nel diagramma del libro. Un buon controllo: per ogni freccia devi saper dire «questa forza è esercitata da… su…». Se la seconda risposta non è «sul corpo che sto studiando», la freccia va cancellata.

9.3 Corpi appoggiati e corpi appesi

9.3.1 Un corpo appoggiato su un piano orizzontale

Cominciamo dal caso più semplice: un corpo fermo su un piano orizzontale, senza altre forze. Le forze sono due, entrambe verticali: il peso $\boldsymbol{P}$ verso il basso e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ del piano verso l'alto. Scegliamo l'asse y verticale, con verso positivo verso l'alto. La condizione di equilibrio si riduce a una sola equazione:

$$N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P$$

Se però sul corpo agisce anche un'altra forza verticale, la reazione cambia. Nel caso del libro premuto dalla mano (Figura 9.1b) l'equazione diventa $N - P - F_\text{m} = 0$, quindi $N = P + F_\text{m} \approx 15\text{ N} +$

5,0 N ≈ 20 N: il tavolo spinge di più, esattamente quanto serve per mantenere l'equilibrio. Se invece una fune tirasse il corpo verso l'alto senza sollevarlo, la reazione sarebbe minore del peso. Per esempio, per una valigia di 5,0 kg (peso 49 N) tirata verso l'alto con 20 N, la reazione del pavimento è $N = 49\ \text{N} - 20\ \text{N} = 29\ \text{N}$. Il piano è un vincolo «intelligente»: la sua reazione si adatta alle altre forze, fino al limite in cui il corpo si stacca ($N = 0$) o il piano si rompe.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «La reazione del tavolo è uguale al peso del libro perché a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria». È un ragionamento sbagliato, anche se il risultato in questo caso è giusto. Il peso del libro e la reazione del tavolo agiscono **sullo stesso corpo**, il libro, e sono uguali e opposti **perché il libro è in equilibrio**: lo dice la condizione $R = 0$. Lo dimostrano i casi in cui l'uguaglianza non vale: il libro premuto dalla mano, o un libro appoggiato su un piano inclinato (paragrafo 9.4), dove N è minore di P.

9.3.2 Un corpo appeso a un filo

Un corpo appeso a un filo verticale, come la lampada della Figura 9.1d, è soggetto al peso e alla tensione $\boldsymbol{T}$ del filo, che tira verso l'alto lungo il filo stesso. Con l'asse y verso l'alto, l'equilibrio richiede $T - P = 0$, cioè $T = P$. Una lampada di 2,0 kg tende il filo con una forza di $2{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} \approx 20\ \text{N}$. Come nel capitolo 8, consideriamo il filo **ideale**: inestensibile e di massa trascurabile; in queste condizioni la tensione ha lo stesso valore in ogni punto del filo.

Fin qui tutte le forze erano sulla stessa retta e bastava una sola equazione. Le cose si fanno più interessanti quando le funi sono due e sono inclinate.

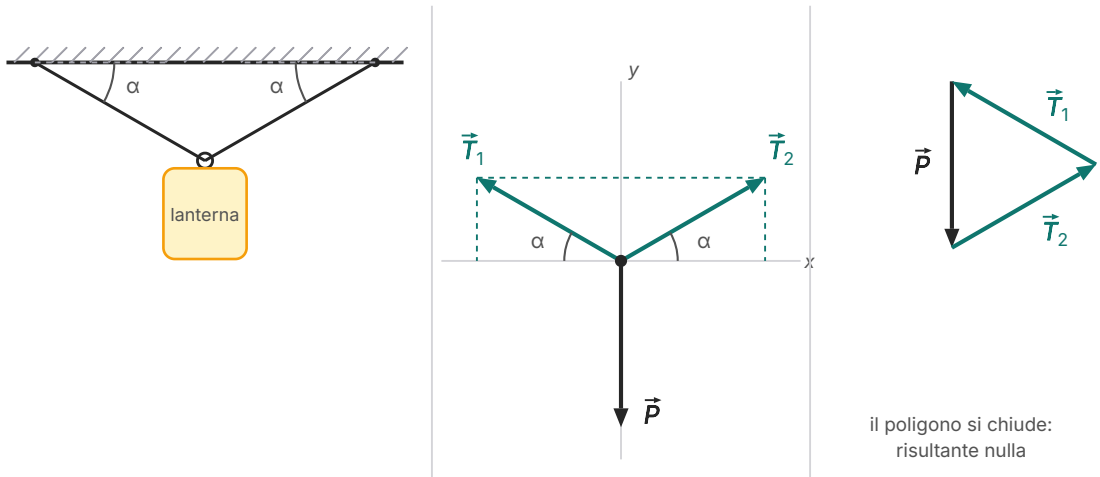
9.3.3 Due funi simmetriche

Una lanterna è appesa a due funi uguali, fissate a due ganci alla stessa altezza; ciascuna fune forma un angolo α con l'orizzontale (Figura 9.2). Per la simmetria della situazione le due tensioni hanno lo stesso modulo T. Scegliamo l'asse x orizzontale verso destra e l'asse y verticale verso l'alto, e scomponiamo le tensioni come nel capitolo 6:

- la fune di destra ha componenti $T_{2x} = T\cos\alpha$ e $T_{2y} = T\,\text{sen}\,\alpha$;
- la fune di sinistra ha componenti $T_{1x} = -T\cos\alpha$ e $T_{1y} = T\,\text{sen}\,\alpha$;
- il peso ha componenti $P_x = 0$ e $P_y = -P$.

L'equazione lungo x è soddisfatta automaticamente: $-T\cos\alpha + T\cos\alpha = 0$. Le componenti orizzontali delle due funi si annullano a vicenda, ed è proprio per questo che i ganci devono essere due. L'equazione lungo y dà invece:

$$2T\,\text{sen}\,\alpha - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{2\,\text{sen}\,\alpha}$$



a) la situazione **b) diagramma di corpo libero** **c) poligono delle forze**

Figura 9.2 Lanterna appesa a due funi simmetriche inclinate di α = 30° sull'orizzontale. a) La situazione. b) Diagramma di corpo libero con le componenti delle tensioni (tratteggiate): le componenti orizzontali si annullano, quelle verticali sommate equilibrano il peso. c) Il poligono delle forze è chiuso; con α = 30° è un triangolo equilatero, quindi $T = P$. Vettori in scala.

ESEMPIO SVOLTO

La lanterna del cortile

Problema. Una lanterna di massa 4,0 kg è appesa al centro di un cavo i cui due tratti formano ciascuno un angolo di 30° con l'orizzontale. Calcola la tensione di ciascun tratto. Che cosa succede se il cavo viene teso di più, fino a formare angoli di 10°?

Soluzione. Il peso è $P = m\,g = 4{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 39{,}2\ \text{N}$. Con sen 30° = 0,500:

$$T = \frac{39{,}2\ \text{N}}{2 \times 0{,}500} = 39{,}2\ \text{N} \approx 39\ \text{N}$$

Ciascun tratto di cavo è teso quanto l'intero peso della lanterna, non la metà! Il motivo si vede nel poligono delle forze (Figura 9.2c): con α = 30° l'angolo fra le due funi è 120° e i tre vettori formano un triangolo equilatero, quindi hanno lo stesso modulo. Con α = 10°, la calcolatrice (in modalità gradi) dà sen 10° ≈ 0,174 e quindi $T = 39{,}2\ \text{N} / (2 \times 0{,}174) \approx 1{,}1 \times 10^2\ \text{N}$: quasi il triplo del peso.

Controllo. Se le funi fossero verticali (α = 90°, sen 90° = 1) ciascuna reggerebbe metà del peso, 19,6 N: è il valore minimo possibile, e i nostri risultati sono maggiori, come devono essere.

La formula $T = P/(2 \text{ sen } \alpha)$ contiene una lezione importante, che il grafico della Figura 9.3 rende evidente. Quando le funi sono quasi verticali, ciascuna regge circa metà del peso. Man mano che le funi si avvicinano all'orizzontale, sen α diventa piccolo e la tensione cresce senza limite: per α = 30° vale già quanto il peso, per α = 10° quasi tre volte il peso. Le componenti verticali delle tensioni devono sempre sommarsi al valore di P; se le funi sono poco inclinate, per ottenere una piccola componente verticale serve una tensione enorme.

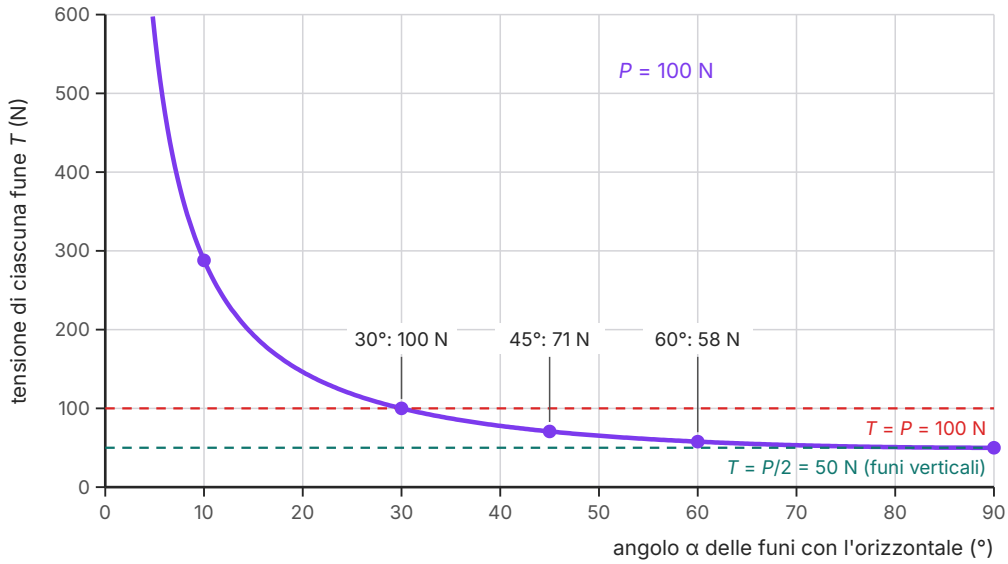
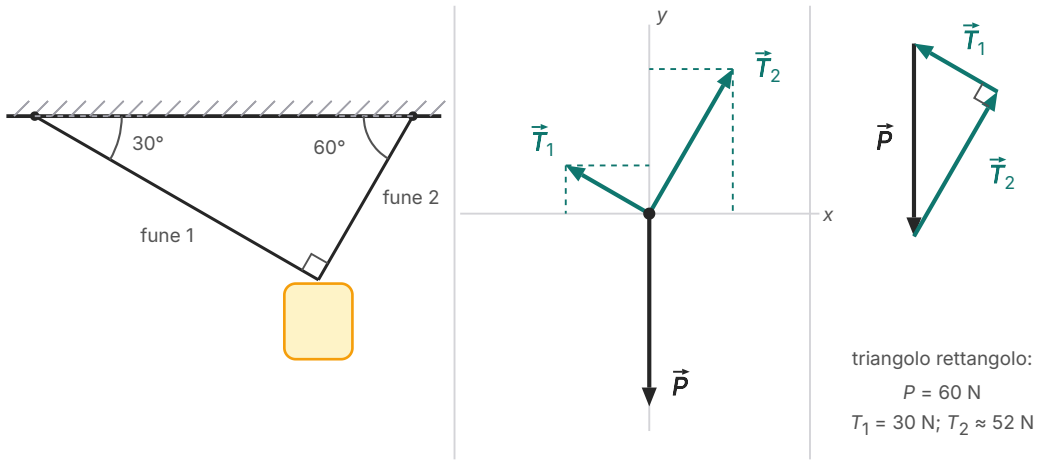


Figura 9.3 Tensione di ciascuna delle due funi simmetriche che reggono un corpo di peso 100 N, in funzione dell'angolo α che le funi formano con l'orizzontale, calcolata con $T = P/(2 \text{ sen } \alpha)$. Il valore minimo, 50 N, si ha con le funi verticali; quando α si avvicina a 0° la tensione cresce senza limite.

Ne segue un fatto che hai certamente osservato: un filo che regge un peso, per quanto lo si tiri, **non può mai diventare perfettamente orizzontale**. Con α = 0° la tensione dovrebbe essere infinita. Il filo per stendere i panni, i cavi delle linee elettriche fra un traliccio e l'altro, l'amaca fra due alberi formano sempre un piccolo avvallamento; chi li monta deve scegliere un compromesso fra un cavo molto teso (che richiede ancoraggi robusti) e un cavo che pende molto.

9.3.4 Due funi non simmetriche

Se le due funi formano con l'orizzontale angoli diversi, le tensioni sono diverse e bisogna usare entrambe le equazioni. Un caso che si risolve con i soli valori della tabella di seno e coseno è quello di due funi inclinate di 30° e 60° rispetto all'orizzontale (Figura 9.4): poiché 30° + 60° = 90°, le due funi sono perpendicolari fra loro.



a) funi a 30° e a 60° **b) diagramma di corpo libero** **c) poligono delle forze**

Figura 9.4 Corpo di peso 60 N sostenuto da due funi inclinate di 30° e di 60° sull'orizzontale, quindi perpendicolari fra loro. a) La situazione. b) Diagramma di corpo libero con le componenti. c) Il poligono delle forze è un triangolo rettangolo con ipotenusa P: T_1 = 30 N, $T_2 \approx$ 52 N. Vettori in scala.

ESEMPIO SVOLTO

Un vaso appeso a due funi

Problema. Un vaso di fiori di peso 60 N è sostenuto da due funi: la fune 1 forma un angolo di 30° con l'orizzontale, la fune 2 un angolo di 60°. Calcola le due tensioni.

Soluzione. Asse x orizzontale verso destra, asse y verticale verso l'alto; la fune 1 tira verso sinistra e verso l'alto, la fune 2 verso destra e verso l'alto (Figura 9.4b). Le equazioni sono:

$$\text{asse } x: \quad -T_1 \cos 30° + T_2 \cos 60° = 0 \qquad \text{asse } y: \quad T_1 \operatorname{sen} 30° + T_2 \operatorname{sen} 60° - P = 0$$

Dalla prima, con $\cos 30° \approx 0{,}866$ e $\cos 60° = 0{,}500$: $0{,}500\, T_2 = 0{,}866\, T_1$, cioè $T_2 \approx 1{,}73\, T_1$. Sostituiamo nella seconda, con $\operatorname{sen} 30° = 0{,}500$ e $\operatorname{sen} 60° \approx 0{,}866$: $0{,}500\, T_1 + 0{,}866 \times 1{,}73\, T_1 = 60$ N, cioè $0{,}500\, T_1 + 1{,}50\, T_1 = 2{,}00\, T_1 = 60$ N. Quindi $T_1 = 30$ N e $T_2 \approx 1{,}73 \times 30$ N ≈ 52 N.

Controllo. La fune più vicina alla verticale (la fune 2) regge la parte maggiore del peso, come ci si aspetta. E poiché le funi sono perpendicolari, il poligono delle forze è un triangolo rettangolo con ipotenusa P (Figura 9.4c): per il teorema di Pitagora deve valere $T_1^2 + T_2^2 = P^2$, e infatti $30^2 + 52^2 = 900 + 2704 = 3604 \approx 3600 = 60^2$.

Lo stesso metodo funziona con tre o più funi, o con funi che reggono un anello a cui è appeso il corpo: si studia l'equilibrio del punto in cui le funi si incontrano (il nodo o l'anello), e per ogni

fune si scrive una forza diretta lungo la fune stessa, nel verso che va dal nodo verso l'esterno. Una fune, infatti, può solo *tirare*, mai spingere.

9.4 Il piano inclinato liscio

9.4.1 Gli elementi del piano inclinato

Un **piano inclinato** è una superficie piana che forma un angolo con l'orizzontale: una rampa per disabili, uno scivolo, una strada in salita, l'asse appoggiata al cassone di un furgone per caricare un mobile. In sezione è un triangolo rettangolo, di cui si chiamano (Figura 9.5):

- **lunghezza** l l'ipotenusa, cioè la superficie su cui il corpo è appoggiato;
- **altezza** h il cateto verticale, il dislivello fra le due estremità;
- **base** b il cateto orizzontale;
- **angolo di inclinazione** α l'angolo fra la lunghezza e la base.

Per il teorema di Pitagora $l^2 = h^2 + b^2$; dalla definizione di seno e coseno del capitolo 6, $\text{sen}\,\alpha = h/l$ e $\cos\alpha = b/l$. In questo paragrafo il piano è **liscio**, cioè l'attrito è trascurabile: è il modello ideale di una superficie molto scivolosa, come il ghiaccio, o di un carrello con ruote ben lubrificate.

> **COLLEGAMENTI**
>
> **La pendenza dei cartelli stradali**
>
> I cartelli di salita ripida e discesa pericolosa riportano una percentuale, per esempio 10%. Quel numero è la **pendenza** della strada: il dislivello diviso per lo spostamento orizzontale, moltiplicato per 100, cioè $(h/b) \times 100$. Una pendenza del 10% significa che per ogni 100 m percorsi in orizzontale si sale (o si scende) di 10 m. Per le pendenze stradali, che sono piccole, b e l sono quasi uguali: con $h = 10$ m e $b = 100$ m si ha $l = \sqrt{(100^2 + 10^2)}$ m $\approx 100{,}5$ m, e usare l'una o l'altra cambia poco. Ma una pendenza del 100% non è una parete verticale: corrisponde a $h = b$, cioè a un angolo di 45°. Il rapporto h/b tornerà fra poco, quando parleremo di attrito.

9.4.2 Scomporre il peso

Un corpo appoggiato su un piano inclinato liscio non resta fermo da solo: scivola verso il basso. Il peso è verticale, ma il corpo può muoversi solo lungo il piano. Per capire che cosa succede conviene scomporre il peso in due componenti, scegliendo gli assi in modo intelligente: uno parallelo al piano e uno perpendicolare (Figura 9.5).

- La **componente parallela** $\boldsymbol{P}_{\parallel}$ è diretta lungo il piano, verso il basso: è la parte del peso che tende a far scivolare il corpo.
- La **componente perpendicolare** $\boldsymbol{P}_{\perp}$ è diretta perpendicolarmente al piano, verso il piano stesso: è la parte del peso che preme il corpo contro la superficie, cioè la forza premente $F_{\perp}$

del capitolo 8.

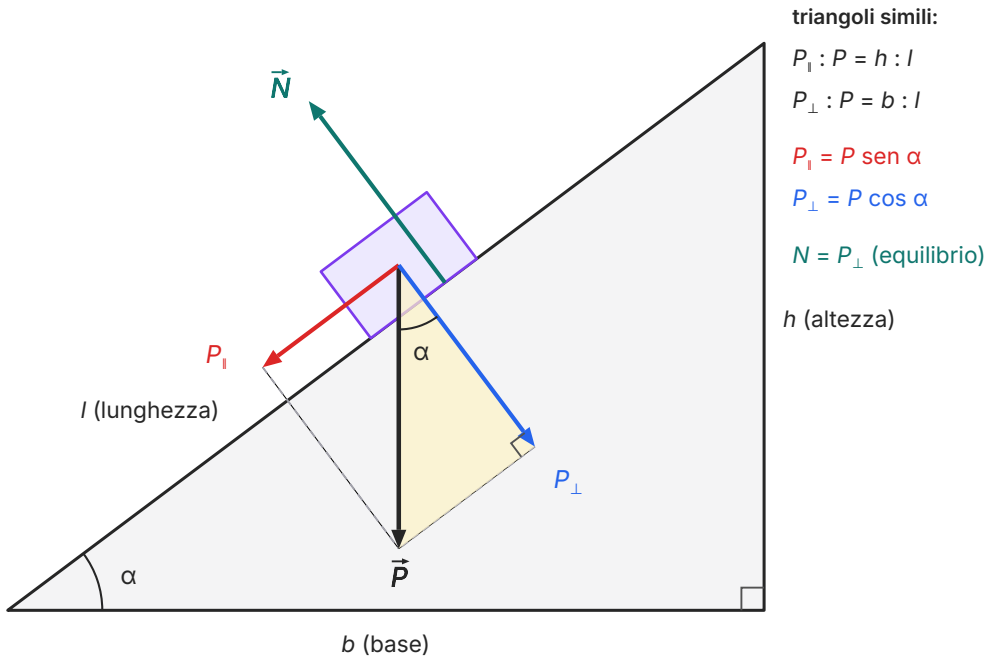


Figura 9.5 Piano inclinato liscio di lunghezza l, altezza h e base b. Il peso $\boldsymbol{P}$ si scompone nella componente parallela al piano $P_\parallel$ e in quella perpendicolare $P_\perp$. Il triangolo delle forze (colorato) è simile al triangolo del piano: l'angolo fra $\boldsymbol{P}$ e $P_\perp$ è uguale ad α. La reazione $\boldsymbol{N}$ equilibra $P_\perp$; nulla equilibra $P_\parallel$, e senza un'altra forza il corpo scivola.

Per calcolare i moduli delle due componenti serve un'osservazione geometrica. Il triangolo formato dai vettori $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\parallel$ e $\boldsymbol{P}_\perp$ (colorato nella Figura 9.5) è rettangolo, come il triangolo del piano inclinato. Inoltre l'angolo fra $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}_\perp$ è uguale ad α: due angoli che hanno i lati rispettivamente perpendicolari (il peso è perpendicolare alla base, $\boldsymbol{P}_\perp$ è perpendicolare alla lunghezza) sono uguali. I due triangoli rettangoli hanno quindi gli stessi angoli: sono **simili**. Nel triangolo delle forze l'ipotenusa è P, il cateto opposto ad α è $P_\parallel$ e il cateto adiacente è $P_\perp$; nel triangolo del piano l'ipotenusa è l, il cateto opposto ad α è h e quello adiacente è b. In triangoli simili i lati corrispondenti sono in proporzione:

$$\frac{P_\parallel}{P} = \frac{h}{l} \quad \Rightarrow \quad P_\parallel = P\frac{h}{l} = P \text{ sen } \alpha$$

$$\frac{P_\perp}{P} = \frac{b}{l} \quad \Rightarrow \quad P_\perp = P\frac{b}{l} = P \cos \alpha$$

Le due forme sono equivalenti: quella con h/l e b/l è comoda quando si conoscono le dimensioni del piano, quella con seno e coseno quando si conosce l'angolo. La Tabella 9.1 riporta i valori per gli angoli più usati.

Tabella 9.1 Componenti del peso su un piano inclinato liscio, come frazioni del peso P.

α	$h/l = \text{sen}\,\alpha$	$P_\parallel$	$b/l = \cos\alpha$	$P_\perp$	situazione
0°	0	0	1	P	piano orizzontale: nessuna tendenza a scivolare
30°	0,500	0,500 P	0,866	0,866 P	la forza che fa scivolare è metà del peso
45°	0,707	0,707 P	0,707	0,707 P	le due componenti sono uguali
60°	0,866	0,866 P	0,500	0,500 P	il piano preme poco, il corpo tende molto a scivolare
90°	1	P	0	0	parete verticale: il corpo cade lungo la parete

La tabella mostra che, al crescere dell'inclinazione, $P_\parallel$ aumenta e $P_\perp$ diminuisce. I casi estremi sono un buon controllo delle formule: su un piano orizzontale tutto il peso preme contro il piano, su una parete verticale tutto il peso è parallelo alla parete.

9.4.3 Le forze in equilibrio sul piano inclinato

Su un corpo appoggiato a un piano inclinato liscio agiscono solo due forze: il peso e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, perpendicolare al piano. Poiché $\boldsymbol{N}$ non ha componente lungo il piano, nulla può compensare $\boldsymbol{P}_\parallel$: il corpo scivola. Per tenerlo fermo serve una terza forza, per esempio la tensione di una fune parallela al piano o la spinta di una mano. Scriviamo l'equilibrio con l'asse x lungo il piano, positivo verso la salita, e l'asse y perpendicolare al piano, positivo verso l'esterno:

$$\text{asse } x\text{:}\quad F - P_\parallel = 0 \quad\Rightarrow\quad F = P\frac{h}{l} \qquad\qquad \text{asse } y\text{:}\quad N - P_\perp = 0 \quad\Rightarrow\quad N = P\frac{b}{l}$$

Due conseguenze meritano attenzione. La prima: la forza necessaria per trattenere un corpo con una forza parallela al piano è **minore del peso**, perché h/l è sempre minore di 1. Su una rampa lunga 10 m e alta 1 m basta una forza pari a un decimo del peso. È il motivo per cui le rampe si usano da millenni per sollevare carichi pesanti: il piano inclinato è la prima delle *macchine semplici* che incontriamo, e nel capitolo 11 ne vedremo altre. La seconda: su un piano inclinato la reazione vincolare è **minore del peso**, ed è tanto più piccola quanto più il piano è ripido.

ESEMPIO SVOLTO

Una cassa su una rampa di carico

Problema. Una cassa di 30 kg deve essere trattenuta su una rampa liscia lunga 4,0 m, che porta al cassone di un furgone alto 1,2 m. Quale forza parallela alla rampa serve? Quanto vale la reazione della rampa?

Soluzione. Il peso è $P = 30\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 294\ \text{N}$. Il rapporto h/l vale 1,2 m / 4,0 m = 0,30. La base si ricava con Pitagora: $b = \sqrt{(4{,}0^2 - 1{,}2^2)}\ \text{m} = \sqrt{14{,}56}\ \text{m} \approx 3{,}8\ \text{m}$, quindi $b/l \approx 0{,}95$. Allora:

$$F = P_{\parallel} = 294\ \text{N} \times 0{,}30 \approx 88\ \text{N} \qquad N = P_{\perp} = 294\ \text{N} \times 0{,}954 \approx 2{,}8 \times 10^2\ \text{N}$$

Controllo. La forza necessaria (88 N) è meno di un terzo del peso: sollevare la cassa in verticale richiederebbe 294 N. Verifichiamo anche che le componenti siano coerenti con il peso: $\sqrt{(88^2 + 280^2)}\ \text{N} \approx 294\ \text{N}$. Per curiosità, con la calcolatrice si trova che $\sin\alpha = 0{,}30$ corrisponde a un'inclinazione di circa 17°.

APPROFONDIMENTO

Simon Stevin e la corona di sfere

La legge del piano inclinato fu dimostrata in modo molto elegante dall'ingegnere e matematico fiammingo Simon Stevin (1548–1620), lo stesso che studiò la pressione nei liquidi (lo ritroverai nel capitolo 13). In un trattato di statica del 1586, *De Beghinselen der Weeghconst* («I principi dell'arte di pesare»), Stevin immaginò una collana chiusa di sfere uguali, ugualmente distanziate, appoggiata su un prisma triangolare con due facce di lunghezza diversa. Se la collana si mettesse a girare da sola, ragionò, dopo un po' si ritroverebbe nella stessa posizione e continuerebbe a girare per sempre: un moto perpetuo, che l'esperienza esclude. Dunque la collana resta ferma. La parte che pende sotto il prisma è simmetrica e si equilibra da sola, quindi anche le sfere sulle due facce si equilibrano: poche sfere sulla faccia corta e ripida trattengono molte sfere sulla faccia lunga e dolce. Il numero di sfere su ciascuna faccia è proporzionale alla sua lunghezza, e da qui si ricava che la forza che fa scivolare un corpo lungo un piano è proporzionale a h/l. Stevin era così fiero di questo ragionamento da porre il disegno della collana nel frontespizio dell'opera, con il motto «Wonder en is gheen wonder»: un prodigio non è un prodigio.

9.5 Il piano inclinato con attrito

9.5.1 Quando un corpo resta fermo da solo

Nella realtà una gomma da cancellare resta ferma su un libro leggermente inclinato, e un'auto parcheggiata in salita non scivola. Il merito è dell'**attrito statico**, studiato nel capitolo 8. Su un

piano inclinato scabro il diagramma di corpo libero contiene tre forze: il peso, la reazione normale $\boldsymbol{N}$ e la forza di attrito statico $\boldsymbol{F}_s$, che è parallela al piano e diretta **verso la salita**, cioè in verso opposto a quello in cui il corpo tenderebbe a scivolare.

Con gli stessi assi di prima, le equazioni di equilibrio sono:

$$\text{asse } x\text{:}\quad F_s - P_\parallel = 0 \quad\Rightarrow\quad F_s = P_\parallel \qquad\qquad \text{asse } y\text{:}\quad N - P_\perp = 0 \quad\Rightarrow\quad N = P_\perp$$

Ma l'attrito statico non può superare il suo valore massimo, $\mu_s F_\perp$. Qui la forza premente è $F_\perp = P_\perp$, quindi il corpo resta fermo da solo se e solo se

$$P_\parallel \le \mu_s P_\perp$$

In parole: la parte del peso che tende a far scivolare il corpo non deve superare la massima forza di attrito che il piano può offrire. Se la condizione non è soddisfatta, l'attrito da solo non basta e serve un aiuto, per esempio una fune o una mano che trattenga il corpo con una forza pari alla differenza $P_\parallel - \mu_s P_\perp$.

> **ERRORE FREQUENTE**
> Scrivere sempre $F_s = \mu_s P_\perp$ è un errore. La forza di attrito statico è quella che serve per l'equilibrio, cioè $F_s = P_\parallel$; il prodotto $\mu_s P_\perp$ è soltanto il suo **valore massimo**. Una gomma di peso 0,20 N ferma su un libro inclinato di 10° subisce una forza d'attrito di 0,20 N × sen 10° ≈ 0,035 N, qualunque sia il valore di μ_s, purché il valore massimo sia più grande. Solo nell'istante in cui il corpo sta per partire l'attrito raggiunge $\mu_s P_\perp$.

9.5.2 L'inclinazione limite

Immagina di sollevare lentamente un'estremità di un'asse su cui è appoggiato un blocchetto di legno. Finché l'inclinazione è piccola, il blocchetto resta fermo; a un certo angolo, all'improvviso, comincia a scivolare. Nella situazione limite, detta di **slittamento incipiente**, l'attrito statico ha raggiunto il suo valore massimo (Figura 9.6):

$$P_\parallel = \mu_s P_\perp \quad\Rightarrow\quad \mu_s = \frac{P_\parallel}{P_\perp} = \frac{P\,h/l}{P\,b/l} = \frac{h}{b}$$

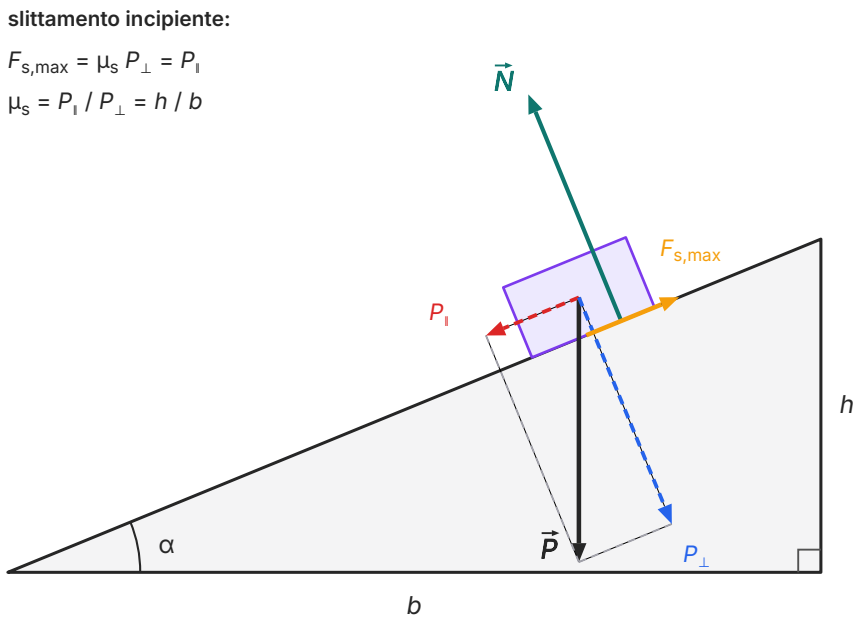


Figura 9.6 Corpo su un piano inclinato scabro nella situazione di slittamento incipiente, con $\mu_s = 0{,}41$ (disegno in scala: $h/b = 0{,}41$, $\alpha \approx 22°$). Le componenti del peso sono tratteggiate; la reazione $\boldsymbol{N}$ equilibra $P_\perp$ e l'attrito statico, giunto al valore massimo $F_{s,max}$, equilibra $P_\parallel$.

Il risultato è sorprendente per la sua semplicità: nella situazione limite il coefficiente di attrito statico è uguale al rapporto fra l'altezza e la base del piano, cioè alla sua pendenza (espressa come numero e non in percentuale). Il peso si è semplificato: l'**inclinazione limite** non dipende dalla massa del corpo, ma solo dalla coppia di superfici a contatto. Un blocchetto di legno e una pila di tre blocchetti uguali cominciano a scivolare alla stessa inclinazione. Ne segue anche un metodo semplicissimo per misurare μ_s: basta un'asse e un righello.

La relazione funziona anche al contrario. Un corpo resta fermo su un piano di pendenza h/b se $h/b \le \mu_s$. Con $\mu_s = 0{,}40$, per esempio, un corpo resta fermo su pendenze fino al 40% e scivola su pendenze maggiori. Per chi conosce già la trigonometria il rapporto h/b ha un nome, *tangente* dell'angolo α; per noi è semplicemente il rapporto fra i due cateti.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: misurare μ_s con il piano inclinabile

Materiali. Un'asse di legno lunga circa 80 cm, un blocchetto di legno con una faccia piana, un metro a nastro o un'asta millimetrata (sensibilità 0,1 cm), una pila di libri o un sostegno regolabile.

Procedimento. 1) Appoggia l'asse sul tavolo e mettici sopra il blocchetto, vicino all'estremità più alta. 2) Solleva *lentamente* l'estremità dell'asse, senza scosse, finché il blocchetto comincia a scivolare. 3) Blocca l'asse in quella posizione e misura l'altezza h dell'estremo sollevato rispetto al tavolo e la distanza orizzontale b fra i due estremi. 4) Ripeti la prova cinque volte, rimettendo ogni volta il blocchetto nello stesso punto. 5) Ripeti tutto con un blocchetto doppio (due blocchetti sovrapposti): le inclinazioni limite dovrebbero essere uguali.

Tabella 9.2 Dati di una prova (legno su legno, asse lunga 80,0 cm).

prova	h (cm)	b (cm)	$\mu_s = h/b$
1	30,2	74,1	0,408
2	31,0	73,7	0,421
3	29,6	74,3	0,398
4	30,6	73,9	0,414
5	30,0	74,2	0,404

Che cosa concludere. Calcola il valore medio di μ_s e la sua incertezza con la semidispersione massima (capitolo 4), poi confronta i risultati ottenuti con il blocchetto singolo e con quello doppio: se gli intervalli sono compatibili, hai verificato che l'inclinazione limite non dipende dal peso. Nota che le prove si disperdono più di quanto la sensibilità del righello farebbe pensare: la causa principale è la superficie dell'asse, che non è uguale in ogni punto, e la difficoltà di sollevarla in modo davvero lento.

Sicurezza. Lavora con il piano sul tavolo e non in piedi su una sedia; tieni la mano sotto il blocchetto quando scivola.

Per la relazione. Riporta in tabella h, b e $\mu_s = h/b$ per ogni prova, separando il blocchetto singolo da quello doppio. Nelle conclusioni scrivi i due risultati con la loro incertezza, dichiara se sono compatibili e, se hai usato la stessa asse e lo stesso blocchetto dell'esperimento del capitolo 8, confronta i valori.

ESEMPIO SVOLTO

Analisi dei dati del piano inclinabile

Problema. Ricava dalla Tabella 9.2 il coefficiente di attrito statico legno-legno con la sua incertezza.

Soluzione. Il valore medio dei cinque rapporti è

$$\bar{\mu}_s = \frac{0{,}408 + 0{,}421 + 0{,}398 + 0{,}414 + 0{,}404}{5} \approx 0{,}409$$

La semidispersione massima è $(0{,}421 - 0{,}398)/2 \approx 0{,}011$. Secondo la convenzione del libro l'incertezza si scrive con una cifra significativa, o con due se la prima è 1, come in questo caso; il valore medio va arrotondato alla stessa cifra decimale. Il risultato è

$$\mu_s = 0{,}409 \pm 0{,}011$$

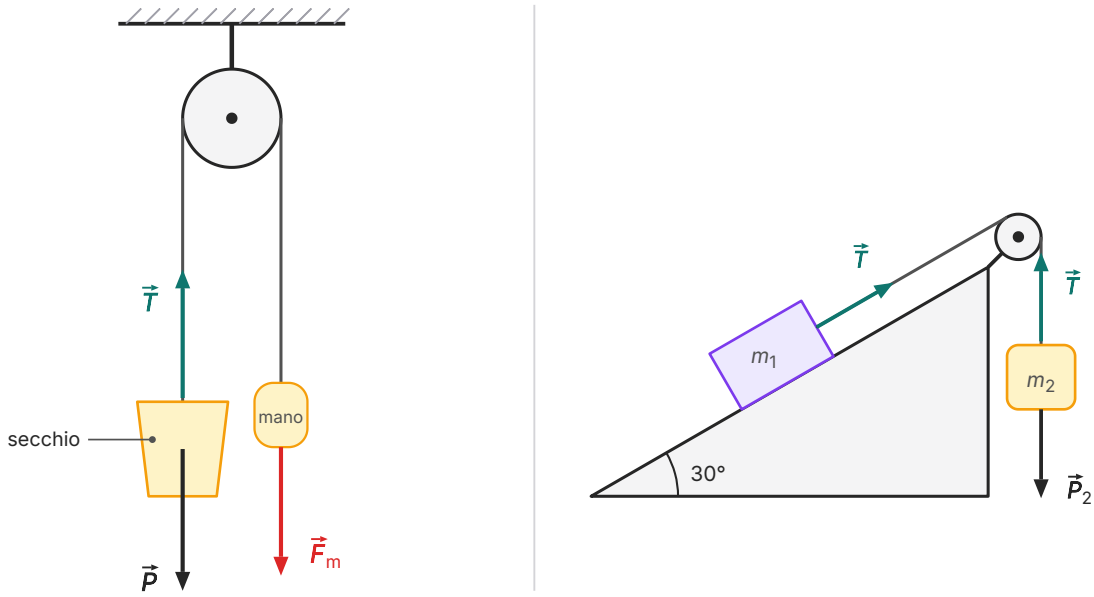
con un'incertezza percentuale di $0{,}011/0{,}409 \times 100 \approx 3\%$. Come tutti i coefficienti di attrito, μ_s è un numero puro, senza unità di misura: è il rapporto fra due lunghezze.

Controllo. Il valore, dell'ordine di qualche decimo, è tipico per legno su legno (i coefficienti d'attrito sono sempre valori indicativi); l'inclinazione limite corrispondente è di circa 22°, un angolo ragionevole per un blocchetto che «tiene» bene.

9.6 La carrucola fissa

Per sollevare un secchio da un pozzo è molto più comodo tirare una fune verso il basso che tirarla verso l'alto: si può usare il proprio peso e si sta in una posizione più stabile. Il dispositivo che permette di farlo è la **carrucola fissa**: una ruota con una gola lungo il bordo, libera di girare attorno a un perno fissato a un sostegno, in cui scorre una fune (Figura 9.7a).

Una carrucola si dice **ideale** se ha massa trascurabile e ruota senza attrito sul perno, e se la fune che la avvolge è ideale. In queste condizioni la tensione della fune ha lo stesso valore da una parte e dall'altra della carrucola: la carrucola fissa ideale **cambia la direzione** della tensione, ma **non il suo modulo**. Per tenere fermo un secchio di peso P la tensione deve valere $T = P$ (equilibrio del secchio), e quindi chi tiene la fune dall'altra parte deve tirare con una forza $F_m = T = P$. La carrucola fissa non riduce la forza necessaria: la rende più comoda da esercitare. Il perno, invece, deve reggere entrambi i tratti di fune: nell'esempio del secchio, con i due tratti verticali, il sostegno della carrucola è tirato verso il basso con una forza $2P$.



a) la fune cambia direzione, non modulo **b) piano inclinato e corpo appeso**

Figura 9.7 La carrucola fissa ideale. a) Per tenere fermo il secchio la mano tira verso il basso con una forza uguale in modulo al peso: la tensione è la stessa nei due tratti di fune. b) Un blocco su un piano inclinato liscio di 30° trattenuto da un corpo appeso; sono disegnate solo le tensioni e il peso del corpo appeso. Con m_1 = 4,0 kg l'equilibrio richiede m_2 = 2,0 kg.

La carrucola fissa è molto utile per collegare fra loro corpi che si trovano in posizioni diverse, come nella Figura 9.7b: un corpo su un piano inclinato e un corpo appeso, uniti da una fune che passa sulla carrucola. Il problema si risolve studiando l'equilibrio di **ciascun corpo separatamente**, ricordando che la tensione è la stessa lungo tutta la fune.

ESEMPIO SVOLTO

Un contrappeso per il piano inclinato

Problema. Un blocco di massa $m_1 = 4{,}0$ kg è appoggiato su un piano inclinato liscio di 30°. Una fune parallela al piano lo collega, attraverso una carrucola fissa ideale posta in cima al piano, a un corpo appeso di massa m_2. Quanto deve valere m_2 perché il sistema sia in equilibrio? Quanto valgono la tensione della fune e la reazione del piano sul blocco?

Soluzione. *Blocco sul piano.* Il peso è $P_1 = 4{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 39{,}2$ N. Asse x lungo il piano verso la salita: $T - P_1 \operatorname{sen} 30° = 0$, quindi $T = 39{,}2\ \text{N} \times 0{,}500 = 19{,}6$ N. Asse y perpendicolare al piano: $N = P_1 \cos 30° = 39{,}2\ \text{N} \times 0{,}866 \approx 34$ N.

Corpo appeso. Asse verticale verso l'alto: $T - m_2 g = 0$, quindi $m_2 = T/g = 19{,}6\ \text{N} / (9{,}8\ \text{N/kg}) = 2{,}0$ kg.

Controllo. Su un piano di 30° la componente parallela del peso è metà del peso, quindi basta un contrappeso di massa pari a metà di m_1: 2,0 kg. La tensione (20 N circa) è la stessa nei due tratti di fune, come deve essere per una carrucola ideale.

La carrucola fissa non è l'unico modo di usare le carrucole. Una carrucola che si sposta insieme al carico, detta *carrucola mobile*, e i sistemi di più carrucole chiamati *paranchi* permettono di sollevare un peso con una forza minore del peso stesso: li studieremo nel capitolo 11, insieme alle leve.

IN SINTESI

$\boldsymbol{R = \Sigma F = 0}$, cioè **$\boldsymbol{R_x = 0}$ e $\boldsymbol{R_y = 0}$**: un punto materiale fermo resta fermo se, e solo se, la somma vettoriale delle forze è nulla; per componenti, su ciascun asse le componenti positive compensano quelle negative.

$\boldsymbol{T = P/(2 \operatorname{sen} \alpha)}$: tensione di ciascuna di due funi simmetriche inclinate di α sull'orizzontale; cresce quando le funi si avvicinano all'orizzontale.

$\boldsymbol{P_{\parallel} = P\,h/l = P \operatorname{sen} \alpha}$ e **$\boldsymbol{P_{\perp} = P\,b/l = P \cos \alpha}$**: componenti del peso parallela e perpendicolare a un piano inclinato; la prima tende a far scivolare il corpo, la seconda lo preme sul piano.

$\boldsymbol{N = P_{\perp}}$ e, sul piano liscio, **$\boldsymbol{F = P_{\parallel}}$**: la reazione del piano inclinato è minore del peso; la forza parallela al piano che trattiene il corpo è minore del peso.

$\boldsymbol{P_{\parallel} \le \mu_s P_{\perp}}$, cioè **$\boldsymbol{h/b \le \mu_s}$**: un corpo resta fermo da solo su un piano inclinato scabro se la pendenza non supera il coefficiente di attrito statico; l'inclinazione limite non dipende dalla massa.

Carrucola fissa ideale: la tensione ha lo stesso modulo nei due tratti di fune; cambia la direzione della forza, non il suo modulo.

Nel prossimo capitolo lasceremo il modello del punto materiale: scopriremo che, per un corpo esteso, una risultante nulla non basta ancora a garantire l'equilibrio, perché il corpo potrebbe

ruotare.

SINTESI

- Il punto materiale è un modello: un corpo di cui si considera la massa ma si trascurano le dimensioni; le forze agiscono tutte in un punto e il corpo non ruota.
- Un corpo è in equilibrio statico se, trovandosi fermo, resta fermo; essere fermi per un istante non basta.
- Condizione di equilibrio del punto materiale: la risultante delle forze è nulla; per componenti, $R_x = 0$ e $R_y = 0$. Graficamente, il poligono delle forze è chiuso.
- La forza equilibrante di un sistema di forze è l'opposto della loro risultante.
- Il diagramma di corpo libero contiene solo le forze che agiscono sul corpo isolato; il metodo è: isolare, disegnare, scegliere gli assi, scrivere le equazioni, controllare.
- Su un piano orizzontale, senza altre forze verticali, $N = P$ perché il corpo è in equilibrio; con altre forze verticali N cambia.
- Per due funi simmetriche inclinate di α sull'orizzontale $T = P/(2 \operatorname{sen} \alpha)$: una fune che regge un peso non può mai essere perfettamente orizzontale.
- Sul piano inclinato il peso si scompone in $P_{\parallel} = P\,h/l = P \operatorname{sen} \alpha$ e $P_{\perp} = P\,b/l = P \cos \alpha$, grazie alla similitudine fra il triangolo del piano e quello delle forze.
- Su un piano inclinato liscio la reazione è $N = P_{\perp}$ e la forza parallela necessaria per l'equilibrio è $P_{\parallel}$, minore del peso.
- Con l'attrito il corpo resta fermo da solo se $P_{\parallel} \le \mu_s P_{\perp}$; allo slittamento incipiente $\mu_s = h/b$, indipendentemente dalla massa.
- La carrucola fissa ideale cambia la direzione della tensione senza cambiarne il modulo.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nel modello di punto materiale un corpo:
   A. ha massa nulla
   B. ha massa, ma dimensioni trascurabili
   C. non può essere in equilibrio
   D. è sempre fermo

2. ● Un punto materiale inizialmente fermo resta fermo se:
   A. tutte le forze che agiscono su di esso hanno lo stesso modulo
   B. su di esso agiscono al massimo due forze
   C. il suo peso è trascurabile
   D. la risultante delle forze che agiscono su di esso è nulla

3. ●● Un libro di peso 12 N è fermo su un tavolo orizzontale e una mano lo spinge verso il basso con una forza di 3,0 N. La reazione del tavolo vale:

   A. 15 N
   B. 12 N
   C. 9,0 N
   D. 3,0 N

4. ●● Una lampada di peso 30 N è appesa a due funi simmetriche, ciascuna inclinata di 30° rispetto all'orizzontale. La tensione di ciascuna fune è:

   A. 15 N
   B. 26 N
   C. 30 N
   D. 60 N

5. ● Su un piano inclinato liscio, la componente del peso parallela al piano:

   A. è sempre uguale al peso
   B. aumenta se aumenta l'inclinazione
   C. è sempre nulla
   D. è uguale alla reazione vincolare

6. ●● Un piano inclinato liscio è lungo 5,0 m e alto 1,0 m. Per tenere fermo un corpo di peso 200 N con una forza parallela al piano serve una forza di:

   A. 40 N
   B. 200 N
   C. 1000 N
   D. 50 N

7. ● Una carrucola fissa ideale:

   A. dimezza la forza necessaria per sollevare un peso
   B. raddoppia la tensione della fune
   C. annulla il peso del corpo appeso
   D. cambia la direzione della tensione, ma non il suo modulo

8. ●● Un corpo resta fermo su un piano inclinato scabro. La forza di attrito statico:

   A. vale sempre $\mu_s P_\perp$
   B. è perpendicolare al piano
   C. è uguale in modulo a $P_\parallel$ ed è diretta verso la salita
   D. è nulla, perché il corpo è fermo

9. ● Una moneta comincia a scivolare su un libro inclinato quando l'estremo sollevato è a 6,0 cm d'altezza e la base misura 20 cm. Il coefficiente di attrito statico è:

   A. 0,30
   B. 3,3
   C. 0,60
   D. 0,25

Vero o falso

10. ● Un sasso lanciato verso l'alto, nell'istante in cui si trova nel punto più alto, è in equilibrio. V / F

11. ● Un corpo appoggiato su un piano orizzontale riceve sempre dal piano una reazione uguale al suo peso. V / F

12. ●● Se l'inclinazione di un piano inclinato liscio aumenta, la componente perpendicolare del peso diminuisce. V / F

13. ● Nel diagramma di corpo libero di un libro appoggiato sul tavolo si disegna anche la forza con cui il libro preme sul tavolo. V / F

14. ●● Su un piano scabro, un corpo di massa doppia comincia a scivolare a un'inclinazione maggiore di un corpo di massa singola fatto dello stesso materiale. V / F

Applicare

15. ● Una valigia di massa 18 kg è ferma sul pavimento. Calcola il suo peso e la reazione vincolare del pavimento.

16. ● Un quadro di massa 2,4 kg è appeso a un chiodo con un solo filo verticale. Calcola la tensione del filo.

17. ●● Su un anello agiscono due forze: $\boldsymbol{F}_1$ di 6,0 N lungo il verso positivo dell'asse x e $\boldsymbol{F}_2$ di 8,0 N lungo il verso positivo dell'asse y. Completa: la forza equilibrante ha componenti F_{3x} = _____ e F_{3y} = _____ ; il suo modulo è _____ .

18. ● Un corpo di peso 50 N è appoggiato su un piano inclinato liscio di 30°. Calcola $P_{\parallel}$ e $P_{\perp}$.

19. ●● Usa il grafico della Figura 9.3 (corpo di peso 100 N appeso a due funi simmetriche). a) Quanto vale circa la tensione di ciascuna fune per $\alpha = 20°$? b) Per quale angolo, circa, la tensione vale 200 N? c) Perché per $\alpha = 90°$ la tensione vale 50 N?

20. ●● Un carrello di 40 kg è tenuto fermo su una rampa liscia lunga 2,5 m e alta 0,50 m. Quale forza parallela alla rampa serve?

21. ● Un cartello stradale indica una salita del 12%. Di quanti metri si sale percorrendo 250 m in orizzontale?

22. ●● Un blocchetto con $\mu_s = 0{,}40$ è appoggiato su un'asse inclinabile. Se la distanza orizzontale fra gli estremi dell'asse è 50 cm, a quale altezza massima si può sollevare l'estremo prima che il blocchetto scivoli?

Problemi

23. ●● Una lanterna di massa 3,0 kg è appesa a due funi simmetriche che formano ciascuna un angolo di 45° con l'orizzontale. Calcola la tensione di ciascuna fune.

24. ●●● Un corpo di peso 80 N è sostenuto da due funi che formano con l'orizzontale angoli di 30° (fune 1) e 60° (fune 2), come nella Figura 9.4. Scrivi le equazioni di equilibrio per componenti e calcola le due tensioni. Verifica il risultato con il teorema di Pitagora.

25. ●● Una cassa di 12 kg è trattenuta su un piano inclinato liscio di 30° da una fune parallela al piano. Calcola la tensione della fune e la reazione del piano.

26. ●●● Un blocco di 6,0 kg è appoggiato su un piano inclinato liscio di 30° ed è collegato, con una fune parallela al piano che passa su una carrucola fissa ideale, a un corpo appeso (come nella Figura 9.7b). Calcola la massa del corpo appeso necessaria per l'equilibrio, la tensione della fune e la reazione del piano sul blocco.

27. ●●● Una cassa di 20 kg è appoggiata su una rampa inclinata di 30°; il coefficiente di attrito statico fra cassa e rampa è 0,45. a) La cassa resta ferma da sola? b) Se no, quale forza minima, parallela alla rampa e diretta verso la salita, bisogna esercitare per tenerla ferma?

28. ●● Una maglietta bagnata di massa 1,2 kg è appesa al centro di un filo per stendere; ciascuno dei due tratti del filo forma un angolo di 10° con l'orizzontale. Calcola la tensione del filo (usa la calcolatrice in modalità gradi).

29. ●●● Un lampione di peso 50 N è sostenuto da due funi: la prima forma un angolo di 60° con l'orizzontale, la seconda è orizzontale e tira il lampione di lato. Disegna il diagramma di corpo libero, scrivi le equazioni di equilibrio e calcola le due tensioni.

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Su un piano inclinato la reazione vincolare è uguale al peso del corpo, perché il piano reagisce sempre con una forza uguale e contraria a quella che riceve». Spiega che cosa c'è di sbagliato e scrivi il valore corretto di N.

31. ●● Perché, per quanto lo si tenda, un filo da cui pende un peso non diventa mai perfettamente orizzontale? Rispondi usando la formula della tensione per due funi simmetriche.

32. ●●● Progetta un esperimento per verificare la relazione $P_{\parallel} = P\,h/l$ con un carrello a basso attrito, un'asse di lunghezza fissa, un dinamometro e alcuni libri per variare l'altezza. Indica che cosa misuri, come organizzi la tabella dei dati e quale grafico ti aspetti di ottenere.

PER APPROFONDIRE

- [HEW] P.G. Hewitt, *Conceptual Physics*: il capitolo sull'equilibrio meccanico presenta la condizione di risultante nulla con molti esempi quotidiani, dalle funi alle bilance.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sulle forze e sull'equilibrio, con numerosi problemi sui piani inclinati e sui sistemi di funi.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla conservazione dell'energia racconta il ragionamento di Stevin sulla collana di sfere.

Glossario del capitolo

Angolo di inclinazione
Angolo α fra la lunghezza e la base di un piano inclinato; sen $\alpha = h/l$ e cos $\alpha = b/l$.

Carrucola fissa
Ruota con una gola, libera di girare attorno a un perno fisso, su cui scorre una fune; cambia la direzione della forza esercitata con la fune.

Carrucola ideale
Carrucola di massa trascurabile che ruota senza attrito; la tensione della fune è la stessa nei due tratti.

Componente parallela del peso
$P_{\parallel} = P\ h/l = P$ sen α: la parte del peso diretta lungo il piano inclinato, verso il basso, che tende a far scivolare il corpo.

Componente perpendicolare del peso
$P_{\perp} = P\ b/l = P \cos \alpha$: la parte del peso che preme il corpo contro il piano inclinato.

Condizione di equilibrio del punto materiale
La risultante delle forze applicate è nulla; per componenti, la somma delle componenti x e la somma delle componenti y sono entrambe zero.

Diagramma di corpo libero
Disegno del corpo isolato con tutte e sole le forze che agiscono su di esso, ciascuna al posto dell'oggetto che la esercita.

Equilibrio statico
Condizione di un corpo che, trovandosi fermo, resta fermo.

Forza equilibrante
Forza che, aggiunta a un sistema di forze, lo porta in equilibrio: è l'opposto della risultante delle altre forze.

Inclinazione limite
Massima inclinazione per cui un corpo resta fermo da solo su un piano scabro: $h/b = \mu_s$, indipendente dalla massa.

Pendenza di una strada
Rapporto fra il dislivello h e lo spostamento orizzontale b di una strada o di un piano inclinato, h/b, di solito espresso in percentuale; una pendenza del 100% corrisponde a 45°.

Piano inclinato
Superficie piana che forma un angolo con l'orizzontale; si descrive con lunghezza l, altezza h, base b e angolo di inclinazione α.

Poligono delle forze
Figura ottenuta disegnando i vettori delle forze uno di seguito all'altro con il metodo punta-coda; in equilibrio è chiuso.

Slittamento incipiente
Situazione limite in cui l'attrito statico ha raggiunto il valore massimo $\mu_s F_{\perp}$ e il corpo sta per cominciare a scivolare.

Soluzioni

1. B. Il punto materiale conserva la massa del corpo ma ne trascura le dimensioni.

2. D. La condizione di equilibrio è $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$; le forze possono essere molte e di moduli diversi.

3. A. Asse y verso l'alto: $N - 12\ \text{N} - 3{,}0\ \text{N} = 0$, quindi $N = 15$ N.

4. C. $T = P/(2 \operatorname{sen} 30°) = 30\ \text{N}/(2 \times 0{,}500) = 30$ N.

5. B. $P_{\parallel} = P \operatorname{sen} \alpha$ cresce con α (da 0 per $\alpha = 0°$ fino a P per $\alpha = 90°$).

6. A. $F = P\, h/l = 200\ \text{N} \times 1{,}0/5{,}0 = 40$ N.

7. D. La tensione ha lo stesso modulo nei due tratti di fune; cambia solo la direzione.

8. C. Per l'equilibrio lungo il piano $F_s = P_{\parallel}$, verso la salita; $\mu_s P_{\perp}$ è solo il valore massimo.

9. A. $\mu_s = h/b = 6{,}0\ \text{cm}/20\ \text{cm} = 0{,}30$.

10. F. È fermo solo per un istante e non resta fermo: su di esso agisce il solo peso, non equilibrato.

11. F. $N = P$ solo se non ci sono altre forze verticali; con una spinta verso il basso $N > P$, con una trazione verso l'alto $N < P$.

12. V. $P_{\perp} = P\, b/l = P \cos \alpha$, che diminuisce al crescere di α.

13. F. La forza con cui il libro preme agisce sul tavolo, non sul libro: non entra nel suo diagramma.

14. F. Allo slittamento incipiente $\mu_s = h/b$: il peso si semplifica e l'inclinazione limite non dipende dalla massa.

15. $P = m\, g = 18\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 176{,}4\ \text{N} \approx 1{,}8 \times 10^2$ N; per l'equilibrio $N = P \approx 1{,}8 \times 10^2$ N, verso l'alto.

16. $T = P = 2{,}4\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 23{,}52\ \text{N} \approx 24$ N.

17. $F_{3x} = -6{,}0$ N; $F_{3y} = -8{,}0$ N; $F_3 = \sqrt{(6{,}0^2 + 8{,}0^2)}\ \text{N} = 10$ N.

18. $P_{\parallel} = 50\ \text{N} \times 0{,}500 = 25$ N; $P_{\perp} = 50\ \text{N} \times 0{,}866 \approx 43$ N.

19. a) Circa $1{,}5 \times 10^2$ N (il calcolo dà $100\ \text{N}/(2 \times 0{,}342) \approx 146$ N). b) Circa 15° (il calcolo dà sen $\alpha = 0{,}25$, $\alpha \approx 14{,}5°$). c) Con $\alpha = 90°$ le funi sono verticali (sen 90° = 1): ciascuna regge metà del peso, 50 N.

20. $P = 40\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 392$ N; $h/l = 0{,}50/2{,}5 = 0{,}20$; $F = P_{\parallel} = 392\ \text{N} \times 0{,}20 \approx 78$ N.

21. Pendenza 12% significa $h/b = 0{,}12$: $h = 0{,}12 \times 250\ \text{m} = 30$ m.

22. Il blocchetto resta fermo finché $h/b \le \mu_s$: $h_{max} = 0{,}40 \times 50\ \text{cm} = 20$ cm.

23. $P = 3{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 29{,}4$ N; $T = P/(2 \operatorname{sen} 45°) = 29{,}4\ \text{N}/(2 \times 0{,}707) \approx 21$ N.

24. Asse x: $-T_1 \cos 30° + T_2 \cos 60° = 0$, quindi $T_2 \approx 1{,}73\ T_1$. Asse y: $T_1 \operatorname{sen} 30° + T_2 \operatorname{sen} 60° = 80$ N, cioè $0{,}500\ T_1 + 1{,}50\ T_1 = 80$ N. $T_1 = 40$ N, $T_2 \approx 69$ N. Verifica: $40^2 + 69{,}3^2 \approx 1600 + 4800 = 6400 = 80^2$.

25. $P = 12\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 117{,}6$ N; $T = P \operatorname{sen} 30° = 58{,}8\ \text{N} \approx 59$ N; $N = P \cos 30° \approx 101{,}8\ \text{N} \approx 1{,}0 \times 10^2$ N.

26. Blocco: $T = P_1 \operatorname{sen} 30° = 6{,}0\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} \times 0{,}500 = 29{,}4\ \text{N} \approx 29$ N; $N = P_1 \cos 30° = 58{,}8\ \text{N} \times 0{,}866 \approx 51$ N. Corpo appeso: $m_2 = T/g = 29{,}4\ \text{N}/(9{,}8\ \text{N/kg}) = 3{,}0$ kg.

27. $P = 20\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 196$ N; $P_{\parallel} = 196\ \text{N} \times 0{,}500 = 98$ N; $P_{\perp} = 196\ \text{N} \times 0{,}866 \approx 170$ N; $F_{s,max} = 0{,}45 \times 169{,}7\ \text{N} \approx 76$ N. a) No: 98 N > 76 N, la cassa scivola. b) L'attrito, al massimo, aiuta con 76 N: $F = P_{\parallel} - F_{s,max} \approx 98\ \text{N} - 76{,}4\ \text{N} \approx 22$ N.

28. $P = 1{,}2\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 11{,}76$ N; sen $10° \approx 0{,}174$; $T = 11{,}76\ \text{N}/(2 \times 0{,}174) \approx 34$ N (quasi il triplo del peso).

29. Asse y: $T_1 \operatorname{sen} 60° - P = 0$, quindi $T_1 = 50\ \text{N}/0{,}866 \approx 58$ N. Asse x: $T_2 - T_1 \cos 60° = 0$, quindi $T_2 = 57{,}7\ \text{N} \times 0{,}500 \approx 29$ N (la fune orizzontale non regge nulla del peso, ma serve a equilibrare la componente orizzontale della prima).

30. Traccia: il peso e la reazione agiscono sullo stesso corpo e non sono una coppia «azione-reazione»; il loro rapporto si ricava dall'equilibrio. Sul piano

inclinato l'equilibrio perpendicolare al piano dà $N = P_{\perp} = P\,b/l = P$ cos α, minore di P (per esempio 0,866 P a 30°).

31. Traccia: le componenti verticali delle tensioni devono sommarsi al peso, $2T$ sen α = P. Se α tende a 0° anche sen α tende a 0 e la tensione necessaria $T = P/(2$ sen α) diventa enormemente grande; con α = 0° nessuna tensione finita basterebbe. Il filo si allunga o si rompe prima di diventare orizzontale.

32. Traccia: si misura con il dinamometro il peso P del carrello; si appoggia l'asse (lunghezza l fissa, misurata) su pile di libri di altezza crescente, si misura h e si legge la forza F del dinamometro, tenuto parallelo all'asse, che trattiene il carrello fermo. Tabella: h (cm), h/l, F (N), F/P. Grafico atteso: F in funzione di h/l è una retta passante per l'origine con pendenza P (proporzionalità diretta); in alternativa $F/P = h/l$ per ogni prova, entro le incertezze. Variabile controllata: la lunghezza dell'asse e il carrello.