CAPITOLO

6

I vettori

Dire «cinque chilometri» non basta per ritrovare la strada di casa: bisogna anche dire verso dove.

OBIETTIVI

1. Distinguere le grandezze scalari da quelle vettoriali e descrivere un vettore con modulo, direzione e verso.
2. Distinguere lo spostamento dalla distanza percorsa.
3. Sommare e sottrarre vettori con il metodo punta-coda e con la regola del parallelogramma, e moltiplicare un vettore per un numero.
4. Usare seno e coseno come rapporti tra i lati di un triangolo rettangolo, con i valori di 30°, 45° e 60° e con la calcolatrice.
5. Scomporre un vettore nelle sue componenti cartesiane e ricavare modulo e direzione dalle componenti.
6. Sommare vettori per componenti.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali 2
6.2 La somma di vettori 5
6.3 Vettore opposto, differenza e prodotto per uno scalare 8
6.4 Seno e coseno di un angolo 10
6.5 Scomporre un vettore: le componenti 12
6.6 Sommare vettori per componenti 15

Fisica 1 · Parte II · Vettori e forze · versione 1.0
Capitolo 6: I vettori · pagine 151–174 del volume completo · estratto per lo studio

Immagina di ricevere un messaggio da un amico: «Il tesoro è sepolto a 50 passi dalla vecchia quercia». Con questa sola informazione dovresti scavare lungo un cerchio intero intorno all'albero: 50 passi, sì, ma in quale direzione? Il messaggio diventa utile solo quando aggiunge: «verso il campanile». Esistono grandezze fisiche per le quali un numero con la sua unità di misura basta a dire tutto, e altre per le quali serve anche un'indicazione di direzione. Le seconde si descrivono con un oggetto matematico nuovo, il **vettore**.

In questo capitolo impareremo a rappresentare i vettori, a sommarli, a sottrarli e a moltiplicarli per un numero, e infine a «smontarli» in componenti lungo due assi. Per farlo ci servirà un piccolo strumento preso dalla geometria dei triangoli rettangoli: il seno e il coseno di un angolo. Sono attrezzi che useremo in tutto il resto del libro, perché anche le forze, protagoniste dei prossimi capitoli, sono vettori. Come esempio guida useremo lo **spostamento**, il vettore più facile da immaginare: basta pensare a una passeggiata.

6.1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

6.1.1 Basta un numero?

La massa di uno zaino è 6,5 kg; la temperatura dell'aula è 21 °C; la lezione dura 50 min. In ciascuno di questi casi un numero seguito da un'unità di misura descrive completamente la grandezza: non avrebbe senso chiedere «6,5 kg verso dove?». Una grandezza di questo tipo si chiama **grandezza scalare**. Sono scalari la massa, il tempo, il volume, la densità, la temperatura e la lunghezza di un percorso.

Ci sono invece grandezze per le quali la direzione è essenziale. Se spingi una porta vicino alla maniglia, perpendicolarmente al battente, la porta si apre; se spingi con la stessa intensità parallelamente al battente, verso i cardini, non succede nulla. Se un'auto si muove a 50 km/h, conta sapere se va verso nord o verso sud. Una grandezza che per essere descritta richiede, oltre a un numero con l'unità di misura, anche una direzione e un verso si chiama **grandezza vettoriale**. Sono vettoriali lo spostamento, la velocità, l'accelerazione e la forza. La tabella 6.1 raccoglie alcuni esempi.

Tabella 6.1 Alcune grandezze scalari e vettoriali che incontrerai in questo volume.

Grandezze scalari	Unità SI	Grandezze vettoriali	Unità SI
massa m	kg	spostamento $\Delta\boldsymbol{s}$	m
tempo t	s	velocità $\boldsymbol{v}$	m/s
volume V	m^3	accelerazione $\boldsymbol{a}$	m/s^2
densità d	kg/m^3	forza $\boldsymbol{F}$	N
distanza percorsa	m	forza-peso $\boldsymbol{P}$	N

6.1.2 Che cos'è un vettore

Un **vettore** si rappresenta con una freccia. La freccia porta con sé tre informazioni:

- il **modulo** (o intensità): la lunghezza della freccia, che in scala rappresenta il valore numerico della grandezza con la sua unità di misura; il modulo è sempre un numero positivo, oppure zero;
- la **direzione**: la retta su cui giace la freccia (orizzontale, verticale, inclinata di 30° rispetto al terreno...);
- il **verso**: su una stessa direzione si può andare in due modi opposti, e la punta della freccia indica quale dei due.

Attenzione alla differenza tra direzione e verso, che nel linguaggio quotidiano spesso si confondono. La retta Milano–Roma è *una* direzione; andare da Milano a Roma o da Roma a Milano sono i due *versi* possibili su quella direzione. Per le forze conta anche il **punto di applicazione**, cioè il punto del corpo in cui la forza agisce: spingere una porta vicino alla maniglia o vicino ai cardini produce effetti molto diversi. Ne riparleremo nei capitoli sulle forze e sull'equilibrio.

Nei libri a stampa un vettore si indica con una lettera in grassetto corsivo, $\boldsymbol{a}$; scrivendo a mano, o nelle figure, si mette una freccetta sopra la lettera. Il modulo dello stesso vettore si scrive con la lettera in corsivo normale, a, oppure $|\boldsymbol{a}|$. Se un vettore spostamento ha modulo 5 m, scriveremo quindi $a = 5$ m, mai $\boldsymbol{a} = 5$ m: un vettore non è uguale a un numero. Due vettori sono *uguali* quando hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso; due frecce parallele, ugualmente lunghe e orientate nello stesso modo rappresentano quindi lo stesso vettore, anche se sono disegnate in punti diversi del foglio. Il vettore di modulo zero si chiama **vettore nullo** e si indica con $\boldsymbol{0}$.

DA RICORDARE

Un vettore è definito da **modulo** (quanto), **direzione** (lungo quale retta) e **verso** (da che parte su quella retta). Per una forza si specifica anche il **punto di applicazione**. Il modulo è sempre positivo o nullo e ha un'unità di misura: 500 m, 30 N. Il simbolo in grassetto $\boldsymbol{a}$ indica il vettore; il simbolo in corsivo a indica il suo modulo.

6.1.3 Lo spostamento, il prototipo dei vettori

Ogni mattina Giulia va da casa (punto A) a scuola (punto B). Le strade del suo quartiere formano una griglia di isolati quadrati di 100 m di lato, e il percorso che segue è quello della figura 6.1: 100 m verso est, 200 m verso nord, 200 m verso est e infine 200 m verso nord. In tutto cammina per 700 m: questa è la **distanza percorsa**, una grandezza scalare che dipende dalla strada scelta. Se un giorno facesse un giro più lungo per passare dal panificio, la distanza percorsa aumenterebbe.

Il risultato complessivo del tragitto, però, è sempre lo stesso: Giulia si ritrova 300 m più a est e 400 m più a nord del punto di partenza. Lo **spostamento** è il vettore che va dal punto di partenza al punto di arrivo, qualunque sia la strada seguita. Lo si indica con $\Delta\boldsymbol{s}$ (la lettera greca Δ, «delta», ricorda che si tratta di una *variazione* di posizione). Il suo modulo è la distanza in linea retta tra A e B. Poiché i 300 m verso est e i 400 m verso nord sono i cateti di un triangolo rettangolo, il teorema di Pitagora dà:

$$\Delta s = \sqrt{(300^2 + 400^2)}\ \text{m} = \sqrt{250\,000}\ \text{m} = 500\ \text{m}$$

Distanza percorsa (700 m) e modulo dello spostamento (500 m) sono quindi due cose diverse. Il modulo dello spostamento non può mai superare la distanza percorsa, perché la linea retta è il cammino più breve tra due punti; i due valori coincidono solo se il moto avviene in linea retta senza tornare indietro. Nel caso estremo di un giro completo che riporta al punto di partenza, come un giro di pista, la distanza percorsa può essere grande mentre lo spostamento è nullo.

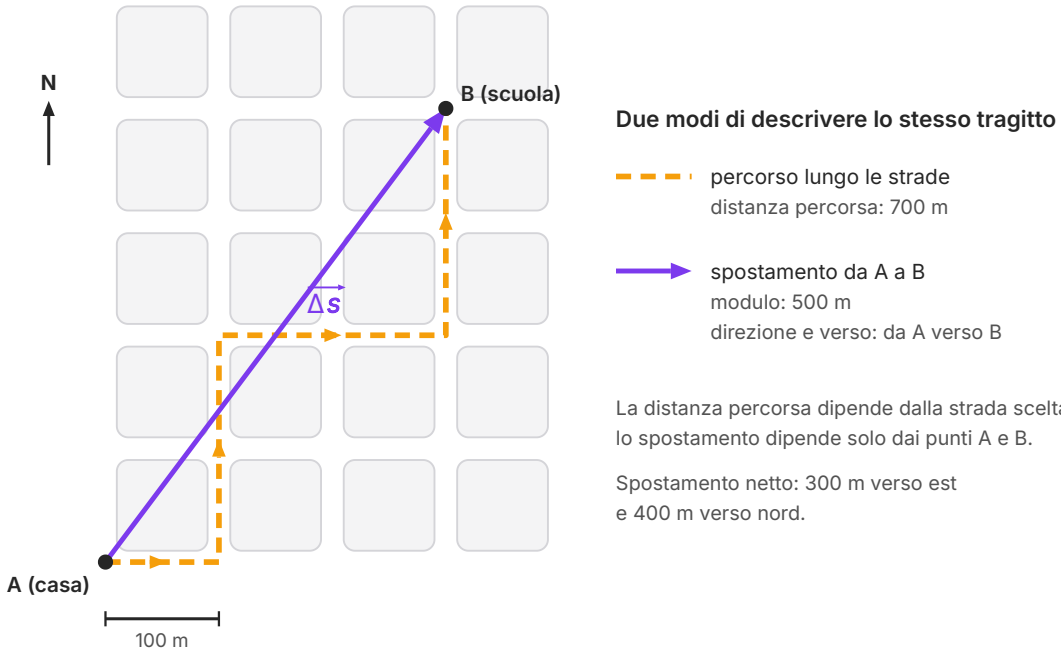

Figura 6.1 Il tragitto di Giulia da casa (A) a scuola (B). Il percorso lungo le strade (tratteggio arancione) è lungo 700 m; lo spostamento $\Delta\boldsymbol{s}$ (freccia viola) ha modulo 500 m e va direttamente da A a B. Ogni isolato misura 100 m × 100 m.

ERRORE FREQUENTE

«Ho corso 400 m in pista, quindi il mio spostamento è 400 m.» Falso: se il giro di pista si chiude dove era cominciato, lo spostamento è il vettore nullo, mentre la distanza percorsa è 400 m. La distanza percorsa è uno scalare che si somma sempre (ogni tratto la fa crescere); lo spostamento è un vettore e tratti in versi opposti possono annullarsi.

6.2 La somma di vettori

6.2.1 Il metodo punta-coda

Due spostamenti successivi si combinano in uno spostamento complessivo: se vai da A a B e poi da B a C, il risultato netto è lo spostamento da A a C. Questa osservazione suggerisce come si definisce la somma di due vettori. Nel **metodo punta-coda** si disegna il primo vettore $\boldsymbol{a}$; poi si disegna il secondo vettore $\boldsymbol{b}$ con la coda appoggiata sulla punta di $\boldsymbol{a}$, senza cambiarne modulo, direzione e verso. Il vettore somma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ va dalla coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $\boldsymbol{b}$ (figura 6.2a). Il vettore somma si chiama anche **risultante**, un termine che useremo spesso per le forze.

Se proviamo a disegnare prima $\boldsymbol{b}$ e poi $\boldsymbol{a}$, la freccia somma risulta la stessa: la somma di vettori gode della proprietà commutativa, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. Con questo metodo si possono sommare quanti vettori si vuole: si dispongono uno dopo l'altro, ciascuno con la coda sulla punta del precedente, e la somma va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo. La spezzata che si ottiene, chiusa dal vettore somma, si chiama **poligono dei vettori** (figura 6.3d). Il percorso di Giulia nella figura 6.1 è esattamente un poligono di quattro spostamenti, e la sua somma è la freccia viola.

6.2.2 La regola del parallelogramma

Quando due vettori partono dallo stesso punto, come accade per due forze applicate allo stesso corpo, è comodo un secondo metodo, del tutto equivalente al primo. Nella **regola del parallelogramma** si disegnano $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con le code nello stesso punto O; dalla punta di ciascuno si traccia la parallela all'altro, ottenendo un parallelogramma. La somma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ è la diagonale del parallelogramma che parte da O (figura 6.2b). Confrontando le due metà della figura 6.2 si vede perché i due metodi danno lo stesso risultato: il lato del parallelogramma opposto a $\boldsymbol{b}$ è proprio la copia di $\boldsymbol{b}$ che, nel metodo punta-coda, si appoggia sulla punta di $\boldsymbol{a}$.

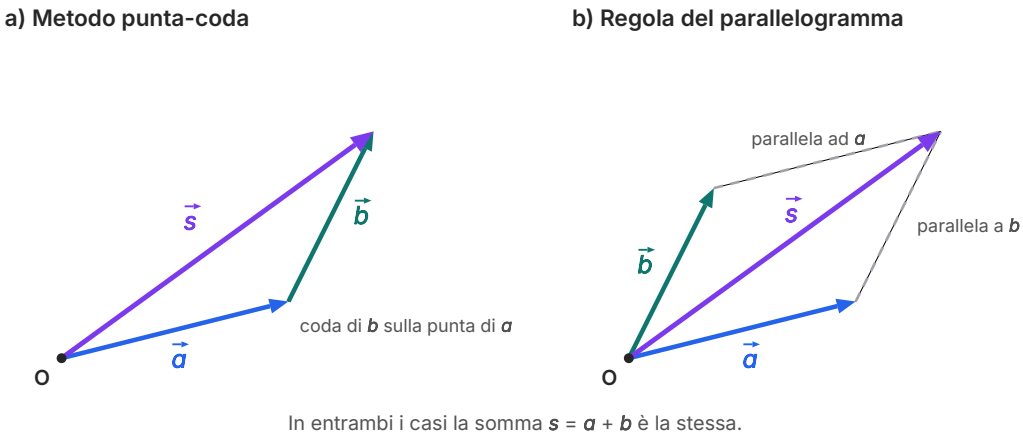

Figura 6.2 Due modi equivalenti di sommare i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. a) Metodo punta-coda: la coda di $\boldsymbol{b}$ si appoggia sulla punta di $\boldsymbol{a}$. b) Regola del parallelogramma: i vettori partono dallo stesso punto O e la somma è la diagonale uscente da O.

6.2.3 Casi particolari: vettori paralleli e perpendicolari

In tre situazioni il modulo della somma si calcola senza disegni in scala.

- **Vettori con stessa direzione e stesso verso** (**vettori concordi**): le frecce si allineano una dopo l'altra e il modulo della somma è la somma dei moduli, $s = a + b$. Due spostamenti di 3 km e 2 km verso est danno 5 km verso est (figura 6.3a).

- **Vettori con stessa direzione e versi opposti** (**vettori discordi**): il modulo della somma è la differenza dei moduli, presa in valore assoluto, e il verso è quello del vettore più lungo. Tre passi avanti e due indietro equivalgono a un passo avanti (figura 6.3b).
- **Vettori perpendicolari**: le due frecce e la somma formano un triangolo rettangolo in cui la somma è l'ipotenusa; vale il teorema di Pitagora, $s = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Con $a = 4$ e $b = 3$ si ottiene $s = 5$ (figura 6.3c).

In tutti gli altri casi il modulo della somma è compreso tra questi estremi: non può superare $a + b$ (vettori concordi) e non può scendere sotto $|a - b|$ (vettori discordi). Due spostamenti di 3 km e 2 km possono dunque dare uno spostamento complessivo qualunque tra 1 km e 5 km, a seconda dell'angolo tra le loro direzioni.

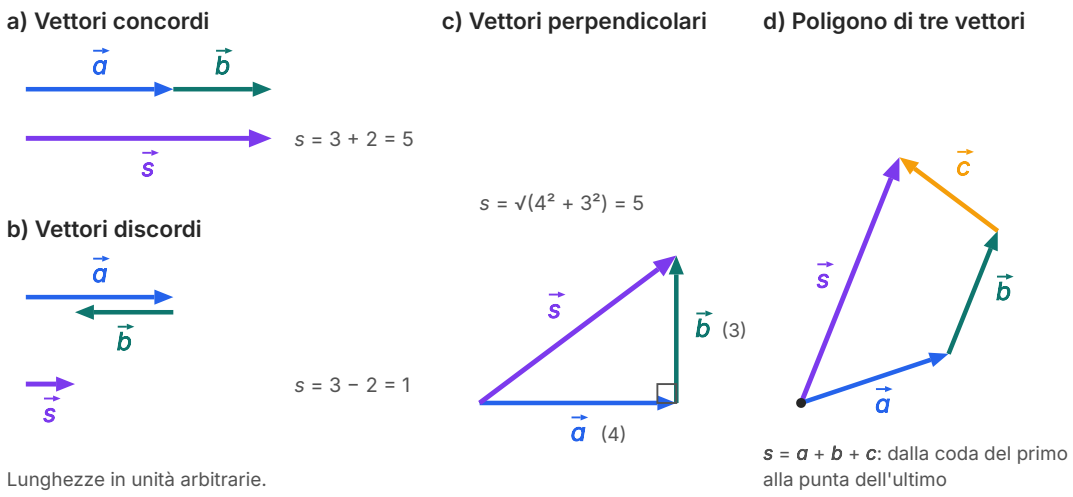

Figura 6.3 Casi particolari della somma. a) Vettori concordi: i moduli si sommano. b) Vettori discordi: i moduli si sottraggono. c) Vettori perpendicolari: il modulo della somma si trova con il teorema di Pitagora. d) Poligono di tre vettori.

ERRORE FREQUENTE

Il modulo della somma **non** è, in generale, la somma dei moduli. Con 6 m verso est e 8 m verso nord lo spostamento complessivo non è 14 m ma $\sqrt{(36 + 64)}$ m = 10 m. L'uguaglianza $s = a + b$ vale solo per vettori con la stessa direzione e lo stesso verso. Prima di sommare moduli, chiediti sempre: «queste frecce sono allineate e concordi?».

ESEMPIO SVOLTO

Il volo di un drone

Problema. Un drone decolla da un campo e vola per 120 m verso est, poi per 50 m verso nord, sempre alla stessa quota. Quanto vale lo spostamento complessivo? Qual è la distanza percorsa?

Soluzione. I due spostamenti sono perpendicolari, quindi il modulo della somma si trova con il teorema di Pitagora:

$$\Delta s = \sqrt{(120^2 + 50^2)}\ \text{m} = \sqrt{(14\,400 + 2500)}\ \text{m} = \sqrt{16\,900}\ \text{m} = 130\ \text{m}$$

Lo spostamento ha modulo 130 m e punta fra est e nord, più vicino all'est che al nord, perché il tratto verso est è più lungo. La distanza percorsa è invece 120 m + 50 m = 170 m. Nel paragrafo 6.4 vedremo come precisare la direzione con un angolo: con la calcolatrice si trova che lo spostamento forma con la direzione est un angolo di circa 22,6°.

Controllo. Il risultato (130 m) è maggiore di ciascun tratto e minore della loro somma (170 m), come deve essere.

6.3 Vettore opposto, differenza e prodotto per uno scalare

6.3.1 Il vettore opposto e la differenza

Il **vettore opposto** di $\boldsymbol{a}$, indicato con $-\boldsymbol{a}$, ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$, ma verso opposto (figura 6.4a). Se fai 200 m verso nord e poi 200 m verso sud, cioè lo spostamento opposto, torni al punto di partenza: la somma di un vettore e del suo opposto è il vettore nullo, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Con il vettore opposto si definisce la **differenza di due vettori**: sottrarre $\boldsymbol{b}$ significa sommare il suo opposto,

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

In pratica, come nella figura 6.4b, si disegna $\boldsymbol{a}$, si appoggia sulla sua punta la freccia $-\boldsymbol{b}$ (cioè $\boldsymbol{b}$ capovolto) e si traccia la freccia dalla coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $-\boldsymbol{b}$. C'è anche una lettura comoda nel parallelogramma: se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ partono dallo stesso punto, la differenza $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ è l'altra diagonale, quella che va dalla punta di $\boldsymbol{b}$ alla punta di $\boldsymbol{a}$. Puoi verificarlo così: partendo dalla punta di $\boldsymbol{b}$, per arrivare alla punta di $\boldsymbol{a}$ devi aggiungere proprio il vettore $\boldsymbol{d}$, perché $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$. Attenzione all'ordine: $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ è l'opposto di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, quindi la sottrazione di vettori, come quella fra numeri, non è commutativa.

La differenza di vettori ha un significato fisico preciso. Se due punti hanno posizioni descritte dai vettori $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$, tracciati da una stessa origine, lo spostamento per andare dal primo al se-

condo è $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$: «arrivo meno partenza», la stessa regola che userai per le variazioni di qualunque grandezza.

6.3.2 Moltiplicare un vettore per un numero

Fare tre volte di seguito lo stesso spostamento $\boldsymbol{a}$ equivale a fare uno spostamento tre volte più lungo, nella stessa direzione e nello stesso verso: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{a}$. Questa idea si generalizza. Il **prodotto di un vettore per uno scalare** k (un numero, eventualmente con unità di misura) è il vettore $k\boldsymbol{a}$ che ha:

- la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$;
- modulo $|k| \cdot a$, cioè il modulo di $\boldsymbol{a}$ moltiplicato per il valore assoluto di k;
- lo stesso verso di $\boldsymbol{a}$ se k è positivo, verso opposto se k è negativo.

Così $2\boldsymbol{a}$ è lungo il doppio di $\boldsymbol{a}$, $0{,}5\boldsymbol{a}$ è lungo la metà e $-1{,}5\boldsymbol{a}$ è lungo una volta e mezza ma punta dalla parte opposta (figura 6.4c). Il vettore opposto è il caso particolare $k = -1$. Se $k = 0$ si ottiene il vettore nullo. Moltiplicare per uno scalare non cambia mai la direzione; può solo allungare, accorciare o capovolgere la freccia.

Quando lo scalare ha un'unità di misura, il prodotto è una grandezza fisica diversa. Lo vedrai già nel prossimo capitolo: la forza-peso si ottiene moltiplicando la massa m, uno scalare in chilogrammi, per un vettore diretto verso il basso, e il risultato si misura in newton.

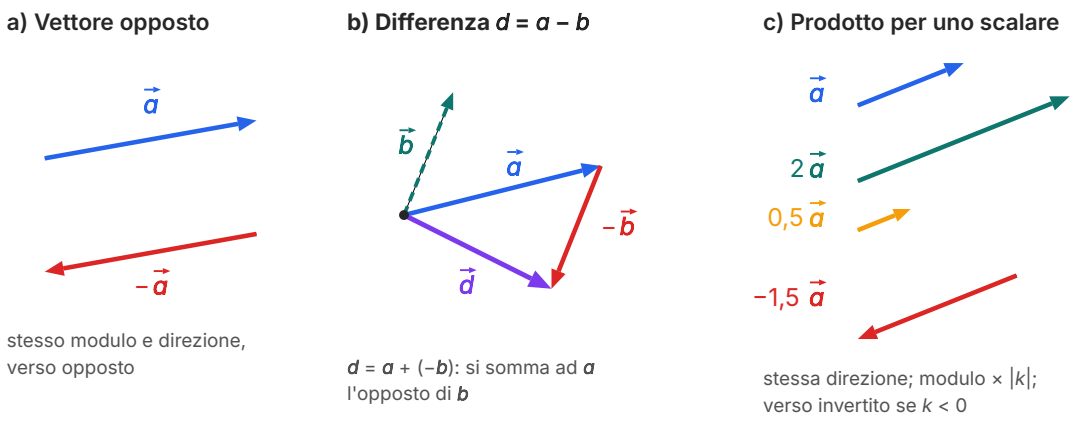

Figura 6.4 a) Il vettore opposto $-\boldsymbol{a}$. b) La differenza $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ottenuta sommando ad $\boldsymbol{a}$ l'opposto di $\boldsymbol{b}$. c) Multipli di uno stesso vettore: $2\boldsymbol{a}$, $0{,}5\boldsymbol{a}$ e $-1{,}5\boldsymbol{a}$ hanno tutti la direzione di $\boldsymbol{a}$.

APPROFONDIMENTO

Navigare con le frecce

La parola *vettore* viene dal latino *vector*, «colui che trasporta», dal verbo *vehere*, «portare»: un vettore «trasporta» un punto da una posizione a un'altra. L'idea di sommare spostamenti, però, è molto più antica del nome. Per secoli i naviganti hanno stimato la posizione della nave con la cosiddetta **navigazione stimata**: partendo da un punto noto, segnavano sulla carta un tratto dopo l'altro, ciascuno con la rotta indicata dalla bussola e con la lunghezza ricavata dalla velocità e dal tempo trascorso. Era, a tutti gli effetti, il metodo punta-coda applicato a un poligono di spostamenti.

Il calcolo vettoriale come lo usiamo oggi, con simboli, regole e componenti, prese forma negli ultimi decenni dell'Ottocento, soprattutto grazie al fisico statunitense Josiah Willard Gibbs e al fisico britannico Oliver Heaviside, che lo svilupparono per rendere più semplici le equazioni dell'elettromagnetismo.

6.4 Seno e coseno di un angolo

6.4.1 Rapporti tra i lati di un triangolo rettangolo

Per lavorare con vettori che non sono né paralleli né perpendicolari ci serve un modo per legare i lati di un triangolo rettangolo ai suoi angoli. Considera un triangolo rettangolo e uno dei suoi angoli acuti, che chiamiamo α (figura 6.5a). Rispetto ad α, i due cateti hanno nomi diversi: il **cateto adiacente** è quello che forma l'angolo α insieme all'ipotenusa; il **cateto opposto** è quello che sta di fronte ad α. Definiamo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}}$$

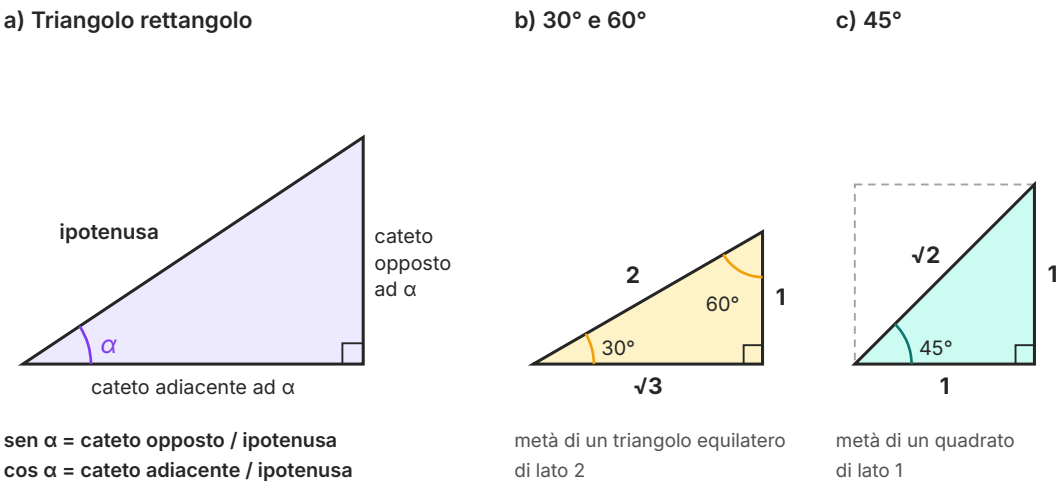

Figura 6.5 Seno e coseno. a) Nomi dei lati di un triangolo rettangolo rispetto all'angolo α. b) Metà di un triangolo equilatero di lato 2: lati 2, 1 e √3, angoli di 30° e 60°. c) Metà di un quadrato di lato 1: cateti 1, ipotenusa √2, angoli di 45°.

Il **seno** (sen) e il **coseno** (cos) di α sono numeri puri, senza unità di misura, perché sono rapporti tra due lunghezze. Dipendono *solo dall'angolo* e non dalle dimensioni del triangolo: se ingrandisci il triangolo mantenendo gli stessi angoli, ottieni un triangolo simile, in cui tutti i lati crescono nella stessa proporzione e quindi i rapporti restano uguali. Poiché in un triangolo rettangolo ogni cateto è più corto dell'ipotenusa, per ogni angolo acuto sen α e cos α sono compresi tra 0 e 1.

Dalle definizioni seguono due formule che useremo continuamente. Moltiplicando per l'ipotenusa:

$$\text{cateto opposto} = \text{ipotenusa} \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{cateto adiacente} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\alpha$$

Inoltre, poiché l'angolo opposto al cateto adiacente è l'altro angolo acuto, $90° - \alpha$, il seno di un angolo è uguale al coseno del suo complementare: $\operatorname{sen} 30° = \cos 60°$, $\operatorname{sen} 60° = \cos 30°$.

6.4.2 I valori per 30°, 45° e 60°

Per tre angoli i valori di seno e coseno si ricavano con la geometria che già conosci (figura 6.5).

- **30° e 60°.** Un triangolo equilatero di lato 2 ha tutti gli angoli di 60°. L'altezza lo divide in due triangoli rettangoli con ipotenusa 2, cateto minore 1 (metà della base) e angoli di 30° e 60°. Per Pitagora l'altro cateto vale $\sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$. Quindi $\operatorname{sen} 30° = 1/2$, $\cos 30° = \sqrt{3}/2$.
- **45°.** La diagonale divide un quadrato di lato 1 in due triangoli rettangoli isosceli, con angoli acuti di 45° e ipotenusa $\sqrt{(1 + 1)} = \sqrt{2}$. Quindi $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

Tabella 6.2 Seno e coseno degli angoli notevoli (valori esatti e approssimati a tre cifre). Gli estremi 0° e 90° sono i casi limite in cui il triangolo si «schiaccia» su un lato.

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	1/2 = 0,500	√2/2 ≈ 0,707	√3/2 ≈ 0,866	1
cos α	1	√3/2 ≈ 0,866	√2/2 ≈ 0,707	1/2 = 0,500	0

6.4.3 Seno e coseno con la calcolatrice

Per gli altri angoli si usa la calcolatrice scientifica, con i tasti **sin** e **cos** (sulla tastiera compare il simbolo inglese «sin»; in italiano scriviamo «sen»). Prima di tutto bisogna controllare che la calcolatrice sia impostata in **gradi**: sul display deve comparire l'indicazione D oppure DEG. Per esempio cos 37° = 0,799 e sen 37° = 0,602 (arrotondati a tre cifre). Serve anche l'operazione inversa: se conosci il coseno di un angolo e vuoi l'angolo, usi il tasto $\mathbf{cos^{-1}}$ (spesso si ottiene premendo prima SHIFT o 2nd). Per esempio, se cos α = 0,600, la calcolatrice dà α ≈ 53,1°. Non ti serve sapere come la calcolatrice ottiene questi valori: lo studierai in matematica nei prossimi anni.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> Calcoli cos 60° e la calcolatrice risponde −0,952 invece di 0,500? È impostata in **radianti** (indicazione R o RAD), un'altra unità per gli angoli che userai in futuro. Prima di ogni verifica controlla il display e, se serve, passa alla modalità DEG. Un controllo veloce: cos 60° deve dare esattamente 0,5.

6.5 Scomporre un vettore: le componenti

6.5.1 Scomposizione lungo due direzioni

Finora abbiamo sommato vettori. Spesso è utile l'operazione inversa: dato un vettore $\boldsymbol{v}$ e due direzioni r e t che passano per la sua coda, trovare due vettori, uno lungo r e uno lungo t, la cui somma sia $\boldsymbol{v}$. Questa operazione si chiama **scomposizione** di un vettore, e i due vettori trovati sono le sue **componenti vettoriali** lungo r e t.

Il procedimento è la regola del parallelogramma «al contrario» (figura 6.6a): dalla punta di $\boldsymbol{v}$ si traccia la parallela a t fino a incontrare r, e la parallela a r fino a incontrare t. Si ottiene un parallelogramma di cui $\boldsymbol{v}$ è la diagonale; i suoi due lati che partono dalla coda di $\boldsymbol{v}$ sono le componenti $\boldsymbol{v}_r$ e $\boldsymbol{v}_t$. Fissate le due direzioni, la scomposizione è unica.

Il caso più importante è quello di due direzioni perpendicolari (figura 6.6b): il parallelogramma diventa un rettangolo e il vettore ne è la diagonale. È la situazione che sfrutteremo per tutto il resto del libro, ad esempio per studiare un corpo su un piano inclinato, dove il peso si scompone in una parte parallela al piano e una perpendicolare a esso.

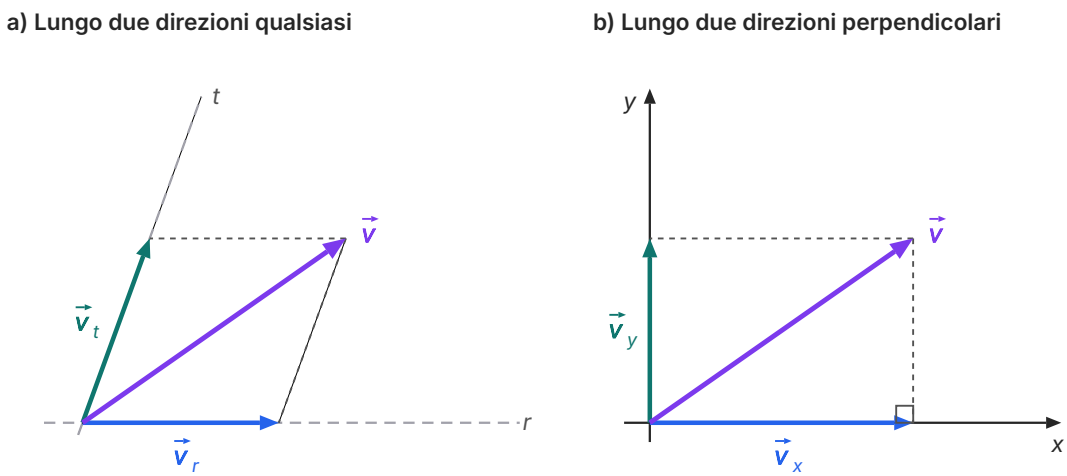

Figura 6.6 Scomposizione del vettore ***v***. a) Lungo due direzioni qualsiasi *r* e *t*: le componenti sono i lati del parallelogramma che ha ***v*** come diagonale. b) Lungo due direzioni perpendicolari *x* e *y*: il parallelogramma diventa un rettangolo.

6.5.2 Le componenti cartesiane

Fissiamo un sistema di assi cartesiani x e y e disegniamo il vettore $\boldsymbol{a}$ con la coda nell'origine. Proiettando la punta di $\boldsymbol{a}$ sui due assi otteniamo le **componenti cartesiane** di $\boldsymbol{a}$: due numeri, indicati con a_x e a_y, che dicono di quanto il vettore «avanza» lungo ciascun asse. A differenza del modulo, le componenti hanno un **segno**: a_x è positiva se il vettore punta verso le x crescenti, negativa se punta verso le x decrescenti; lo stesso vale per a_y. Nella figura 6.7 il vettore $\boldsymbol{a}$ ha entrambe le componenti positive, mentre $\boldsymbol{b}$, che punta in alto a sinistra, ha b_x negativa e b_y positiva.

Se il vettore forma un angolo α con l'asse x, il vettore e le sue proiezioni formano un triangolo rettangolo: il modulo a è l'ipotenusa, $|a_x|$ è il cateto adiacente ad α e $|a_y|$ è il cateto opposto. Le formule del paragrafo 6.4 danno subito:

$$a_x = a \cos \alpha \qquad a_y = a \operatorname{sen} \alpha$$

Queste formule, così come sono scritte, valgono quando il vettore punta «in alto a destra» (primo quadrante), con α misurato a partire dal semiasse positivo delle x. Negli altri casi useremo il metodo più sicuro per uno studente del primo anno: si calcolano i *valori assoluti* delle componenti con l'angolo acuto che il vettore forma con l'asse x, e poi si assegnano i segni guardando il disegno. Per il vettore $\boldsymbol{b}$ della figura 6.7, di modulo 6,0 m e inclinato di 45° rispetto al semiasse negativo delle x, si ha $|b_x| = |b_y| = 6{,}0\ \text{m} \cdot \cos 45° = 4{,}2\ \text{m}$; poiché $\boldsymbol{b}$ punta verso sinistra e verso l'alto, $b_x = -4{,}2\ \text{m}$ e $b_y = +4{,}2\ \text{m}$.

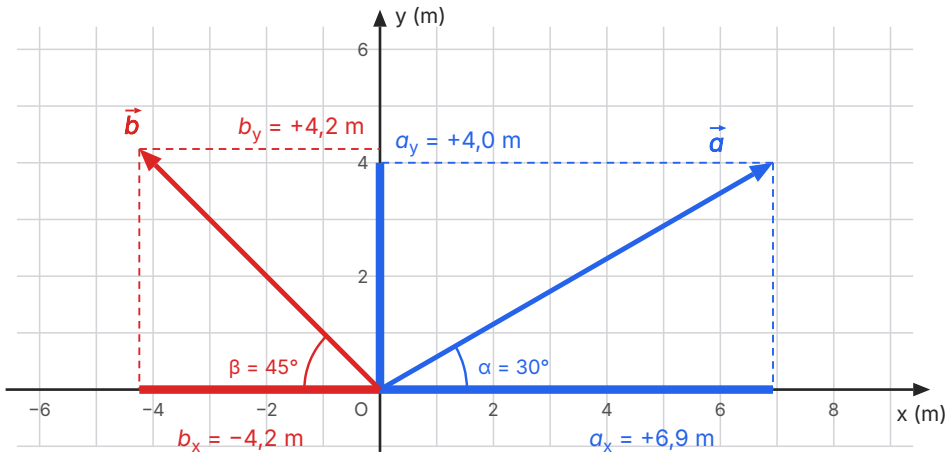

Figura 6.7 Componenti cartesiane. Il vettore $\vec{a}$ (8,0 m, 30° sopra il semiasse positivo delle x) ha componenti entrambe positive; il vettore $\vec{b}$ (6,0 m, 45° sopra il semiasse negativo delle x) ha b_x negativa e b_y positiva. I tratti spessi sugli assi rappresentano le componenti.

6.5.3 Dalle componenti al vettore

Il cammino si può percorrere anche all'indietro: conoscendo le componenti si ricostruiscono modulo e direzione. Il modulo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti le componenti, e per il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)}$$

I quadrati eliminano i segni: un vettore con componenti (−3 m; 4 m) ha modulo $\sqrt{(9 + 16)}$ m = 5 m, esattamente come uno con componenti (3 m; 4 m). La direzione si ricava in due passi. Prima si guarda il segno delle componenti per capire in quale quadrante punta il vettore. Poi si trova l'angolo acuto α con l'asse x dal rapporto $\cos\alpha = |a_x|/a$, con il tasto $\cos^{-1}$ della calcolatrice. Nei casi più semplici basta riconoscere i valori della tabella 6.2: se $\cos\alpha = 0{,}500$, l'angolo è 60°. Infine, un vettore è nullo se e solo se entrambe le sue componenti sono nulle.

ESEMPIO SVOLTO

Le componenti di uno spostamento

Problema. Un robot da giardino si sposta di 8,0 m lungo una direzione che forma un angolo di 30° con l'asse x (vettore $\boldsymbol{a}$ della figura 6.7). Calcola le componenti dello spostamento e verifica il risultato.

Soluzione. Il vettore punta nel primo quadrante, quindi le componenti sono entrambe positive:

$$a_x = a \cos 30° = 8{,}0 \text{ m} \cdot 0{,}866 = 6{,}9 \text{ m} \qquad a_y = a \operatorname{sen} 30° = 8{,}0 \text{ m} \cdot 0{,}500 = 4{,}0 \text{ m}$$

Controllo. Con Pitagora: $\sqrt{(6{,}93^2 + 4{,}00^2)}$ m = $\sqrt{(48{,}0 + 16{,}0)}$ m = $\sqrt{64{,}0}$ m = 8,00 m, il modulo di partenza. Inoltre la componente lungo x è maggiore di quella lungo y, come deve essere per un angolo minore di 45°: il vettore è «più orizzontale che verticale».

6.6 Sommare vettori per componenti

6.6.1 Il metodo

I metodi grafici sono intuitivi ma poco precisi, perché dipendono dalla cura del disegno. Le componenti permettono di sommare vettori con il calcolo, con la precisione che si vuole. L'idea è semplice: lungo ciascun asse le componenti si comportano come numeri con segno, quindi si sommano algebricamente. Se $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$:

$$s_x = a_x + b_x \qquad s_y = a_y + b_y$$

Il procedimento completo ha quattro passi:

1. scegli gli assi e dichiara i versi positivi (ad esempio: x verso est, y verso nord);
2. calcola le componenti di ciascun vettore, con il loro segno;
3. somma separatamente tutte le componenti x e tutte le componenti y;
4. ricava modulo e direzione della somma con Pitagora e con il coseno.

Con lo stesso metodo si calcola una differenza: le componenti di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ sono $a_x - b_x$ e $a_y - b_y$. E per moltiplicare un vettore per un numero k si moltiplicano per k entrambe le componenti.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere vettori su una griglia

Problema. Nella figura 6.8 ogni quadretto ha il lato di 1 m. Leggi le componenti dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e calcola il modulo della loro somma.

Soluzione. Per leggere una componente si conta di quanti quadretti ci si sposta andando dalla coda alla punta, con il segno. Il vettore $\boldsymbol{a}$ va dal punto (1; 1) al punto (5; 3): $a_x = 5 - 1 = +4$ m, $a_y = 3 - 1 = +2$ m. Il vettore $\boldsymbol{b}$ va da (7; 1) a (5; 5): $b_x = 5 - 7 = -2$ m, $b_y = 5 - 1 = +4$ m. Sommando:

$$s_x = 4\text{ m} + (-2\text{ m}) = 2\text{ m} \qquad s_y = 2\text{ m} + 4\text{ m} = 6\text{ m} \qquad s = \sqrt{(2^2 + 6^2)}\text{ m} = \sqrt{40}\text{ m} \approx 6{,}3\text{ m}$$

Osservazione. Le componenti si leggono come «punta meno coda», indipendentemente da dove il vettore è disegnato: spostare una freccia senza ruotarla non cambia le sue componenti.

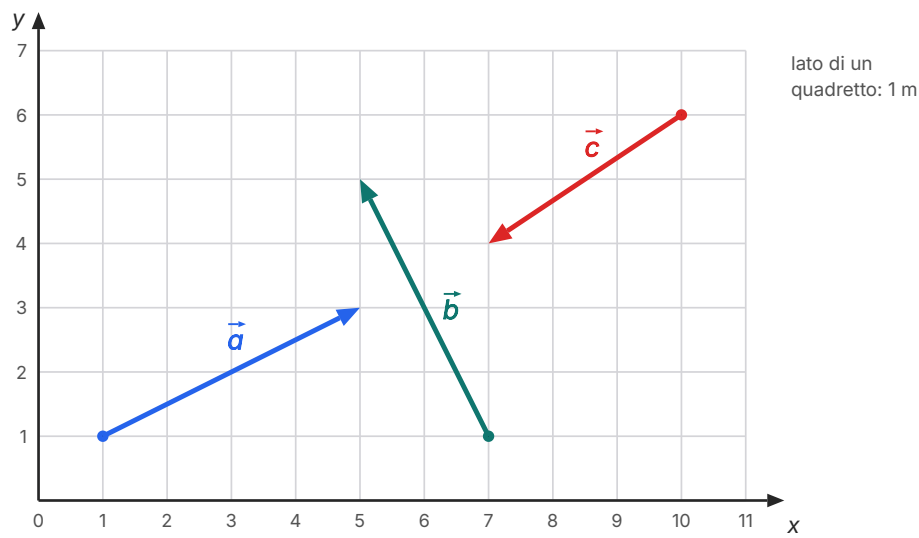

Figura 6.8 Tre vettori su una griglia di quadretti di 1 m di lato, usati nell'esempio svolto del paragrafo 6.6 e negli esercizi 15, 16, 20 e 21. Il pallino indica la coda di ciascun vettore.

ESEMPIO SVOLTO

Un'escursione in due tappe

Problema. Un'escursionista percorre 5,0 km in una direzione che forma 30° con l'est verso nord; poi 3,0 km in una direzione che forma 45° con l'ovest verso nord. Trova lo spostamento complessivo.

Soluzione. Assi: x verso est, y verso nord. Prima tappa (primo quadrante): $a_x = 5{,}0\ \text{km} \cdot \cos 30° = 4{,}33\ \text{km}$; $a_y = 5{,}0\ \text{km} \cdot \text{sen}\ 30° = 2{,}50\ \text{km}$. Seconda tappa (verso ovest e verso nord, quindi x negativa e y positiva): $b_x = -3{,}0\ \text{km} \cdot \cos 45° = -2{,}12\ \text{km}$; $b_y = +3{,}0\ \text{km} \cdot \text{sen}\ 45° = +2{,}12\ \text{km}$. Somme:

$$s_x = 4{,}33\ \text{km} - 2{,}12\ \text{km} = 2{,}21\ \text{km} \qquad s_y = 2{,}50\ \text{km} + 2{,}12\ \text{km} = 4{,}62\ \text{km}$$

$$s = \sqrt{(2{,}21^2 + 4{,}62^2)}\ \text{km} = \sqrt{26{,}2}\ \text{km} \approx 5{,}1\ \text{km}$$

Per la direzione: entrambe le componenti sono positive, quindi lo spostamento punta tra est e nord; $\cos\alpha = 2{,}21/5{,}12 = 0{,}431$ e il tasto $\cos^{-1}$ dà $\alpha \approx 64°$. L'escursionista si trova a circa 5,1 km dal punto di partenza, in una direzione che forma 64° con l'est verso nord.

Controllo. I due tratti sono lunghi 5,0 km e 3,0 km, quindi il modulo della somma deve stare fra 2,0 km e 8,0 km: 5,1 km è plausibile. I risultati intermedi sono stati tenuti con una cifra in più, e solo il risultato finale è stato arrotondato a due cifre significative, come i dati.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: una caccia al tesoro vettoriale

Materiali. Un metro a nastro da 20 m, una bussola (o il goniometro di un'app sullo smartphone), gessetti o picchetti, carta millimetrata, righello e goniometro.

Procedimento. In cortile o in palestra segnate un punto di partenza O e scegliete gli assi: x verso est, y verso nord. Un gruppo prepara un percorso di tre tratti e lo scrive come una lista di vettori, ad esempio: 12,0 m verso est; 8,0 m verso nord; 5,0 m verso nord-ovest (45° tra nord e ovest). Un secondo gruppo percorre i tratti e segna il punto di arrivo T, il «tesoro»; poi misura con il metro la distanza in linea retta OT.

Dati e confronto. In classe ciascuno calcola lo spostamento in due modi: con un disegno in scala su carta millimetrata (1 cm = 1 m), costruendo il poligono dei vettori, e per componenti.

Tabella 6.3 Il calcolo per componenti del percorso di esempio (assi: x verso est, y verso nord).

Tratto	Modulo (m)	Direzione	x (m)	y (m)
1	12,0	est	+12,0	0
2	8,0	nord	0	+8,0
3	5,0	nord-ovest (45°)	−3,5	+3,5
Somma			**+8,5**	**+11,5**

Il modulo previsto è $\sqrt{(8{,}5^2 + 11{,}5^2)}$ m ≈ 14,3 m.

Che cosa concludere. Confrontate il valore misurato di OT con quello calcolato e con quello del disegno. Le differenze di qualche decimetro sono normali: provengono dalle incertezze sulle misure di lunghezza e soprattutto sulle direzioni. Discutete quale dei tre metodi è il più preciso e perché. **Sicurezza:** lavorate lontano da scale e ostacoli e non correte con il metro a nastro srotolato.

Per la relazione. Allega il disegno in scala e il calcolo per componenti, e riporta in una tabella i tre valori di OT: misurato, ricavato dal disegno, calcolato. Nelle conclusioni indica la differenza più grande fra i tre, spiega quale fra le misure di lunghezza e di direzione pensi che pesi di più e proponi un modo per ridurla.

6.6.2 Verso le forze

Tutto ciò che abbiamo fatto con gli spostamenti vale per qualunque grandezza vettoriale. Nel prossimo capitolo vedremo che anche le forze si rappresentano con frecce e che, quando più forze agiscono sullo stesso corpo, il loro effetto complessivo è quello della loro somma vettoriale. Un esempio basta a farlo intuire: due amici tirano una slitta con due corde, ciascuno con una forza di 100 N, e le due corde formano un angolo di 60°. L'effetto è lo stesso di un'unica forza di-

retta lungo la bisettrice dell'angolo. Con le componenti, prendendo l'asse x lungo la bisettrice, ciascuna forza forma 30° con l'asse e contribuisce con 100 N · cos 30° ≈ 86,6 N, mentre le componenti lungo y si annullano. La forza totale vale quindi circa 173 N, e non 200 N: anche per le forze il modulo della somma non è la somma dei moduli.

COLLEGAMENTI

Matematica e geografia. Le componenti cartesiane sono le coordinate che usi nel piano cartesiano in matematica, applicate alla differenza tra due punti. Anche le mappe usano un'idea simile: le indicazioni di un navigatore satellitare («prosegui per 300 m, poi svolta a sinistra») descrivono il percorso come una sequenza di vettori, mentre la distanza «in linea d'aria» che alcune app mostrano accanto al nome di una località è il modulo dello spostamento, sempre minore o uguale alla lunghezza della strada da percorrere.

IN SINTESI

Somma di vettori concordi: $s = a + b$; **discordi:** $s = |a - b|$; **perpendicolari:** $s = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. In ogni altro caso $|a - b| \le s \le a + b$.

Differenza: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$: sottrarre un vettore significa sommare il suo opposto. **Prodotto per uno scalare:** $k\boldsymbol{a}$ ha la direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo $|k|a$ e verso invertito se $k < 0$.

Seno e coseno: sen α = cateto opposto/ipotenusa, cos α = cateto adiacente/ipotenusa: rapporti che dipendono solo dall'angolo.

Componenti: $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a$ sen α (α angolo con l'asse x; segni secondo il quadrante): quanto il vettore avanza lungo ciascun asse. **Modulo:** $a = \sqrt{(a_x{}^2 + a_y{}^2)}$. **Somma per componenti:** $s_x = a_x + b_x$, $s_y = a_y + b_y$: lungo ogni asse le componenti si sommano come numeri con segno.

SINTESI

- Una grandezza scalare è descritta da un numero con la sua unità; una grandezza vettoriale richiede anche direzione e verso.
- Un vettore si rappresenta con una freccia: modulo (lunghezza in scala, sempre positivo o nullo), direzione (retta) e verso (punta); per le forze conta anche il punto di applicazione.
- Lo spostamento va dal punto di partenza a quello di arrivo; la distanza percorsa è la lunghezza del cammino ed è sempre maggiore o uguale al modulo dello spostamento.
- La somma si ottiene con il metodo punta-coda o con la regola del parallelogramma; per più vettori si costruisce il poligono dei vettori.
- Il modulo della somma è la somma dei moduli solo per vettori concordi; per vettori perpendicolari si usa il teorema di Pitagora.
- Il vettore opposto $-\boldsymbol{a}$ ha verso contrario; la differenza $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ è la somma di $\boldsymbol{a}$ con $-\boldsymbol{b}$.
- Il prodotto $k\boldsymbol{a}$ conserva la direzione, moltiplica il modulo per $|k|$ e inverte il verso se $k < 0$.
- Seno e coseno di un angolo acuto sono rapporti tra un cateto e l'ipotenusa; valgono $1/2$ e $\sqrt{3}/2$ per $30°$ (scambiati per $60°$) e $\sqrt{2}/2$ per $45°$.
- Le componenti cartesiane $a_x = a \cos \alpha$ e $a_y = a \operatorname{sen} \alpha$ sono numeri con segno; il modulo si ritrova con Pitagora.
- Per sommare vettori si sommano separatamente le componenti x e le componenti y, poi si ricavano modulo e direzione.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Quale delle seguenti è una grandezza vettoriale?
   - **A.** La massa di un'automobile
   - **B.** La temperatura di una stanza
   - **C.** Lo spostamento di un ciclista
   - **D.** Il volume di una bottiglia

2. ● Un vettore è completamente descritto da:
   - **A.** modulo, direzione e verso
   - **B.** un numero e un'unità di misura
   - **C.** solo la direzione
   - **D.** modulo e unità di misura

3. ●● Due spostamenti hanno moduli 6 m e 8 m, con direzioni qualsiasi. Quale valore **non** può avere il modulo del loro spostamento complessivo?

   A. 2 m
   B. 10 m
   C. 14 m
   D. 16 m

4. ● Due spostamenti perpendicolari di 6 m e 8 m danno uno spostamento complessivo di modulo:

   A. 14 m
   B. 10 m
   C. 2 m
   D. 48 m

5. ●● Il vettore $-2\boldsymbol{a}$, rispetto ad $\boldsymbol{a}$, ha:

   A. modulo doppio, stessa direzione e verso opposto
   B. modulo doppio, direzione perpendicolare
   C. modulo negativo e stesso verso
   D. modulo dimezzato e verso opposto

6. ● Il valore di sen 30° è:

   A. 0,866
   B. 0,707
   C. 1
   D. 0,500

7. ●● Un vettore punta «in alto a sinistra» in un piano cartesiano con l'asse x verso destra e l'asse y verso l'alto. Le sue componenti sono:

   A. $a_x > 0$, $a_y > 0$
   B. $a_x < 0$, $a_y > 0$
   C. $a_x < 0$, $a_y < 0$
   D. $a_x > 0$, $a_y < 0$

8. ● Un'atleta corre un giro completo di una pista di 400 m e torna al punto di partenza. Il modulo del suo spostamento è:

   A. 400 m
   B. 200 m
   C. 0 m
   D. 800 m

9. ●● Un vettore ha componenti $a_x = -3{,}0$ m e $a_y = 4{,}0$ m. Il suo modulo è:
   A. 5,0 m
   B. 7,0 m
   C. 1,0 m
   D. 25 m

Vero o falso

10. ● Il modulo di un vettore può essere un numero negativo. V / F

11. ● La somma di vettori gode della proprietà commutativa: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. V / F

12. ●● Due vettori che hanno lo stesso modulo sono uguali. V / F

13. ●● Le componenti cartesiane di un vettore possono essere negative. V / F

14. ●● Per ogni angolo acuto α, sen α e cos α sono numeri compresi tra 0 e 1. V / F

Applicare

15. ● Nella figura 6.8 ogni quadretto ha il lato di 1 m. Scrivi le componenti dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

16. ● Calcola il modulo dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ della figura 6.8.

17. ● Un battello percorre 350 m lungo un canale rettilineo e poi altri 1,20 km nella stessa direzione e nello stesso verso. Quanto vale il modulo dello spostamento complessivo? E se il secondo tratto fosse percorso in verso opposto?

18. ●● Un vettore spostamento ha modulo 12,0 m e forma un angolo di 60° con l'asse x (primo quadrante). Calcola le sue componenti.

19. ● Il vettore $\boldsymbol{a}$ rappresenta uno spostamento di 5,0 m verso est. Descrivi (modulo, direzione e verso) i vettori $-3\boldsymbol{a}$ e $0{,}5\boldsymbol{a}$.

20. ●● Usando le componenti lette nell'esercizio 15, calcola componenti e modulo del vettore $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$. Che cosa osservi?

21. ●● Usando sempre la figura 6.8, calcola componenti e modulo del vettore $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

22. ●● Completa: in un triangolo rettangolo con ipotenusa di 10,0 cm e un angolo acuto di 30°, il cateto opposto all'angolo di 30° misura _____ cm e il cateto adiacente misura _____ cm.

Problemi

23. ●● Durante un'escursione Marco cammina per 2,4 km verso nord e poi per 1,0 km verso est. Calcola la distanza percorsa e il modulo del suo spostamento.

24. ● Un robot aspirapolvere si sposta di 3,0 m lungo l'asse x positivo, poi di 4,0 m lungo l'asse y positivo, infine di 3,0 m lungo l'asse x negativo. Trova lo spostamento complessivo (modulo, direzione e verso) e la distanza percorsa.

25. ●●● Un drone vola per 50 m verso nord-est (a 45° tra est e nord) e poi per 20 m verso ovest. Con l'asse x verso est e l'asse y verso nord, calcola le componenti e il modulo dello spostamento complessivo.

26. ●●● Il vettore $\boldsymbol{a}$ ha modulo 6,0 m e forma 30° con il semiasse positivo delle x (primo quadrante); il vettore $\boldsymbol{b}$ ha modulo 4,0 m e forma 60° con il semiasse negativo delle x, puntando verso l'alto (secondo quadrante). Calcola per componenti il modulo di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Spiega poi perché lo stesso risultato si ottiene anche con il teorema di Pitagora applicato ai moduli di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

27. ●●● Una barca a vela compie tre tratti: 5,0 km verso est, 4,0 km verso nord-est (45°) e 3,0 km verso nord. Calcola il modulo dello spostamento complessivo e l'angolo che esso forma con la direzione est. Quale spostamento dovrebbe compiere la barca per tornare in linea retta al porto di partenza?

28. ●●● Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno entrambi modulo 10 m e le loro direzioni formano un angolo di 60°. Prendi l'asse x lungo $\boldsymbol{a}$ e calcola il modulo di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e quello di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Interpreta geometricamente il secondo risultato.

29. ●● Un'app per la corsa registra un allenamento in quattro tratti rettilinei e ne riporta le componenti nella tabella seguente (asse x verso est, asse y verso nord). Calcola la distanza percorsa e il modulo dello spostamento complessivo.

Tabella 6.4 Componenti dei quattro tratti dell'allenamento.

Tratto	1	2	3	4
Δx (m)	+30	−24	0	+12
Δy (m)	+40	+7	−20	−5

Ragionare e argomentare

30. ●● È possibile che la somma di due spostamenti di modulo 3 m e 5 m abbia modulo 9 m? E modulo 2 m? Motiva le risposte.

31. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Mi sposto di 6 m verso est e poi di 8 m verso nord: il mio spostamento totale è 6 m + 8 m = 14 m verso nord-est». Individua l'errore e correggi il risultato.

32. ●●● Spiega perché il modulo dello spostamento non può mai essere maggiore della distanza percorsa, e in quali situazioni i due valori coincidono. Fai un esempio in cui la distanza percorsa è molto grande e lo spostamento è piccolo.

PER APPROFONDIRE

- [HRW] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo dedicato ai vettori presenta somma grafica, componenti e somma per componenti con molti esempi.
- [HEW] Paul G. Hewitt, *Conceptual Physics*: una presentazione dei vettori quasi senza formule, centrata sul significato fisico delle frecce.
- [FEY] *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sui vettori mostra perché le leggi della fisica si scrivono in forma vettoriale, indipendente dalla scelta degli assi.

Glossario del capitolo

Componenti cartesiane
Numeri con segno $a_x = a \cos \alpha$ e $a_y = a \operatorname{sen} \alpha$ che indicano di quanto un vettore avanza lungo gli assi x e y.

Coseno
In un triangolo rettangolo, rapporto tra il cateto adiacente a un angolo acuto α e l'ipotenusa ($\cos \alpha$); dipende solo dall'angolo.

Direzione
Retta lungo la quale giace un vettore.

Distanza percorsa
Lunghezza del cammino effettivamente seguito; è uno scalare ed è sempre maggiore o uguale al modulo dello spostamento.

Grandezza scalare
Grandezza completamente descritta da un numero con la sua unità di misura, come la massa, il tempo o il volume.

Grandezza vettoriale
Grandezza che per essere descritta richiede, oltre al valore numerico con l'unità, una direzione e un verso, come lo spostamento o la forza.

Metodo punta-coda
Metodo grafico di somma: la coda del secondo vettore si appoggia sulla punta del primo e la somma va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo.

Modulo
Intensità di un vettore, cioè la lunghezza della freccia in scala; è sempre positivo o nullo e ha un'unità di misura.

Prodotto di un vettore per uno scalare
Vettore $k\boldsymbol{a}$ con la direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo $|k| \cdot a$ e verso uguale a quello di $\boldsymbol{a}$ se $k > 0$, opposto se $k < 0$.

Punto di applicazione
Punto del corpo in cui agisce una forza; insieme a modulo, direzione e verso ne determina l'effetto.

Regola del parallelogramma
Metodo grafico di somma di due vettori con la coda in comune: la somma è la diagonale del parallelogramma che ha i due vettori come lati.

Risultante
Vettore somma di due o più vettori.

Scomposizione di un vettore
Operazione che sostituisce un vettore con due vettori lungo direzioni assegnate, la cui somma è il vettore di partenza.

Seno
In un triangolo rettangolo, rapporto tra il cateto opposto a un angolo acuto α e l'ipotenusa ($\operatorname{sen} \alpha$); dipende solo dall'angolo.

Spostamento
Vettore che va dalla posizione iniziale alla posizione finale di un corpo, indipendentemente dal cammino seguito.

Verso
Uno dei due modi di percorrere la direzione di un vettore, indicato dalla punta della freccia.

Vettore
Ente matematico rappresentato da una freccia, caratterizzato da modulo, direzione e verso; si indica con una lettera in grassetto o con una freccetta sopra la lettera.

Vettore opposto
Vettore $-\boldsymbol{a}$ con lo stesso modulo e la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$ ma verso contrario; sommato ad $\boldsymbol{a}$ dà il vettore nullo.

Soluzioni

1. C. Lo spostamento richiede modulo, direzione e verso; massa, temperatura e volume sono scalari.

2. A. Modulo, direzione e verso (per una forza si aggiunge il punto di applicazione).

3. D. Il modulo della somma è compreso tra $|8 - 6|$ m = 2 m (vettori discordi) e 8 m + 6 m = 14 m (vettori concordi): 16 m è impossibile.

4. B. Vettori perpendicolari: $s = \sqrt{(6^2 + 8^2)}$ m = $\sqrt{100}$ m = 10 m.

5. A. Il fattore −2 raddoppia il modulo, conserva la direzione e, essendo negativo, inverte il verso.

6. D. sen 30° = 1/2 = 0,500 (metà di un triangolo equilatero).

7. B. Verso sinistra significa x decrescenti ($a_x < 0$), verso l'alto y crescenti ($a_y > 0$).

8. C. Punto di arrivo e punto di partenza coincidono: lo spostamento è nullo, mentre la distanza percorsa è 400 m.

9. A. $a = \sqrt{((-3{,}0)^2 + 4{,}0^2)}$ m = $\sqrt{25}$ m = 5,0 m: il segno sparisce nel quadrato.

10. F. Il modulo è la lunghezza della freccia: è sempre positivo o nullo. Il verso si indica con la punta, non con il segno del modulo.

11. V. Con il metodo punta-coda, disegnando prima $\boldsymbol{a}$ o prima $\boldsymbol{b}$ si ottiene lo stesso parallelogramma e la stessa diagonale.

12. F. Due vettori sono uguali solo se hanno uguali modulo, direzione e verso; 5 m verso nord e 5 m verso est sono diversi.

13. V. Una componente è negativa quando il vettore punta nel verso negativo dell'asse corrispondente.

14. V. In un triangolo rettangolo ciascun cateto è minore dell'ipotenusa, quindi i rapporti cateto/ipotenusa sono compresi tra 0 e 1.

15. Componenti come «punta meno coda»: $\boldsymbol{a}$: (5 − 1; 3 − 1) = (+4 m; +2 m); $\boldsymbol{b}$: (5 − 7; 5 − 1) = (−2 m; +4 m); $\boldsymbol{c}$: (7 − 10; 4 − 6) = (−3 m; −2 m).

16. $a = \sqrt{(4^2 + 2^2)}$ m = $\sqrt{20}$ m ≈ 4,5 m; $c = \sqrt{(3^2 + 2^2)}$ m = $\sqrt{13}$ m ≈ 3,6 m.

17. Vettori concordi: 0,350 km + 1,20 km = 1,55 km. Vettori discordi: 1,20 km − 0,350 km = 0,85 km, nel verso del secondo tratto.

18. v_x = 12,0 m · cos 60° = 12,0 m · 0,500 = 6,00 m; v_y = 12,0 m · sen 60° = 12,0 m · 0,866 = 10,4 m.

19. $-3\boldsymbol{a}$: modulo 3 · 5,0 m = 15 m, direzione est-ovest, verso ovest. $0{,}5\boldsymbol{a}$: modulo 2,5 m, direzione est-ovest, verso est.

20. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ = (4 − 3; 2 − 2) = (1 m; 0 m); modulo 1 m, lungo l'asse x positivo. I due vettori puntano in versi quasi opposti, quindi la somma è molto più corta di ciascuno: la componente y si annulla del tutto.

21. $\boldsymbol{d}$ = (4 − (−2); 2 − 4) = (6 m; −2 m); $d = \sqrt{(36 + 4)}$ m = $\sqrt{40}$ m ≈ 6,3 m.

22. Cateto opposto = 10,0 cm · sen 30° = 5,00 cm; cateto adiacente = 10,0 cm · cos 30° = 10,0 cm · 0,866 = 8,66 cm.

23. Distanza percorsa: 2,4 km + 1,0 km = 3,4 km. Spostamento (tratti perpendicolari): $\sqrt{(2{,}4^2 + 1{,}0^2)}$ km = $\sqrt{6{,}76}$ km = 2,6 km.

24. Componenti: s_x = 3,0 m − 3,0 m = 0; s_y = 4,0 m. Lo spostamento è 4,0 m lungo l'asse y, verso positivo. Distanza percorsa: 3,0 m + 4,0 m + 3,0 m = 10,0 m.

25. Primo tratto: $a_x = a_y$ = 50 m · cos 45° = 35,4 m. Secondo tratto: b_x = −20 m, b_y = 0. Somma: s_x = 15,4 m ≈ 15 m, s_y = 35,4 m ≈ 35 m; $s = \sqrt{(15{,}4^2 + 35{,}4^2)}$ m = $\sqrt{1486}$ m ≈ 38,5 m, cioè 39 m con due cifre significative come i dati.

26. a_x = 6,0 m · cos 30° = 5,20 m; a_y = 6,0 m · sen 30° = 3,00 m; b_x = −4,0 m · cos 60° = −2,00 m; b_y = 4,0 m · sen 60° = 3,46 m. Somma: (3,20 m; 6,46 m); s =

$\sqrt{(3{,}20^2 + 6{,}46^2)}$ m = $\sqrt{52{,}0}$ m ≈ 7,2 m. Il vettore $\boldsymbol{a}$ forma 30° con il semiasse positivo delle x e $\boldsymbol{b}$ forma 180° − 60° = 120° con esso: tra i due ci sono 90°, quindi sono perpendicolari e $s = \sqrt{(6{,}0^2 + 4{,}0^2)}$ m = $\sqrt{52}$ m ≈ 7,2 m.

27. Assi: x verso est, y verso nord. Secondo tratto: 4,0 km · cos 45° = 2,83 km lungo ciascun asse. s_x = 5,0 + 2,83 = 7,83 km; s_y = 2,83 + 3,0 = 5,83 km; $s = \sqrt{(7{,}83^2 + 5{,}83^2)}$ km = $\sqrt{95{,}3}$ km ≈ 9,8 km. cos α = 7,83/9,76 = 0,802, quindi α ≈ 37° verso nord rispetto all'est. Per tornare al porto serve lo spostamento opposto: 9,8 km in direzione 37° a sud dell'ovest.

28. $\boldsymbol{a}$ = (10 m; 0); $\boldsymbol{b}$ = (10 m · cos 60°; 10 m · sen 60°) = (5,0 m; 8,66 m). Somma: (15 m; 8,66 m), modulo $\sqrt{(225 + 75{,}0)}$ m = $\sqrt{300}$ m ≈ 17 m. Differenza: (5,0 m; −8,66 m), modulo $\sqrt{(25 + 75{,}0)}$ m = $\sqrt{100}$ m = 10 m. Geometricamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ (che va dalla punta di $\boldsymbol{b}$ alla punta di $\boldsymbol{a}$) formano un triangolo con due lati di 10 m e un angolo di 60° tra essi: è equilatero, quindi anche il terzo lato misura 10 m.

29. Moduli dei tratti: $\sqrt{(30^2 + 40^2)}$ = 50 m; $\sqrt{(24^2 + 7^2)}$ = 25 m; 20 m; $\sqrt{(12^2 + 5^2)}$ = 13 m. Distanza percorsa: 50 + 25 + 20 + 13 = 108 m. Spostamento: Σx = 30 − 24 + 0 + 12 = 18 m, Σy = 40 + 7 − 20 − 5 = 22 m; modulo $\sqrt{(18^2 + 22^2)}$ m = $\sqrt{808}$ m ≈ 28 m.

30. 9 m no: il modulo della somma non può superare 3 m + 5 m = 8 m (vettori concordi). 2 m sì: è il valore minimo, |5 m − 3 m|, che si ottiene con vettori di verso opposto.

31. Lo studente ha sommato i moduli di due vettori perpendicolari, cosa lecita solo per vettori concordi. Corretto: $s = \sqrt{(6^2 + 8^2)}$ m = 10 m; la direzione forma con l'est un angolo α con cos α = 6/10 = 0,6, cioè α ≈ 53° verso nord (quindi non esattamente «nord-est», che corrisponde a 45°).

32. Traccia di risposta: il modulo dello spostamento è la lunghezza del segmento che unisce partenza e arrivo, e il segmento è la linea più breve tra due punti; qualunque altro cammino è lungo almeno quanto il segmento. I due valori coincidono quando il moto avviene lungo una retta, sempre nello stesso verso. Esempio: un nuotatore che fa 20 vasche da 50 m in piscina percorre 1000 m ma, se finisce dal lato da cui è partito, ha spostamento nullo.