CAPITOLO

5

Rappresentare dati e leggi fisiche

Una colonna di numeri tace; gli stessi numeri, messi su un grafico, cominciano a raccontare.

OBIETTIVI

1. Organizzare i dati di un esperimento in una tabella completa di unità e incertezze.
2. Costruire un grafico cartesiano con scale, unità e barre d'errore, e tracciare a occhio la retta che meglio descrive i punti.
3. Riconoscere la proporzionalità diretta, la dipendenza lineare, la proporzionalità inversa e quella quadratica, da una tabella e da un grafico.
4. Calcolare la pendenza di una retta e interpretarne il significato fisico con la sua unità di misura.
5. Linearizzare una relazione non lineare scegliendo opportunamente le grandezze da riportare sugli assi.
6. Usare una legge per interpolare e, con prudenza, estrapolare; ricavare le formule inverse.
7. Scrivere la relazione di un esperimento, discutendo in modo critico il risultato e le sue incertezze.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Le tabelle di dati 2
5.2 I grafici cartesiani 3
5.3 Proporzionalità diretta e dipendenza lineare 7
5.4 La proporzionalità inversa 11
5.5 La proporzionalità quadratica 13
5.6 Dai dati alle leggi 17
5.7 La relazione di laboratorio 21

Fisica 1 · Parte I · Misurare il mondo · versione 1.0
Capitolo 5: Rappresentare dati e leggi fisiche · pagine 115–142 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 1 abbiamo fatto oscillare un pendolo e scoperto che il periodo cresce con la lunghezza del filo, ma «più lentamente»: quadruplicando la lunghezza, il periodo raddoppia soltanto. È un'osservazione preziosa, ma ancora vaga. Quale regola precisa lega le due grandezze? Vale per qualunque lunghezza? Che periodo avrà un pendolo lungo 2,5 m, che non abbiamo mai costruito?

Per rispondere servono gli strumenti che hai preparato nei capitoli precedenti: le unità di misura, le cifre significative, le incertezze. E ne serve uno nuovo, forse il più potente di tutti: il *grafico*. Una tabella di numeri contiene tutta l'informazione, ma la nasconde; un grafico ben fatto la mostra a colpo d'occhio. In questo capitolo impariamo a costruire tabelle e grafici, a riconoscere in essi le relazioni più comuni della fisica e a trasformare quelle relazioni in *leggi* scritte con una formula, che permettono di fare previsioni. Alla fine del capitolo sapremo dire esattamente che cosa nasconde il pendolo del capitolo 1.

5.1 Le tabelle di dati

Un esperimento quantitativo produce coppie di valori: per ogni valore scelto della variabile indipendente si misura il valore corrispondente della variabile dipendente (capitolo 1). Il primo modo di conservare questi valori è una tabella.

5.1.1 Com'è fatta una buona tabella

Una **tabella di dati** dispone le misure in righe e colonne in modo che ogni coppia di valori si legga senza ambiguità. Prendiamo un esperimento semplice: appendiamo a una molla masse via via più grandi e misuriamo di quanto si allunga. La variabile indipendente è la massa appesa m, che scegliamo noi usando masse campione; la variabile dipendente è l'allungamento ΔL, cioè la differenza fra la lunghezza della molla con il carico e la sua lunghezza a riposo. La Tabella 5.1 riporta i risultati.

Tabella 5.1 Allungamento di una molla in funzione della massa appesa. Le masse campione hanno incertezza trascurabile; l'allungamento è letto su un righello accostato alla molla.

Prova	m (g)	ΔL (cm) ± 0,2 cm	$\Delta L/m$ (cm/g)
1	50	2,0	0,040
2	100	3,9	0,039
3	150	6,0	0,040
4	200	7,8	0,039
5	250	9,8	0,039
6	300	11,8	0,039

Osserva come è costruita. Ogni colonna ha un'*intestazione* con il simbolo della grandezza e, tra parentesi, la sua unità: così nelle caselle si scrivono soltanto numeri, senza ripetere «cm» sei volte. Quando l'incertezza è la stessa per tutte le misure, come qui (± 0,2 cm, perché la lettura del bordo della molla sul righello non è più fine di così), la si indica una volta sola nell'intestazione; se cambia da misura a misura, si aggiunge una colonna apposita. I valori di una stessa colonna hanno lo stesso numero di decimali, coerente con l'incertezza (capitolo 4). Infine, la variabile indipendente occupa la prima colonna di dati: chi legge capisce subito quale grandezza è stata scelta e quale misurata.

L'ultima colonna non contiene misure, ma un *calcolo*: il rapporto fra allungamento e massa, arrotondato a due cifre significative. Aggiungere colonne di grandezze calcolate è una delle mosse più utili nell'analisi dei dati, perché spesso è proprio lì che compare una regolarità. In questo caso il rapporto resta quasi lo stesso, fra 0,039 e 0,040 cm/g: è un primo indizio molto forte, su cui torneremo nel paragrafo 5.3.

In breve, una buona tabella ha: un titolo che dice che cosa è stato misurato e come; per ogni colonna, simbolo e unità nell'intestazione; l'incertezza nell'intestazione o in una colonna dedicata; lo stesso numero di decimali in ogni colonna; la variabile indipendente per prima. Una tabella senza unità di misura è una tabella di numeri, non di misure.

5.2 I grafici cartesiani

Un **grafico cartesiano** rappresenta ogni coppia di valori come un punto di un piano, individuato da due coordinate misurate lungo due assi perpendicolari. È l'idea del piano cartesiano che conosci dalla matematica, con una differenza importante: in fisica gli assi portano *grandezze*, cioè numeri con un'unità di misura.

5.2.1 Assi, scale e unità

Per costruire il grafico dei dati della Tabella 5.1 si procede così.

1. **Scegliere gli assi.** Per convenzione la variabile indipendente va sull'asse orizzontale, detto **asse delle ascisse**, e la variabile dipendente sull'asse verticale, l'**asse delle ordinate**. Qui: m in orizzontale, ΔL in verticale. Si dice allora che si rappresenta ΔL «in funzione di» m.
2. **Scegliere le scale.** La **scala** di un asse dice a quanti centimetri di carta (o a quanti quadretti) corrisponde un'unità della grandezza. Va scelta in modo che i dati occupino gran parte del foglio e che le suddivisioni siano comode da leggere: 1, 2 o 5 unità per quadretto (oppure 10, 20, 50…), mai 3 o 7. Le due scale sono indipendenti: un quadretto può valere 50 g in orizzontale e 2 cm in verticale.
3. **Scrivere sugli assi** il nome o il simbolo della grandezza e la sua unità, e numerare le tacche principali a intervalli regolari. Le tacche non corrispondono ai dati: sono una griglia di riferimento.
4. **Riportare i punti**, ciascuno con la sua barra d'errore.

Il risultato è il grafico della Figura 5.1. Le scale partono da zero perché, come vedremo, il punto (0; 0) ha un significato fisico; se invece tutti i dati fossero lontani dallo zero (per esempio masse tra 800 e 900 g), si potrebbe far iniziare l'asse da un valore diverso, a patto di segnalarlo chiaramente.

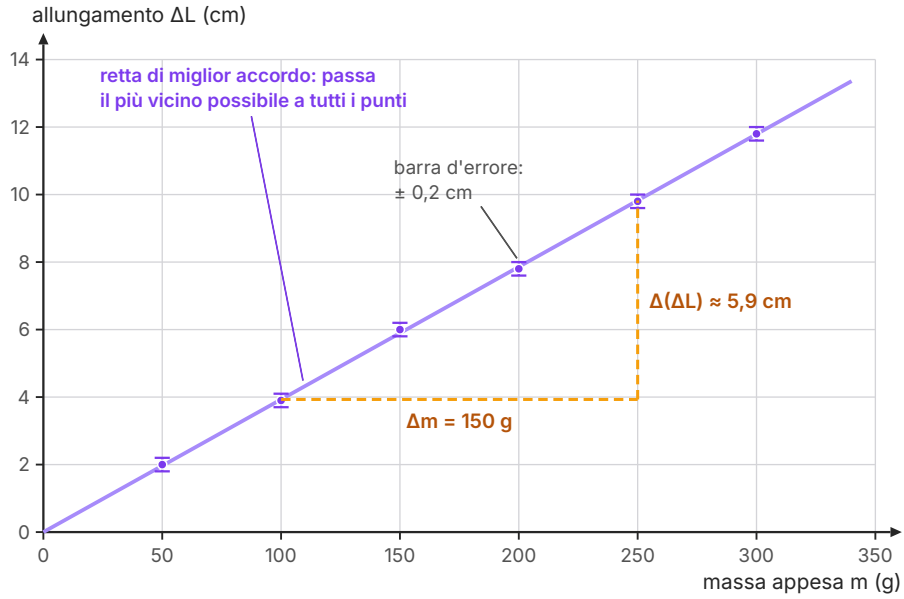

Figura 5.1 Il grafico dei dati della Tabella 5.1. Ogni punto è accompagnato dalla sua barra d'errore (± 0,2 cm). La retta di miglior accordo passa per l'origine; il triangolo arancione mostra come si calcola la sua pendenza: a un aumento di massa di 150 g corrisponde un aumento di allungamento di circa 5,9 cm.

5.2.2 Le barre d'errore

Ogni misura ha un'incertezza, e un grafico onesto deve mostrarla. Per questo ogni punto si disegna con una **barra d'errore** (o barra d'incertezza): un segmento centrato sul punto, lungo in tutto il doppio dell'incertezza assoluta, che rappresenta l'intervallo in cui cade il valore della misura. Nella Figura 5.1 le barre sono verticali e si estendono di 0,2 cm sopra e sotto ciascun punto; le masse, che hanno incertezza trascurabile, non hanno barre orizzontali. Se anche la grandezza in ascissa fosse incerta, ogni punto avrebbe una piccola croce, o un rettangolo, al posto del segmento.

Le barre d'errore cambiano il modo di leggere un grafico. Un punto non è più un puntino esatto, ma una piccola zona in cui il valore vero, con buona probabilità, si trova. Così, quando ci chiediamo se i punti «stanno su una retta», la domanda giusta diventa: esiste una retta che attraversa tutte le barre?

5.2.3 La retta di miglior accordo

I punti della Figura 5.1 sono quasi allineati, ma non perfettamente: le misure hanno sempre piccoli scarti casuali. Non ha senso, quindi, collegare i punti con una spezzata, che seguirebbe anche gli scarti. Si traccia invece, con un righello trasparente, la **retta di miglior accordo**: la

retta che passa il più vicino possibile a tutti i punti, lasciandone grosso modo metà sopra e metà sotto, e che attraversa tutte le barre d'errore. Non deve passare per forza per qualche punto: deve rappresentare l'andamento dell'insieme. Se il fenomeno lo richiede (qui: massa nulla, allungamento nullo), si controlla anche che la retta passi per l'origine entro le incertezze.

Tracciare la retta «a occhio» sembra poco scientifico, ma con dati di buona qualità funziona bene; più avanti negli studi imparerai un metodo di calcolo che fornisce la retta migliore senza ambiguità. Già ora, però, possiamo chiederci quanto sia incerta la nostra retta, con un metodo grafico semplice.

5.2.4 Le rette di massima e minima pendenza

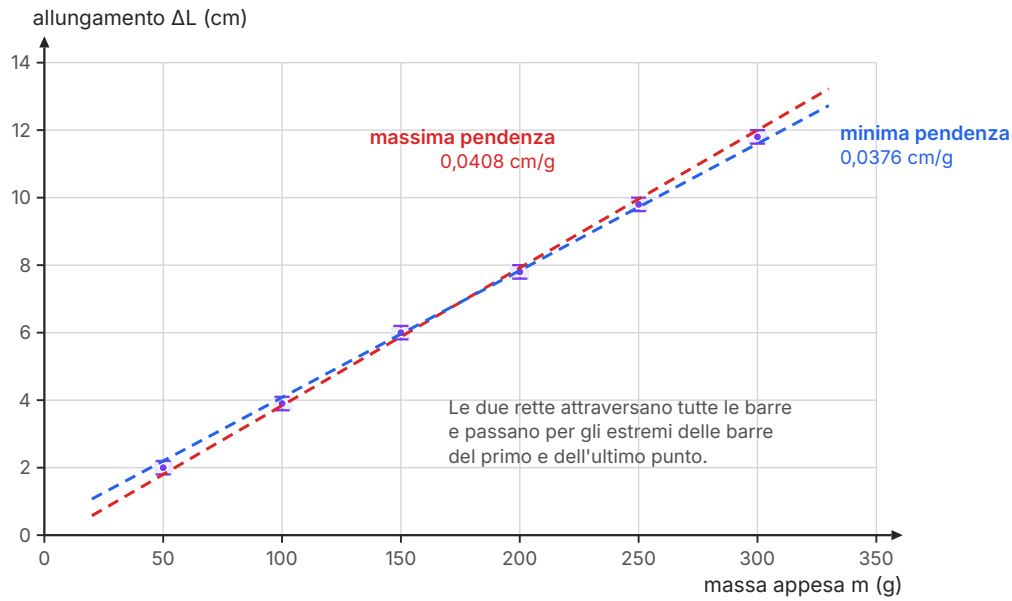

Figura 5.2 Il metodo delle rette di massima e minima pendenza applicato ai dati della Tabella 5.1. La retta rossa unisce (50 g; 1,8 cm) con (300 g; 12,0 cm); quella blu unisce (50 g; 2,2 cm) con (300 g; 11,6 cm). Entrambe attraversano tutte le barre d'errore.

Fra tutte le rette che attraversano ogni barra d'errore, ce n'è una più ripida di tutte e una meno ripida di tutte: sono la **retta di massima pendenza** e la **retta di minima pendenza**. Di solito si ottengono unendo gli estremi opposti delle barre del primo e dell'ultimo punto: per la retta più ripida, l'estremo *inferiore* della prima barra con l'estremo *superiore* dell'ultima; per quella meno ripida, il contrario. Poi si controlla che entrambe attraversino anche tutte le barre intermedie (Figura 5.2).

Con i nostri dati, la retta più ripida sale di 12,0 cm − 1,8 cm = 10,2 cm mentre la massa aumenta di 250 g: la sua pendenza è 10,2 cm / 250 g = 0,0408 cm/g. Quella meno ripida sale di 11,6

cm − 2,2 cm = 9,4 cm sugli stessi 250 g: pendenza 0,0376 cm/g. Come valore della pendenza si prende la media delle due, e come incertezza la loro semidispersione, esattamente come per le misure ripetute del capitolo 4:

$$\text{pendenza} = \frac{0{,}0408\ \text{cm/g} + 0{,}0376\ \text{cm/g}}{2} = 0{,}0392\ \text{cm/g}$$

$$e_a = \frac{0{,}0408\ \text{cm/g} - 0{,}0376\ \text{cm/g}}{2} = 0{,}0016\ \text{cm/g}$$

L'incertezza comincia con la cifra 1, quindi la teniamo con due cifre significative (convenzione del capitolo 4) e scriviamo: pendenza = (0,0392 ± 0,0016) cm/g, con un'incertezza relativa di circa il 4%. Nota che le due rette estreme non passano esattamente per l'origine (tagliano l'asse verticale a −0,24 cm e a +0,32 cm): lo zero è compreso fra le due, dunque i dati sono compatibili con una retta per l'origine.

APPROFONDIMENTO

Perché «cartesiano»

Il piano cartesiano prende nome da René Descartes (latinizzato in *Cartesius*), che nel 1637 pubblicò *La Géométrie*, in appendice al *Discorso sul metodo*. Lì mostrò come i problemi di geometria si potessero tradurre in equazioni fissando una linea di riferimento e misurando le distanze dei punti da essa: un'idea sviluppata negli stessi anni, in modo indipendente, anche da Pierre de Fermat. Già nel Trecento il filosofo Nicola d'Oresme aveva rappresentato con segmenti di lunghezza variabile il modo in cui una grandezza cambia; ma è con la geometria analitica del Seicento che curve ed equazioni diventano due facce della stessa cosa. Da allora, ogni legge fisica scritta con una formula ha anche un suo «ritratto» su un grafico.

5.3 Proporzionalità diretta e dipendenza lineare

5.3.1 La proporzionalità diretta

Torniamo alla molla. Nella Tabella 5.1 il rapporto $\Delta L/m$ è costante entro le incertezze, e nella Figura 5.1 i punti stanno su una retta che passa per l'origine. Sono due modi di dire la stessa cosa. Due grandezze x e y sono in **proporzionalità diretta** (o direttamente proporzionali) quando il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ovvero} \quad y = k\,x$$

Il numero k si chiama **costante di proporzionalità**. In fisica k non è quasi mai un numero puro: ha come unità il rapporto fra le unità di y e di x. Per la nostra molla $k \approx 0{,}039$ cm/g: ogni grammo appeso allunga la molla di 0,039 cm.

Ecco le proprietà che permettono di riconoscere una proporzionalità diretta:

- se x raddoppia, triplica, si dimezza, anche y raddoppia, triplica, si dimezza: in generale, se x viene moltiplicata per un numero, y viene moltiplicata per lo *stesso* numero;
- quando $x = 0$ anche $y = 0$;
- il grafico di y in funzione di x è una retta che passa per l'origine.

Ne hai già incontrate molte. La massa di un campione di una sostanza è direttamente proporzionale al suo volume, e la costante è la densità: $m = d\,V$ (capitolo 2). Il costo della benzina è direttamente proporzionale ai litri acquistati, e la costante è il prezzo al litro. La circonferenza di un cerchio è direttamente proporzionale al diametro, con costante π.

5.3.2 La pendenza e il suo significato

In un grafico, la costante k ha un significato geometrico preciso: è la **pendenza** della retta, cioè il rapporto fra l'aumento Δy della grandezza in ordinata e il corrispondente aumento Δx di quella in ascissa, calcolato fra due punti qualsiasi della retta:

$$\text{pendenza} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Per calcolarla si scelgono due punti *della retta* (non due dati!) lontani fra loro, in corrispondenza di valori comodi da leggere, e si disegna il «triangolo della pendenza» come nella Figura 5.1. Più la retta è ripida, maggiore è la pendenza. E poiché la pendenza è un rapporto fra due grandezze, ha un'unità di misura, che è parte integrante del risultato: dire che la pendenza è «0,039» non significa nulla, dire che è 0,039 cm/g descrive la molla.

ESEMPIO SVOLTO

Dalla pendenza alle previsioni

Problema. Usando il grafico della Figura 5.1: a) calcola la pendenza della retta; b) prevedi l'allungamento con una massa di 175 g; c) trova quale massa produce un allungamento di 5,0 cm.

a) Scegliamo sulla retta i punti con $m_1 = 100$ g e $m_2 = 250$ g, dove leggiamo $\Delta L_1 \approx 3{,}9$ cm e $\Delta L_2 \approx 9{,}8$ cm. Pendenza = (9,8 cm − 3,9 cm)/(250 g − 100 g) = 5,9 cm / 150 g ≈ 0,039 cm/g. La legge della molla è quindi $\Delta L = 0{,}039\ \text{cm/g} \cdot m$.

b) $\Delta L = 0{,}039\ \text{cm/g} \times 175\ \text{g} \approx 6{,}8$ cm. Il valore 175 g è compreso fra quelli misurati: la previsione è affidabile.

c) Ricaviamo m dalla legge dividendo entrambi i membri per 0,039 cm/g: $m = \Delta L$ / (0,039 cm/g) = 5,0 cm / (0,039 cm/g) $\approx 1{,}3 \times 10^2$ g. Nota come le unità si semplificano: cm diviso cm/g dà g.

Controllo. 5,0 cm è circa metà di 9,8 cm, che corrisponde a 250 g: la massa cercata deve essere circa metà di 250 g, e infatti 130 g lo è.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la legge di una molla

Materiali. Una molla a spirale leggera, un sostegno con asta e morsetto, un piattello o un gancio portapesi, una serie di masse da 50 g, un righello millimetrato fissato verticalmente accanto alla molla.

Procedura. Appendi il piattello vuoto e annota la posizione dell'estremo inferiore della molla: è lo zero degli allungamenti. Aggiungi una massa alla volta, aspetta che la molla smetta di oscillare e leggi la nuova posizione tenendo l'occhio alla stessa altezza dell'indice, per evitare la parallasse. Arriva a 6 o 7 masse, poi toglile una alla volta e rileggi le posizioni: se la molla non torna ai valori di prima, l'hai deformata troppo.

Dati. Costruisci una tabella con le colonne m (g), ΔL (cm) ± incertezza, $\Delta L/m$ (cm/g), come la Tabella 5.1.

Che cosa concludere. Riporta i dati su carta millimetrata con le barre d'errore e traccia la retta di miglior accordo. Se passa per l'origine e attraversa tutte le barre, allungamento e massa sono direttamente proporzionali. Calcola la pendenza con le rette di massima e minima pendenza. Confronta il risultato con quello di un altro gruppo che ha usato una molla uguale: le due pendenze sono compatibili?

Sicurezza. Non superare il carico indicato dall'insegnante e tieni i piedi lontani dalla verticale delle masse.

Per la relazione. È il primo esperimento da documentare con una relazione completa, secondo lo schema descritto alla fine di questo capitolo: tabella, grafico con le barre d'errore, pendenza con la sua incertezza e, nelle conclusioni, il confronto con l'altro gruppo.

5.3.3 La dipendenza lineare

Ripetiamo l'esperimento della molla, ma questa volta riportiamo in ordinata non l'allungamento, bensì la *lunghezza totale* L della molla, che a riposo misura $L_0 = 12{,}0$ cm. Poiché $L = L_0 + \Delta L$, ogni punto si sposta verso l'alto di 12,0 cm: otteniamo una retta parallela alla precedente, con la stessa pendenza, che però non passa più per l'origine (Figura 5.3).

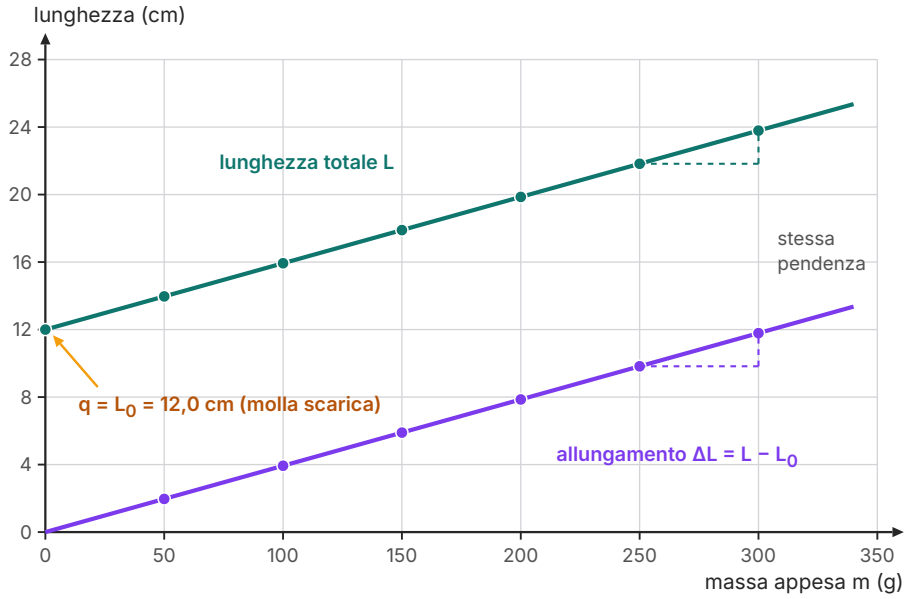

Figura 5.3 Allungamento ΔL (in viola) e lunghezza totale L (in verde) della stessa molla in funzione della massa appesa. Le due rette sono parallele: hanno la stessa pendenza, 0,039 cm/g. La retta verde, L = 12,0 cm + 0,039 cm/g · m, interseca l'asse verticale nel punto che corrisponde alla lunghezza a riposo.

Una relazione di questo tipo si chiama **dipendenza lineare**:

$$y = m\,x + q$$

Il suo grafico è una retta. Il coefficiente m è la pendenza, e si calcola come prima: $\Delta y/\Delta x$. Il termine q, detto **intercetta** (o ordinata all'origine), è il valore di y quando $x = 0$: il punto in cui la retta interseca l'asse verticale. Per la molla $q = L_0$ = 12,0 cm, la lunghezza senza carico; la legge è L = 12,0 cm + 0,039 cm/g · m. (Attenzione a non confondere la lettera m della pendenza, usata in matematica, con il simbolo della massa: nelle formule fisiche scriveremo direttamente il valore numerico con la sua unità.)

La proporzionalità diretta è il caso particolare della dipendenza lineare con $q = 0$. In una dipendenza lineare con $q \neq 0$, invece, il rapporto y/x *non* è costante: per la molla, L/m vale 14,0 cm / 50 g = 0,28 cm/g con il primo carico, ma 23,8 cm / 300 g ≈ 0,079 cm/g con l'ultimo. Ciò che resta costante è il rapporto fra le *variazioni*: $\Delta y/\Delta x$. Raddoppiando la massa appesa non raddoppia la lunghezza della molla, ma raddoppia il suo allungamento.

Le dipendenze lineari sono ovunque. La massa di un barattolo pieno è la massa del barattolo vuoto più quella del contenuto, che è proporzionale al volume versato. La temperatura in gradi Fahrenheit, usata negli Stati Uniti, dipende linearmente da quella in gradi Celsius: $T_F = 1{,}8 \cdot T_C + 32$ (0 °C corrisponde a 32 °F, e ogni grado Celsius vale 1,8 gradi Fahrenheit). L'altezza di una can-

dela che brucia diminuisce linearmente con il tempo: in questo caso la pendenza è *negativa*, perché y diminuisce mentre x cresce, e la retta scende verso destra.

ERRORE FREQUENTE

«Lineare» non vuol dire «proporzionale»

Due grandezze legate da una retta *non* sono necessariamente direttamente proporzionali: lo sono solo se la retta passa per l'origine. Il costo di una corsa in taxi, con una quota fissa iniziale più una quota per chilometro, cresce linearmente con la distanza, ma 10 km non costano il doppio di 5 km. Prima di dire «è proporzionale», controlla che il rapporto y/x sia costante o che la retta passi per (0; 0).

5.4 La proporzionalità inversa

5.4.1 Quando il prodotto è costante

Una vasca da 120 L viene riempita con un rubinetto di cui si può regolare la *portata* Q, cioè il volume d'acqua che esce ogni minuto. Più il rubinetto è aperto, meno tempo serve. La Tabella 5.2 raccoglie i tempi di riempimento per diverse portate.

Tabella 5.2 Tempo t necessario per riempire una vasca da 120 L in funzione della portata Q del rubinetto.

Q (L/min)	4	6	8	10	12	15	20	24
t (min)	30	20	15	12	10	8	6	5
$Q \cdot t$ (L)	120	120	120	120	120	120	120	120

Il rapporto t/Q qui cambia moltissimo; ma il *prodotto* $Q \cdot t$ è sempre lo stesso, 120 L, cioè il volume della vasca. Due grandezze sono in **proporzionalità inversa** (o inversamente proporzionali) quando il loro prodotto è costante:

$$x \cdot y = k \quad \text{ovvero} \quad y = \frac{k}{x}$$

Se x raddoppia, y si dimezza; se x triplica, y diventa un terzo; in generale, se x viene moltiplicata per un numero, y viene *divisa* per lo stesso numero. Per la vasca, passando da 6 a 12 L/min il tempo passa da 20 a 10 min.

5.4.2 Il grafico: un ramo d'iperbole

Il grafico di t in funzione di Q (Figura 5.4a) non è una retta, ma una curva che scende sempre più lentamente: è un ramo di **iperbole equilatera**. La curva si avvicina sempre di più agli assi senza mai toccarli. Non tocca l'asse orizzontale perché nessuna portata, per quanto grande,

riempie la vasca in un tempo nullo; non tocca quello verticale perché con portata zero la vasca non si riempie mai. Per questo una proporzionalità inversa non ha senso fisico per $x = 0$.

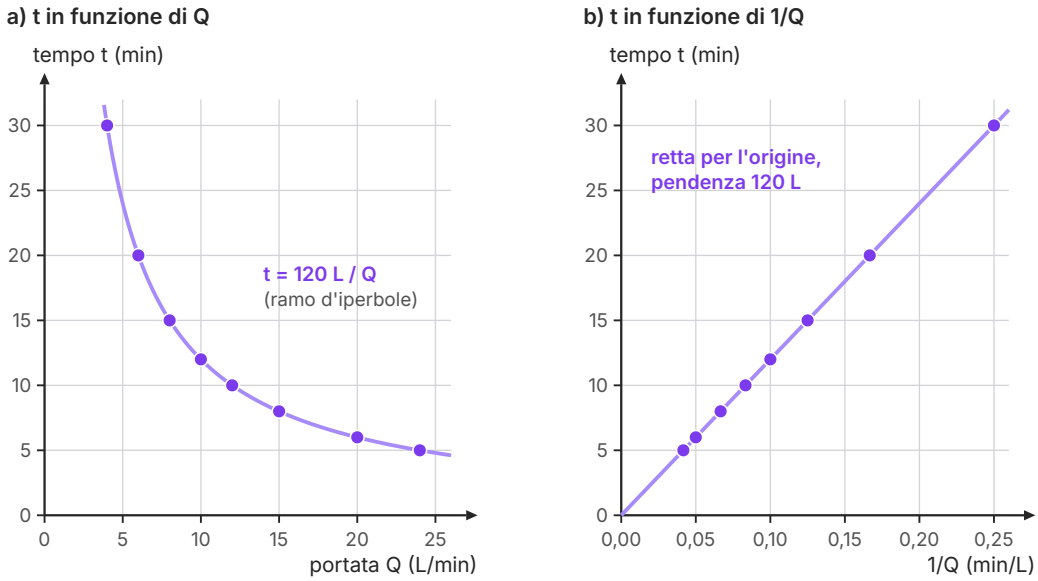

Figura 5.4 a) Il tempo di riempimento della vasca da 120 L in funzione della portata (dati della Tabella 5.2): i punti stanno su un ramo d'iperbole. b) Gli stessi tempi in funzione di $1/Q$: i punti si allineano su una retta per l'origine, la cui pendenza è il volume della vasca.

Riconoscere un'iperbole «a occhio» è difficile: molte curve decrescenti le somigliano. Per questo conviene usare un trucco che vale per tutte le relazioni di questo capitolo, la **linearizzazione**: si cambia la grandezza riportata su un asse in modo che, se la legge ipotizzata è giusta, il grafico diventi una retta. Se $t = k/Q$, allora $t = k \cdot (1/Q)$: il tempo è direttamente proporzionale all'*inverso* della portata. Basta allora aggiungere alla tabella una colonna con $1/Q$ e riportare t in funzione di $1/Q$: si ottiene una retta per l'origine, la cui pendenza è proprio k (Figura 5.4b). Una retta è facilissima da riconoscere, e se i punti non si allineassero sapremmo subito che l'ipotesi «proporzionalità inversa» è sbagliata.

ERRORE FREQUENTE

«Decrescente» non vuol dire «inversamente proporzionale»

Che y diminuisca quando x aumenta non basta. L'altezza di una candela diminuisce con il tempo, ma linearmente: dopo il doppio del tempo non è alta la metà. La prova decisiva è il prodotto $x \cdot y$: solo se è costante si tratta di proporzionalità inversa. In modo simile, «direttamente proporzionale» non vuol dire semplicemente «crescente».

ESEMPIO SVOLTO

Riconoscere una proporzionalità inversa da una tabella

Problema. In una siringa chiusa si comprime l'aria, a temperatura costante, e si misura la pressione p per diversi volumi V: $V = 40\ \text{cm}^3$, $p = 100$ kPa; $V = 32\ \text{cm}^3$, $p = 125$ kPa; $V = 25\ \text{cm}^3$, $p = 160$ kPa; $V = 20\ \text{cm}^3$, $p = 200$ kPa. Che relazione c'è fra p e V? Quale pressione prevedi per $V = 16\ \text{cm}^3$? (La pressione dei gas la studierai più avanti; il kPa, chilopascal, ne è un'unità.)

Soluzione. I rapporti p/V valgono 2,5; 3,9; 6,4; 10 kPa/cm^3: non sono costanti, quindi non c'è proporzionalità diretta. I prodotti valgono $40 \times 100 = 4000$; $32 \times 125 = 4000$; $25 \times 160 = 4000$; $20 \times 200 = 4000$ kPa·cm^3: sono tutti uguali. Pressione e volume sono inversamente proporzionali: $p \cdot V = 4000$ kPa·cm^3, cioè $p = 4000\ \text{kPa·cm}^3 / V$.

Previsione. Con $V = 16\ \text{cm}^3$: $p = 4000\ \text{kPa·cm}^3 / 16\ \text{cm}^3 = 250$ kPa. **Controllo:** passando da 32 cm^3 a 16 cm^3 il volume si dimezza, e la pressione raddoppia da 125 kPa a 250 kPa.

Questa relazione fra pressione e volume di un gas porta il nome di Robert Boyle; vale con buona approssimazione per l'aria a temperatura costante e la ritroverai nello studio dei gas.

5.5 La proporzionalità quadratica

5.5.1 Quando raddoppiare vuol dire quadruplicare

Una biglia viene lasciata ferma all'inizio di una guida leggermente inclinata e, con una videocamera, si misura la distanza s percorsa dopo diversi intervalli di tempo t (Tabella 5.3). La distanza cresce con il tempo, ma sempre più in fretta: nel primo secondo la biglia percorre circa 0,2 m, nei primi due secondi circa 0,8 m, cioè quattro volte tanto.

Tabella 5.3 Distanza percorsa da una biglia lasciata ferma su una guida inclinata (dati sperimentali tipici). Le ultime due righe sono calcolate.

t (s)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
s (m)	0,05	0,21	0,44	0,81	1,24	1,81
t^2 (s^2)	0,25	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0
s/t^2 (m/s^2)	0,20	0,21	0,20	0,20	0,20	0,20

Il rapporto s/t non è costante (vale 0,10 m/s dopo 0,5 s e circa 0,60 m/s dopo 3,0 s), ma il rapporto s/t^2 lo è: circa 0,20 m/s^2 per tutte le misure. Due grandezze sono in **proporzionalità quadratica** quando una è direttamente proporzionale al quadrato dell'altra:

$$\frac{y}{x^2} = k \quad \text{ovvero} \quad y = k\,x^2$$

Se x raddoppia, y quadruplica ($2^2 = 4$); se x triplica, y diventa nove volte più grande ($3^2 = 9$); se x si dimezza, y diventa un quarto. Il grafico di y in funzione di x è un ramo di **parabola** con il vertice nell'origine, che all'inizio è quasi piatto e poi sale sempre più ripido (Figura 5.5a). L'area di un quadrato in funzione del lato è l'esempio geometrico più semplice: $A = l^2$, con $k = 1$.

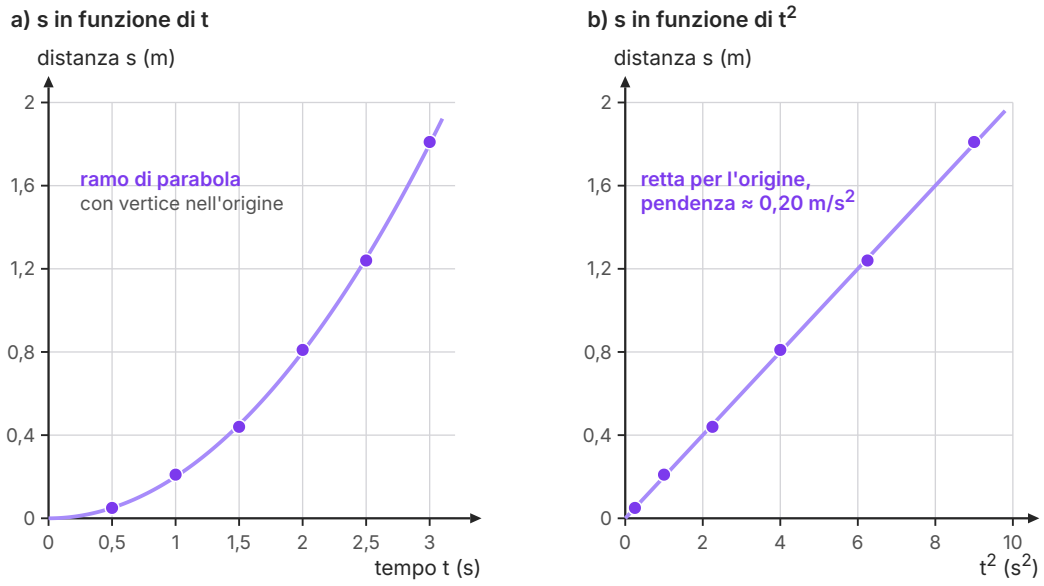

Figura 5.5 a) Distanza percorsa dalla biglia in funzione del tempo (dati della Tabella 5.3): i punti stanno su un ramo di parabola, $s = 0{,}20\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$. b) Le stesse distanze in funzione di t^2: i punti si allineano su una retta per l'origine con pendenza 0,20 m/s².

Anche qui la linearizzazione è la strada più sicura. Se $s = k\,t^2$, allora s è direttamente proporzionale a t^2: riportando s in funzione di t^2 si deve ottenere una retta per l'origine con pendenza k. La Figura 5.5b conferma l'ipotesi. Il moto della biglia è un esempio di moto uniformemente accelerato, che studierai nel capitolo 16: lì scoprirai che cosa significa fisicamente la costante 0,20 m/s².

APPROFONDIMENTO

Galileo e i quadrati dei tempi

L'esperimento della biglia sulla guida è, nella sostanza, quello che Galileo descrive nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638). Non potendo misurare con precisione la caduta libera, troppo rapida per gli orologi dell'epoca, Galileo la «rallentò» facendo rotolare una sfera lungo un canale inclinato, e misurò i tempi pesando l'acqua che usciva da un recipiente forato. Il risultato fu proprio una proporzionalità quadratica: gli spazi percorsi a partire dalla quiete stanno fra loro come i quadrati dei tempi impiegati. È una delle prime leggi della fisica scoperte confrontando sistematicamente misure e ipotesi matematiche.

5.5.2 Il pendolo svelato

Possiamo finalmente tornare al pendolo del capitolo 1. La Tabella 5.4 riporta il periodo T misurato per cinque lunghezze L del filo.

Tabella 5.4 Periodo di un pendolo in funzione della lunghezza (ampiezza piccola; dati sperimentali tipici). Le ultime due colonne sono calcolate.

L (m)	T (s)	T/L (s/m)	T^2 (s^2)	T^2/L (s^2/m)
0,20	0,90	4,5	0,81	4,0
0,40	1,27	3,2	1,61	4,0
0,60	1,55	2,6	2,40	4,0
0,80	1,80	2,3	3,24	4,0
1,00	2,01	2,0	4,04	4,0

ESEMPIO SVOLTO

Analisi dei dati del pendolo

Passo 1: il periodo è proporzionale alla lunghezza? No: il rapporto T/L scende da 4,5 a 2,0 s/m. Lo sapevamo già dal capitolo 1: quadruplicando L (da 0,20 a 0,80 m) il periodo soltanto raddoppia (da 0,90 a 1,80 s).

Passo 2: un'ipotesi. «Quadruplicare una grandezza fa raddoppiare l'altra» è il comportamento della proporzionalità quadratica letto al contrario: se L fosse proporzionale a T^2, raddoppiare T farebbe quadruplicare L. Calcoliamo allora T^2 e il rapporto T^2/L.

Passo 3: verifica. Il rapporto T^2/L vale 4,0 s^2/m per tutte le misure (i valori non arrotondati sono compresi fra 4,00 e 4,05). L'ipotesi è confermata: T^2 è direttamente proporzionale a L, con

$$T^2 = 4{,}0\ \text{s}^2/\text{m} \cdot L$$

Il grafico di T^2 in funzione di L è una retta per l'origine con pendenza 4,0 s^2/m; quello di T in funzione di L è la curva «che si piega» del capitolo 1.

Passo 4: previsioni. Quale lunghezza dà un periodo di 1,00 s? $L = T^2 / (4{,}0\ \text{s}^2/\text{m}) = 1{,}00\ \text{s}^2 / (4{,}0\ \text{s}^2/\text{m}) = 0{,}25$ m: è proprio la previsione che avevamo fatto nel capitolo 1. E un pendolo lungo 2,5 m? $T^2 = 4{,}0\ \text{s}^2/\text{m} \times 2{,}5\ \text{m} = 10\ \text{s}^2$, quindi $T = \sqrt{10}\ \text{s} \approx 3{,}2$ s.

5.5.3 La proporzionalità inversa al quadrato

Combinando le idee dei paragrafi precedenti si ottiene un'altra relazione molto importante in fisica, la **proporzionalità inversa al quadrato**:

$$y = \frac{k}{x^2} \quad \text{ovvero} \quad y \cdot x^2 = k$$

Qui, se x raddoppia, y diventa un quarto; se x triplica, un nono. È la legge con cui diminuisce l'illuminazione prodotta da una lampadina piccola man mano che ci si allontana: la stessa luce si distribuisce su superfici sferiche la cui area cresce come il quadrato del raggio, così a distanza doppia ogni centimetro quadrato ne riceve un quarto. Seguono la stessa legge l'intensità del suono di una sorgente piccola all'aperto e, come vedrai negli anni successivi, la forza di gravità fra due corpi e la forza fra due cariche elettriche. Per linearizzarla si riporta y in funzione di $1/x^2$.

DA RICORDARE

Linearizzare: trasformare la curva in una retta

Se ipotizzi $y = k/x$, riporta y in funzione di $1/x$; se ipotizzi $y = k\,x^2$, riporta y in funzione di x^2; se ipotizzi $y = k/x^2$, riporta y in funzione di $1/x^2$. Se l'ipotesi è giusta, ottieni una retta per l'origine e la sua pendenza è k, con la sua unità. Se i punti non si allineano, l'ipotesi va cambiata.

5.6 Dai dati alle leggi

5.6.1 Riconoscere una legge

Ora abbiamo un piccolo catalogo di relazioni, riassunto nella Figura 5.6 e nella Tabella 5.5. Di fronte a una tabella di dati nuovi, conviene procedere con ordine.

1. **Guarda il grafico.** I punti stanno su una retta o su una curva? La retta passa per l'origine? La curva sale sempre più ripida (come una parabola) o scende avvicinandosi agli assi (come un'iperbole)?
2. **Formula un'ipotesi** e **controllala con i numeri**: calcola, per ogni coppia di dati, la grandezza che la legge prevede costante: il rapporto y/x, il prodotto $x \cdot y$, il rapporto y/x^2, oppure, per una retta che non passa per l'origine, il rapporto fra le variazioni $\Delta y/\Delta x$.
3. **Linearizza** e verifica che i punti si allineino su una retta entro le barre d'errore.
4. **Scrivi la legge** con il valore numerico della costante e la sua unità di misura.

Una regola così ottenuta, ricavata dalle misure senza ancora sapere *perché* le cose vanno in quel modo, si chiama **legge empirica**. La legge del pendolo, $T^2 = 4{,}0\ \mathrm{s^2/m} \cdot L$, è empirica: per spiegarla, cioè per dedurla da principi più generali e capire da che cosa dipende la costante $4{,}0\ \mathrm{s^2/m}$, servono la dinamica e il valore di g, che incontrerai più avanti.

Una cautela: «costante» significa costante *entro le incertezze*. Un rapporto che oscilla fra 0,039 e 0,040 cm/g senza una tendenza precisa è costante; un rapporto che diminuisce regolarmente da una misura all'altra non lo è, anche se le variazioni sono piccole.

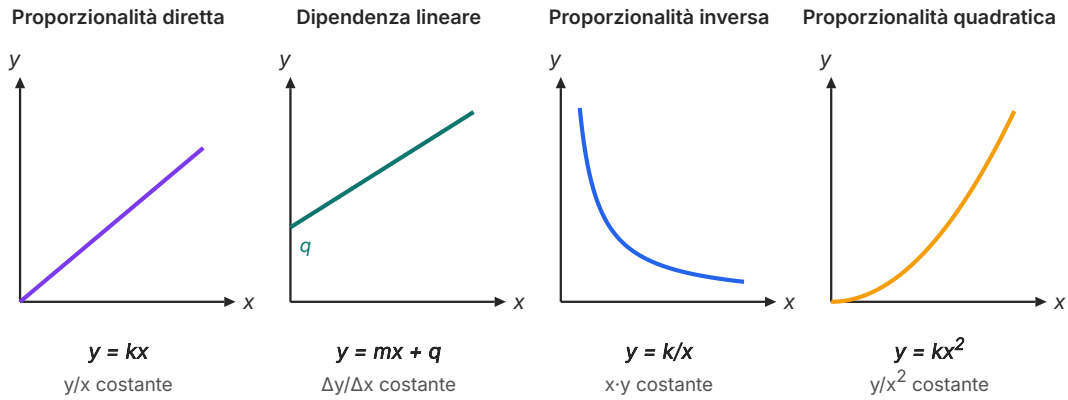

Figura 5.6 I grafici delle quattro relazioni principali del capitolo, con la grandezza che resta costante in ciascuna. Solo la proporzionalità diretta e la dipendenza lineare danno una retta; la retta della dipendenza lineare interseca l'asse y nel punto q.

Tabella 5.5 Come riconoscere le relazioni più comuni da una tabella e da un grafico.

Relazione	Legge	Che cosa resta costante	Grafico di y in funzione di x	Per ottenere una retta per l'origine
proporzionalità diretta	$y = k\,x$	y/x	retta per l'origine	già lo è
dipendenza lineare	$y = m\,x + q$	$\Delta y/\Delta x$	retta che interseca l'asse y in q	$y - q$ in funzione di x
proporzionalità inversa	$y = k/x$	$x \cdot y$	ramo d'iperbole	y in funzione di $1/x$
proporzionalità quadratica	$y = k\,x^2$	y/x^2	ramo di parabola con vertice nell'origine	y in funzione di x^2
inversa al quadrato	$y = k/x^2$	$x^2 \cdot y$	curva decrescente simile a un ramo d'iperbole (ma se x raddoppia, y diventa un quarto)	y in funzione di $1/x^2$

5.6.2 Interpolare ed estrapolare

Una legge serve a prevedere. Usarla per calcolare un valore *compreso* fra quelli misurati si chiama **interpolazione**: è ciò che abbiamo fatto prevedendo l'allungamento della molla con 175 g. L'interpolazione è di solito affidabile, perché i dati circostanti confermano che la legge vale in quella zona.

Usare la legge *fuori* dall'intervallo delle misure si chiama **estrapolazione**, ed è molto più rischioso. Nessuno ci garantisce che la legge continui a valere dove non abbiamo misurato. La molla della Tabella 5.1, per esempio, segue la proporzionalità diretta fino a 300 g; ma se le appendessimo 2 kg la legge prevederebbe un allungamento di quasi 80 cm, mentre nella realtà la molla, superato un certo carico detto limite di elasticità, si deforma in modo permanente e smette di seguire la retta (Figura 5.7). Ogni legge fisica ha un suo *dominio di validità*, come abbiamo visto nel capitolo 1, e i dati ne conoscono soltanto una parte.

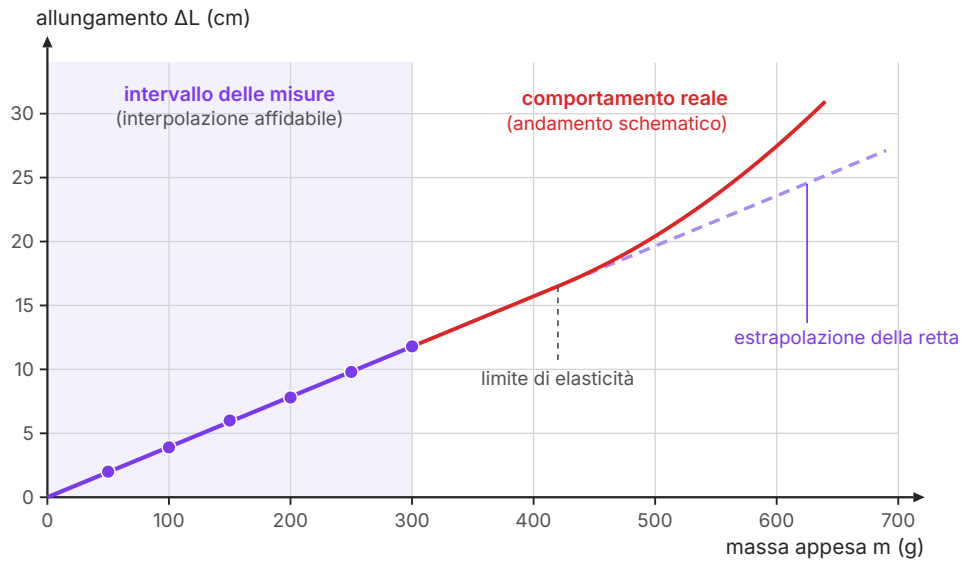

Figura 5.7 Interpolazione ed estrapolazione. Nella zona colorata, dove ci sono le misure, la retta descrive bene la molla. Prolungandola (tratteggio viola) si assume che la legge valga anche oltre; in realtà, superato il limite di elasticità, la molla si allunga più del previsto e la retta non la descrive più (curva rossa, andamento schematico).

Questo non significa che estrapolare sia vietato: la scienza lo fa di continuo, ed è proprio estrapolando che si scoprono fenomeni nuovi, quando la previsione non si avvera. Significa che un valore estrapolato va trattato come un'ipotesi da controllare, non come un risultato.

COLLEGAMENTI

Grafici che ingannano

Giornali, pubblicità e social network usano moltissimi grafici, e non tutti sono onesti. Il trucco più comune è far partire l'asse verticale da un valore diverso da zero senza dirlo: se un prodotto passa da 96 a 98 unità vendute e l'asse parte da 95, la seconda barra sembra tre volte più alta della prima, anche se l'aumento è di circa il 2%. Altri trucchi: scale diverse in due grafici affiancati, assi senza unità, curve «lisciate» che nascondono la dispersione dei dati, previsioni estrapolate molto lontano dai dati disponibili. Le stesse regole che usi in laboratorio (assi con unità, scale dichiarate, incertezze visibili, nessuna estrapolazione azzardata) sono anche un ottimo strumento per leggere con spirito critico i grafici dei mezzi di informazione e delle altre materie, dalla geografia alle scienze.

5.6.3 Le formule inverse

Una legge scritta con una formula è un'uguaglianza fra grandezze, e come ogni equazione si può risolvere rispetto a una qualunque delle grandezze che contiene. Le espressioni così ottenute si chiamano **formule inverse**. Per ricavarle si usano i principi di equivalenza delle equazioni che conosci dall'algebra: si può sommare o sottrarre la stessa quantità a entrambi i membri, e moltiplicarli o dividerli per la stessa quantità diversa da zero.

Dalla definizione di densità $d = m/V$, moltiplicando entrambi i membri per V si ottiene $m = d\,V$; dividendo poi per d si ottiene $V = m/d$. Per una proporzionalità inversa $x\,y = k$ si ha $x = k/y$; per una quadratica $y = k\,x^2$ si ha $x^2 = y/k$ e quindi, essendo x positiva, $x = \sqrt{(y/k)}$.

Un'abitudine importante: *porta sempre con te le unità di misura* nei calcoli, e controlla che il risultato abbia l'unità giusta. È un controllo dimensionale (capitolo 2) gratuito, che scopre moltissimi errori di algebra: se cercando un volume ottieni $\mathrm{g^2/cm^3}$, hai sbagliato a invertire la formula.

ESEMPIO SVOLTO

Formule inverse con le unità

Problema. La molla della Figura 5.3 segue la legge $L = 12{,}0\ \text{cm} + 0{,}039\ \text{cm/g} \cdot m$. Quale massa bisogna appendere perché la sua lunghezza diventi 18,0 cm?

Formula inversa. Sottraiamo 12,0 cm a entrambi i membri: $L - 12{,}0\ \text{cm} = 0{,}039\ \text{cm/g} \cdot m$. Dividiamo per 0,039 cm/g:

$$m = \frac{L - 12{,}0\ \text{cm}}{0{,}039\ \text{cm/g}}$$

Sostituzione. m = (18,0 cm − 12,0 cm) / (0,039 cm/g) = 6,0 cm / (0,039 cm/g) ≈ 154 g ≈ $1{,}5 \times 10^2$ g (due cifre significative, come la pendenza).

Controllo. L'unità è corretta: cm / (cm/g) = g. Il valore cade fra 150 g ($L \approx 17{,}9$ cm) e 200 g ($L \approx 19{,}8$ cm), come si vede dal grafico: è un'interpolazione affidabile.

IN SINTESI

Le relazioni del capitolo e il loro significato

Pendenza di una retta: $\Delta y/\Delta x$ fra due punti della retta — di quanto cambia y per ogni unità di x; ha come unità il rapporto delle unità degli assi.

Proporzionalità diretta: $y = k\,x$ — il rapporto y/x è costante; se x raddoppia, y raddoppia; retta per l'origine con pendenza k.

Dipendenza lineare: $y = m\,x + q$ — costante è $\Delta y/\Delta x$; q è il valore di y per $x = 0$.

Proporzionalità inversa: $y = k/x$ — il prodotto $x\,y$ è costante; se x raddoppia, y si dimezza; iperbole; retta se si usa $1/x$.

Proporzionalità quadratica: $y = k\,x^2$ — y/x^2 è costante; se x raddoppia, y quadruplica; parabola; retta se si usa x^2.

Inversa al quadrato: $y = k/x^2$ — se x raddoppia, y diventa un quarto.

Pendenza da due rette estreme: valore = $(p_{\max} + p_{\min})/2$, incertezza = $(p_{\max} - p_{\min})/2$.

5.7 La relazione di laboratorio

Un esperimento non finisce quando si ferma l'ultimo cronometro. Finché i risultati restano su un foglio di appunti, nessuno può controllarli, ripeterli o usarli: nemmeno tu, fra un mese. Per questo ogni attività sperimentale si conclude con una **relazione di laboratorio**, un testo che racconta che cosa si voleva scoprire, come lo si è misurato, che cosa si è ottenuto e quanto ci si può fidare del risultato. È, in piccolo, lo stesso lavoro che fanno i ricercatori quando pubblicano

un articolo: come hai visto nel capitolo 1, la comunità scientifica può giudicare e riprodurre soltanto ciò che è scritto con chiarezza.

5.7.1 Le parti di una relazione

Una relazione ha una struttura fissa, che aiuta chi scrive a non dimenticare nulla e chi legge a trovare subito ciò che cerca.

1. **Titolo e scopo.** Una o due frasi che dicono quale domanda si vuole risolvere o quale legge si vuole verificare: «verificare se l'allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla massa appesa e misurare la costante di proporzionalità».
2. **Materiali e strumenti.** L'elenco di ciò che serve, con la *portata* e la *sensibilità* di ogni strumento di misura (capitolo 4): sono le informazioni da cui dipendono le incertezze.
3. **Procedimento.** Le operazioni nell'ordine in cui sono state eseguite, descritte in modo che un compagno possa ripeterle senza chiederti nulla; uno schema dell'apparato vale spesso più di molte righe. Qui si dichiarano le variabili indipendente, dipendente e controllate.
4. **Dati.** Le misure così come sono state lette, in una tabella con grandezze, unità e incertezze nell'intestazione. I **dati grezzi** non si correggono e non si cancellano: se una misura ti sembra sbagliata, la lasci nella tabella e spieghi perché la escludi dall'elaborazione.
5. **Elaborazione.** I calcoli (basta svolgerne per esteso uno per tipo), i valori medi con le incertezze, le colonne di grandezze calcolate, il grafico con le barre d'errore e, se serve, la pendenza ricavata con le rette di massima e minima pendenza.
6. **Conclusioni.** La risposta alla domanda dello scopo, con il risultato scritto nella forma (valore ± incertezza) unità, e la sua discussione critica.

Il procedimento si scrive al passato, in forma impersonale («la massa è stata misurata con…») oppure alla prima persona plurale («abbiamo misurato…»): l'importante è scegliere una forma e mantenerla. Le frasi devono essere brevi e dire qualcosa di preciso: «abbiamo aspettato che la molla smettesse di oscillare prima di ogni lettura» è un'informazione utile, «abbiamo eseguito l'esperimento con attenzione» non lo è.

5.7.2 Rielaborare in modo critico

Le conclusioni sono la parte più importante della relazione, e la più difficile. Non basta ricopiare il risultato finale: bisogna *giudicarlo*. Tre domande guidano il lavoro.

- **Il risultato risponde allo scopo?** Se volevi verificare una proporzionalità diretta, devi dire se i dati la confermano entro le incertezze, e con quale criterio: il rapporto costante, la retta per l'origine che attraversa tutte le barre.
- **È compatibile con ciò che ci si aspettava?** Confronta il risultato con un valore di riferimento (una tabella, una previsione, la misura di un altro gruppo) usando il criterio del capitolo 4: gli intervalli di incertezza si sovrappongono?

- **Da dove vengono le differenze, e come si potrebbe fare meglio?** Indica quale misura pesa di più sull'incertezza finale e quali errori sistematici potrebbero aver spostato il risultato, e in quale verso. Poi proponi un miglioramento concreto dell'esperimento.

Un risultato non compatibile con le attese non è un fallimento da nascondere: è un'informazione. A volte rivela un errore sistematico che non avevi previsto, a volte un'idealizzazione che nel tuo esperimento non vale, a volte che l'oggetto misurato non era quello che credevi. Ciò che conta è discuterlo con onestà, senza ritoccare i dati per farli «tornare».

ERRORE FREQUENTE

«La differenza è dovuta a errori umani»

È la frase più comune nelle conclusioni, e non spiega nulla. Quale errore? In quale misura? In quale verso sposta il risultato? Una buona discussione dice, per esempio: «il tempo di reazione nell'avviare e fermare il cronometro, dell'ordine di un decimo di secondo, pesa molto sulle durate brevi; per ridurne l'effetto abbiamo cronometrato dieci oscillazioni invece di una». Altri errori da evitare: scrivere il risultato con tutte le cifre della calcolatrice, dimenticare unità e incertezza, dichiarare «sbagliato» un esperimento solo perché il valore trovato non coincide esattamente con quello delle tabelle.

ESEMPIO SVOLTO

Le conclusioni della relazione sulla molla

Problema. Un gruppo ha raccolto i dati della Tabella 5.1 e ha ricavato, con le rette di massima e minima pendenza, $\Delta L/m$ = (0,0392 ± 0,0016) cm/g. Un altro gruppo, con una molla dello stesso tipo, ha trovato (0,0410 ± 0,0012) cm/g. Scrivi le conclusioni della relazione.

Risposta allo scopo. «Fra 50 g e 300 g l'allungamento della molla è direttamente proporzionale alla massa appesa, entro le incertezze: il rapporto $\Delta L/m$ resta fra 0,039 e 0,040 cm/g e una retta per l'origine attraversa tutte le barre d'errore. La pendenza vale (0,0392 ± 0,0016) cm/g, con un'incertezza relativa del 4%.»

Confronto. «Il nostro intervallo va da 0,0376 a 0,0408 cm/g, quello dell'altro gruppo da 0,0398 a 0,0422 cm/g: i due intervalli si sovrappongono fra 0,0398 e 0,0408 cm/g, quindi le misure sono compatibili. Entro la precisione dei due esperimenti, le molle si comportano allo stesso modo.»

Discussione. «L'incertezza viene quasi tutta dalla lettura della posizione della molla sul righello (± 0,2 cm), che pesa di più sugli allungamenti piccoli: con 50 g è il 10% della misura. Per migliorare si potrebbero usare carichi maggiori, restando sotto il limite di elasticità, oppure fissare all'estremo della molla un indice sottile da leggere sul righello. Non abbiamo provato carichi oltre 300 g: le conclusioni valgono solo nell'intervallo misurato.»

Con questo capitolo si chiude la prima parte del libro. Ora sai misurare, stimare l'incertezza di una misura, organizzare i dati, riconoscere in essi una legge e raccontare un esperimento in

una relazione: sono gli strumenti che userai in tutto il resto del corso. Nella seconda parte li metteremo al lavoro sulle forze, e la prima legge che incontreremo, quella della molla, ha già fatto capolino in queste pagine.

SINTESI

- Una tabella di dati riporta nell'intestazione di ogni colonna simbolo e unità della grandezza, e l'incertezza; la variabile indipendente va nella prima colonna.
- In un grafico cartesiano la variabile indipendente va sull'asse delle ascisse, quella dipendente sull'asse delle ordinate; gli assi portano grandezza, unità e una scala comoda.
- Ogni punto si disegna con la sua barra d'errore, lunga il doppio dell'incertezza assoluta.
- La retta di miglior accordo passa il più vicino possibile a tutti i punti e attraversa tutte le barre; le rette di massima e minima pendenza danno l'incertezza della pendenza.
- La pendenza di una retta è $\Delta y/\Delta x$ fra due punti della retta e ha un'unità di misura: il rapporto fra le unità dei due assi.
- Proporzionalità diretta, $y = k\,x$: rapporto costante, retta per l'origine.
- Dipendenza lineare, $y = m\,x + q$: retta che interseca l'asse verticale in q; non è una proporzionalità diretta se $q \neq 0$.
- Proporzionalità inversa, $y = k/x$: prodotto costante, ramo d'iperbole; decrescente non basta.
- Proporzionalità quadratica, $y = k\,x^2$: y/x^2 costante, ramo di parabola; inversa al quadrato, $y = k/x^2$.
- Linearizzare significa scegliere le grandezze sugli assi ($1/x$, x^2, ...) in modo che una legge ipotizzata dia una retta per l'origine.
- Interpolare (dentro l'intervallo delle misure) è affidabile; estrapolare (fuori) è rischioso, perché ogni legge ha un dominio di validità.
- Le formule inverse si ricavano con i principi di equivalenza; le unità di misura nei calcoli permettono di controllarle.
- Una relazione di laboratorio comprende scopo, materiali e strumenti, procedimento, dati, elaborazione e conclusioni; le conclusioni danno il risultato con la sua incertezza, lo confrontano con un valore di riferimento e discutono in modo concreto le cause delle differenze.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un grafico cartesiano costruito secondo le convenzioni, la variabile indipendente si riporta:
   - **A.** sull'asse orizzontale
   - **B.** sull'asse verticale
   - **C.** sull'asse che ha la scala più comoda
   - **D.** indifferentemente sull'uno o sull'altro asse

2. ● Due grandezze sono direttamente proporzionali quando:
   - **A.** la loro somma è costante
   - **B.** al crescere dell'una cresce anche l'altra
   - **C.** il loro rapporto è costante
   - **D.** il loro prodotto è costante

3. ●● Il grafico della relazione $y = 3x + 2$ è:
   - **A.** una retta per l'origine con pendenza 2
   - **B.** una retta con pendenza 3 che interseca l'asse y nel punto 2
   - **C.** un ramo d'iperbole
   - **D.** un ramo di parabola

4. ● Se y è inversamente proporzionale a x e x triplica, y:
   - **A.** triplica
   - **B.** diventa un nono
   - **C.** non cambia
   - **D.** diventa un terzo

5. ●● Se $y = k\,x^2$ e x raddoppia, y:
   - **A.** quadruplica
   - **B.** raddoppia
   - **C.** si dimezza
   - **D.** diventa un quarto

6. ●● La pendenza della retta della Figura 5.1 si misura in:
   - **A.** cm
   - **B.** g
   - **C.** cm/g
   - **D.** g/cm

7. ● Per linearizzare una relazione del tipo $y = k/x$ conviene riportare:
   A. y in funzione di x^2
   B. x in funzione di y^2
   C. $x \cdot y$ in funzione di x
   D. y in funzione di $1/x$

8. ●● Estrapolare significa:
   A. calcolare un valore compreso fra due dati misurati
   B. prevedere un valore al di fuori dell'intervallo delle misure
   C. eliminare dalla tabella i dati che sembrano sbagliati
   D. disegnare le barre d'errore dei punti

9. ● Dalla definizione di densità $d = m/V$, la formula inversa per il volume è:
   A. $V = m \cdot d$
   B. $V = d/m$
   C. $V = m/d$
   D. $V = m - d$

Vero o falso

10. ● Se due grandezze aumentano insieme, allora sono direttamente proporzionali. V / F

11. ● In una proporzionalità inversa il prodotto delle due grandezze è costante. V / F

12. ● Il grafico di una dipendenza lineare $y = m\,x + q$ con $q \neq 0$ non passa per l'origine. V / F

13. ●● In un grafico di grandezze fisiche la pendenza di una retta è un numero puro, senza unità di misura. V / F

14. ●● Se una grandezza diminuisce quando l'altra aumenta, le due grandezze sono inversamente proporzionali. V / F

Applicare

15. ● Alle misure $x = 2, 4, 6, 8$ corrispondono, nell'ordine, i valori $y = 5, 10, 15, 20$. Che tipo di relazione lega y a x? Scrivi la legge.

16. ● Completa: se $y = 0{,}5 \cdot x^2$, per $x = 4$ si ha $y =$ _____ e per $x = 8$ si ha $y =$ _____ ; il rapporto fra i due valori di y è _____ .

17. ●● Un contenitore viene posto su una bilancia e riempito con quantità crescenti di un liquido; la Figura 5.8 riporta la massa totale in funzione del volume di liquido. a) Leggi sul grafico la massa del contenitore vuoto. b) Calcola la pendenza della retta e spiega che cosa rappresenta. c) Con la Tabella A.6 dell'Appendice, individua il liquido. d) Scrivi la legge.

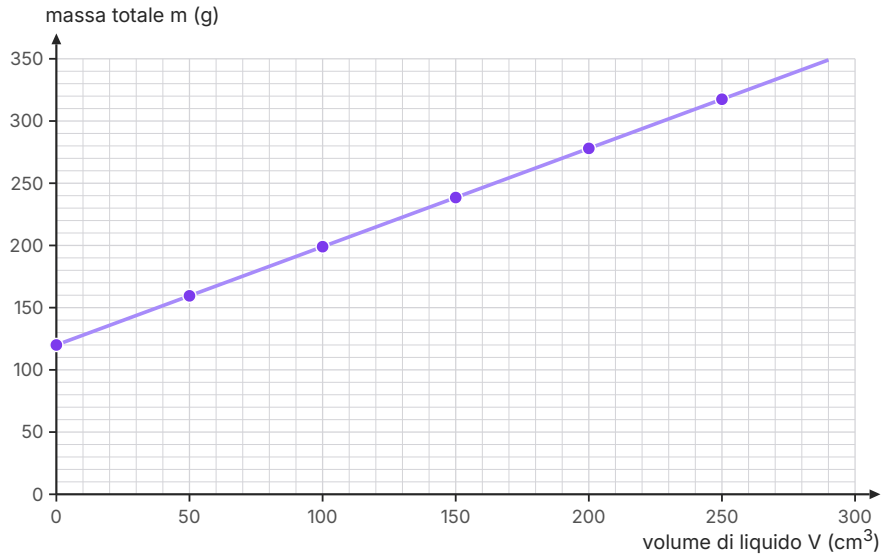

Figura 5.8 Massa totale (contenitore più liquido) in funzione del volume di liquido versato, per l'esercizio 17.

18. ● Comprimendo l'aria in una siringa a temperatura costante si ottengono le coppie (V; p): (10 cm^3; 200 kPa), (20 cm^3; 100 kPa), (25 cm^3; 80 kPa), (40 cm^3; 50 kPa). Verifica che p e V sono inversamente proporzionali e calcola p per $V = 16$ cm^3.

19. ●● Una bottiglia contiene 2,5 L di olio d'oliva (densità 0,91 g/cm^3). Ricava dalla definizione di densità la formula per la massa e calcolala, in grammi e in chilogrammi.

20. ●● Una molla lunga a riposo 8,0 cm segue la legge $L = 8{,}0\text{ cm} + 0{,}050\text{ cm/g} \cdot m$. a) Quanto è lunga con una massa di 120 g? b) Quale massa la porta a 11,5 cm?

21. ● La relazione fra gradi Fahrenheit e gradi Celsius è $T_F = 1{,}8 \cdot T_C + 32$. a) Converti 25 °C in °F. b) Si tratta di una proporzionalità diretta? Giustifica confrontando i valori per 10 °C e 20 °C.

22. ● A 1,0 m da una piccola lampadina un sensore misura un'illuminazione di 360 unità. Sapendo che l'illuminazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, quale valore misurerà a 2,0 m? E a 3,0 m?

Problemi

23. ●● Una molla viene caricata con masse crescenti e se ne misura la lunghezza totale: m = 0, 50, 100, 150, 200, 250 g; L = 15,0; 16,6; 18,1; 19,8; 21,4; 23,0 cm. a) Che tipo di relazione lega L a m? b) Trova pendenza e intercetta e scrivi la legge. c) Prevedi la lunghezza con 175 g. d) Quale massa porta la molla a 20,0 cm?

24. ●● Un gruppo misura il periodo di un pendolo per quattro lunghezze: L = 0,25; 0,50; 1,00; 2,00 m; T = 1,00; 1,42; 2,01; 2,84 s. a) Mostra, con un calcolo, che T non è direttamente proporzionale a L. b) Verifica che T^2 è direttamente proporzionale a L e trova la costante con la sua unità. c) Quanto deve essere lungo un pendolo con periodo 2,00 s?

25. ●●● Per misurare la densità di un materiale si misurano massa e volume di cinque campioni e si riportano i dati in un grafico massa–volume con le barre d'errore. Il primo punto è V = 10 cm^3, m = (27 ± 1) g; l'ultimo è V = 50 cm^3, m = (135 ± 1) g (incertezza sui volumi trascurabile), e le rette che uniscono gli estremi opposti delle loro barre attraversano anche le barre intermedie. a) Calcola le pendenze massima e minima. b) Scrivi la densità con la sua incertezza. c) Con la Tabella A.6 dell'Appendice, di quale materiale potrebbe trattarsi?

26. ●● Una cisterna viene svuotata in 45 min da 2 pompe uguali. a) Il tempo di svuotamento e il numero di pompe sono direttamente o inversamente proporzionali? b) Quanto tempo serve con 3 pompe? E con 5? c) Quante pompe servono per svuotarla in 15 min?

27. ●●● Una biglia lasciata ferma su una guida inclinata percorre 0,15 m nel primo secondo; la distanza percorsa è direttamente proporzionale al quadrato del tempo. a) Scrivi la legge $s = k\,t^2$ con il valore di k e la sua unità. b) Quale distanza ha percorso dopo 2,0 s? c) Dopo quanto tempo ha percorso 2,4 m?

28. ●●● Un cubetto di alluminio di lato 2,0 cm ha massa 21,6 g. a) Calcola la densità dell'alluminio. b) Quale volume ha un cubo dello stesso materiale con massa 1,0 kg? c) Quanto misura il suo lato? (Usa le formule inverse.)

29. ●●● La molla della Tabella 5.1 segue la legge $\Delta L = 0{,}039\ \text{cm/g} \cdot m$, verificata fra 50 g e 300 g. a) Prevedi l'allungamento con 200 g e con 2,0 kg. b) Quale delle due previsioni è un'interpolazione e quale un'estrapolazione? c) Ti fidi della seconda? Che cosa faresti per controllarla?

Ragionare e argomentare

30. ●● Trova l'errore. Con i dati x = 1, 2, 3, 4 e y = 10, 8, 6, 4, uno studente scrive: «y diminuisce quando x aumenta, quindi y è inversamente proporzionale a x». Spiega perché sbaglia e trova la legge corretta.

31. ●●● Progetta un esperimento per stabilire se l'allungamento di un elastico è direttamente proporzionale alla massa appesa. Indica le variabili indipendente, dipendente e controllate, gli strumenti, come costruiresti la tabella e il grafico e quale criterio useresti per decidere.

32. ●● Un sito pubblica un grafico a barre in cui gli iscritti a una palestra passano da 96 a 98, con l'asse verticale che parte da 95. La seconda barra appare alta il triplo della prima. Calcola l'aumento percentuale reale e spiega perché il grafico è ingannevole; come andrebbe disegnato?

33. ● Elenca nell'ordine le parti di una relazione di laboratorio e scrivi per ciascuna, in una riga, che cosa contiene.

34. ●● Trova gli errori. Nelle conclusioni di una relazione si legge: «La densità del blocchetto è 2,746153846 g/cm^3. Il valore delle tabelle per l'alluminio è 2,70 g/cm^3, quindi l'esperimento è sbagliato. La differenza è dovuta a errori umani». Individua almeno tre difetti e riscrivi la conclusione, sapendo che l'incertezza assoluta della densità è 0,08 g/cm^3.

35. ●●● Un gruppo vuole verificare che un cilindretto sia di rame (densità 8,96 g/cm^3). Misura m = (89,6 ± 0,1) g con la bilancia e V = (10,5 ± 0,5) cm^3 per immersione in un cilindro graduato. a) Calcola la densità con la sua incertezza. b) Il risultato è compatibile con il rame? c) Scrivi la discussione della relazione: indica due possibili cause della differenza, dicendo in quale verso sposterebbero il risultato, e un modo per migliorare la misura.

PER APPROFONDIRE

- [TAY] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: i capitoli sui grafici e sull'adattamento di una retta ai dati, con il metodo dei minimi quadrati che sostituisce la retta tracciata a occhio.
- [GAL] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: la Giornata terza descrive l'esperimento del piano inclinato e la legge dei quadrati dei tempi.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: gli esempi di lettura dei grafici nei primi capitoli di cinematica, utili anche come anticipazione della parte V.

Glossario del capitolo

Asse delle ascisse
L'asse orizzontale di un grafico cartesiano; per convenzione vi si riporta la variabile indipendente.

Asse delle ordinate
L'asse verticale di un grafico cartesiano; per convenzione vi si riporta la variabile dipendente.

Barra d'errore
Segmento centrato su un punto di un grafico, lungo il doppio dell'incertezza assoluta, che rappresenta l'intervallo in cui cade la misura.

Costante di proporzionalità
Il numero k, con la sua unità di misura, che compare in una legge di proporzionalità (diretta, inversa o quadratica).

Dati grezzi
Le misure così come sono state lette dagli strumenti, prima di ogni calcolo; in una relazione non si correggono e non si cancellano.

Dipendenza lineare
Relazione $y = mx + q$; il grafico è una retta di pendenza m che interseca l'asse verticale in q. Se $q \neq 0$ non è una proporzionalità diretta.

Estrapolazione
Uso di una legge per prevedere un valore fuori dall'intervallo delle misure; è rischiosa perché la legge potrebbe non valere più.

Formula inversa
Espressione ottenuta risolvendo una formula rispetto a una delle grandezze che contiene, con i principi di equivalenza delle equazioni.

Grafico cartesiano
Rappresentazione di coppie di valori di due grandezze come punti di un piano individuati da due assi perpendicolari, ciascuno con la sua grandezza, unità e scala.

Intercetta
Il valore q di y quando $x = 0$ in una dipendenza lineare; è l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse verticale.

Interpolazione
Uso di una legge per calcolare un valore compreso nell'intervallo delle misure; di solito è affidabile.

Legge empirica
Relazione fra grandezze ricavata direttamente dalle misure, senza ancora una spiegazione teorica.

Linearizzazione
Scelta delle grandezze da riportare sugli assi (per esempio $1/x$ o x^2) in modo che una legge ipotizzata dia come grafico una retta per l'origine.

Pendenza
Rapporto $\Delta y/\Delta x$ fra le variazioni delle due grandezze lungo una retta; ha come unità il rapporto fra le unità dei due assi.

Proporzionalità diretta
Relazione $y = kx$ fra due grandezze il cui rapporto è costante; il grafico è una retta che passa per l'origine.

Proporzionalità inversa
Relazione $y = k/x$ fra due grandezze il cui prodotto è costante; il grafico è un ramo di iperbole equilatera.

Proporzionalità inversa al quadrato
Relazione $y = k/x^2$: se x raddoppia, y diventa un quarto. La seguono, per esempio, l'illuminazione prodotta da una piccola sorgente e la forza di gravità.

Proporzionalità quadratica
Relazione $y = kx^2$, in cui y è direttamente proporzionale al quadrato di x; il grafico è un ramo di parabola con vertice nell'origine.

Relazione di laboratorio
Testo che documenta un esperimento: scopo, materiali e strumenti, procedimento, dati, elaborazione e conclusioni, in modo che altri possano giudicarlo e ripeterlo.

Retta di miglior accordo
Retta tracciata il più vicino possibile a tutti i punti di un grafico, attraverso tutte le barre d'errore, che rappresenta l'andamento dei dati.

Rette di massima e minima pendenza
La più ripida e la meno ripida fra le rette che attraversano tutte le barre d'errore; la media delle loro pendenze dà la pendenza, la semidispersione la sua incertezza.

Tabella di dati
Disposizione delle misure in righe e colonne; ogni colonna riporta nell'intestazione simbolo e unità della grandezza e, se è la stessa per tutte le misure, l'incertezza.

Soluzioni

1. A. Per convenzione la variabile indipendente (quella scelta dallo sperimentatore) va sull'asse delle ascisse.

2. C. Proporzionalità diretta significa y/x costante; B descrive solo una grandezza crescente, D la proporzionalità inversa.

3. B. È una dipendenza lineare $y = m\,x + q$ con pendenza $m = 3$ e intercetta $q = 2$.

4. D. Il prodotto $x\,y$ è costante: se x viene moltiplicata per 3, y viene divisa per 3.

5. A. $k(2x)^2 = 4k\,x^2$: y quadruplica.

6. C. La pendenza è $\Delta(\Delta L)/\Delta m$: unità dell'ordinata diviso unità dell'ascissa, cioè cm/g.

7. D. Se $y = k \cdot (1/x)$, il grafico di y in funzione di $1/x$ è una retta per l'origine con pendenza k.

8. B. Estrapolare è prevedere fuori dall'intervallo delle misure; A descrive l'interpolazione.

9. C. Da $d = m/V$: moltiplicando per V si ha $d\,V = m$, poi dividendo per d: $V = m/d$.

10. F. Possono essere legate da una dipendenza lineare con $q \neq 0$ o da una legge quadratica; serve che il rapporto y/x sia costante.

11. V. È la definizione: $x \cdot y = k$.

12. V. Per $x = 0$ si ha $y = q \neq 0$: la retta interseca l'asse verticale sopra o sotto l'origine.

13. F. La pendenza ha come unità il rapporto fra le unità dei due assi (per esempio cm/g o s^2/m).

14. F. Occorre che il prodotto $x\,y$ sia costante; una dipendenza lineare con pendenza negativa, per esempio, è decrescente ma non è una proporzionalità inversa.

15. Il rapporto y/x vale sempre 2,5 (5/2 = 10/4 = 15/6 = 20/8): proporzionalità diretta, $y = 2{,}5\,x$.

16. $y(4) = 0{,}5 \times 16 = 8$; $y(8) = 0{,}5 \times 64 = 32$; rapporto 32/8 = 4 (raddoppiando x, y quadruplica).

17. a) Per $V = 0$ si legge $m = 120$ g: è la massa del contenitore vuoto. b) Per $V = 250\ \text{cm}^3$ si legge $m \approx 318$ g; pendenza = $(318\ \text{g} - 120\ \text{g})/(250\ \text{cm}^3 - 0) \approx 0{,}79\ \text{g/cm}^3$: è la massa di ogni cm^3 di liquido, cioè la densità del liquido. c) $0{,}79\ \text{g/cm}^3 = 790\ \text{kg/m}^3$: alcol etilico (789 kg/m^3). d) $m = 120\ \text{g} + 0{,}79\ \text{g/cm}^3 \cdot V$ (dipendenza lineare, non proporzionalità diretta).

18. Prodotti $p\,V$: $10 \times 200 = 20 \times 100 = 25 \times 80 = 40 \times 50 = 2000\ \text{kPa}\cdot\text{cm}^3$, costanti: proporzionalità inversa. $p = 2000\ \text{kPa}\cdot\text{cm}^3 / 16\ \text{cm}^3 = 125$ kPa.

19. $m = d\,V = 0{,}91\ \text{g/cm}^3 \times 2500\ \text{cm}^3 = 2275\ \text{g} \approx 2{,}3 \times 10^3$ g $= 2{,}3$ kg (due cifre significative, come i dati).

20. a) $L = 8{,}0\ \text{cm} + 0{,}050\ \text{cm/g} \times 120\ \text{g} = 8{,}0\ \text{cm} + 6{,}0\ \text{cm} = 14{,}0$ cm. b) $m = (L - 8{,}0\ \text{cm})/(0{,}050\ \text{cm/g}) = 3{,}5\ \text{cm} / (0{,}050\ \text{cm/g}) = 70$ g.

21. a) $T_F = 1{,}8 \times 25 + 32 = 77$ °F. b) No: 10 °C → 50 °F, 20 °C → 68 °F; raddoppiando i gradi Celsius i Fahrenheit non raddoppiano (il rapporto non è costante) perché l'intercetta 32 è diversa da zero. È una dipendenza lineare.

22. A distanza doppia l'illuminazione diventa un quarto: 360/4 = 90 unità; a distanza tripla un nono: 360/9 = 40 unità.

23. a) Gli aumenti di lunghezza ogni 50 g sono 1,6; 1,5; 1,7; 1,6; 1,6 cm, circa costanti, ma per $m = 0$ la lunghezza non è nulla: dipendenza lineare. b) Pendenza ≈ $(23{,}0\ \text{cm} - 15{,}0\ \text{cm})/(250\ \text{g} - 0\ \text{g}) = 0{,}032$ cm/g; intercetta $q = 15{,}0$ cm (lunghezza a riposo); $L = 15{,}0\ \text{cm} + 0{,}032\ \text{cm/g} \cdot m$. c) $L = 15{,}0\ \text{cm} + 0{,}032\ \text{cm/g} \times 175\ \text{g} = 15{,}0\ \text{cm} + 5{,}6\ \text{cm} = 20{,}6$ cm. d) $m = (20{,}0\ \text{cm} - 15{,}0\ \text{cm})/(0{,}032\ \text{cm/g}) \approx 156\ \text{g} \approx 1{,}6 \times 10^2$ g.

24. a) $T/L = 4{,}00$; 2,84; 2,01; 1,42 s/m: non è costante. b) $T^2 = 1{,}00$; 2,02; 4,04; 8,07 s^2; $T^2/L = 4{,}00$; 4,03; 4,04; 4,03 s^2/m, costante entro gli arrotondamenti: $T^2 = 4{,}0\ s^2/\text{m} \cdot L$. c) $L = T^2/(4{,}0\ s^2/\text{m}) = 4{,}00\ s^2 / (4{,}0\ s^2/\text{m}) \approx 1{,}0$ m (con la costante 4,03 s^2/m si ottiene 0,99 m).

25. a) Massima: (136 g − 26 g)/(50 cm^3 − 10 cm^3) = 110 g / 40 cm^3 = 2,75 g/cm^3; minima: (134 g − 28 g)/40 cm^3 = 106 g / 40 cm^3 = 2,65 g/cm^3. b) d = (2,75 + 2,65)/2 = 2,70 g/cm^3, e_a = (2,75 − 2,65)/2 = 0,05 g/cm^3: d = (2,70 ± 0,05) g/cm^3. c) 2,70 g/cm^3 = 2700 kg/m^3: alluminio.

26. a) Inversamente proporzionali: con più pompe il tempo diminuisce nello stesso rapporto; il prodotto $n \cdot t$ = 2 × 45 min = 90 min è costante. b) Con 3 pompe: 90/3 = 30 min; con 5 pompe: 90/5 = 18 min. c) n = 90 min / 15 min = 6 pompe.

27. a) $k = s/t^2$ = 0,15 m / (1,0 s)^2 = 0,15 m/s^2; s = 0,15 $m/s^2 \cdot t^2$. b) s = 0,15 m/s^2 × (2,0 s)^2 = 0,60 m (tempo doppio, distanza quadrupla). c) $t^2 = s/k$ = 2,4 m / (0,15 m/s^2) = 16 s^2, quindi t = 4,0 s.

28. a) V = (2,0 cm)^3 = 8,0 cm^3; d = 21,6 g / 8,0 cm^3 = 2,7 g/cm^3. b) $V = m/d$ = 1000 g / (2,7 g/cm^3) ≈ 370 cm^3 = 3,7 × 10^2 cm^3. c) l è il numero che elevato al cubo dà 370 cm^3: l ≈ 7,2 cm (controllo: 7,2^3 ≈ 373).

29. a) 0,039 cm/g × 200 g ≈ 7,8 cm; 0,039 cm/g × 2000 g = 78 cm. b) 200 g è dentro l'intervallo 50–300 g: interpolazione; 2,0 kg è molto fuori: estrapolazione. c) Non ci si può fidare: con carichi grandi la molla può superare il limite di elasticità e deformarsi in modo permanente (Figura 5.7); 78 cm è anche un allungamento poco plausibile per una molla da laboratorio. Per controllare si dovrebbe misurare con carichi crescenti oltre 300 g, verificando a ogni passo che la molla torni alla lunghezza iniziale.

30. I prodotti $x\,y$ valgono 10, 16, 18, 16: non sono costanti, quindi non è una proporzionalità inversa. Le variazioni $\Delta y/\Delta x$ valgono invece sempre −2: è una dipendenza lineare con pendenza negativa. Prolungando la retta fino a x = 0 si trova q = 12: y = 12 − 2x.

31. Traccia di risposta: variabile indipendente la massa appesa (masse campione da 20 o 50 g); variabile dipendente l'allungamento, misurato con un righello come differenza fra la lunghezza con il carico e quella iniziale; variabili controllate lo stesso elastico, lo stesso punto di aggancio, la stessa temperatura, il tempo di attesa prima della lettura. Tabella con colonne m (g), ΔL (cm) ± incertezza, $\Delta L/m$; grafico di ΔL in funzione di m con barre d'errore. Criterio: c'è proporzionalità diretta se esiste una retta per l'origine che attraversa tutte le barre (o se $\Delta L/m$ è costante entro le incertezze). Ripetere le letture togliendo le masse per controllare che l'elastico torni come prima (un elastico di gomma spesso *non* segue una proporzionalità diretta: il risultato va accettato qualunque esso sia).

32. Aumento reale: (98 − 96)/96 ≈ 0,021, cioè circa il 2%. Con l'asse che parte da 95, le barre visibili sono alte 1 e 3 unità, quindi la seconda appare tripla. Il grafico andrebbe disegnato con l'asse verticale che parte da zero, oppure con un'interruzione dell'asse ben segnalata e i valori scritti sulle barre.

33. Titolo e scopo: la domanda a cui si vuole rispondere. Materiali e strumenti: che cosa si usa, con portata e sensibilità degli strumenti. Procedimento: le operazioni eseguite, in ordine, con uno schema e le variabili indipendente, dipendente e controllate. Dati: le misure lette, in tabella con unità e incertezze. Elaborazione: calcoli, valori medi, incertezze, grafici, pendenze. Conclusioni: il risultato con la sua incertezza, il confronto con un valore di riferimento e la discussione delle differenze.

34. Difetti: il risultato ha tutte le cifre della calcolatrice e non riporta l'incertezza; il confronto con il valore delle tabelle è fatto senza tenere conto dell'incertezza; «errori umani» non indica né quale errore né in quale verso agisce. Con e_a = 0,08 g/cm^3 il risultato si arrotonda ai centesimi: d = (2,75 ± 0,08) g/cm^3, cioè da 2,67 a 2,83 g/cm^3. L'intervallo contiene 2,70 g/cm^3: la misura è *compatibile* con l'alluminio e l'esperimento è riuscito. Una conclusione corretta: «La densità del blocchetto è (2,75 ± 0,08) g/cm^3, compatibile con il valore di riferimento dell'alluminio, 2,70 g/cm^3; per ridurre l'incertezza si dovrebbe migliorare la misura che ha l'incertezza relativa maggiore».

35. a) d = 89,6 g / 10,5 cm^3 ≈ 8,53 g/cm^3; e_r = 0,1/89,6 + 0,5/10,5 ≈ 0,001 + 0,048 ≈ 0,049; e_a ≈ 0,049 × 8,53 g/cm^3 ≈ 0,4 g/cm^3. Quindi d = (8,5 ± 0,4) g/cm^3. b) L'intervallo va da 8,1 a 8,9 g/cm^3 e non contiene 8,96 g/cm^3: il risultato non è compatibile con il rame, anche se di poco. c) Traccia di risposta: quasi tutta l'incertezza viene dal volume (4,8% contro 0,1%

della massa). Una bollicina d'aria rimasta attaccata al cilindretto farebbe misurare un volume troppo grande, e quindi una densità troppo piccola: è proprio il verso osservato. Un'altra possibilità è che il cilindretto non sia di rame puro ma di una lega come l'ottone, che ha densità minore (circa 8,4–8,7 g/cm^3). Per decidere si dovrebbe ripetere la misura con un cilindro graduato più stretto e più finemente graduato, controllando che non restino bolle sull'oggetto; se il risultato resta lo stesso, la seconda ipotesi diventa la più probabile.