CAPITOLO

4

La misura e la sua incertezza

Una misura senza incertezza non è più precisa: è soltanto incompleta.

OBIETTIVI

1. Descrivere uno strumento con portata, sensibilità, prontezza e accuratezza, e leggere righello, calibro ventesimale, cronometro e bilancia.
2. Distinguere gli errori casuali da quelli sistematici e la precisione dall'accuratezza.
3. Ricavare l'incertezza di una misura singola e di una serie di misure ripetute.
4. Scrivere correttamente un risultato e calcolarne l'incertezza relativa e percentuale.
5. Propagare le incertezze in somme, differenze, prodotti, quozienti e potenze.
6. Stabilire se due misure della stessa grandezza sono compatibili.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Gli strumenti di misura 2
4.2 Gli errori di misura 6
4.3 L'incertezza di una misura 8
4.4 Incertezza relativa e compatibilità 12
4.5 La propagazione delle incertezze 14

Fisica 1 · Parte I · Misurare il mondo · versione 1.0
Capitolo 4: La misura e la sua incertezza · pagine 91–114 del volume completo · estratto per lo studio

Prova a misurare la lunghezza del tuo banco con un righello, poi chiedi a un compagno di fare lo stesso. Quasi certamente otterrete due numeri un po' diversi: 118,6 cm e 118,9 cm, per esempio. Chi ha sbagliato? Forse nessuno. Il righello ha tacche di un millimetro e non permette di vedere di meno; il bordo del banco non è un segmento perfetto; per misurare l'intero banco avete dovuto spostare il righello più volte, e ogni spostamento aggiunge un piccolo scarto. Ogni misura, anche la più accurata, porta con sé un margine di dubbio.

Nei capitoli precedenti hai imparato che una misura è un numero accompagnato da un'unità, e che le cifre significative indicano quanto finemente è noto quel numero. In questo capitolo facciamo un passo in più: impariamo a dire *quanto* ci fidiamo di una misura, con un numero preciso, l'*incertezza*. È questo numero che permette di confrontare il lavoro di due gruppi di laboratorio, di decidere se un esperimento conferma o smentisce una legge, di capire se un pezzo meccanico è stato costruito entro le tolleranze richieste. Senza incertezza, una misura non si può davvero usare.

4.1 Gli strumenti di misura

Misurare significa confrontare una grandezza con la sua unità, e lo strumento è il mezzo che rende possibile questo confronto. Un righello confronta una lunghezza con il millimetro, un cronometro conta secondi e loro frazioni, una bilancia confronta una massa con masse campione o con la deformazione di un sensore tarato.

4.1.1 Strumenti analogici e digitali

In uno **strumento analogico** il risultato si legge osservando la posizione di un indice (una lancetta, il livello di un liquido, il bordo di un oggetto) rispetto a una scala graduata: il righello, il termometro a liquido, il cilindro graduato, il dinamometro a molla. In uno **strumento digitale** il risultato compare già sotto forma di cifre su un display: il cronometro del telefono, la bilancia elettronica, il multimetro. Lo strumento digitale sembra più «oggettivo» perché non richiede di interpretare una scala, ma anche lui ha limiti: mostra un numero finito di cifre, e l'ultima cifra è sempre arrotondata.

4.1.2 Le caratteristiche di uno strumento

Per scegliere lo strumento adatto a una misura bisogna conoscerne alcune caratteristiche.

- La **portata** è il valore massimo che lo strumento può misurare. Un righello da 30 cm ha portata 30 cm; una bilancia da cucina può avere portata 5 kg. Superare la portata non dà una misura sbagliata di poco: dà una misura priva di senso, e a volte danneggia lo strumento.

- La **sensibilità** (o *risoluzione*) è la più piccola variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare. In uno strumento analogico coincide di solito con il valore di una divisione della scala: 1 mm per un righello comune. In uno strumento digitale è il valore di un'unità dell'ultima cifra mostrata: se la bilancia indica 182,4 g, la sua sensibilità è 0,1 g.
- La **prontezza** indica quanto rapidamente lo strumento raggiunge la sua indicazione definitiva quando la grandezza cambia. Un termometro clinico digitale può richiedere decine di secondi per stabilizzarsi; un sensore di pressione elettronico risponde in una frazione di secondo.
- L'**accuratezza** di uno strumento descrive quanto le sue indicazioni si avvicinano al valore vero della grandezza. Dipende da come lo strumento è stato costruito e tarato, cioè confrontato con un campione di riferimento. Una bilancia con molte cifre sul display, ma tarata male, è sensibile e poco accurata.

Queste caratteristiche non vanno confuse. Una riga da muratore lunga 2 m ha grande portata e sensibilità modesta (1 mm); un calibro ha portata piccola (circa 15 cm) e sensibilità molto più fine. La Tabella 4.1 raccoglie valori tipici per gli strumenti che userai in laboratorio.

Tabella 4.1 Caratteristiche tipiche di alcuni strumenti da laboratorio scolastico (i valori variano da modello a modello).

Strumento	Tipo	Portata tipica	Sensibilità tipica
righello	analogico	30 cm	1 mm
metro a nastro	analogico	3–5 m	1 mm
calibro ventesimale	analogico	15 cm	0,05 mm
cilindro graduato da 100 mL	analogico	100 mL	1 mL
cronometro digitale	digitale	alcune ore	0,01 s
bilancia elettronica da laboratorio	digitale	200–600 g	0,1 g o 0,01 g

4.1.3 Leggere il righello e la bilancia

Con il righello si allinea uno degli estremi dell'oggetto con lo zero (o con un'altra tacca comoda) e si legge la tacca più vicina all'altro estremo. Nella Figura 4.1a l'estremo cade fra 47 mm e 48 mm, più vicino a 47 mm: scriviamo (47 ± 1) mm. Quel «± 1 mm» dice che la lunghezza vera sta, con buona sicurezza, fra 46 mm e 48 mm. Se l'oggetto non parte dallo zero bisogna fare due letture e sottrarle; vedremo nel paragrafo 4.5 che in questo caso l'incertezza raddoppia.

Durante la lettura l'occhio deve stare sulla verticale del punto da leggere. Se lo guardi di sbieco, l'estremo dell'oggetto (che non giace esattamente sul piano della scala) si proietta su una tacca diversa: è l'**errore di parallasse**, illustrato nella Figura 4.1b. Lo stesso accade con la lancetta di un dinamometro o con il livello dell'acqua in un cilindro graduato. Alcuni strumenti

analogici di qualità hanno uno specchietto sotto la lancetta: quando la lancetta copre il proprio riflesso, l'occhio è nella posizione giusta.

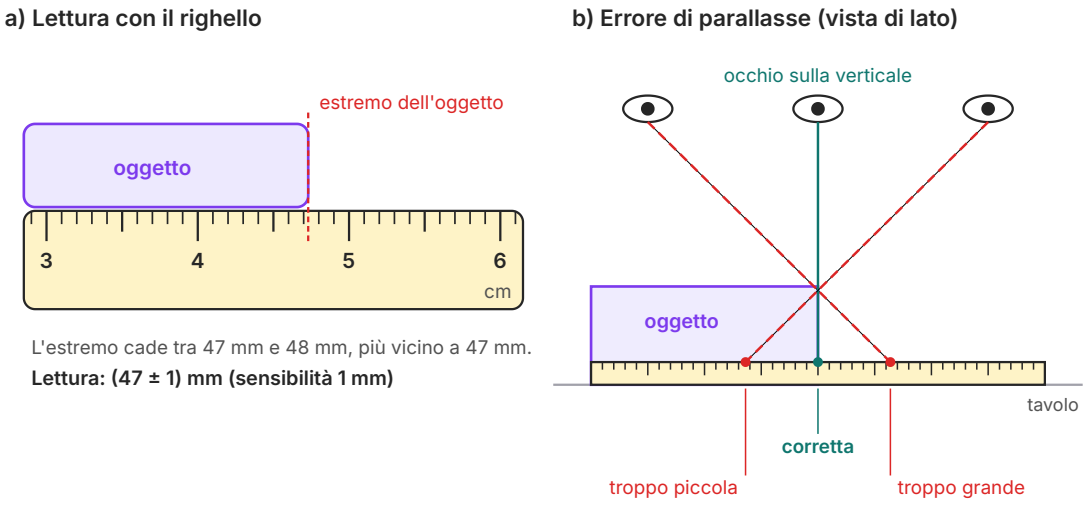

Figura 4.1 a) Lettura di una lunghezza con un righello millimetrato: si legge la tacca più vicina all'estremo e si assume come incertezza la sensibilità. b) Errore di parallasse, in una vista laterale: guardando l'estremo dell'oggetto da destra o da sinistra lo si proietta su tacche sbagliate; solo con l'occhio sulla verticale la lettura è corretta.

La bilancia elettronica è più semplice da leggere, ma va preparata. Prima di ogni serie di misure si controlla che, a piatto vuoto, il display indichi zero; se si usa un contenitore, lo si appoggia sul piatto e si preme il tasto *tara*, che azzera la lettura: da quel momento la bilancia mostra solo la massa aggiunta. Una bilancia che a vuoto segna 0,3 g sposterà di 0,3 g *tutte* le misure: è un esempio di errore di zero, di cui parleremo nel paragrafo 4.2.

4.1.4 Il calibro ventesimale e il nonio

Per misurare lo spessore di una moneta o il diametro di un filo il righello non basta: 1 mm di sensibilità su un oggetto di 2 mm significa un dubbio del 50%. Il **calibro** (o calibro a corsoio) è formato da un'asta con una scala millimetrata e da un cursore che scorre su di essa. L'oggetto si stringe fra un becco fisso e un becco mobile; sul cursore è incisa una seconda piccola scala, il **nonio**, che permette di leggere frazioni di millimetro.

Nel **calibro ventesimale** il nonio è diviso in 20 parti. Nel modello più diffuso le 20 divisioni occupano 39 mm, quindi ognuna è lunga 39/20 = 1,95 mm: 0,05 mm meno di 2 mm. Quando lo zero del nonio coincide con una tacca della scala fissa, la ventesima divisione del nonio coincide con la tacca 39 mm più avanti; tutte le altre sono sfasate. Se il cursore avanza di 0,05 mm, è

la tacca 1 del nonio ad allinearsi con una tacca della scala fissa; se avanza di 0,10 mm, la tacca 2; e così via. Ecco la regola di lettura.

1. Leggi sulla scala fissa i millimetri interi che precedono lo zero del nonio.
2. Cerca la tacca del nonio che si allinea meglio con una tacca qualsiasi della scala fissa; se è la tacca numero n, aggiungi $n \times 0{,}05$ mm.

Sul nonio, di solito, sono scritti i numeri da 0 a 10 ogni due tacche: indicano i decimi di millimetro. La tacca senza numero fra il 6 e il 7, per esempio, vale 0,65 mm. La sensibilità del calibro ventesimale è quindi 0,05 mm, e una misura singola si scrive con due cifre decimali in millimetri.

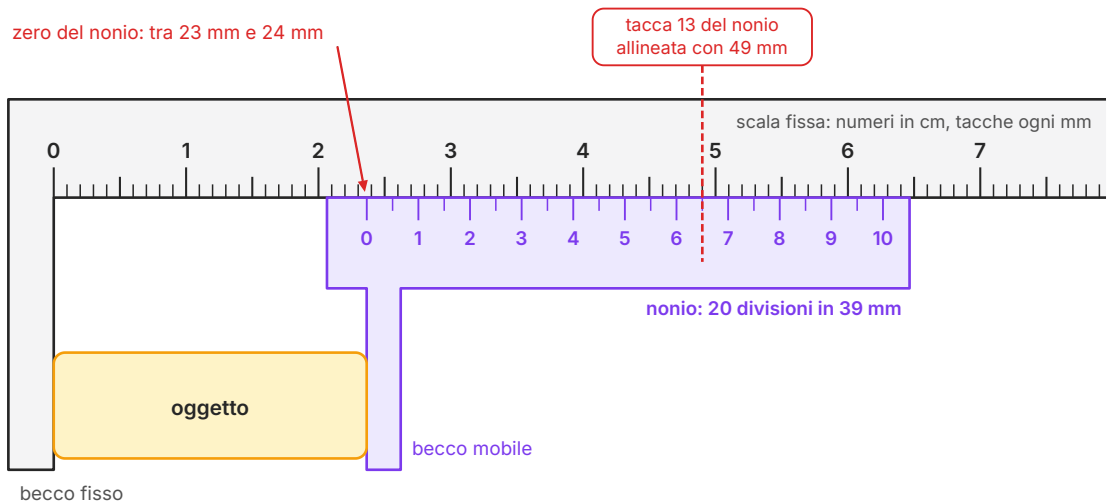

Figura 4.2 Schema semplificato di un calibro ventesimale (nonio di 20 divisioni in 39 mm). Lo zero del nonio cade fra 23 mm e 24 mm; la tacca 13 del nonio è allineata con la tacca 49 mm della scala fissa. Lettura: 23 mm + 13 × 0,05 mm = 23,65 mm.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il calibro della Figura 4.2

Millimetri interi. Lo zero del nonio si trova dopo la tacca 23 mm e prima della 24 mm: la parte intera è 23 mm.

Frazione di millimetro. La tacca del nonio meglio allineata con la scala fissa è la numero 13 (quella senza numero subito dopo il «6»). Aggiungiamo $13 \times 0{,}05$ mm = 0,65 mm.

Risultato. L = 23 mm + 0,65 mm = 23,65 mm, con incertezza pari alla sensibilità: $L = (23{,}65 \pm 0{,}05)$ mm.

Controllo. La tacca 13 del nonio si trova a $13 \times 1{,}95$ mm = 25,35 mm dallo zero del nonio, cioè a 23,65 mm + 25,35 mm = 49,00 mm sulla scala fissa: coincide davvero con una tacca intera.

APPROFONDIMENTO

Da dove viene il nome «nonio»

L'idea di leggere frazioni di divisione confrontando due scale leggermente diverse risale al Cinquecento. Il nome «nonio» viene da *Nonius*, forma latina del nome del matematico portoghese Pedro Nunes, che propose un dispositivo per leggere con più finezza gli angoli negli strumenti astronomici. La versione a scala scorrevole che usiamo oggi fu descritta dal francese Pierre Vernier nel 1631; per questo nei paesi di lingua inglese lo strumento si chiama *vernier*. È uno dei primi esempi di come un'idea geometrica semplice abbia moltiplicato la sensibilità di uno strumento senza bisogno di tacche più fitte.

4.1.5 Il cronometro

Un cronometro digitale mostra di solito i centesimi di secondo, quindi la sua sensibilità è 0,01 s. Ma quando lo azioni a mano, il limite vero non è lo strumento: è la tua mano. Fra l'istante in cui vedi l'evento e quello in cui il dito preme il tasto passa un **tempo di reazione** che per la maggior parte delle persone è dell'ordine di uno o due decimi di secondo, e che cambia un poco da una prova all'altra. Nelle misure di tempo fatte a mano, quindi, la sensibilità di 0,01 s non è una stima onesta dell'incertezza: bisogna ripetere la misura e valutare quanto i risultati si disperdono, come vedremo nel paragrafo 4.3.

4.2 Gli errori di misura

In fisica la parola *errore* non significa «sbaglio». Indica lo scarto, inevitabile, fra il risultato di una misura e il valore vero della grandezza, che non conosciamo mai esattamente. Gli sbagli veri e propri (leggere 74 invece di 47, dimenticare la tara, scrivere centimetri invece di millimetri) si chiamano errori grossolani: non si trattano con la matematica, si evitano con l'attenzione

e, se scoperti, si eliminano rifacendo la misura. Gli errori di cui ci occupiamo qui, invece, accompagnano anche la misura più accurata, e sono di due tipi.

4.2.1 Errori casuali

Gli **errori casuali** (o accidentali) fanno variare il risultato in modo imprevedibile da una misura all'altra: a volte in più, a volte in meno. Le cause sono numerose e piccole: il tempo di reazione che cambia da una prova all'altra, una leggera vibrazione del tavolo, la stima di una lettura che cade fra due tacche, una corrente d'aria che muove il pendolo. Non si possono eliminare, ma si possono *rivelare* e ridurre: ripetendo la misura, gli scarti in più e quelli in meno tendono a compensarsi, e la media delle misure è più affidabile della misura singola.

4.2.2 Errori sistematici

Gli **errori sistematici** spostano invece tutte le misure nello stesso verso e, spesso, della stessa quantità. Esempi tipici:

- una bilancia che a vuoto segna 0,3 g (errore di zero): ogni massa risulta 0,3 g troppo grande;
- un metro a nastro di stoffa che si è allungato con l'uso: ogni lunghezza risulta troppo piccola;
- leggere il cilindro graduato sempre dall'alto: per la parallasse, ogni volume risulta sbagliato nello stesso verso;
- avviare il cronometro sempre in ritardo e fermarlo invece in anticipo, perché l'arrivo di un oggetto si prevede mentre la partenza no: ogni intervallo misurato risulta troppo breve.

Ripetere la misura non serve a scoprirli: cento misure fatte con la stessa bilancia mal azzerata saranno tutte spostate di 0,3 g, e la loro media pure. Gli errori sistematici si combattono in altro modo: controllando lo zero e la taratura degli strumenti, confrontando strumenti diversi, cambiando metodo di misura, oppure misurando un campione di valore noto.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «Ho fatto venti misure, quindi il mio risultato è sicuramente esatto.» Non è così. Molte misure riducono l'effetto degli errori *casuali*, ma lasciano intatto un errore *sistematico*. Se il cronometro parte sempre in ritardo, la media di venti tempi è precisa ma resta sbagliata. Prima di fidarti della media, chiediti sempre: c'è qualcosa che sposta tutte le mie misure nello stesso verso?

4.2.3 Precisione e accuratezza

Alle due famiglie di errori corrispondono due qualità diverse di una serie di misure. Una serie è **precisa** quando le misure ripetute sono vicine fra loro: gli errori casuali sono piccoli. Una serie è **accurata** quando il suo valore medio è vicino al valore vero: gli errori sistematici sono picco-

li. Il modo più chiaro per capire la differenza è pensare a un bersaglio, come nella Figura 4.3: il centro è il valore vero, ogni colpo è una misura.

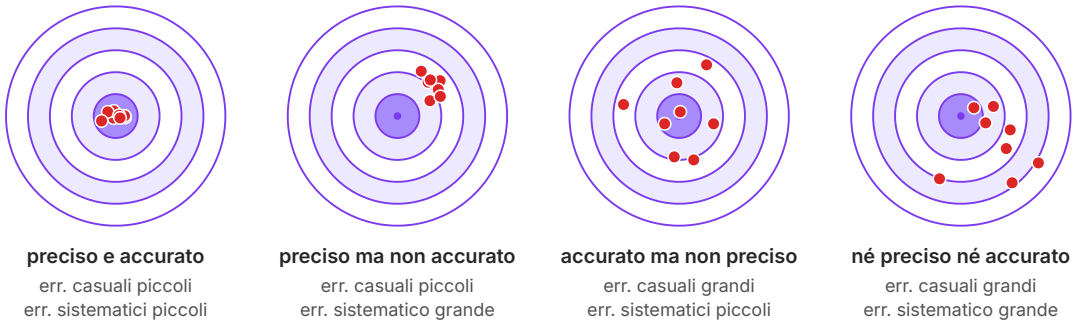

Figura 4.3 Precisione e accuratezza. Colpi raggruppati indicano errori casuali piccoli (precisione); un gruppo centrato sul bersaglio indica errori sistematici piccoli (accuratezza). Le due qualità sono indipendenti.

Nella vita reale, a differenza che nel tiro a segno, non vediamo il centro del bersaglio: il valore vero non è noto. Possiamo valutare la precisione guardando quanto si disperdono le misure; per valutare l'accuratezza serve invece un confronto esterno, per esempio con un altro strumento o con un valore di riferimento.

4.3 L'incertezza di una misura

Poiché non conosciamo il valore vero, il risultato di una misura non si esprime con un solo numero, ma con un intervallo entro cui ragionevolmente cade quel valore. Il centro dell'intervallo è il **valore attendibile** della misura; la sua semiampiezza è l'**incertezza assoluta**, che indichiamo con e_a. Il risultato si scrive

$$x = (x_{\text{attendibile}} \pm e_a)\ \text{unità}$$

e si legge: il valore della grandezza è compreso, con buona probabilità, fra $x - e_a$ e $x + e_a$. L'incertezza assoluta ha la stessa unità di misura della grandezza. Come si ricava e_a dipende da quante misure abbiamo fatto.

4.3.1 Misura singola

Quando si fa una sola misura, o quando ripetendola si ottiene sempre lo stesso valore, si assume come incertezza assoluta la sensibilità dello strumento. Un righello millimetrato dà quindi misure con incertezza 1 mm, il calibro ventesimale 0,05 mm, una bilancia che mostra i decimi di grammo 0,1 g. È una regola semplice e prudente, adatta al primo biennio; tieni però presente

quanto detto per il cronometro: se esiste una causa di incertezza chiaramente più grande della sensibilità, come il tempo di reazione, una misura singola non basta e occorre ripeterla.

4.3.2 Misure ripetute: valore medio e semidispersione

Se ripetendo la misura con cura otteniamo valori diversi, significa che gli errori casuali sono più grandi della sensibilità dello strumento. In questo caso conviene fare una serie di n misure $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Come valore attendibile si prende il **valore medio**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

e come incertezza assoluta la **semidispersione massima**, cioè la metà della differenza fra il valore massimo e il valore minimo della serie:

$$e_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

La semidispersione è una stima prudente: l'intervallo $\bar{x} \pm e_a$ è largo quanto l'intervallo fra la misura minima e la massima, e quindi contiene tutte le misure fatte, o quasi tutte (può restarne fuori di poco una delle estreme, perché la media non cade sempre esattamente a metà fra minimo e massimo). Se la semidispersione risulta minore della sensibilità dello strumento (per esempio perché tre misure con il righello sono 15,3 cm, 15,3 cm e 15,3 cm, con semidispersione zero), come incertezza si usa la sensibilità: nessuna serie di misure può rendere uno strumento più sensibile di quanto sia.

Tabella 4.2 Dieci misure del periodo T di un pendolo (tempo di un'oscillazione completa), prese con un cronometro manuale di sensibilità 0,01 s.

Prova	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T (s)	1,52	1,47	1,55	1,49	1,51	1,58	1,50	1,46	1,53	1,49

ESEMPIO SVOLTO

Analisi di una serie di misure ripetute

Dati. Le dieci misure della Tabella 4.2.

Valore medio. La somma delle dieci misure è 15,10 s, quindi $\bar{T}$ = 15,10 s / 10 = 1,510 s.

Semidispersione. Il valore massimo è 1,58 s, il minimo 1,46 s: e_a = (1,58 s − 1,46 s)/2 = 0,12 s / 2 = 0,06 s. È molto più grande della sensibilità (0,01 s), quindi la usiamo come incertezza.

Risultato. L'incertezza ha una cifra significativa e arriva ai centesimi di secondo; arrotondiamo la media ai centesimi: T = (1,51 ± 0,06) s.

Lettura del grafico. La Figura 4.4 mostra le misure su un asse. L'intervallo del risultato va da 1,51 s − 0,06 s = 1,45 s a 1,51 s + 0,06 s = 1,57 s: contiene nove misure su dieci, mentre la più grande, 1,58 s, resta appena fuori, perché la media (1,51 s) non coincide con il punto di mezzo fra minimo e massimo (1,52 s). Le due misure uguali (1,49 s) sono impilate. Si vede che i valori si addensano attorno alla media e che gli estremi sono rari: un comportamento tipico degli errori casuali.

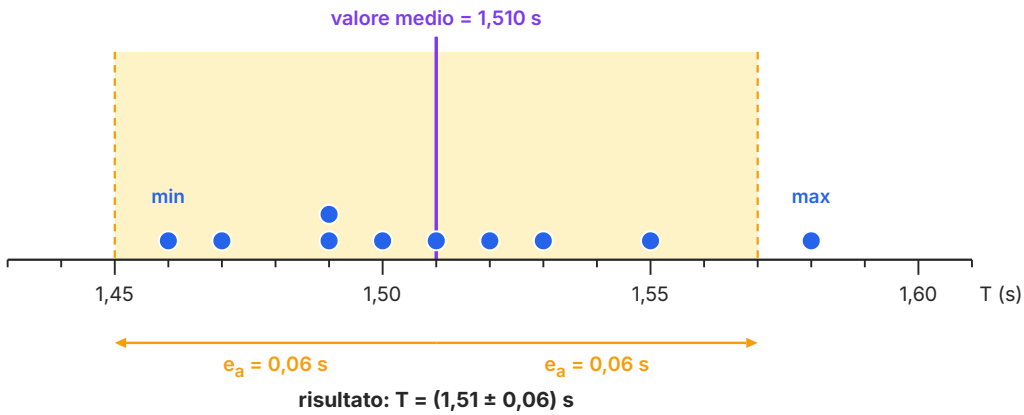

Figura 4.4 Diagramma a punti delle dieci misure della Tabella 4.2. La linea viola indica il valore medio; la banda gialla è l'intervallo $\bar{T} \pm e_a$, da 1,45 s a 1,57 s, largo quanto la distanza fra il valore minimo e il massimo (0,12 s) ma centrato sulla media: per questo la misura massima, 1,58 s, ne resta appena fuori.

ERRORE FREQUENTE

La semidispersione massima è $(x_{max} - x_{min})/\mathbf{2}$, non $x_{max} - x_{min}$. Dimenticare la divisione per 2 raddoppia l'incertezza. Ricorda il significato: l'incertezza è la distanza del valore medio da ciascun estremo dell'intervallo, quindi metà della sua larghezza.

APPROFONDIMENTO

Oltre la semidispersione

La semidispersione massima è facile da calcolare, ma dipende soltanto dalle due misure più lontane e non migliora aumentando il numero di prove: anzi, con molte misure è più probabile trovarne una molto distante. Negli anni successivi e all'università imparerai uno strumento più raffinato, la *deviazione standard della media*, che tiene conto di tutte le misure e diminuisce quando il loro numero cresce. Per ora ti basta sapere che esiste e che la semidispersione, come stima dell'incertezza, è più prudente.

4.3.3 Come si scrive il risultato

Un risultato scritto bene dice tutto ciò che sappiamo, e niente di più. In questo libro seguiamo una convenzione semplice e la useremo sempre.

DA RICORDARE

La convenzione di questo libro

1. L'incertezza assoluta si arrotonda a **una** cifra significativa; si tengono **due** cifre significative se la prima è un 1 (per esempio 0,15 o 13).

2. Il valore attendibile si arrotonda alla **stessa posizione decimale** dell'ultima cifra dell'incertezza.

3. Valore e incertezza hanno la stessa unità di misura, scritta una volta sola dopo la parentesi: $m = (64{,}8 \pm 0{,}1)$ g.

Perché tenere due cifre quando la prima è 1? Perché arrotondare 0,14 a 0,1 significherebbe ridurre l'incertezza di quasi un terzo, mentre arrotondare 0,44 a 0,4 la riduce di meno di un decimo. Vediamo qualche esempio.

- Media 9,8137 m/s², incertezza 0,0263 m/s² → l'incertezza diventa 0,03 m/s² (centesimi), la media 9,81 m/s²: $g = (9{,}81 \pm 0{,}03)$ m/s².
- Media 0,4562 s, incertezza 0,0148 s → la prima cifra dell'incertezza è 1, quindi ne teniamo due: 0,015 s; la media si arrotonda ai millesimi: $(0{,}456 \pm 0{,}015)$ s.
- Media 1523,7 m, incertezza 48 m → incertezza 5×10 m = 50 m, media arrotondata alle decine: $(1{,}52 \pm 0{,}05) \times 10^3$ m. La notazione scientifica evita l'ambiguità degli zeri finali che hai incontrato nel capitolo 3.

Scrivere $T = (1{,}51032 \pm 0{,}06)$ s è un errore: le cifre 0, 3 e 2 sono più fini dell'incertezza e quindi prive di significato. Ugualmente sbagliato è scrivere $(1{,}5 \pm 0{,}06)$ s: abbiamo buttato via un'informazione che avevamo.

4.4 Incertezza relativa e compatibilità

4.4.1 Incertezza relativa e percentuale

Un'incertezza di 1 mm è grande o piccola? Dipende da che cosa stiamo misurando. Su un campo da calcio lungo 105 m sarebbe straordinariamente piccola; sullo spessore di una moneta, di un paio di millimetri, sarebbe enorme. Per giudicare la qualità di una misura conviene confrontare l'incertezza con il valore misurato. Si definisce **incertezza relativa** il rapporto

$$e_r = \frac{e_a}{\bar{x}}$$

Essendo il rapporto fra due grandezze con la stessa unità, l'incertezza relativa è un numero puro, senza unità di misura. Moltiplicata per 100 diventa l'**incertezza percentuale**: $e_{\%} = e_r \times 100\%$. Una misura è tanto migliore quanto più piccola è la sua incertezza relativa.

Tabella 4.3 Confronto fra la qualità di tre misure del capitolo.

Misura	Incertezza assoluta	Incertezza relativa	Incertezza percentuale
lunghezza con righello: (47 ± 1) mm	1 mm	1/47 ≈ 0,02	≈ 2%
lunghezza con calibro: (23,65 ± 0,05) mm	0,05 mm	0,05/23,65 ≈ 0,002	≈ 0,2%
periodo del pendolo: (1,51 ± 0,06) s	0,06 s	0,06/1,51 ≈ 0,04	≈ 4%

La tabella mostra che non ha senso confrontare direttamente le incertezze assolute di grandezze diverse (millimetri e secondi non si confrontano), mentre le incertezze relative si confrontano sempre: la misura con il calibro è circa dieci volte migliore di quella con il righello, e la misura del periodo è la peggiore delle tre.

COLLEGAMENTI

Le incertezze hanno valore legale

Le misure con conseguenze pratiche tengono sempre conto dell'incertezza. In Italia, per esempio, quando un rilevatore di velocità misura un veicolo, alla velocità rilevata si sottrae una tolleranza del 5%, con un minimo di 5 km/h: se lo strumento indica 90 km/h, la velocità usata per la sanzione è 85 km/h. In questo modo il dubbio dovuto all'incertezza dello strumento va a favore dell'automobilista. Allo stesso modo, sulle confezioni di alimenti la quantità dichiarata è accompagnata da regole sugli scarti ammessi, e nell'industria ogni pezzo meccanico ha una *tolleranza*: un albero da (20,00 ± 0,02) mm che misura 20,05 mm viene scartato.

4.4.2 Misure compatibili

Due gruppi di laboratorio misurano la densità dello stesso cilindretto di alluminio e ottengono d_A = (2,68 ± 0,05) g/cm³ e d_B = (2,75 ± 0,04) g/cm³. I valori medi sono diversi: uno dei due ha sbagliato? Per rispondere guardiamo gli intervalli: il primo va da 2,63 a 2,73 g/cm³, il secondo da 2,71 a 2,79 g/cm³. I due intervalli hanno una parte in comune, da 2,71 a 2,73 g/cm³: esistono valori della densità coerenti con entrambe le misure. Diciamo allora che le due misure sono **compatibili**.

Se invece un terzo gruppo trova (2,62 ± 0,03) g/cm³, cioè l'intervallo da 2,59 a 2,65 g/cm³, fra questo e quello del gruppo B resta uno spazio vuoto: le misure *non* sono compatibili (Figura 4.5). In questo caso almeno una delle due contiene un errore che le incertezze non descrivono, per esempio un errore sistematico o un errore grossolano, e bisogna cercarlo.

Con un calcolo veloce: due misure sono compatibili se la differenza fra i valori medi non supera la somma delle incertezze. Nel primo caso 2,75 − 2,68 = 0,07 ≤ 0,05 + 0,04 = 0,09: compatibili. Nel secondo 2,75 − 2,62 = 0,13 > 0,03 + 0,04 = 0,07: non compatibili. Lo stesso criterio serve per confrontare una misura con un valore di riferimento, come la densità dell'alluminio riportata nelle tabelle (2,70 g/cm³).

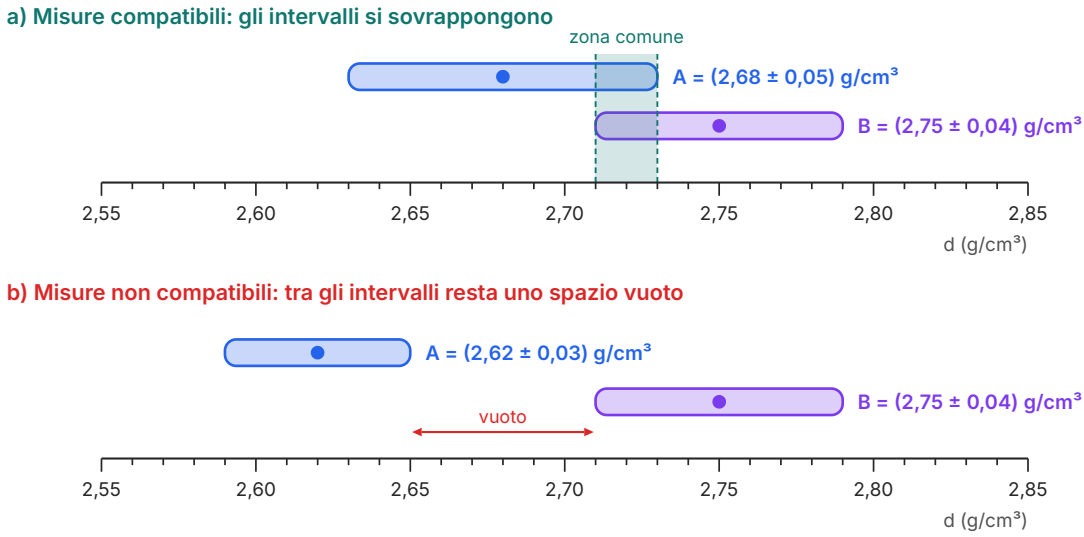

Figura 4.5 a) Due misure della stessa densità i cui intervalli di incertezza si sovrappongono: sono compatibili. b) Due misure separate da un intervallo vuoto: non sono compatibili.

ERRORE FREQUENTE

«Compatibili» non vuol dire «uguali», e «diverse» non vuol dire «incompatibili». Due misure con valori medi diversi possono essere compatibili, se le incertezze sono abbastanza grandi; e due misure molto vicine possono essere incompatibili, se le incertezze sono molto piccole. Il giudizio dipende sempre dal confronto fra la differenza dei valori e la somma delle incertezze.

4.5 La propagazione delle incertezze

Molte grandezze non si misurano direttamente, ma si calcolano a partire da altre misure: l'area di un rettangolo dai suoi lati, la densità da massa e volume, la velocità da distanza e tempo. Si parla allora di **misure indirette**. Le incertezze delle misure di partenza si trasmettono al risultato: è la **propagazione delle incertezze**. Noi useremo la regola dell'*incertezza massima*, che considera il caso peggiore, quello in cui tutti gli errori si sommano nello stesso verso.

4.5.1 Somme e differenze

Due aste misurano $a = (35{,}2 \pm 0{,}1)$ cm e $b = (18{,}7 \pm 0{,}1)$ cm. Messe in fila, quanto sono lunghe? Il valore attendibile è 35,2 cm + 18,7 cm = 53,9 cm. Nel caso peggiore entrambe sono più lunghe di 0,1 cm, oppure entrambe più corte: la somma può quindi sbagliare di 0,2 cm. Il risultato è $(53{,}9 \pm 0{,}2)$ cm.

Lo stesso accade con le differenze. Nel caso peggiore il primo valore è in eccesso e il secondo in difetto, e gli scarti si sommano anche se i valori si sottraggono.

Nella somma e nella differenza, quindi, si **sommano le incertezze assolute**:

$$e_a(a + b) = e_a(a - b) = e_a(a) + e_a(b)$$

Ecco perché, quando con il righello leggi due estremi invece di partire dallo zero, l'incertezza della lunghezza diventa 2 mm. La differenza nasconde anche un'insidia. Se due sbarre misurano $(12{,}6 \pm 0{,}1)$ cm e $(12{,}1 \pm 0{,}1)$ cm, la loro differenza è $(0{,}5 \pm 0{,}2)$ cm: un'incertezza relativa del 40%, anche se ogni misura di partenza aveva un'incertezza inferiore all'1%. Sottrarre grandezze quasi uguali produce risultati poco affidabili: quando è possibile, conviene misurare direttamente la differenza.

4.5.2 Prodotti e quozienti

Per prodotti e quozienti la regola riguarda invece le incertezze relative: nel prodotto e nel quoziente si **sommano le incertezze relative**.

$$e_r(a \cdot b) = e_r(a / b) = e_r(a) + e_r(b)$$

Per capire da dove viene, pensa a un rettangolo con i lati sbagliati entrambi dell'1% in eccesso: l'area, che è il prodotto dei lati, risulta circa $1{,}01 \times 1{,}01 \approx 1{,}02$ volte quella vera, cioè sbagliata di circa il 2%. Le percentuali di errore si sono sommate. Una volta ottenuta l'incertezza relativa del risultato, la si moltiplica per il valore calcolato per avere l'incertezza assoluta.

ESEMPIO SVOLTO

L'area del piano di un tavolo

Dati. Con un metro a nastro misuriamo i lati del piano: $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm, $b = (60{,}0 \pm 0{,}2)$ cm. Calcoliamo l'area S con la sua incertezza.

Valore. $S = a \cdot b = 120{,}0\ \text{cm} \times 60{,}0\ \text{cm} = 7200\ \text{cm}^2$.

Incertezze relative. $e_r(a) = 0{,}2/120{,}0 \approx 0{,}00167$; $e_r(b) = 0{,}2/60{,}0 \approx 0{,}00333$. Sommandole: $e_r(S) = 0{,}00500$, cioè 0,5%.

Incertezza assoluta. $e_a(S) = 0{,}00500 \times 7200\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$, che arrotondata a una cifra significativa diventa $4 \times 10\ \text{cm}^2 = 40\ \text{cm}^2$.

Risultato. L'area si arrotonda alle decine di cm^2: $S = (7{,}20 \pm 0{,}04) \times 10^3\ \text{cm}^2$. Nota che il lato più corto, misurato con la stessa incertezza assoluta, pesa il doppio nell'incertezza finale: ha un'incertezza relativa doppia.

4.5.3 Moltiplicare per un numero esatto

Se una grandezza misurata si moltiplica o si divide per un numero esatto (un numero che non viene da una misura, come il 10 delle oscillazioni contate o il 2 nella formula del perimetro), l'incertezza relativa non cambia, e l'incertezza assoluta si moltiplica o si divide per lo stesso numero. È un trucco molto usato in laboratorio. Invece di misurare un solo periodo del pendolo, cronometriamo dieci oscillazioni di fila e otteniamo $t_{10} = (15{,}1 \pm 0{,}2)$ s. Il periodo è

$$T = \frac{t_{10}}{10} = \frac{(15{,}1 \pm 0{,}2)\ \text{s}}{10} = (1{,}51 \pm 0{,}02)\ \text{s}$$

L'incertezza dovuta al tempo di reazione, che riguarda solo l'istante di partenza e quello di arrivo, si è «spalmata» su dieci oscillazioni: l'incertezza relativa è scesa all'1,3% circa, contro il 4% della misura diretta della Tabella 4.2. Con lo stesso principio si misura lo spessore di un foglio misurando una risma intera.

4.5.4 Le potenze

L'area di un quadrato di lato l è $l \cdot l$: applicando la regola del prodotto, la sua incertezza relativa è $e_r(l) + e_r(l) = 2\, e_r(l)$. Per il volume di un cubo, $l \cdot l \cdot l$, si ottiene $3\, e_r(l)$. In generale, elevando una misura alla potenza n, l'incertezza relativa si moltiplica per n.

Per un cubetto di lato $l = (5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm l'incertezza relativa del lato è $0{,}1/5{,}0 = 0{,}02$, cioè 2%. L'area di una faccia è $l^2 = 25\ \text{cm}^2$, con incertezza relativa $2 \times 0{,}02 = 0{,}04$ e incertezza assoluta 0,04

× 25 cm² = 1 cm²: $S = (25 \pm 1)$ cm². Il volume è $l^3 = 125$ cm³, con incertezza relativa $3 \times 0{,}02 = 0{,}06$ e incertezza assoluta $0{,}06 \times 125$ cm³ = 7,5 cm³, che arrotondiamo a 8 cm³: $V = (125 \pm 8)$ cm³. Un'incertezza del 2% sul lato diventa del 6% sul volume: le potenze amplificano le incertezze.

IN SINTESI

Le formule del capitolo e il loro significato

Misure ripetute: $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ e $e_a = (x_{max} - x_{min})/2$ — il valore attendibile è la media; l'incertezza è metà dell'intervallo occupato dalle misure (ma mai meno della sensibilità).

Incertezza relativa e percentuale: $e_r = e_a/\bar{x}$, $e_{\%} = e_r \times 100\%$ — quanto pesa l'incertezza rispetto al valore; è un numero puro.

Somma e differenza: si sommano le incertezze assolute.

Prodotto e quoziente: si sommano le incertezze relative.

Numero esatto *k*: $e_a(k\,x) = |k|\, e_a(x)$; l'incertezza relativa non cambia.

Potenza: $e_r(x^n) = n \cdot e_r(x)$ — elevare al quadrato raddoppia l'incertezza relativa, al cubo la triplica.

Compatibilità: due misure sono compatibili se $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le e_{a1} + e_{a2}$, cioè se i loro intervalli si sovrappongono.

4.5.5 Un esempio completo: la densità di un solido

La densità $d = m/V$, che hai incontrato nel capitolo 2, è un quoziente: la sua incertezza relativa è la somma delle incertezze relative della massa e del volume. Il volume, a sua volta, si ottiene spesso come differenza di due letture di un cilindro graduato. In un solo esperimento compaiono quindi quasi tutte le regole del capitolo. L'attività qui sotto ti guida passo passo; la Figura 4.6 mostra come si legge il volume.

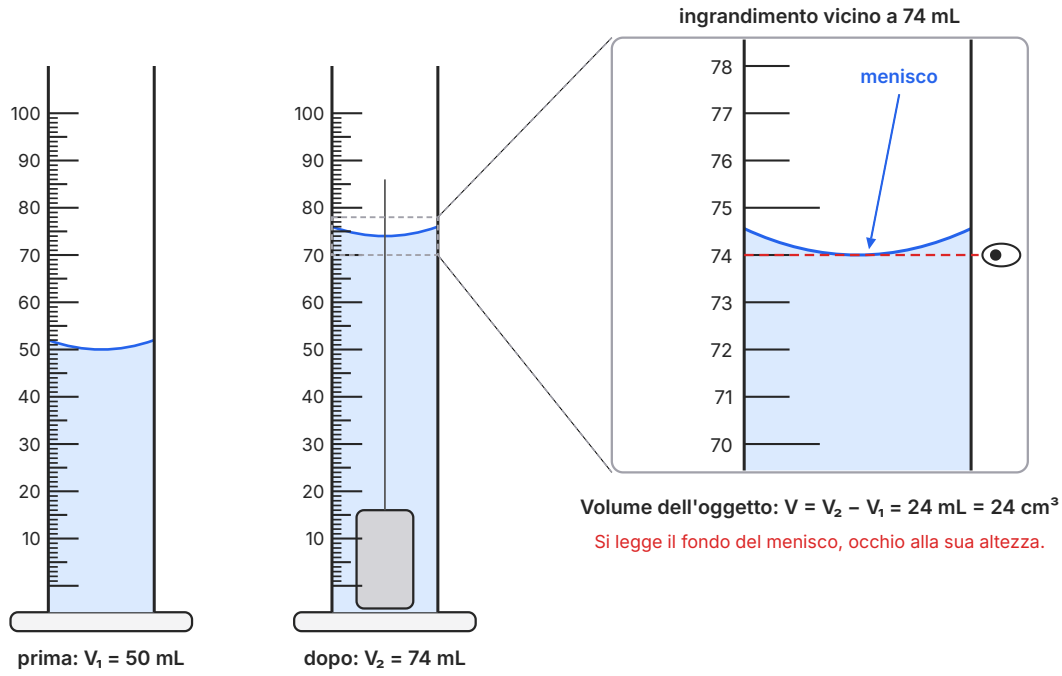

Figura 4.6 Misura del volume di un solido per spostamento d'acqua in un cilindro graduato da 100 mL (sensibilità 1 mL). Il volume del solido è la differenza fra la lettura finale e quella iniziale. Nell'ingrandimento: la lettura si fa sul fondo del menisco, con l'occhio alla stessa altezza.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la densità di un solido con la sua incertezza

Materiali. Un piccolo oggetto metallico compatto che entri nel cilindro (per esempio un cilindretto di alluminio), filo sottile, bilancia elettronica (sensibilità 0,1 g), cilindro graduato da 100 mL (sensibilità 1 mL), acqua.

Procedimento. 1) Azzera la bilancia e misura la massa m dell'oggetto asciutto. 2) Versa acqua nel cilindro fino a circa metà e leggi il volume V_1 sul fondo del menisco. 3) Lega l'oggetto al filo e calalo lentamente nell'acqua, inclinando un poco il cilindro, finché è completamente immerso; leggi V_2. 4) Calcola $V = V_2 - V_1$ e $d = m/V$.

Tabella 4.4 Dati di un gruppo e loro elaborazione.

Grandezza	Valore	Incertezza assoluta	Incertezza relativa
massa m	64,8 g	0,1 g	0,0015
lettura iniziale V_1	50 mL	1 mL	—
lettura finale V_2	74 mL	1 mL	—
volume $V = V_2 - V_1$	24 cm³	1 + 1 = 2 cm³	0,083
densità $d = m/V$	2,70 g/cm³	0,085 × 2,70 ≈ 0,23 g/cm³	0,0015 + 0,083 ≈ 0,085

Risultato. Con la convenzione del libro l'incertezza 0,23 g/cm³ diventa 0,2 g/cm³ e la densità si arrotonda ai decimi: $d = (2{,}7 \pm 0{,}2)$ g/cm³, con un'incertezza percentuale di circa l'8%.

Che cosa concludere. Il valore di riferimento dell'alluminio, 2,70 g/cm³, cade nell'intervallo da 2,5 a 2,9 g/cm³: la misura è compatibile. Osserva da dove viene l'incertezza: quasi tutta dal volume (8,3%), pochissima dalla massa (0,15%). Per migliorare l'esperimento non serve una bilancia migliore, serve un cilindro più stretto e più finemente graduato, oppure un oggetto più grande. Saper individuare la misura che «comanda» l'incertezza è una delle competenze più utili in laboratorio.

Sicurezza. Asciuga subito l'acqua versata vicino alla bilancia e non lasciar cadere l'oggetto nel cilindro: il vetro può rompersi.

Per la relazione. Oltre a m, V_1 e V_2 con le loro incertezze, svolgi per esteso il calcolo dell'incertezza su d. Nelle conclusioni scrivi il risultato nella forma $(d \pm e_a)$ g/cm³, discuti la compatibilità con il valore di riferimento e indica quale misura «comanda» l'incertezza e come la ridurresti.

Come vedi, le incertezze non sono un fastidioso dettaglio da aggiungere alla fine: guidano le scelte. Ci dicono quale strumento comprare, quante misure fare, quale grandezza misurare con più cura. Nel prossimo capitolo useremo tabelle e grafici per scoprire le leggi che legano le

grandezze fisiche, e le incertezze compariranno nei grafici come piccole barre attorno a ogni punto.

SINTESI

- Uno strumento si descrive con la portata (valore massimo misurabile), la sensibilità (minima variazione rilevabile), la prontezza (rapidità di risposta) e l'accuratezza (vicinanza al valore vero).
- Il calibro ventesimale ha un nonio di 20 divisioni e sensibilità 0,05 mm: si leggono i millimetri prima dello zero del nonio e si aggiunge 0,05 mm per ogni tacca fino a quella allineata.
- Gli errori casuali variano in modo imprevedibile e si riducono ripetendo le misure; gli errori sistematici spostano tutte le misure nello stesso verso e non si scoprono ripetendo.
- Precisione significa misure vicine fra loro; accuratezza significa media vicina al valore vero.
- Una misura singola ha come incertezza la sensibilità dello strumento.
- Con misure ripetute il valore attendibile è la media e l'incertezza è la semidispersione massima $(x_{max} - x_{min})/2$, ma mai meno della sensibilità.
- L'incertezza si arrotonda a una cifra significativa (due se la prima è 1) e il valore alla stessa posizione decimale.
- L'incertezza relativa $e_a/\bar{x}$ è un numero puro e permette di confrontare la qualità di misure diverse.
- Due misure sono compatibili se i loro intervalli di incertezza si sovrappongono.
- In somme e differenze si sommano le incertezze assolute; in prodotti e quozienti le incertezze relative; una potenza n moltiplica per n l'incertezza relativa.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La sensibilità di uno strumento di misura è:
   - **A.** il valore massimo che lo strumento può misurare
   - **B.** la più piccola variazione della grandezza che lo strumento può rilevare
   - **C.** il tempo che lo strumento impiega a dare l'indicazione definitiva
   - **D.** la vicinanza delle sue indicazioni al valore vero

2. ● Un calibro ventesimale ha sensibilità:
   - **A.** 1 mm
   - **B.** 0,1 mm
   - **C.** 0,05 mm
   - **D.** 0,02 mm

3. ● Un errore sistematico:
   - **A.** si riduce facendo la media di molte misure
   - **B.** cambia segno in modo imprevedibile da una misura all'altra
   - **C.** esiste solo negli strumenti analogici
   - **D.** sposta tutte le misure nello stesso verso

4. ●● Con un righello (sensibilità 0,1 cm) si ottengono le misure 4,2 cm; 4,5 cm; 4,4 cm; 4,3 cm. Il risultato corretto è:
   - **A.** (4,35 ± 0,15) cm
   - **B.** (4,35 ± 0,3) cm
   - **C.** (4,4 ± 0,1) cm
   - **D.** (4,350 ± 0,15) cm

5. ● Nel bersaglio «preciso ma non accurato» della Figura 4.3:
   - **A.** gli errori casuali sono grandi e quelli sistematici piccoli
   - **B.** sia gli errori casuali sia quelli sistematici sono grandi
   - **C.** gli errori casuali sono piccoli e quello sistematico è grande
   - **D.** non ci sono errori di alcun tipo

6. ●● L'incertezza percentuale della misura $m = (80 \pm 2)$ g è:
   - **A.** 2,5%
   - **B.** 2%
   - **C.** 0,025%
   - **D.** 40%

7. ●● Si sommano le lunghezze $(3{,}2 \pm 0{,}1)$ m e $(1{,}5 \pm 0{,}2)$ m. Il risultato è:
   - **A.** (4,7 ± 0,1) m
   - **B.** (4,7 ± 0,2) m
   - **C.** (4,70 ± 0,15) m
   - **D.** (4,7 ± 0,3) m

8. ● La portata di una bilancia da cucina è:
   - **A.** la massa più piccola che riesce a distinguere
   - **B.** la massa più grande che può misurare
   - **C.** la massa del piatto vuoto
   - **D.** la differenza fra due letture successive

9. ●● Il lato di un cubo è misurato con incertezza relativa dell'1%. L'incertezza relativa del volume è:
   - **A.** 1%
   - **B.** 2%
   - **C.** 3%
   - **D.** 0,33%

Vero o falso

10. ● Uno strumento digitale fornisce misure prive di incertezza. V / F

11. ● Ripetere una misura e calcolarne la media riduce l'effetto degli errori casuali, ma non quello degli errori sistematici. V / F

12. ● L'incertezza relativa ha la stessa unità di misura della grandezza misurata. V / F

13. ●● Due misure compatibili devono avere lo stesso valore medio. V / F

14. ● Nel quoziente di due misure si sommano le incertezze relative. V / F

Applicare

15. ●● Leggi la misura indicata dal calibro ventesimale della Figura 4.7 e scrivi il risultato con la sua incertezza.

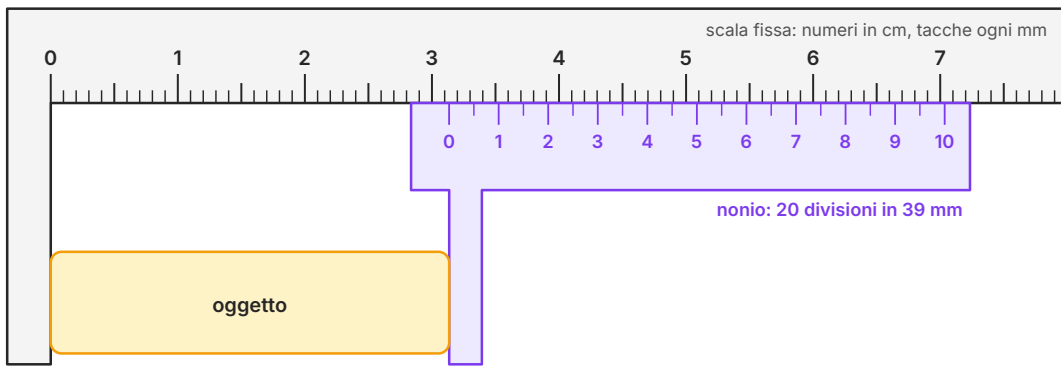

Figura 4.7 Calibro ventesimale per l'esercizio 15 (nonio di 20 divisioni in 39 mm).

16. ● Con un righello millimetrato misuri una matita e leggi 12,4 cm. Scrivi la misura con la sua incertezza: _____ .

17. ● Calcola l'incertezza relativa e percentuale della misura $L = (25{,}0 \pm 0{,}5)$ cm.

18. ●● Un gruppo cronometra cinque volte la discesa di una pallina lungo uno scivolo (Tabella 4.5). Calcola il valore medio, la semidispersione, scrivi il risultato e trova l'incertezza percentuale.

Tabella 4.5 Tempi di discesa misurati con un cronometro di sensibilità 0,01 s.

Prova	1	2	3	4	5
t (s)	2,34	2,41	2,37	2,29	2,39

19. ● Calcola la somma delle lunghezze (12,5 ± 0,1) cm e (8,3 ± 0,1) cm, con la sua incertezza.

20. ●● Riscrivi correttamente, secondo la convenzione del libro: a) $g = 9{,}8137\ \text{m/s}^2$ con incertezza $0{,}0263\ \text{m/s}^2$; b) $t = 0{,}4562$ s con incertezza 0,0148 s; c) $s = 1523{,}7$ m con incertezza 48 m.

21. ● Una bilancia da cucina digitale misura masse fino a 5 kg e mostra i grammi con una cifra decimale (per esempio 1234,5 g). Completa: la portata è _____ , la sensibilità è _____ ; una mela che fa comparire 182,4 g ha massa _____ .

22. ●● Lo spessore di una risma di 200 fogli è (2,0 ± 0,1) cm. Quanto è spesso un foglio? Esprimi il risultato in millimetri, con la sua incertezza.

Problemi

23. ●● Un foglio rettangolare ha i lati $a = (24{,}5 \pm 0{,}1)$ cm e $b = (12{,}0 \pm 0{,}1)$ cm. Calcola: a) il perimetro con la sua incertezza; b) l'area con la sua incertezza.

24. ●● In una prova di corsa uno studente percorre (100,0 ± 0,1) m in un tempo misurato a mano di (12,6 ± 0,2) s. Calcola la velocità media $v = \Delta s/\Delta t$ con la sua incertezza assoluta e percentuale.

25. ●●● Un cubetto metallico ha lato $l = (3{,}00 \pm 0{,}02)$ cm e massa $m = (210{,}6 \pm 0{,}1)$ g. a) Calcola il volume con la sua incertezza. b) Calcola la densità con la sua incertezza. c) Il ferro ha densità $7{,}87\ \text{g/cm}^3$: la misura è compatibile con l'ipotesi che il cubetto sia di ferro?

26. ●●● Due gruppi misurano l'accelerazione di gravità g con un pendolo. Il gruppo A trova $(9{,}74 \pm 0{,}08)\ \text{m/s}^2$, il gruppo B $(9{,}95 \pm 0{,}06)\ \text{m/s}^2$. a) Le due misure sono compatibili fra loro? b) Quale delle due è compatibile con il valore di riferimento locale, $9{,}80\ \text{m/s}^2$? c) Che cosa può aver causato il risultato dell'altro gruppo?

27. ●●● Per trovare la densità di un olio si pesa un becher vuoto, (85,3 ± 0,1) g, poi lo stesso becher con (115 ± 1) mL di olio, (198,7 ± 0,1) g. Calcola la massa dell'olio e la sua densità in g/cm^3, con le rispettive incertezze.

28. ● Il tempo di 10 oscillazioni di un pendolo è (15,3 ± 0,2) s. Trova il periodo con la sua incertezza e confronta l'incertezza percentuale con quella che avresti misurando una sola oscillazione con la stessa incertezza assoluta di 0,2 s.

29. ●●● Con un calibro misuri il diametro di una moneta: $D = (23{,}25 \pm 0{,}05)$ mm. Calcola l'area di una faccia, $S = \pi D^2/4$, con la sua incertezza (considera π e 4 numeri esatti).

Ragionare e argomentare

30. ●● Uno studente scrive nella relazione: «Ho calcolato la semidispersione come $t_{max} - t_{min} = 0{,}1$ s e il risultato è $t = (2{,}3457 \pm 0{,}1)$ s». Individua e correggi i due errori, sapendo che $t_{max} = 2{,}40$ s e $t_{min} = 2{,}30$ s.

31. ●●● Hai a disposizione un cilindro graduato da 10 mL con sensibilità 0,2 mL e un contagocce. Progetta un esperimento per misurare il volume di una sola goccia d'acqua con un'incertezza relativa inferiore al 5%. Spiega il procedimento e perché funziona.

32. ●● Un cronometro digitale mostra i centesimi di secondo. Spiega perché, per un intervallo misurato a mano, l'incertezza non è 0,01 s, e stima un valore più realistico. Come potresti verificare la tua stima con un compagno?

PER APPROFONDIRE

- [TAY] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: i primi capitoli presentano incertezze, cifre significative e propagazione con molti esempi di laboratorio; i capitoli successivi introducono la deviazione standard.
- [BIPM] La «brochure SI» del BIPM: per capire come gli strumenti vengono tarati rispetto alle definizioni delle unità.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo introduttivo sulla misura.

Glossario del capitolo

Accuratezza
Vicinanza delle indicazioni di uno strumento, o del valore medio di una serie di misure, al valore vero della grandezza; è limitata dagli errori sistematici.

Calibro ventesimale
Strumento per misurare piccole lunghezze, con un'asta millimetrata e un cursore dotato di nonio a 20 divisioni; sensibilità 0,05 mm.

Errore casuale
Errore che fa variare in modo imprevedibile, in più o in meno, il risultato di misure ripetute; il suo effetto si riduce facendo la media.

Errore di parallasse
Errore di lettura che si commette guardando la scala di uno strumento da una direzione obliqua invece che dalla perpendicolare.

Errore sistematico
Errore che sposta tutte le misure nello stesso verso (per esempio uno zero non tarato); non si scopre ripetendo la misura.

Incertezza assoluta
Semiampiezza dell'intervallo entro cui cade, con buona probabilità, il valore della grandezza; si indica con e_a e ha la stessa unità della misura.

Incertezza percentuale
Incertezza relativa moltiplicata per 100 ed espressa in percentuale: $e_{\%} = e_r \times 100\%$.

Incertezza relativa
Rapporto fra incertezza assoluta e valore attendibile, $e_r = e_a/\bar{x}$; è un numero puro e serve a confrontare la qualità di misure diverse.

Misura indiretta
Misura di una grandezza ottenuta con un calcolo a partire da altre grandezze misurate direttamente, come la densità da massa e volume.

Misure compatibili
Due misure della stessa grandezza i cui intervalli di incertezza si sovrappongono, cioè la cui differenza non supera la somma delle incertezze.

Nonio
Piccola scala scorrevole accanto a una scala principale che permette di leggere frazioni della divisione principale.

Portata
Valore massimo di una grandezza che uno strumento può misurare.

Precisione
Qualità di una serie di misure ripetute che risultano vicine fra loro; è limitata dagli errori casuali.

Prontezza
Rapidità con cui uno strumento raggiunge l'indicazione definitiva quando la grandezza misurata cambia.

Propagazione delle incertezze
Insieme delle regole per calcolare l'incertezza di una misura indiretta: si sommano le incertezze assolute in somme e differenze, le relative in prodotti e quozienti.

Semidispersione massima
Metà della differenza fra il valore massimo e il valore minimo di una serie di misure, $(x_{max} - x_{min})/2$; si usa come incertezza delle misure ripetute.

Sensibilità
La più piccola variazione di una grandezza che uno strumento riesce a rilevare; per una misura singola è l'incertezza assoluta.

Valore medio
Somma delle misure di una serie divisa per il loro numero; è il valore attendibile nelle misure ripetute.

Soluzioni

1. B. La sensibilità è la minima variazione rilevabile; A è la portata, C la prontezza, D l'accuratezza.

2. C. Il nonio ha 20 divisioni: 1 mm / 20 = 0,05 mm.

3. D. L'errore sistematico agisce sempre nello stesso verso; per questo la media non lo riduce.

4. A. Media = (4,2 + 4,5 + 4,4 + 4,3)/4 = 4,35 cm; semidispersione = (4,5 − 4,2)/2 = 0,15 cm, maggiore della sensibilità; la prima cifra è 1, quindi si tengono due cifre: (4,35 ± 0,15) cm.

5. C. Colpi raggruppati (errori casuali piccoli) ma lontani dal centro (errore sistematico grande).

6. A. $e_r = 2/80 = 0{,}025 \rightarrow 2{,}5\%$.

7. D. In una somma si sommano le incertezze assolute: 0,1 m + 0,2 m = 0,3 m; 3,2 m + 1,5 m = 4,7 m.

8. B. La portata è il valore massimo misurabile.

9. C. $V = l^3$, quindi $e_r(V) = 3 \times 1\% = 3\%$.

10. F. Anche uno strumento digitale ha almeno l'incertezza pari a un'unità dell'ultima cifra, oltre a possibili errori di taratura.

11. V. Gli errori casuali in più e in meno si compensano nella media; un errore sistematico sposta allo stesso modo tutte le misure e quindi anche la media.

12. F. È il rapporto fra due grandezze con la stessa unità: è un numero puro.

13. F. Basta che gli intervalli di incertezza si sovrappongano; i valori medi possono essere diversi.

14. V. Per prodotti e quozienti si sommano le incertezze relative.

15. Lo zero del nonio cade fra 31 mm e 32 mm; è allineata la tacca 7 del nonio (subito dopo il «3»), che coincide con 45 mm della scala fissa. L = 31 mm + 7 × 0,05 mm = 31,35 mm → L = (31,35 ± 0,05) mm. Controllo: 31,35 mm + 7 × 1,95 mm = 45,00 mm.

16. L = (12,4 ± 0,1) cm, cioè (124 ± 1) mm: misura singola, incertezza pari alla sensibilità.

17. e_r = 0,5 cm / 25,0 cm = 0,02; $e_{\%}$ = 2%.

18. Media = (2,34 + 2,41 + 2,37 + 2,29 + 2,39)/5 = 11,80/5 = 2,36 s; semidispersione = (2,41 − 2,29)/2 = 0,06 s (maggiore della sensibilità). t = (2,36 ± 0,06) s; $e_{\%}$ = 0,06/2,36 × 100% ≈ 2,5% (circa 3%).

19. 12,5 cm + 8,3 cm = 20,8 cm; incertezza 0,1 cm + 0,1 cm = 0,2 cm: (20,8 ± 0,2) cm.

20. a) Incertezza 0,03 m/s² → g = (9,81 ± 0,03) m/s². b) Prima cifra 1 → due cifre: 0,015 s → t = (0,456 ± 0,015) s. c) Incertezza 50 m → $s = (1{,}52 \pm 0{,}05) \times 10^3$ m.

21. Portata 5 kg; sensibilità 0,1 g; m = (182,4 ± 0,1) g.

22. Si divide per il numero esatto 200: spessore = 2,0 cm / 200 = 0,010 cm = 0,100 mm; incertezza = 0,1 cm / 200 = 0,0005 cm = 0,005 mm. Un foglio: (0,100 ± 0,005) mm (il valore si arrotonda alla stessa posizione decimale dell'incertezza, i millesimi di millimetro).

23. a) $P = 2(a + b)$ = 2 × 36,5 cm = 73,0 cm; e_a = 2 × (0,1 + 0,1) cm = 0,4 cm → P = (73,0 ± 0,4) cm. b) S = 24,5 × 12,0 = 294 cm²; e_r = 0,1/24,5 + 0,1/12,0 ≈ 0,0041 + 0,0083 = 0,0124; e_a ≈ 0,0124 × 294 ≈ 3,65 cm² → 4 cm². S = (294 ± 4) cm².

24. v = 100,0 m / 12,6 s ≈ 7,937 m/s; e_r = 0,1/100,0 + 0,2/12,6 ≈ 0,0010 + 0,0159 = 0,0169; e_a ≈ 0,0169 × 7,937 ≈ 0,134 m/s → prima cifra 1, due cifre: 0,13 m/s. v = (7,94 ± 0,13) m/s; $e_{\%}$ ≈ 1,7%. Quasi tutta l'incertezza viene dal tempo misurato a mano.

25. a) $V = (3{,}00 \text{ cm})^3$ = 27,0 cm³; e_r = 3 × 0,02/3,00 = 0,020; e_a = 0,020 × 27,0 = 0,54 cm³ → 0,5 cm³: V = (27,0 ± 0,5) cm³. b) d = 210,6 g / 27,0 cm³ = 7,80 g/cm³; e_r = 0,1/210,6 + 0,020 ≈ 0,0005 + 0,0200 = 0,0205; e_a ≈ 0,0205 × 7,80 ≈ 0,160 → 0,16 g/cm³: d = (7,80 ± 0,16) g/cm³. c) L'intervallo va da 7,64 a 7,96 g/cm³ e contiene 7,87: la misura è compatibile con il ferro (ma

non lo dimostra: altri materiali di densità simile darebbero lo stesso risultato).

26. a) A: da 9,66 a 9,82 m/s²; B: da 9,89 a 10,01 m/s². Gli intervalli non si sovrappongono ($|9{,}95 - 9{,}74| = 0{,}21 > 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14$): non compatibili. b) 9,80 m/s² cade nell'intervallo di A, non in quello di B: è compatibile solo A. c) Un errore sistematico nel gruppo B, per esempio una lunghezza del pendolo misurata in eccesso o tempi misurati sistematicamente troppo brevi (cronometro avviato in ritardo).

27. Massa dell'olio (differenza): $m = 198{,}7\ \text{g} - 85{,}3\ \text{g} = 113{,}4\ \text{g}$, $e_a = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2\ \text{g} \rightarrow m = (113{,}4 \pm 0{,}2)\ \text{g}$. Densità: $d = 113{,}4\ \text{g} / 115\ \text{cm}^3 \approx 0{,}9861\ \text{g/cm}^3$; $e_r = 0{,}2/113{,}4 + 1/115 \approx 0{,}0018 + 0{,}0087 = 0{,}0105$; $e_a \approx 0{,}0105 \times 0{,}9861 \approx 0{,}0103 \rightarrow$ prima cifra 1, due cifre: $0{,}010\ \text{g/cm}^3$. $d = (0{,}986 \pm 0{,}010)\ \text{g/cm}^3$.

28. $T = 15{,}3\ \text{s} / 10 = 1{,}53\ \text{s}$; $e_a = 0{,}2\ \text{s} / 10 = 0{,}02\ \text{s} \rightarrow T = (1{,}53 \pm 0{,}02)\ \text{s}$, $e_{\%} = 0{,}02/1{,}53 \approx 1{,}3\%$. Una sola oscillazione con incertezza 0,2 s darebbe $0{,}2/1{,}53 \approx 13\%$: dieci volte peggio.

29. $S = \pi \times (23{,}25\ \text{mm})^2/4 \approx 424{,}6\ \text{mm}^2$; $e_r = 2 \times 0{,}05/23{,}25 \approx 0{,}0043$; $e_a \approx 0{,}0043 \times 424{,}6 \approx 1{,}8\ \text{mm}^2 \rightarrow 2\ \text{mm}^2$. $S = (425 \pm 2)\ \text{mm}^2$.

30. Primo errore: la semidispersione è $(t_{max} - t_{min})/2 = (2{,}40 - 2{,}30)/2 = 0{,}05$ s, non 0,1 s. Secondo errore: il valore va arrotondato alla stessa posizione decimale dell'incertezza (i centesimi). Risultato corretto: $t = (2{,}35 \pm 0{,}05)$ s se la media vale 2,3457 s.

31. Traccia di risposta: una goccia ha un volume dell'ordine di 0,05 mL, molto più piccolo della sensibilità, quindi non si misura da sola. Si contano N gocce versate nel cilindro e si legge il volume totale V_{tot} (con incertezza 0,2 mL); il volume di una goccia è V_{tot}/N, con la stessa incertezza relativa di V_{tot}. Perché sia sotto il 5% serve $V_{tot} > 0{,}2/0{,}05 = 4$ mL, per esempio 100 gocce (circa 5 mL). Conviene leggere il volume prima e dopo (differenza, incertezza 0,4 mL, quindi servono più gocce) oppure partire da cilindro vuoto e asciutto; ripetere la prova e usare la semidispersione per controllare che le gocce siano uniformi.

32. Traccia di risposta: l'incertezza è dominata dal tempo di reazione nell'avviare e nel fermare il cronometro, che è dell'ordine di 0,1–0,2 s e varia da prova a prova; la sensibilità di 0,01 s è molto più piccola. Una stima realistica è qualche decimo di secondo. Verifica: due compagni cronometrano lo stesso evento (o uno stesso intervallo ripetuto più volte) e si confrontano i risultati; la loro dispersione, misurata con la semidispersione, stima l'incertezza vera.