CAPITOLO

9

Scienza e conoscenza tra Ottocento e Novecento

«Una geometria non può essere più vera di un'altra; può soltanto essere più comoda.»
— Henri Poincaré, La scienza e l'ipotesi, parte II, cap. 3

OBIETTIVI

1. Spiegare il problema del quinto postulato e le geometrie di Lobačevskij e di Riemann, con i loro modelli
2. Ricostruire il progetto logicista di Frege, il paradosso di Russell e il significato del teorema di Gödel
3. Esporre la critica di Mach allo spazio assoluto, il convenzionalismo di Poincaré e l'olismo di Duhem
4. Spiegare i postulati della relatività ristretta, la relatività della simultaneità e la dilatazione del tempo, e calcolare il fattore γ
5. Valutare le conseguenze filosofiche della relatività e dei quanti, distinguendole dagli usi impropri
6. Leggere e analizzare testi di Poincaré, Mach, Einstein e Duhem

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Le geometrie non euclidee 3
9.2 I fondamenti della matematica 7
9.3 La scienza esamina se stessa: Mach, Poincaré, Duhem 10
9.4 La relatività e i quanti 14
9.5 Scienze della natura e scienze dell'uomo 18
9.6 Leggere i testi 19

Filosofia 5 · Parte III · Logica, linguaggio e scienza nel Novecento · versione 1.0
Capitolo 9: Scienza e conoscenza tra Ottocento e Novecento · pagine 273–300 del volume completo · estratto per lo studio

Prendi un mappamondo e appoggia il dito sul Polo Nord. Scendi lungo il meridiano di Greenwich fino all'equatore; lì gira di 90° verso est e percorri un quarto dell'equatore, fino al meridiano 90° E; gira di nuovo di 90° e risali verso il Polo. Hai disegnato un triangolo con tre angoli retti: la somma dei suoi angoli è 270°, non i 180° che la geometria del liceo dimostra per ogni triangolo. Non c'è nessun errore: sulla superficie di una sfera valgono teoremi diversi da quelli del piano. Alla fine dell'Ottocento scoperte come questa, prese sul serio, costrinsero matematici, fisici e filosofi a chiedersi di nuovo che cosa sia un assioma, se lo spazio abbia una geometria «vera», che cosa garantisca la certezza della matematica, che cosa voglia dire misurare il tempo. Questo capitolo segue le loro risposte: è il punto in cui la riflessione sulla scienza nasce dentro le scienze stesse.

Contesto

Tra il 1830 e il 1930 le scienze cambiano più in fretta che in ogni secolo precedente. Le geometrie non euclidee, nate in periferia (Kazan', in Russia, e la Transilvania), diventano negli ultimi decenni dell'Ottocento patrimonio comune dei matematici; la logica si rinnova con Frege; la fisica di Newton, che sembrava definitiva, deve fare spazio alla relatività e ai quanti. Molti protagonisti sono scienziati e filosofi insieme: il fisico austriaco Ernst Mach a Praga e a Vienna, il matematico francese Henri Poincaré a Parigi, il fisico e storico della scienza Pierre Duhem a Bordeaux, Albert Einstein a Berna e poi a Berlino. Sono loro stessi a parlare di «crisi»: Poincaré intitola un capitolo del *Valore della scienza* (1905) alla «crisi attuale della fisica matematica», il matematico Hermann Weyl un articolo del 1921 alla «nuova crisi dei fondamenti» della matematica. Gli storici discutono se la parola sia adatta: più che un crollo, fu una revisione profonda dei principi, da cui la scienza uscì più potente. Le date principali sono nella Figura 9.1.

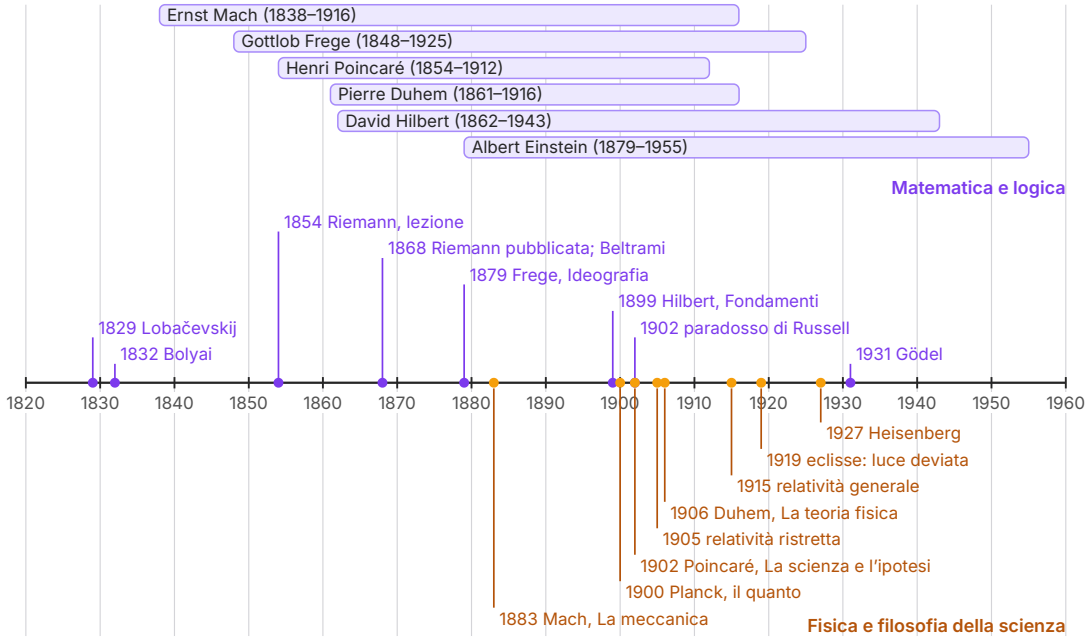

Figura 9.1 Matematica, logica e fisica tra il 1820 e il 1960: le vite di sei protagonisti del capitolo e le date principali (in alto la matematica e la logica, in basso la fisica e la filosofia della scienza). Scala proporzionale.

9.1 Le geometrie non euclidee

9.1.1 Il quinto postulato

Per più di duemila anni gli *Elementi* di Euclide (III secolo a.C.) erano stati il modello di ogni sapere certo: da pochi principi evidenti, con passaggi rigorosi, si ricavano verità che nessuno può contestare. Tra i principi, però, uno sembrava meno evidente degli altri. Il **quinto postulato**, nella forma più usata a scuola, dice che **per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela** a quella retta. È vero per ogni figura che possiamo disegnare, ma parla di rette prolungate all'infinito, che nessuno può controllare. Per secoli i matematici cercarono di dimostrarlo a partire dagli altri postulati, per trasformarlo in un teorema.

Il tentativo più ostinato è quello del gesuita Girolamo Saccheri, che insegnava a Pavia: nell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* («Euclide liberato da ogni macchia», 1733) suppone falso il postulato e cerca di arrivare a una contraddizione, come in una dimostrazione per assurdo. Ricava molti teoremi strani, ma nessuna vera contraddizione, e alla fine respinge l'ipotesi con un argomento che non regge: senza saperlo, aveva scritto i primi capitoli di una geometria diversa.

9.1.2 Lobačevskij, Bolyai, Riemann

Il passo decisivo è rovesciare la domanda: invece di cercare la contraddizione, chiedersi che cosa succede se non arriva mai. Lo fanno, indipendentemente, il russo Nikolaj Lobačevskij, professore a Kazan', che pubblica nel 1829 i principi di una nuova geometria (la chiamerà poi «geometria immaginaria»), e l'ufficiale ungherese János Bolyai, la cui *Appendix* esce nel 1832 in un trattato del padre. Entrambi sostituiscono il quinto postulato con il suo contrario: per un punto esterno a una retta passano **infinite** rette che non la incontrano. Il risultato è una geometria coerente, oggi detta **geometria iperbolica**, con teoremi sorprendenti: la somma degli angoli di un triangolo è sempre minore di 180°, e tanto più piccola quanto più il triangolo è grande; non esistono figure simili di grandezza diversa. Carl Friedrich Gauss, il più grande matematico del tempo, era arrivato alle stesse conclusioni, ma non le pubblicò: temeva, come scrisse a un collega nel 1829, le reazioni ostili di chi non le avrebbe capite.

Una seconda strada si apre a Gottinga il 10 giugno 1854, quando Bernhard Riemann tiene, davanti a Gauss, la lezione *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria*, pubblicata solo nel 1868, due anni dopo la sua morte. Riemann non parte dai postulati ma dalla misura: uno spazio è definito dal modo in cui vi si misurano le distanze, e può essere «curvo». Tra le possibilità c'è uno spazio a curvatura positiva costante, finito ma senza confini, come la superficie di una sfera per chi non può uscirne: è la **geometria ellittica**, detta anche riemanniana, in cui **non esistono** parallele e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180°. Le tre situazioni sono confrontate nella Figura 9.2. Si chiamano **geometrie non euclidee** tutte le geometrie coerenti che rinunciano al quinto postulato, conservando o modificando gli altri.

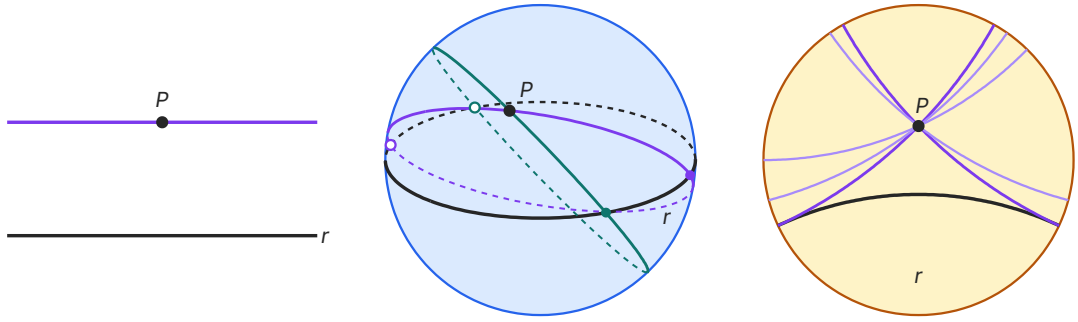

Figura 9.2 Per un punto P esterno a una retta r: nel piano passa una sola parallela (a sinistra); sulla sfera le «rette» sono i cerchi massimi, e due cerchi massimi qualsiasi si incontrano in due punti opposti (al centro: i cerchi passanti per P tagliano tutti l'equatore r; i punti vuoti sono sul lato nascosto); nel disco di Poincaré, modello della geometria di Lobačevskij, le «rette» sono archi perpendicolari al bordo e per P passano infinite rette che non incontrano r (a destra: le due in viola sono le parallele limite, che raggiungono r solo sul bordo).

9.1.3 Modelli: la sfera e il disco

Come si fa a sapere che una geometria strana non nasconde, magari molto avanti, una contraddizione? La risposta venne dai **modelli**: una geometria ha un modello quando si trovano, dentro la geometria ordinaria, oggetti che soddisfano tutti i suoi assiomi. Per la geometria ellittica il modello è la sfera, se chiamiamo «rette» i cerchi massimi (l'equatore, i meridiani): la via più breve tra due punti di una sfera è un arco di cerchio massimo, e due cerchi massimi si tagliano sempre. Nel 1868 l'italiano Eugenio Beltrami mostrò che la geometria di Lobačevskij vale su una superficie a forma di tromba, la pseudosfera; lo stesso Beltrami e, dopo di lui, Felix Klein e Henri Poincaré costruirono modelli dell'intero piano iperbolico dentro un cerchio, come quello della Figura 9.3. Se la geometria iperbolica contenesse una contraddizione, la conterrebbe anche la geometria euclidea in cui il modello è costruito. Le geometrie non euclidee sono dunque coerenti *tanto quanto* quella di Euclide.

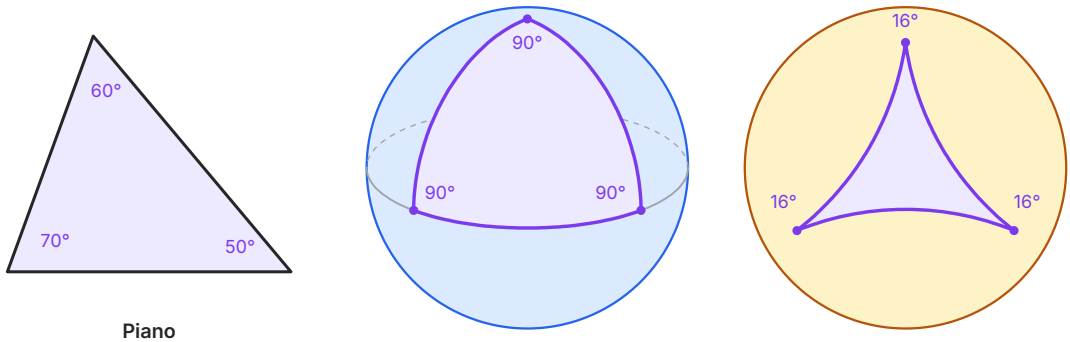

Figura 9.3 La somma degli angoli di un triangolo nelle tre geometrie. A sinistra un triangolo del piano. Al centro l'ottante di una sfera, delimitato da un quarto di equatore e da due meridiani: tre angoli retti. A destra un triangolo equilatero nel disco di Poincaré, con i vertici a 0,78 raggi dal centro; ogni angolo misura circa 16°.

ESEMPIO SVOLTO

Consegna. Sulla sfera vale la formula di Girard: un triangolo i cui lati sono archi di cerchio massimo, con angoli α, β, γ (in radianti), ha area $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Calcola l'area del triangolo del mappamondo (l'ottante della Figura 9.3) sulla Terra ($R = 6371$ km) e confrontala con la superficie terrestre. Poi stima l'eccesso angolare di un triangolo equilatero di lato 100 km.

Soluzione. I tre angoli sono retti: $\alpha + \beta + \gamma = 3\pi/2$, quindi $A = R^2(3\pi/2 - \pi) = \pi R^2/2 \approx 6{,}38 \times 10^7$ km^2. La superficie della sfera è $4\pi R^2 \approx 5{,}10 \times 10^8$ km^2: il rapporto è $(\pi/2)/(4\pi) = 1/8$, come deve essere, perché l'equatore e due meridiani perpendicolari dividono la sfera in otto parti uguali. Un triangolo equilatero di lato 100 km ha invece un'area di circa $(\sqrt{3}/4) \times 100^2 \approx 4330$ km^2; l'eccesso è $A/R^2 \approx 1{,}07 \times 10^{-4}$ rad, cioè circa 22″ (secondi d'arco).

Che cosa insegna. L'eccesso è proporzionale all'area: per i triangoli piccoli rispetto al raggio è minuscolo. Per questo un'esperienza fatta in piccolo non distingue tra le geometrie.

ERRORE FREQUENTE

«Le geometrie non euclidee hanno dimostrato che Euclide sbagliava.» No. Hanno dimostrato che il quinto postulato **non si può dedurre** dagli altri: se si potesse, negarlo porterebbe a una contraddizione, e invece porta a sistemi coerenti. La geometria euclidea resta valida come sistema deduttivo; quello che cambia è il suo statuto. Non è più l'unica geometria pensabile, e diventa una domanda aperta quale geometria descriva meglio lo spazio fisico.

9.1.4 Hilbert: gli assiomi come definizioni implicite

Se esistono più geometrie, che cosa sono i loro assiomi? Non possono essere verità evidenti sullo spazio, perché verità incompatibili non possono essere tutte evidenti. Nel 1899 David Hilbert, professore a Gottinga, pubblica i *Fondamenti della geometria*, che si aprono così: «Pensiamo tre diversi sistemi di cose: le cose del primo sistema le chiamiamo *punti* [...]; le cose del secondo sistema le chiamiamo *rette* [...]; le cose del terzo sistema le chiamiamo *piani*»; le loro relazioni («giacere», «tra», «parallelo», «congruente», «continuo») sono descritte «in modo esatto e completo» dagli assiomi (cap. I, § 1; traduzione della redazione). Punti e rette non vengono definiti: sono qualunque cosa soddisfi gli assiomi. Gli assiomi funzionano così come **definizioni implicite** dei termini che contengono, e la geometria diventa lo studio di ciò che segue logicamente da essi. Hilbert divide gli assiomi in cinque gruppi e mostra, costruendo modelli, che l'assioma delle parallele è indipendente dagli altri.

Per la filosofia la conseguenza è grande. Kant, come hai visto nel volume precedente, considerava i teoremi della geometria giudizi sintetici a priori, necessari perché lo spazio euclideo è la forma della nostra intuizione. Dopo Lobačevskij, Riemann e Hilbert bisogna distinguere due domande che Kant teneva unite: la geometria come sistema logico, che dipende solo dagli assiomi scelti, e la geometria dello spazio fisico, che riguarda il mondo. Chi deve rispondere alla seconda domanda? Su questo, come vedrai, Poincaré e Einstein daranno risposte diverse.

9.2 I fondamenti della matematica

9.2.1 Cantor e l'infinito

Se la geometria non poggia più sull'evidenza, su che cosa poggia la matematica? Molti matematici dell'Ottocento pensarono di fondarla sull'aritmetica, e l'aritmetica sul concetto di insieme. Georg Cantor, professore a Halle, studiò gli insiemi infiniti come oggetti matematici a pieno titolo: due insiemi hanno la stessa «potenza» (lo stesso numero di elementi) se i loro elementi si possono accoppiare uno a uno senza resti. Ne seguono risultati sorprendenti: i numeri pari sono tanti quanti i numeri naturali, ma i numeri reali sono «di più» dei naturali (1874). Esistono dunque infiniti di grandezze diverse.

COLLEGAMENTI

Matematica. Già Galileo, nei *Discorsi* (1638), aveva notato che ogni numero naturale si può accoppiare al suo quadrato (1–1, 2–4, 3–9…), sicché i quadrati sono «tanti» quanti i numeri, benché siano solo una parte di essi; ne aveva concluso che «maggiore» e «uguale» non si applicano all'infinito. Cantor trasforma il paradosso in un metodo: la corrispondenza uno a uno diventa il criterio per confrontare gli infiniti, e Richard Dedekind (1888) farà di questa proprietà la definizione stessa di insieme infinito, un insieme che si può accoppiare uno a uno con una sua parte. Con il metodo della diagonale (1891) Cantor dimostrò poi che nessun elenco infinito di numeri reali tra 0 e 1 può contenerli tutti: basta costruire un numero che differisce dal primo della lista nella prima cifra decimale, dal secondo nella seconda, e così via. Nel 1926 Hilbert difenderà la teoria degli insiemi dicendo che nessuno avrebbe potuto cacciare i matematici dal «paradiso» che Cantor aveva creato.

9.2.2 Il logicismo di Frege

Gottlob Frege, professore di matematica a Jena, si pose una domanda più radicale: che cos'è un numero, e su che cosa si fonda la certezza delle verità aritmetiche? Per rispondere costruì un nuovo linguaggio logico, l'*Ideografia* (1879), più potente della logica aristotelica, e nei *Fondamenti dell'aritmetica* (1884) e nelle *Leggi fondamentali dell'aritmetica* (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893 e 1903) tentò di dimostrare che tutta l'aritmetica si deriva dalla logica pura: i numeri si definiscono a partire da concetti e classi, i teoremi si dimostrano con le sole leggi logiche. È il **logicismo**. Se il progetto riesce, le verità aritmetiche sono analitiche, non sintetiche a priori come voleva Kant; Frege, invece, concedeva a Kant che la geometria resta fondata sull'intuizione. Del suo linguaggio e della sua teoria del significato parla il capitolo 10; qui conta il progetto, e la sua crisi.

9.2.3 Il paradosso di Russell

Tra le leggi logiche di Frege c'è un principio che sembra innocuo: per ogni condizione esiste la classe delle cose che la soddisfano (la classe dei cucchiai, la classe dei numeri primi…). Il 16 giugno 1902, mentre il secondo volume dei *Grundgesetze* è in stampa, il giovane logico inglese Bertrand Russell gli scrive una breve lettera: da quel principio si ricava una contraddizione. È il **paradosso di Russell**, ricostruito nell'esempio svolto e nella Figura 9.4. Frege risponde il 22 giugno riconoscendo che il colpo tocca le fondamenta stesse del suo edificio, e aggiunge al secondo volume (1903) una postilla in cui ammette il problema e propone un rimedio che si rivelerà insufficiente. Lo stesso paradosso era stato trovato, poco prima e indipendentemente, dal matematico tedesco Ernst Zermelo.

ESEMPIO SVOLTO

Consegna. Alcune classi appartengono a se stesse, altre no. La classe dei cucchiai non è un cucchiaio: non appartiene a se stessa. La classe di tutte le cose che non sono cucchiai non è un cucchiaio: appartiene a se stessa. Sia R la classe di tutte le classi che **non** appartengono a se stesse. R appartiene a se stessa?

1. Supponiamo che $R \in R$. Allora R è una delle classi che stanno in R, e queste per definizione non appartengono a se stesse: dunque $R \notin R$. Contraddizione.
2. Supponiamo che $R \notin R$. Allora R soddisfa la condizione che definisce R: dunque $R \in R$. Contraddizione.
3. Le due possibilità sono le sole (principio del terzo escluso) e portano entrambe a una contraddizione: il principio secondo cui ogni condizione definisce una classe è contraddittorio.

Il barbiere. Russell stesso usò un'analogia: in un villaggio il barbiere rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sé; chi rade il barbiere? Ma l'analogia ha un limite. Dal barbiere si conclude soltanto che un barbiere così **non esiste**, e il problema scompare. Nel caso di R, invece, l'esistenza della classe era garantita da una legge della logica: a cadere è la legge.

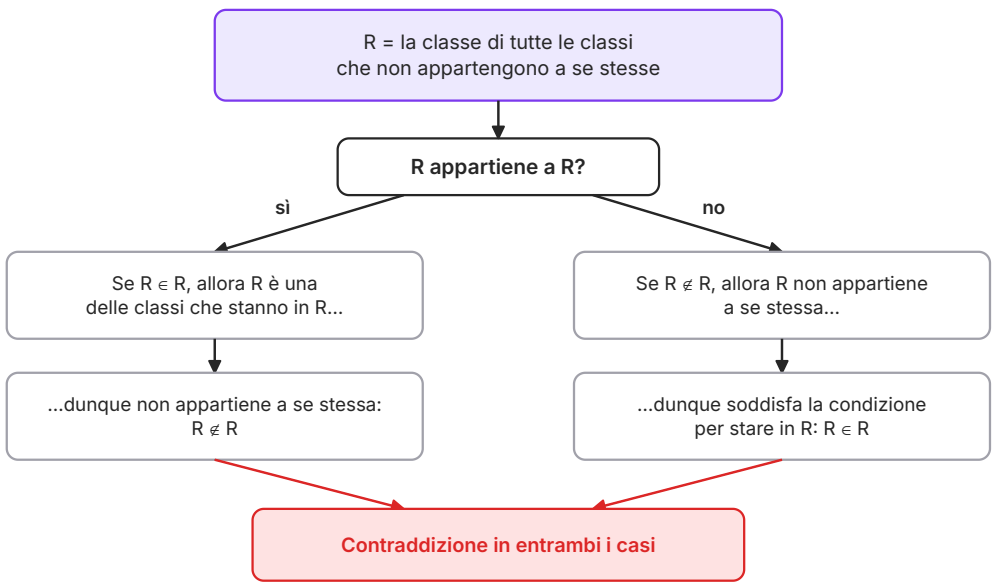

Figura 9.4 Il paradosso di Russell come diagramma di decisione: entrambe le risposte alla domanda «R appartiene a R?» portano alla risposta opposta.

9.2.4 Tre vie d'uscita e il teorema di Gödel

Dopo il 1902 i matematici seguono strade diverse. Russell elabora la teoria dei tipi (1908), che dispone gli oggetti in livelli e ammette in una classe soltanto oggetti del livello immediatamente inferiore, e la applica nei *Principia Mathematica*, scritti con Alfred N. Whitehead (1910–1913). Zermelo, nello stesso 1908, sceglie una via assiomatica: non ogni condizione definisce un insieme, ma solo quelle ammesse da assiomi precisi, che non permettono di formare «l'insieme di tutti gli insiemi». Negli anni Venti Hilbert propone il suo programma, detto **formalismo**: scrivere tutta la matematica in sistemi formali, cioè in linguaggi con regole esplicite, e dimostrare con metodi elementari e sicuri che quei sistemi non producono contraddizioni. Il matematico olandese L. E. J. Brouwer, con l'**intuizionismo**, considera invece esistente solo ciò che si può costruire, e non applica agli insiemi infiniti il principio del terzo escluso.

Nel 1931 il giovane logico austriaco Kurt Gödel pubblica a Vienna un articolo che cambia i termini della discussione. Il suo **primo teorema di incompletezza** dice, in forma semplificata: in ogni sistema formale coerente, con assiomi che si possono elencare in modo meccanico e abbastanza potente da esprimere l'aritmetica elementare, esistono enunciati che il sistema non può né dimostrare né confutare. Il secondo teorema aggiunge che un tale sistema non può dimostrare, con i propri mezzi, la propria coerenza. Il programma di Hilbert, nella forma originaria, non è realizzabile: la verità aritmetica non si lascia chiudere in un unico sistema di regole.

> **ERRORE FREQUENTE**
> Il teorema di Gödel è citato spesso a sproposito. Non dice che «tutto è relativo», né che la matematica è incerta o contraddittoria, né che la ragione non può conoscere la verità. È un teorema dimostrato, con ipotesi precise: riguarda i sistemi formali coerenti, con assiomi elencabili, che contengono l'aritmetica; non si applica a qualunque discorso, a una legge dello Stato o a una teoria fisica in quanto tale. Mostra un limite della *dimostrabilità* all'interno di un sistema, ottenuto proprio con un ragionamento rigoroso.

9.3 La scienza esamina se stessa: Mach, Poincaré, Duhem

Nello stesso periodo tre scienziati riflettono su che cosa siano davvero le leggi e le teorie che usano ogni giorno. Il Positivismo aveva visto nella scienza la conoscenza certa dei fatti (capitolo 5); Mach, Poincaré e Duhem continuano a stimare la scienza sopra ogni altro sapere, ma mostrano quanto, nelle sue teorie, sia opera dello scienziato: concetti, scelte, convenzioni.

9.3.1 Mach: la critica dello spazio assoluto

Ernst Mach (1838–1916), fisico sperimentale a Praga e poi professore di filosofia a Vienna, studiò il suono, l'ottica, il moto dei proiettili supersonici. Nella *Meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (1883) racconta come sono nati i concetti della meccanica per smontare quelli che non hanno radice nell'esperienza. Il bersaglio principale è lo spazio assoluto di Newton, che hai già incontrato nel volume precedente nella polemica con Leibniz. Newton lo difendeva con un esperimento: un secchio d'acqua appeso a una corda attorcigliata viene fatto girare; all'inizio il secchio gira e l'acqua no, e la superficie resta piana; poi l'acqua, trascinata, gira insieme al secchio e la sua superficie diventa concava. La concavità non dipende dunque dalla rotazione rispetto al secchio, ma, secondo Newton, dalla rotazione rispetto allo spazio assoluto.

Mach risponde (T2) che l'esperimento mostra un'altra cosa: la rotazione rispetto alle pareti del secchio non produce effetti, quella rispetto alla Terra e alle stelle sì. Nessuno sa che cosa accadrebbe con pareti spesse chilometri. Lo spazio e il moto assoluti sono «puri enti di pensiero», che nessuna esperienza può mostrare; tutto ciò che conosciamo sono posizioni e moti *relativi* ai corpi del mondo. Einstein lesse Mach da studente e, nel necrologio del 1916, lo riconobbe come un precursore della relatività; nel 1918 chiamerà «principio di Mach» l'idea che l'inerzia di un corpo dipenda dalla presenza degli altri corpi.

Dietro la critica c'è una teoria della conoscenza. Per Mach la scienza nasce dal bisogno di risparmiare fatica: invece di ricordare mille osservazioni, ricordiamo una legge che le riassume. Il suo compito è l'**economia del pensiero**, cioè descrivere i fatti nel modo più breve e completo, non spiegarli con cause nascoste. E i fatti, alla fine, sono combinazioni di «elementi»: colori, suoni, pressioni, durate, che chiamiamo sensazioni quando li consideriamo in rapporto al nostro corpo. Anche l'io, nell'*Analisi delle sensazioni* (1886), è un insieme relativamente stabile di elementi, come il «fascio» di percezioni di Hume. Per la stessa diffidenza verso ciò che non si osserva, Mach dubitò a lungo degli atomi. Una posizione vicina è quella del tedesco Richard Avenarius, che la chiamò **empiriocriticismo** (*Critica dell'esperienza pura*, 1888–1890); contro entrambi polemizzò Lenin in *Materialismo ed empiriocriticismo* (1909). Al nome di Mach si richiamerà, nel 1928, l'associazione da cui nacque il Circolo di Vienna (vedi anche il capitolo 10).

9.3.2 Poincaré: il convenzionalismo

Henri Poincaré (1854–1912) fu uno dei matematici più grandi del suo tempo: lavorò sulle equazioni differenziali, sulla meccanica celeste, sul problema dei tre corpi, e arrivò molto vicino, nel 1905, alla teoria della relatività. Scrisse anche libri per un pubblico colto, il più famoso dei quali è *La scienza e l'ipotesi* (*La Science et l'Hypothèse*, 1902), seguito dal *Valore della scienza* (1905) e da *Scienza e metodo* (1908).

Il problema da cui parte è quello lasciato dalle geometrie non euclidee: se ne esistono più di una, quale è vera? Poincaré esamina le due risposte classiche (T1). Gli assiomi non sono giudizi sintetici a priori, come voleva Kant: se lo fossero, non potremmo nemmeno pensarne il contra-

rio, e invece Lobačevskij ha costruito una geometria intera sulla negazione del quinto postulato. Non sono nemmeno verità sperimentali: non si fanno esperimenti su rette ideali, e se la geometria fosse sperimentale sarebbe approssimativa e sempre rivedibile, mentre è una scienza esatta. Sono **convenzioni**: definizioni mascherate, che scegliamo liberamente, con il solo vincolo di non contraddirci, e la cui scelta è guidata dall'esperienza. Questa posizione si chiama **convenzionalismo**. Chiedere se la geometria euclidea sia vera è come chiedere se il metro sia più vero del braccio: una geometria non è più vera di un'altra, è soltanto *più comoda*. E quella di Euclide, per Poincaré, resterà la più comoda, perché è la più semplice e si accorda bene con il comportamento dei corpi solidi con cui costruiamo gli strumenti di misura.

Poincaré estende il discorso alla fisica, ma con cautela. Alcuni grandi principi, come il principio d'inerzia o la conservazione dell'energia, nati dall'esperienza, vengono innalzati dagli scienziati al rango di convenzioni che nessun esperimento può più smentire, perché li usiamo per interpretare gli esperimenti. Le leggi particolari, invece, restano verificabili e rivedibili. Contro il filosofo Édouard Le Roy, che ne ricavava che la scienza è tutta una costruzione artificiale, Poincaré rispose nel *Valore della scienza*: lo scienziato crea il linguaggio in cui esprime i fatti, non i fatti; e la scienza ci fa conoscere davvero dei rapporti tra le cose, che le teorie successive conservano anche quando cambiano le immagini con cui li rappresentano.

> **DA RICORDARE**
> Per Poincaré gli assiomi della geometria non sono né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali, ma **convenzioni** (definizioni mascherate), libere ma guidate dall'esperienza e vincolate dalla non contraddizione. Una geometria non è più vera di un'altra, ma può essere più comoda. In fisica sono convenzioni solo alcuni principi generali; le leggi restano controllabili, e la scienza conosce rapporti reali tra le cose.

9.3.3 Duhem: nessun esperimento cruciale

Pierre Duhem (1861–1916), fisico teorico a Bordeaux, cattolico e conservatore, fu anche lo storico che riscoprì la fisica medievale, per esempio la teoria dell'*impetus* che hai studiato nel volume del terzo anno. Nella *Teoria fisica: il suo oggetto e la sua struttura* (1906) sostiene che una teoria fisica non spiega la natura ultima delle cose, compito che lascia alla metafisica, ma rappresenta e classifica in modo economico le leggi sperimentali. Da qui la sua tesi più famosa: un esperimento non può mai condannare un'ipotesi isolata, ma solo un intero insieme di ipotesi. Per prevedere un risultato, infatti, il fisico usa non solo l'ipotesi che vuole controllare, ma molte altre: le leggi dell'ottica che fanno funzionare il cannocchiale, quelle dell'elettricità che fanno funzionare il galvanometro, e così via. Se la previsione fallisce, l'esperimento dice che *almeno una* delle ipotesi è sbagliata, ma non quale. Questa posizione si chiama **olismo** (dal greco *hólos*, «intero»): la teoria si controlla come un tutto.

Ne segue che in fisica non esiste l'*experimentum crucis*, l'esperimento che, come l'*instantia crucis* di Bacone, decide da solo tra due ipotesi rivali. L'esempio di Duhem è celebre. Nel 1850

Léon Foucault misurò che la luce va più piano nell'acqua che nell'aria, come prevedeva la teoria ondulatoria e contro la teoria corpuscolare di Newton. Si disse che la natura della luce era decisa una volta per tutte. Duhem osserva che l'esperimento aveva condannato il *sistema* teorico di Newton, non l'idea che la luce sia fatta di corpuscoli: si poteva costruire un altro sistema corpuscolare in accordo con Foucault. Mezzo secolo dopo, con i quanti di luce di Einstein (1905), l'idea di particelle di luce tornò davvero, dentro una teoria nuova.

APPROFONDIMENTO

La tesi di Duhem–Quine. Nel 1951 il filosofo americano W. V. O. Quine, nel saggio «Due dogmi dell'empirismo», estese l'olismo di Duhem dalla fisica a tutta la conoscenza: davanti a un'esperienza contraria si può sempre salvare un enunciato modificando altre parti del sistema, perfino la logica. Gli epistemologi parlano da allora di «tesi di Duhem–Quine», benché Duhem la limitasse alla fisica e richiedesse al fisico il «buon senso» per decidere che cosa correggere. È uno dei problemi con cui dovrà fare i conti il falsificazionismo di Popper (vedi anche il capitolo 11).

IN SINTESI

Tabella 9.1 Tre scienziati-filosofi a confronto.

	Mach	Poincaré	Duhem
Opera chiave	*La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (1883)	*La scienza e l'ipotesi* (1902)	*La teoria fisica* (1906)
Che cos'è una teoria	una descrizione economica dei fatti	un sistema in cui alcuni principi sono convenzioni comode	una rappresentazione e classificazione delle leggi sperimentali
Tesi caratteristica	spazio e moto assoluti sono enti di pensiero; economia del pensiero	gli assiomi della geometria sono definizioni mascherate	l'esperienza controlla solo insiemi di ipotesi (olismo)
Che cosa si salva	i rapporti tra elementi dell'esperienza	i rapporti reali tra le cose	la classificazione naturale delle leggi
Eredità	Einstein; il Circolo di Vienna	il dibattito su geometria e fisica	la tesi di Duhem–Quine; Popper

9.4 La relatività e i quanti

9.4.1 Due principi in conflitto

All'inizio del Novecento la fisica conteneva due principi difficili da conciliare. Il primo è il principio di relatività di Galileo: con esperimenti fatti dentro un sistema in moto rettilineo uniforme non si può stabilire se il sistema si muova (lo hai visto con la nave del *Dialogo*, nel volume precedente). Il secondo viene dall'elettromagnetismo di Maxwell (1865): la luce è un'onda che si propaga nel vuoto a una velocità determinata, $c \approx 300\,000$ km/s. Ma rispetto a che cosa? Si pensava a un mezzo che riempie lo spazio, l'etere, e si cercò di misurare il moto della Terra attraverso di esso; l'esperimento più preciso, di Albert Michelson e Edward Morley (1887), non rilevò alcun effetto.

Nel 1905 Albert Einstein, ventiseienne impiegato dell'Ufficio brevetti di Berna, pubblica l'articolo «Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento». La sua mossa è prendere sul serio entrambi i principi e rinunciare a ciò che li faceva sembrare incompatibili. I postulati sono due: **1)** le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro (principio di relatività); **2)** nel vuoto la luce si propaga sempre con la stessa velocità c, qualunque sia il moto della sorgente. Per renderli compatibili bisogna abbandonare un'idea che sembrava ovvia: che il tempo scorra uguale per tutti.

9.4.2 La relatività della simultaneità

Einstein comincia da un'analisi concettuale, che espone anche nel libro divulgativo *Relatività: esposizione divulgativa* (*Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, 1917; T3). Che cosa vuol dire che due fulmini sono caduti *simultaneamente* in due punti lontani A e B di una ferrovia? Un concetto ha senso in fisica solo se esiste un metodo per decidere, nel caso concreto, se si applica. Einstein propone il metodo: un osservatore a metà strada, nel punto M, riceve la luce dei due fulmini; se la riceve nello stesso istante, i fulmini sono simultanei. Che la luce impieghi lo stesso tempo da A a M e da B a M non è un fatto da scoprire, ma una stipulazione che fissa il significato della parola: un'idea che ricorda da vicino le convenzioni di Poincaré.

Ora immaginiamo un treno lunghissimo che corre sul binario nella direzione da A verso B. Un viaggiatore che, al momento dei fulmini, si trova di fronte a M si muove verso la luce che viene da B e si allontana da quella che viene da A: vede prima il lampo di B. Per lui, che usa lo stesso metodo rispetto al treno, i fulmini non sono simultanei. Ne segue la **relatività della simultaneità**: eventi simultanei rispetto alla ferrovia non lo sono rispetto al treno, e viceversa; ogni sistema di riferimento ha il suo tempo, e un'indicazione di tempo ha senso solo se si dice a quale sistema si riferisce.

9.4.3 La dilatazione del tempo

Dai due postulati segue anche che un orologio in moto, osservato da un sistema rispetto al quale si muove, va più piano. Lo si vede con un orologio ideale, l'orologio a luce: un impulso luminoso rimbalza tra due specchi a distanza L, e ogni andata e ritorno è un «tic». Per chi viaggia con l'orologio un tic dura $\Delta t_0 = 2L/c$. Per chi lo vede passare a velocità v, la luce percorre una diagonale, più lunga; poiché la sua velocità è sempre c, il tic dura di più (Figura 9.5). Il teorema di Pitagora applicato al triangolo della figura dà $(c\Delta t/2)^2 = (c\Delta t_0/2)^2 + (v\Delta t/2)^2$, da cui:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0, \text{ con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

È la **dilatazione del tempo**. Il fattore γ è praticamente 1 alle velocità della vita quotidiana, e cresce senza limite quando v si avvicina a c (Figura 9.6). Per questo la meccanica di Newton resta un'ottima approssimazione per i treni e i pianeti, ma non per le particelle velocissime. La dilatazione non è un difetto degli orologi: riguarda ogni processo fisico, e si misura.

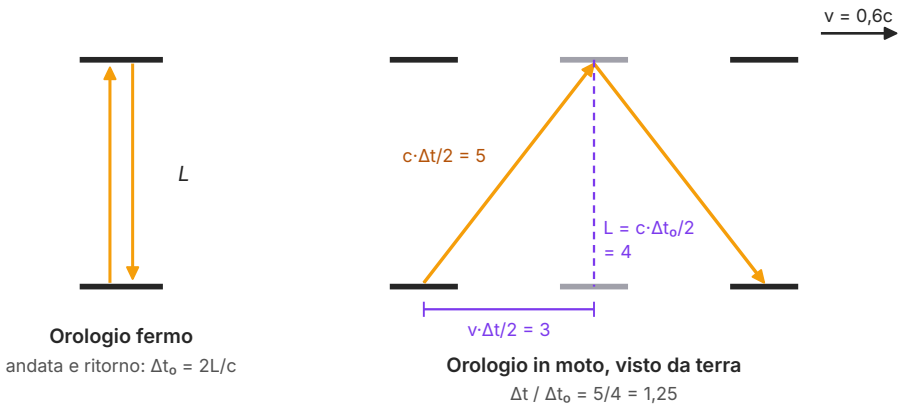

Figura 9.5 L'orologio a luce. A sinistra, fermo: l'impulso va e torna lungo la distanza L. A destra lo stesso orologio visto da terra mentre si muove a v = 0,6c: in mezzo tic la luce percorre l'ipotenusa (5 unità) mentre l'orologio avanza di 3 unità; la distanza tra gli specchi resta 4 unità. Il tic dura quindi 5/4 = 1,25 volte di più.

ESEMPIO SVOLTO

Consegna. Calcola γ per $v = 0{,}6c$ e $v = 0{,}8c$. Poi considera i muoni, particelle prodotte dai raggi cosmici nell'alta atmosfera: a riposo vivono in media $\tau = 2{,}2$ µs (milionesimi di secondo). Un muone che scende a $v = 0{,}995c$ da 10 km di quota può arrivare a terra?

Soluzione. Per $v = 0{,}6c$: $1 - 0{,}36 = 0{,}64$, $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, $\gamma = 1/0{,}8 = 1{,}25$ (il triangolo 3-4-5 della Figura 9.5). Per $v = 0{,}8c$: $1 - 0{,}64 = 0{,}36$, $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, $\gamma = 1/0{,}6 \approx 1{,}667$. Senza relatività un muone percorrerebbe in media $v\tau \approx 0{,}995 \times (3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}) \times (2{,}2 \times 10^{-6}\ \text{s}) \approx 660$ m prima di decadere: da 10 km di quota non ne arriverebbe quasi nessuno (la discesa dura circa 33,5 µs, più di 15 vite medie, e la frazione che sopravvive è $e^{-15{,}2} \approx 2 \times 10^{-7}$). Ma a $0{,}995c$ si ha $\gamma \approx 10{,}0$: per noi la vita media del muone diventa circa 22 µs e il suo percorso medio circa 6,6 km. Il tempo proprio della discesa è $33{,}5/10{,}0 \approx 3{,}35$ µs, circa 1,5 vite medie: ne arriva a terra circa il 22 % ($e^{-1{,}52} \approx 0{,}22$).

Che cosa insegna. I rivelatori a livello del mare contano davvero molti muoni: è una delle conferme quotidiane della dilatazione del tempo.

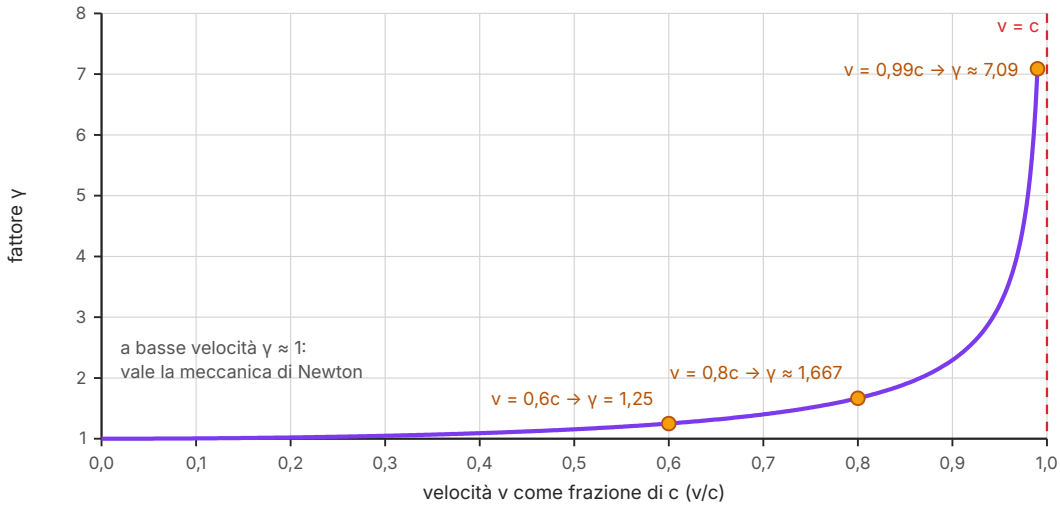

Figura 9.6 Il fattore $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ in funzione della velocità, calcolato fino a $v = 0{,}99c$. I punti per $v = 0{,}6c$ e $v = 0{,}8c$ sono quelli dell'esempio svolto; per $v = 0{,}995c$, la velocità dei muoni dell'esempio, si ha $\gamma \approx 10$, fuori scala. La retta tratteggiata $v = c$ è un asintoto: nessun corpo dotato di massa la raggiunge.

9.4.4 La relatività generale e l'eclissi del 1919

La relatività del 1905 riguarda solo i moti uniformi; Einstein la chiamò poi «speciale» o «ristretta». Dieci anni di lavoro lo portano alla **relatività generale** (novembre 1915), che è una nuova teoria della gravità. La gravità non è più una forza che agisce a distanza, ma la curvatura dello spazio-tempo prodotta dalla materia e dall'energia: i corpi in caduta libera e la luce seguono le

linee «più dritte» possibili in uno spazio-tempo curvo. Per descriverlo Einstein usa proprio la geometria di Riemann. La domanda che Poincaré considerava senza senso, quale geometria abbia lo spazio fisico, diventa una questione della fisica: su grande scala, vicino alle grandi masse, lo spazio-tempo non è euclideo.

La teoria spiegava un'anomalia nota da decenni, lo spostamento del perielio di Mercurio (43″ per secolo), e faceva una previsione nuova: la luce di una stella che passa radente al Sole deve essere deviata di 1,75″, il doppio di quanto si ricava dalla teoria di Newton. Le spedizioni inglesi organizzate da Arthur Eddington e Frank Dyson per l'eclissi totale del 29 maggio 1919, a Sobral, in Brasile, e sull'isola di Príncipe, nel golfo di Guinea, fotografarono le stelle vicine al Sole oscurato. Il 6 novembre 1919 i risultati, favorevoli a Einstein, furono annunciati a Londra e Einstein divenne famoso in tutto il mondo. La precisione di quelle misure fu discussa; le osservazioni successive, molto più precise, hanno confermato la previsione di Einstein.

COLLEGAMENTI

Fisica e Storia. La relatività è oggi tecnologia di uso quotidiano. Gli orologi atomici dei satelliti GPS, che si muovono a circa 3,9 km/s, rimarrebbero indietro di circa 7 μs al giorno per la dilatazione del tempo della relatività speciale; ma, più lontani dalla massa della Terra, andrebbero avanti di circa 45 μs al giorno per la relatività generale. Il sistema corregge una differenza netta di circa 38 μs al giorno: senza correzione, l'errore di posizione crescerebbe di chilometri al giorno. Nel 1919, pochi mesi dopo la fine della guerra, astronomi inglesi verificavano la teoria di un fisico che lavorava a Berlino. Nel 1922, a Parigi, Einstein discusse il significato del tempo con Bergson (vedi anche il capitolo 7).

9.4.5 I quanti e il determinismo

Nello stesso periodo nasce l'altra grande teoria del Novecento. Il 14 dicembre 1900 Max Planck, per spiegare la radiazione emessa dai corpi caldi, ipotizza che l'energia sia scambiata non in modo continuo, ma in pacchetti, i «quanti», proporzionali alla frequenza ($E = h\nu$, dove h è la costante di Planck). Einstein nel 1905 applica l'idea alla luce stessa, Niels Bohr nel 1913 al modello dell'atomo. Negli anni Venti una nuova generazione costruisce la meccanica quantistica. Nel 1927 Werner Heisenberg formula il **principio di indeterminazione**: non si possono conoscere con precisione arbitraria, nello stesso tempo, la posizione e la quantità di moto di una particella; il prodotto delle due incertezze non può scendere sotto un valore minimo, dell'ordine di h. La teoria, nell'interpretazione di Bohr e Heisenberg detta «di Copenaghen», prevede in generale solo probabilità. È la fine del determinismo di Laplace, secondo cui dallo stato presente del mondo si potrebbe calcolare tutto il futuro? I fisici stessi si divisero.

APPROFONDIMENTO

Einstein e Bohr. Einstein, che aveva contribuito a far nascere la teoria dei quanti, non accettò mai che fosse completa. In una lettera al fisico Max Born del 4 dicembre 1926 scrisse di essere convinto che Dio, il «Vecchio», non gioca ai dadi: la frase che si cita di solito, «Dio non gioca a dadi», è una sintesi posteriore. Dal congresso Solvay di Bruxelles (1927) Einstein propose a Bohr esperimenti mentali per mostrare che la teoria era incompleta, e Bohr li discusse uno per uno. La discussione divenne sperimentale nella seconda metà del Novecento, e gli esperimenti hanno dato ragione alle previsioni della meccanica quantistica. Che cosa questo dica sul determinismo e sulla realtà è ancora oggetto di discussione tra fisici e filosofi.

9.4.6 Che cosa cambia per la filosofia

Le nuove teorie non trasformano la scienza in un'opinione. Al contrario, sono verificate con una precisione mai raggiunta prima. Cambiano però alcuni concetti che la filosofia moderna aveva considerato fissi: lo spazio e il tempo assoluti di Newton, che Kant aveva fatto diventare forme necessarie della nostra intuizione; la causalità intesa come previsione certa; l'idea di un osservatore che guarda il mondo senza esservi coinvolto. Le teorie di Einstein sono costruite su grandezze invarianti, uguali per tutti (la velocità della luce, le leggi della fisica): in questo senso sono teorie dell'oggettività, non del punto di vista.

ERRORE FREQUENTE

«Einstein ha dimostrato che tutto è relativo.» No. La relatività dice che alcune grandezze (le durate, le lunghezze, la simultaneità) dipendono dal sistema di riferimento, proprio perché altre, come la velocità della luce e la forma delle leggi fisiche, sono le stesse per tutti. Non ha nulla a che fare con il relativismo morale o culturale. Allo stesso modo, il principio di indeterminazione non dice che l'osservatore «crea» la realtà con il pensiero, né autorizza conclusioni mistiche: riguarda misure fisiche, ed è espresso da una formula.

9.5 Scienze della natura e scienze dell'uomo

Mentre fisici e matematici discutono i fondamenti delle loro discipline, gli studiosi della società e della storia si chiedono se il metodo delle scienze naturali valga anche per loro. Nel 1883, l'anno della *Meccanica* di Mach, l'economista austriaco Carl Menger difende un'economia teorica, che cerca leggi generali come la fisica, contro la scuola storica tedesca di Gustav Schmoller, che vuole studiare ciascuna economia nella sua storia concreta. È la «disputa sul metodo» (*Methodenstreit*). Negli stessi anni Wilhelm Dilthey distingue le scienze che «spiegano» la natura da quelle che «comprendono» il mondo umano, e Wilhelm Windelband le scienze che cercano leggi da quelle che descrivono eventi singoli (vedi anche il capitolo 7).

Il contributo più influente viene dal sociologo tedesco Max Weber. Le scienze sociali, secondo Weber, possono essere oggettive purché tengano distinti due piani: l'accertamento dei fatti e i giudizi di valore. Lo studioso sceglie che cosa studiare in base ai propri interessi e valori, ma, una volta posta la domanda, deve rispondere senza far intervenire le proprie preferenze: è l'ideale dell'avalutatività (*Wertfreiheit*). Il suo strumento è il «tipo ideale» (1904): un modello costruito accentuando alcuni tratti della realtà, come «il capitalismo» o «la burocrazia», che non esiste allo stato puro ma permette di misurare e confrontare i casi reali, un po' come il piano senza attrito del fisico. Del pensiero politico di Weber si occupa il capitolo 15.

Le domande aperte in questo capitolo proseguono nel Novecento per due strade: la riflessione sul linguaggio e sulla logica, da Frege a Wittgenstein e al Circolo di Vienna (capitolo 10), e quella sul metodo e sul progresso della scienza, da Popper a Kuhn (capitolo 11).

9.6 Leggere i testi

9.6.1 T1 · Poincaré: una geometria non è più vera di un'altra

Nota introduttiva. Nel terzo capitolo della *Scienza e l'ipotesi* (1902), dedicato alle geometrie non euclidee, Poincaré ha presentato le geometrie di Lobačevskij e di Riemann e ha immaginato esseri senza spessore che vivono su una sfera e vi costruiscono una geometria sferica. Poi pone la domanda decisiva: se più geometrie sono possibili, che cosa sono i loro assiomi? Il ragionamento procede per eliminazione. Le parole in corsivo sono sottolineate da Poincaré.

> Sono [gli assiomi della geometria] giudizi sintetici a priori, come diceva Kant? Allora si imporrebbero a noi con una forza tale che non potremmo concepire la proposizione contraria, né costruire su di essa un edificio teorico. Non ci sarebbe geometria non euclidea. [...]
>
> Dobbiamo dunque concludere che gli assiomi della geometria sono verità sperimentali? Ma non si fanno esperimenti su rette o su circonferenze ideali; li si può fare soltanto su oggetti materiali. [...] Resta però una difficoltà, ed è insormontabile. Se la geometria fosse una scienza sperimentale, non sarebbe una scienza esatta: sarebbe sottoposta a una revisione continua. Che dico? Sarebbe fin d'ora convinta di errore, perché sappiamo che non esiste alcun solido rigorosamente invariabile.
>
> *Gli assiomi geometrici non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali.*
>
> Sono *convenzioni*; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è *guidata* da fatti sperimentali; ma resta *libera*, ed è limitata soltanto dalla necessità di evitare ogni contraddizione. Così i postulati possono restare *rigorosamente* veri anche quando le leggi sperimentali che ne hanno determinato l'adozione sono soltanto approssimative. In altre parole, *gli assiomi della geometria* (non parlo di quelli dell'aritmetica) *non sono che definizioni mascherate*.

> Che cosa si deve pensare, allora, di questa domanda: la geometria euclidea è vera? Non ha alcun senso. Tanto varrebbe chiedere se il sistema metrico è vero e le antiche misure false; se le coordinate cartesiane sono vere e le coordinate polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra; può soltanto essere *più comoda*.
>
> Ora, la geometria euclidea è e resterà la più comoda: 1° perché è la più semplice [...]; 2° perché si accorda abbastanza bene con le proprietà dei solidi naturali, quei corpi ai quali somigliano le nostre membra e il nostro occhio e con i quali costruiamo i nostri strumenti di misura.
>
> (Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, 1902, parte II, cap. 3, «La natura degli assiomi»; traduzione della redazione)

Parole chiave: jugements synthétiques à priori, *conventions*, *définitions déguisées*, *plus commode*.

1. Quali sono le due risposte che Poincaré scarta, e con quale argomento scarta ciascuna?
2. In che senso la scelta di una convenzione è «libera» e insieme «guidata» dall'esperienza?
3. Che cosa significa che gli assiomi sono «definizioni mascherate»? Collega la risposta a ciò che fa Hilbert nei *Fondamenti della geometria*.
4. Perché, secondo Poincaré, la geometria euclidea resterà la più comoda? Alla luce della relatività generale, la previsione si è avverata?

9.6.2 T2 · Mach: il vaso di Newton

Nota introduttiva. Nel secondo capitolo della *Meccanica* (1883) Mach discute le idee di Newton sul tempo, sullo spazio e sul moto. Newton aveva usato il vaso d'acqua in rotazione per dimostrare che esiste un moto assoluto, rispetto allo spazio assoluto. Mach ricostruisce il ragionamento e ne contesta la conclusione. Il pendolo di Foucault (1851) è un pendolo lunghissimo il cui piano di oscillazione ruota lentamente rispetto al suolo, a causa della rotazione terrestre.

> Dello spazio assoluto e del moto assoluto nessuno può dire nulla: sono puri enti di pensiero, che non si possono mostrare nell'esperienza. Tutti i nostri principi della meccanica sono, come si è mostrato ampiamente, esperienze sulle posizioni e sui moti relativi dei corpi. [...] Nessuno ha il diritto di estendere questi principi oltre i limiti dell'esperienza. Anzi, una tale estensione è addirittura priva di senso, perché nessuno saprebbe come applicarla. [...]
>
> Se la Terra ha una rotazione assoluta intorno al suo asse, su di essa compaiono forze centrifughe: si appiattisce, l'accelerazione di gravità all'equatore diminuisce, il piano del pendolo di Foucault ruota, e così via. Tutti questi fenomeni scompaiono se la Terra è ferma e gli altri corpi celesti si muovono di moto assoluto intorno a essa, in modo da produrre la stessa rotazione relativa. Così è, certamente, se si parte fin dall'inizio dall'idea di uno spazio assoluto. Ma se si resta sul terreno dei fatti, si conoscono soltanto

> spazi e moti relativi. Considerati come relativi, e a parte il mezzo sconosciuto dello spazio cosmico, di cui non si tiene conto, i moti nel sistema del mondo sono gli stessi secondo la concezione tolemaica e secondo quella copernicana. Le due concezioni sono anche ugualmente giuste; soltanto, la seconda è più semplice e più pratica. Il sistema del mondo non ci è dato due volte, con la Terra ferma e con la Terra che ruota, ma una volta sola, con i suoi moti relativi, i soli che si possano determinare. Non possiamo dunque dire come sarebbe se la Terra non ruotasse. […]
>
> L'esperimento di Newton con il vaso d'acqua in rotazione insegna soltanto che la rotazione relativa dell'acqua rispetto alle pareti del vaso non suscita forze centrifughe apprezzabili, ma che queste sono suscitate dalla rotazione relativa rispetto alla massa della Terra e agli altri corpi celesti. Nessuno può dire come andrebbe l'esperimento se le pareti del vaso diventassero sempre più spesse e massicce, e alla fine spesse parecchie miglia. Abbiamo davanti un solo esperimento, e dobbiamo metterlo d'accordo con gli altri fatti che conosciamo, non con le nostre invenzioni arbitrarie.
>
> (Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, 1883, cap. II, sez. 6, §§ 4–5; traduzione della redazione)

Parole chiave: Gedankendinge (enti di pensiero), *Relativbewegung* (moto relativo), *Boden der Thatsachen* (terreno dei fatti).

1. Perché lo spazio assoluto, per Mach, è un ente «di pensiero»? Quale criterio di senso usa?
2. Quale interpretazione alternativa dà Mach dell'esperimento del vaso?
3. In che senso la concezione tolemaica e quella copernicana sono «ugualmente giuste»? Che cosa resta, per Mach, a favore di Copernico?
4. Che cosa ha in comune la conclusione di Mach con quella di Poincaré in T1?

9.6.3 T3 · Einstein: che cosa vuol dire «simultaneo»?

Nota introduttiva. Nel 1917 Einstein pubblica un piccolo libro «comprensibile a tutti» sulla relatività. Nei paragrafi 8 e 9 introduce la relatività della simultaneità con un esperimento mentale: due fulmini cadono sui binari, e un treno lunghissimo corre lungo la massicciata a velocità costante v. Einstein si rivolge direttamente al lettore e costruisce un dialogo: è il lettore a proporre il metodo per constatare la simultaneità e a difenderlo dall'obiezione dell'autore.

> In due punti A e B, molto lontani l'uno dall'altro, della nostra massicciata ferroviaria, il fulmine ha colpito i binari. Aggiungo l'affermazione che i due colpi sono avvenuti *simultaneamente*. Se ora ti chiedo, caro lettore, se questa affermazione abbia un senso, mi risponderai con un «sì» convinto. Ma se insisto e ti prego di spiegarmi con più precisione il senso dell'affermazione, dopo qualche riflessione ti accorgi che la risposta non è così semplice come sembra a prima vista. […] Il concetto esiste per il fisico solo quando è data la possibilità di scoprire, nel caso concreto, se il concetto si applica o no. Occorre

> dunque una definizione della simultaneità tale da fornire il metodo con cui, nel caso presente, si possa decidere per mezzo di esperimenti se i due fulmini sono caduti simultaneamente o no. [...]
>
> [Il lettore propone:] Si misuri lungo il binario il tratto AB e si collochi nel suo punto medio M un osservatore, munito di un dispositivo (per esempio due specchi inclinati di 90° l'uno rispetto all'altro) che gli permetta di osservare nello stesso tempo i due luoghi A e B. Se egli percepisce i due fulmini nello stesso istante, essi sono simultanei. [...] [All'obiezione che, per controllarlo, bisognerebbe già saper misurare il tempo, il lettore risponde:] «Che la luce impieghi lo stesso tempo a percorrere il tratto A → M e il tratto B → M non è in verità una *supposizione o ipotesi* sulla natura fisica della luce, ma una *stipulazione* che posso fare a mio libero arbitrio per giungere a una definizione della simultaneità.» [...]
>
> Gli osservatori che usano il treno come corpo di riferimento devono dunque arrivare alla conclusione che il fulmine B è caduto prima del fulmine A. Arriviamo così a questo importante risultato: eventi che sono simultanei rispetto alla massicciata non sono simultanei rispetto al treno, e viceversa (relatività della simultaneità). Ogni corpo di riferimento (sistema di coordinate) ha il suo tempo particolare; un'indicazione di tempo ha senso soltanto se si indica il corpo di riferimento al quale si riferisce.
>
> (Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*, 1917, §§ 8–9; traduzione della redazione)

Parole chiave: Gleichzeitigkeit (simultaneità), *Festsetzung* (stipulazione), *Bezugskörper* (corpo di riferimento).

1. Quale condizione deve soddisfare, secondo Einstein, una definizione di «simultaneo»?
2. Descrivi il metodo proposto per stabilire se i due fulmini sono simultanei.
3. Perché l'uguaglianza dei tempi di percorrenza A → M e B → M è una «stipulazione» e non un'ipotesi?
4. Spiega con parole tue perché il viaggiatore sul treno vede prima il fulmine B. Quale idea di tempo viene abbandonata?

SINTESI

- Il quinto postulato di Euclide (per un punto esterno a una retta passa una sola parallela) fu a lungo oggetto di tentativi di dimostrazione (Saccheri, 1733).
- **Lobačevskij** (1829) e **Bolyai** (1832) costruiscono una geometria coerente con infinite parallele (iperbolica: somma degli angoli minore di 180°); **Riemann** (lezione del 1854, pubblicata nel 1868) apre la via a spazi curvi, tra cui quello ellittico senza parallele (somma maggiore di 180°).
- I **modelli** (la sfera; Beltrami, 1868; Klein, Poincaré) mostrano che le geometrie non euclidee sono coerenti quanto quella euclidea: il quinto postulato è indipendente dagli altri. **Hilbert** (1899) tratta gli assiomi come definizioni implicite.
- **Cantor** studia gli insiemi infiniti e mostra che esistono infiniti di grandezze diverse. **Frege** vuole ridurre l'aritmetica alla logica (**logicismo**).
- Il **paradosso di Russell** (lettera a Frege, 16 giugno 1902): la classe delle classi che non appartengono a se stesse appartiene e non appartiene a se stessa. Risposte: teoria dei tipi (Russell), assiomi degli insiemi (Zermelo), formalismo (Hilbert), intuizionismo (Brouwer).
- **Gödel** (1931): in ogni sistema formale coerente che contiene l'aritmetica esistono enunciati indecidibili, e il sistema non può dimostrare la propria coerenza. Non è una tesi relativistica.
- **Mach** (*La meccanica*, 1883) critica lo spazio e il moto assoluti di Newton (il vaso d'acqua), concepisce la scienza come economia del pensiero e la realtà come complesso di elementi (empiriocriticismo).
- **Poincaré** (*La scienza e l'ipotesi*, 1902): gli assiomi geometrici sono convenzioni, definizioni mascherate; una geometria non è più vera, ma più comoda di un'altra (**convenzionalismo**).
- **Duhem** (*La teoria fisica*, 1906): l'esperienza controlla solo insiemi di ipotesi (**olismo**), quindi non esiste l'*experimentum crucis*.
- **Einstein**: relatività ristretta (1905; due postulati, relatività della simultaneità, dilatazione del tempo, $\Delta t = \gamma \Delta t_0$) e generale (1915; gravità come curvatura dello spazio-tempo, confermata nel 1919).
- La meccanica quantistica (Planck 1900, Bohr 1913, **Heisenberg** 1927) introduce il principio di indeterminazione e previsioni probabilistiche; Einstein e Bohr ne discutono la completezza.
- Nelle scienze sociali la disputa sul metodo e **Weber** (avalutatività, tipo ideale) pongono il problema dell'oggettività delle scienze dell'uomo.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nella geometria di Lobačevskij, per un punto esterno a una retta passano:
   - **A.** nessuna parallela
   - **B.** una sola parallela
   - **C.** infinite rette che non incontrano la retta data
   - **D.** esattamente due parallele

2. ● Le geometrie non euclidee hanno mostrato che:
   - **A.** il quinto postulato non si può dedurre dagli altri assiomi, perché negandolo si ottengono sistemi coerenti (se lo è quello euclideo)
   - **B.** la geometria euclidea è contraddittoria
   - **C.** lo spazio fisico è iperbolico in ogni regione
   - **D.** Euclide aveva enunciato il quinto postulato in modo sbagliato

3. ●● Quale successione è in ordine cronologico corretto?
   - **A.** lezione di Riemann – geometria di Lobačevskij – teoremi di Gödel – *Fondamenti della geometria* di Hilbert
   - **B.** *Fondamenti della geometria* di Hilbert – lezione di Riemann – geometria di Lobačevskij – teoremi di Gödel
   - **C.** geometria di Lobačevskij – *Fondamenti della geometria* di Hilbert – lezione di Riemann – teoremi di Gödel
   - **D.** geometria di Lobačevskij – lezione di Riemann – *Fondamenti della geometria* di Hilbert – teoremi di Gödel

4. ● Russell comunicò a Frege la contraddizione nel sistema dei *Grundgesetze*:
   - **A.** nella prefazione dei *Principia Mathematica* (1910)
   - **B.** in una lettera del 16 giugno 1902
   - **C.** in una conferenza tenuta a Vienna nel 1931
   - **D.** in una recensione dell'*Ideografia* (1879)

5. ●● Il primo teorema di incompletezza di Gödel (1931) afferma che:
   - **A.** in ogni sistema formale coerente, con assiomi elencabili e abbastanza potente da esprimere l'aritmetica, esistono enunciati che il sistema non può né dimostrare né confutare
   - **B.** ogni verità matematica è relativa al punto di vista di chi la dimostra
   - **C.** l'aritmetica elementare è contraddittoria
   - **D.** nessun sistema formale ha assiomi

6. ● Secondo Mach, l'esperimento del vaso d'acqua di Newton mostra:
   - **A.** che esiste lo spazio assoluto
   - **B.** che l'acqua non può ruotare insieme al vaso
   - **C.** soltanto che la rotazione relativa alle pareti del vaso non produce forze centrifughe apprezzabili, mentre quella relativa alla Terra e ai corpi celesti sì
   - **D.** che la Terra è immobile al centro del mondo

7. ● Secondo Poincaré gli assiomi della geometria sono:
   - **A.** giudizi sintetici a priori
   - **B.** verità sperimentali, approssimative e rivedibili
   - **C.** verità rivelate dall'intuizione intellettuale
   - **D.** convenzioni, scelte liberamente ma guidate dall'esperienza

8. ●● Per Duhem, quando l'esito di un esperimento contraddice una previsione:
   - **A.** l'ipotesi sotto esame è dimostrata falsa
   - **B.** almeno una delle ipotesi dell'insieme usato per la previsione è falsa, ma l'esperimento non dice quale
   - **C.** la teoria deve essere sempre mantenuta, perché è una convenzione
   - **D.** si ha un *experimentum crucis* che decide tra due teorie

9. ●● Secondo la relatività ristretta, due fulmini simultanei per un osservatore fermo sulla massicciata sono, per un osservatore su un treno in moto lungo il binario:
   - **A.** in generale non simultanei
   - **B.** simultanei, perché la simultaneità è assoluta
   - **C.** mai osservabili
   - **D.** simultanei solo se il treno accelera

Il lessico filosofico

10. ● Definisci *geometria non euclidea* e spiega perché sarebbe sbagliato chiamarla «antieuclidea».

11. ● Completa: Frege voleva derivare tutta l'aritmetica dalla _____ ; questo programma si chiama _____ . La contraddizione scoperta da Russell nasce dal principio secondo cui ogni _____ definisce una classe.

12. ●● Abbina ogni termine all'autore e alla definizione: **termini** 1) economia del pensiero, 2) definizione implicita, 3) convenzionalismo, 4) olismo, 5) logicismo; **autori** a) Hilbert, b) Duhem, c) Frege, d) Mach, e) Poincaré; **definizioni** I) gli assiomi della geometria sono definizioni mascherate; II) l'esperienza controlla insiemi di ipotesi; III) la scienza descrive i fatti con il minimo sforzo; IV) gli assiomi fissano il significato dei termini primitivi; V) l'aritmetica si riduce alla logica.

13. ●● Distingui *relatività della simultaneità* e *dilatazione del tempo*. Poi spiega perché la «relatività» di Einstein non è un «relativismo».

14. ●● Distingui il *formalismo* di Hilbert dall'*intuizionismo* di Brouwer come risposte alla crisi dei fondamenti.

Leggere i testi

15. ● (T1) Quali due risposte alla domanda «che cosa sono gli assiomi della geometria?» scarta Poincaré, e con quale argomento? Quale conclusione ne ricava?

16. ●● (T1) Perché per Poincaré la domanda «la geometria euclidea è vera?» «non ha alcun senso»? Spiega le due analogie che usa (il sistema metrico, le coordinate).

17. ●● (T2) Perché l'esperimento del vaso, secondo Mach, non prova l'esistenza dello spazio assoluto? Che cosa intende dicendo che «il sistema del mondo non ci è dato due volte»?

18. ●● (T3) Quale requisito pone Einstein a una definizione di «simultaneo»? Perché l'uguaglianza dei tempi di percorrenza da A e da B a M è una stipulazione? Collega la risposta al convenzionalismo di Poincaré.

Leggi il brano e rispondi.

> Insomma, il fisico non può mai sottoporre al controllo dell'esperienza un'ipotesi isolata, ma soltanto tutto un insieme di ipotesi; quando l'esperienza è in disaccordo con le sue previsioni, gli insegna che almeno una delle ipotesi che costituiscono quell'insieme è inaccettabile e deve essere modificata; ma non gli indica quale debba essere cambiata. [...]
>
> L'orologiaio al quale si porta un orologio che non funziona ne separa tutti gli ingranaggi e li esamina a uno a uno, finché non ha trovato quello falsato o rotto; il medico al quale si presenta un malato non può sezionarlo per stabilire la diagnosi: deve indovinare la sede e la causa del male soltanto osservando i disturbi che colpiscono il corpo intero. Al secondo, non al primo, somiglia il fisico incaricato di raddrizzare una teoria che zoppica.
>
> (Duhem, *La teoria fisica*, 1906, parte II, cap. VI, § 2; traduzione della redazione)

19. ●● (Testo nuovo) 1) Qual è la tesi del brano? 2) Che cosa rappresentano l'orologiaio e il medico, e perché il fisico somiglia al secondo? 3) Applica la tesi all'esperimento di Foucault (1850) sulla velocità della luce nell'acqua. 4) Quale principio di Bacone viene così messo in discussione?

Nel terzo capitolo della *Scienza e l'ipotesi* Poincaré costruisce un «dizionario» che fa corrispondere i termini della geometria di Lobačevskij a oggetti della geometria ordinaria (per esempio, alla «retta» un arco di cerchio perpendicolare a un piano fondamentale). Leggi e rispondi.

> Prendiamo poi i teoremi di Lobačevskij e traduciamoli con l'aiuto di questo dizionario, come tradurremmo un testo tedesco con l'aiuto di un dizionario tedesco-francese. Otterremo così dei teoremi della geometria ordinaria. [...] Così, per quanto lontano si spinga no le conseguenze delle ipotesi di Lobačevskij, non si sarà mai condotti a una contraddizione. Infatti, se due teoremi di Lobačevskij fossero contraddittori, lo sarebbero anche le traduzioni di questi due teoremi, fatte con il nostro dizionario; ma queste traduzioni sono teoremi di geometria ordinaria, e nessuno dubita che la geometria ordinaria sia esente da contraddizione. Da dove ci viene questa certezza, ed è giustificata? È una questione che non potrei trattare qui.
>
> (Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, 1902, parte II, cap. 3; traduzione della redazione)

20. ●●● (Testo nuovo) 1) Ricostruisci il ragionamento del brano in premesse e conclusione. 2) Che cosa dimostra esattamente: che la geometria di Lobačevskij è vera, che è coerente, o che è coerente *se* lo è quella ordinaria? 3) Quale domanda lascia aperta Poincaré nell'ultima frase, e chi la affronterà nel Novecento?

Argomentare

21. ●● Ricostruisci il paradosso di Russell in premesse numerate e conclusione. Quale premessa deve essere abbandonata, e come la abbandonano Russell e Zermelo?

22. ●● Ricostruisci l'argomento di Poincaré in T1 come ragionamento per eliminazione (P1: gli assiomi sono giudizi sintetici a priori, verità sperimentali o convenzioni; P2...; C). Individua la premessa nascosta e valuta se è accettabile.

23. ●● «In un villaggio il barbiere rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sé.» Mostra perché l'enunciato porta a una contraddizione, e spiega perché la contraddizione non colpisce la logica, mentre quella di Russell sì.

24. ●●● Una teoria T, insieme alle ipotesi ausiliarie A_1 e A_2, prevede l'osservazione O; ma si osserva non-O. Scrivi lo schema dell'argomento e la sua conclusione valida. Che cosa si può concludere su T da sola? Quale autore del capitolo ha sostenuto questa tesi?

Confrontare e collegare

25. ●● *Matematica.* Un triangolo sferico sulla Terra ($R = 6371$ km) ha angoli di 90°, 90° e 60°. Calcolane l'area con la formula di Girard e confrontala con la superficie terrestre. Quale area deve avere un triangolo sulla Terra perché l'eccesso angolare sia di 1″ (1″ = π/648 000 rad)?

26. ●● *Fisica.* Un'astronave viaggia a $0{,}8c$ verso una stella; per gli osservatori a terra il viaggio dura 5 anni. Quanto dura per l'equipaggio? E a $0{,}6c$, se per la Terra il viaggio dura 10 anni?

27. ●● Kant e Poincaré sulla geometria: che cosa pensano dello statuto degli assiomi? Quale dei due ti sembra messo più in difficoltà dalla relatività generale, e perché?

28. ●● Newton, Leibniz e Mach sullo spazio: ricostruisci le tre posizioni e indica quale argomento ciascuno usa.

29. ●● *E oggi?* In un dibattito qualcuno afferma: «Gödel ha dimostrato che nessuna verità è certa, e Einstein che tutto è relativo: quindi ogni opinione vale l'altra.» Scrivi una risposta di 8–10 righe che corregga entrambe le affermazioni.

Verso la verifica

30. ●● *Trattazione sintetica* (12–15 righe): la crisi dei fondamenti della matematica, dal logicismo di Frege al teorema di Gödel.

31. ●●● *Tema argomentativo* (scaletta): «Una teoria scientifica è vera o soltanto comoda?» Indica la tesi, due argomenti (uno tratto da Poincaré o da Duhem, uno dalla relatività), un'obiezione e la conclusione.

32. ●● Vero o falso? Motiva ogni risposta. a) La lezione di Riemann sulle ipotesi della geometria fu pubblicata nel 1854. b) Per Duhem non esiste in fisica l'*experimentum crucis*. c) Gödel ha dimostrato che l'aritmetica è contraddittoria. d) Per Mach la concezione tolemaica e quella copernicana sono «ugualmente giuste». e) La relatività generale descrive la gravità come curvatura dello spazio-tempo.

Verso il colloquio

33. ●● *Esporre in tre minuti.* Presenta il convenzionalismo di Poincaré usando i termini: *giudizio sintetico a priori*, *convenzione*, *definizione mascherata*, *comodità*, *geometria non euclidea*.

34. ●●● *Dal documento al problema (Educazione civica).* Il 2 agosto 1939 Einstein firmò una lettera al presidente degli Stati Uniti Franklin D. Roosevelt che lo avvertiva della possibilità di costruire bombe atomiche. Rileggi due articoli della Costituzione italiana: l'art. 9, che impegna la Repubblica a promuovere «la ricerca scientifica e tecnica» (testo nel capitolo 1), e l'art. 11, con cui l'Italia «ripudia la guerra» come strumento di offesa e come mezzo di risoluzione delle controversie internazionali (testo nel capitolo 8). Costruisci un percorso: il problema (la responsabilità dello scienziato), un collegamento con la Storia, una valutazione personale.

35. ●●● *Collegare.* Il tempo all'inizio del Novecento: collega la relatività della simultaneità (Einstein, 1905), la durata di Bergson e il loro incontro del 1922 (capitolo 7) e un romanzo del tuo programma di Italiano o di Inglese in cui il tempo non scorre in modo lineare.

PER APPROFONDIRE

- [GEY] L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*: i capitoli sulle geometrie non euclidee, sulla crisi dei fondamenti, su Mach e Poincaré e sulla relatività.
- [REA] G. Reale, D. Antiseri, *Il pensiero occidentale dalle origini ad oggi*, vol. 3: i capitoli sull'epistemologia tra Ottocento e Novecento (Mach, Poincaré, Duhem) e sulla rivoluzione della fisica.
- [ABB] N. Abbagnano, *Storia della filosofia*: le pagine sull'empiriocriticismo, sul convenzionalismo e sulla logica matematica.

Glossario del capitolo

Convenzionalismo (in Poincaré)
La tesi che gli assiomi della geometria, e alcuni principi della fisica, sono convenzioni scelte liberamente, guidate dall'esperienza e vincolate solo dalla non contraddizione.

Definizione implicita
In Hilbert, il modo in cui gli assiomi fissano il significato dei termini primitivi (punto, retta, piano), che non vengono definiti direttamente.

Dilatazione del tempo
Il rallentamento di un orologio in moto, misurato da un sistema rispetto al quale si muove: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$.

Economia del pensiero
In Mach, il compito della scienza: descrivere i fatti nel modo più breve e completo, con il minimo sforzo.

Empiriocriticismo
La filosofia di Avenarius, vicina a quella di Mach: critica di ogni concetto non ricavato dall'esperienza pura.

Formalismo (in Hilbert)
Il programma di Hilbert: esprimere la matematica in sistemi formali e dimostrarne la coerenza con metodi elementari.

Geometria ellittica
La geometria di uno spazio a curvatura positiva costante, legata al nome di Riemann: non esistono parallele e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180°.

Geometria iperbolica
La geometria di Lobačevskij e Bolyai: per un punto esterno a una retta passano infinite parallele, e la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180°.

Geometria non euclidea
Ogni geometria coerente che rinuncia al quinto postulato di Euclide (Lobačevskij, Bolyai, Riemann).

Intuizionismo
La posizione di Brouwer: in matematica esiste solo ciò che si può costruire, e per gli insiemi infiniti non vale il principio del terzo escluso.

Logicismo
Il programma di ridurre la matematica, o almeno l'aritmetica, alla logica pura: Frege, poi Russell e Whitehead.

Modello (di una geometria)
Un insieme di oggetti, costruiti in un'altra teoria, che soddisfano tutti gli assiomi di una geometria; ne prova la coerenza relativa (la sfera, la pseudosfera di Beltrami, il disco di Poincaré).

Olismo (in Duhem)
La tesi che l'esperienza controlla non un'ipotesi isolata, ma l'intero insieme di ipotesi usate per una previsione; di qui l'impossibilità dell'*experimentum crucis*.

Paradosso di Russell
La contraddizione della classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse, comunicata da Russell a Frege il 16 giugno 1902.

Principio di indeterminazione
Il principio di Heisenberg (1927): posizione e quantità di moto di una particella non si possono conoscere insieme con precisione arbitraria.

Quinto postulato
Il postulato delle parallele di Euclide; nella forma scolastica: per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela a essa. Le geometrie non euclidee mostrano che non si può dedurre dagli altri.

Relatività della simultaneità
In Einstein, il fatto che due eventi simultanei rispetto a un sistema di riferimento non lo siano, in generale, rispetto a un altro in moto rispetto al primo.

Teorema di incompletezza
Il risultato di Gödel (1931): ogni sistema formale coerente, con assiomi elencabili, che contiene l'aritmetica ha enunciati indecidibili e non può dimostrare la propria coerenza.

Soluzioni

1. C. Lobačevskij sostituisce il quinto postulato con la sua negazione: per il punto passano infinite rette che non incontrano la retta data.

2. A. Se il quinto postulato si deducesse dagli altri, negarlo porterebbe a una contraddizione; i modelli mostrano invece che le geometrie non euclidee sono coerenti quanto quella euclidea.

3. D. Lobačevskij 1829, Riemann 1854 (pubblicata nel 1868), Hilbert 1899, Gödel 1931.

4. B. La lettera è del 16 giugno 1902; Frege rispose il 22 giugno.

5. A. È l'enunciato semplificato del primo teorema; le altre opzioni sono abusi comuni (la B, la C) o falsità.

6. C. È la tesi di T2: abbiamo un solo esperimento, che mostra effetti della rotazione rispetto alla Terra e ai corpi celesti, non rispetto allo spazio assoluto.

7. D. Per Poincaré (T1) non sono né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali, ma convenzioni guidate dall'esperienza.

8. B. È l'olismo della *Teoria fisica* (1906): l'esperienza condanna un insieme di ipotesi senza indicare quale correggere.

9. A. È la relatività della simultaneità (T3, § 9): ogni sistema di riferimento ha il suo tempo.

10. Traccia: una geometria coerente che rinuncia al quinto postulato, sostituendolo con «infinite parallele» (iperbolica) o «nessuna parallela» (ellittica), e conserva gli altri assiomi; non è «antieuclidea» perché non mostra che la geometria euclidea è falsa: le geometrie sono coerenti allo stesso titolo, e quella euclidea serve anzi da base ai modelli delle altre.

11. logica; logicismo; condizione (o proprietà, concetto).

12. 1-d-III; 2-a-IV; 3-e-I; 4-b-II; 5-c-V.

13. Traccia: la relatività della simultaneità dice che due eventi lontani simultanei in un sistema di riferimento non lo sono in un altro in moto rispetto al primo (T3); la dilatazione del tempo dice che un orologio in moto, misurato da un sistema rispetto al quale si muove, scandisce intervalli più lunghi di un fattore γ. Non è relativismo: le leggi fisiche e la velocità della luce sono le stesse per tutti, e le grandezze che cambiano lo fanno secondo formule precise.

14. Traccia: il formalismo (Hilbert, anni Venti) vuole scrivere la matematica in sistemi formali e dimostrarne la coerenza con metodi elementari; accetta l'infinito di Cantor, purché il sistema sia coerente. L'intuizionismo (Brouwer) considera esistente solo ciò che si costruisce e rinuncia al terzo escluso per gli insiemi infiniti: limita la matematica invece di formalizzarla. Il teorema di Gödel colpisce il programma di Hilbert nella forma originaria.

15. Traccia: scarta i giudizi sintetici a priori (se lo fossero, non potremmo pensare il contrario, e invece esiste la geometria di Lobačevskij) e le verità sperimentali (non si sperimenta su rette ideali; la geometria sarebbe inesatta e già smentita, perché non esistono solidi rigorosamente invariabili); conclude che sono convenzioni, cioè definizioni mascherate.

16. Traccia: se gli assiomi sono definizioni, la domanda è come chiedere se una definizione sia vera; il sistema metrico e le antiche misure, le coordinate cartesiane e quelle polari descrivono le stesse cose in linguaggi diversi, e si sceglie il più comodo; così una geometria non è più vera, ma può essere più comoda.

17. Traccia: lo spazio assoluto non si può mostrare nell'esperienza, quindi un'affermazione su di esso non ha senso fisico; il vaso mostra solo l'effetto della rotazione rispetto alla Terra e ai corpi celesti, e nessuno sa che cosa accadrebbe con pareti massicce. Il mondo ci è dato una volta sola, con i suoi moti rela-

tivi: non possiamo confrontarlo con un mondo in cui la Terra non ruota (T2).

18. Traccia: la definizione deve fornire un metodo per decidere sperimentalmente, nel caso concreto, se il concetto si applica (T3, § 8); che la luce impieghi lo stesso tempo da A e da B a M non si può controllare senza avere già un modo di misurare il tempo, quindi è una scelta che fissa il significato della parola; come le convenzioni di Poincaré, è libera ma non arbitraria, perché rende coerente la descrizione dei fatti.

19. Traccia: 1) un esperimento non controlla mai un'ipotesi isolata, ma solo un insieme di ipotesi, e un esito contrario non indica quale correggere; 2) l'orologiaio può isolare i pezzi, il medico deve giudicare il corpo intero dai sintomi; la fisica è come un organismo, non come una macchina smontabile; 3) l'esperimento di Foucault condanna l'intero sistema ottico di Newton, non l'idea di corpuscoli di luce in sé (l'ipotesi corpuscolare tornò con i quanti di luce di Einstein, 1905); 4) l'*instantia crucis* di Bacone, l'esperimento che decide da solo tra due ipotesi.

20. Traccia: 1) P1: il dizionario traduce ogni teorema di Lobačevskij in un teorema della geometria ordinaria; P2: se due teoremi di Lobačevskij si contraddicessero, si contraddirebbero le loro traduzioni; P3: la geometria ordinaria non contiene contraddizioni; C: la geometria di Lobačevskij non contiene contraddizioni. 2) La coerenza relativa: è coerente *se* lo è quella euclidea, non è «vera». 3) La coerenza della geometria ordinaria stessa, che rinvia a quella dell'aritmetica: è il problema dei fondamenti, affrontato da Hilbert e poi da Gödel.

21. Traccia: P1: per ogni condizione esiste la classe delle cose che la soddisfano; P2: «non appartenere a se stessa» è una condizione; P3 (da P1, P2): esiste R, la classe delle classi che non appartengono a se stesse; P4: se $R \in R$, allora $R \notin R$; P5: se $R \notin R$, allora $R \in R$; C: contraddizione. Si abbandona P1: Russell con la teoria dei tipi (una classe contiene solo oggetti del livello inferiore, quindi non può contenere se stessa), Zermelo ammettendo solo gli insiemi garantiti da assiomi.

22. Traccia: P1: gli assiomi sono giudizi sintetici a priori, verità sperimentali o convenzioni; P2: non sono sintetici a priori (esistono geometrie che li negano); P3: non sono sperimentali (la geometria è esatta, l'esperienza no); C: sono convenzioni. Premessa nascosta: P1 elenca tutte le alternative. Si può discutere se lo sia: per esempio, la relatività generale fa della geometria dello spazio fisico una questione in parte empirica, purché si considerino insieme geometria e fisica (è la linea di Duhem).

23. Traccia: se il barbiere si rade, è tra quelli che si radono da sé, e quindi non deve radersi; se non si rade, è tra quelli che non si radono da sé, e quindi deve radersi. Ma l'esistenza di un tale barbiere era solo un'ipotesi: la conclusione è che un barbiere così non esiste. L'esistenza della classe R era invece garantita da un principio della logica di Frege, che perciò risulta contraddittorio.

24. Schema: se (T e A_1 e A_2), allora O; non-O; dunque non-(T e A_1 e A_2), cioè almeno una delle tre è falsa (*modus tollens*). Su T da sola non si può concludere nulla: si potrebbe correggere A_1 o A_2. È la tesi di Duhem.

25. Somma degli angoli $240° = 4\pi/3$; eccesso $\pi/3$; area $= R^2\pi/3 \approx 6371^2 \times 1{,}0472 \approx 4{,}25 \times 10^7$ km^2, cioè 1/12 della superficie terrestre ($5{,}10 \times 10^8$ km^2). Per un eccesso di $1'' \approx 4{,}85 \times 10^{-6}$ rad serve un'area $R^2 \times 4{,}85 \times 10^{-6} \approx 197$ km^2.

26. A $0{,}8c$, $\gamma = 5/3$: per l'equipaggio il viaggio dura $5 : 5/3 = 3$ anni. A $0{,}6c$, $\gamma = 1{,}25$: $10 : 1{,}25 = 8$ anni.

27. Traccia: per Kant gli assiomi sono giudizi sintetici a priori e lo spazio euclideo è la forma necessaria dell'intuizione; per Poincaré sono convenzioni, e la geometria euclidea è solo la più comoda. La relatività generale usa una geometria non euclidea per lo spazio-tempo fisico: mette in difficoltà la necessità dello spazio euclideo di Kant, ma anche la previsione di Poincaré che Euclide sarebbe rimasto la scelta più comoda; un convenzionalista può rispondere che la scelta riguarda l'insieme di geometria e fisica.

28. Traccia: Newton, spazio assoluto come contenitore indipendente dai corpi (il vaso d'acqua); Leibniz, spazio relazionale come ordine delle coesisten-

ze (principi di ragion sufficiente e degli indiscernibili, volume precedente); Mach, critica empirista: solo moti relativi ai corpi del mondo, lo spazio assoluto è un ente di pensiero (T2).

29. Traccia: Gödel dimostra un limite della dimostrabilità nei sistemi formali che contengono l'aritmetica, con un ragionamento rigoroso: non dice che nessuna verità è certa; la relatività fa dipendere alcune misure dal sistema di riferimento proprio perché le leggi e la velocità della luce sono uguali per tutti; nessuna delle due teorie riguarda il valore delle opinioni.

30. Traccia: 1) Euclide e il quinto postulato; 2) Lobačevskij, Bolyai, Riemann: coerenza delle geometrie non euclidee (modelli); 3) Cantor e Frege: fondare l'aritmetica sugli insiemi e sulla logica (logicismo); 4) il paradosso di Russell (1902) e la postilla di Frege (1903); 5) le risposte: tipi, assiomi di Zermelo, formalismo di Hilbert, intuizionismo; 6) Gödel (1931): incompletezza e impossibilità di dimostrare la coerenza dall'interno; bilancio: limiti della formalizzazione, non crollo della matematica.

31. Traccia: tesi (per esempio: le teorie non sono soltanto comode, ma colgono rapporti reali); argomento 1: Poincaré stesso, nel *Valore della scienza*, distingue le convenzioni dalle leggi e sostiene che la scienza conosce rapporti tra le cose; argomento 2: la relatività ha fatto previsioni nuove (la luce deviata nel 1919, i muoni); obiezione: Duhem, l'esperienza controlla solo insiemi di ipotesi, e la scelta tra teorie equivalenti segue la semplicità; conclusione: scelte e convenzioni ci sono, ma vincolate dai fatti.

32. a) Falso: fu tenuta nel 1854 e pubblicata nel 1868. b) Vero (*La teoria fisica*, parte II, cap. VI, § 3). c) Falso: Gödel mostra che un sistema coerente non può dimostrare la propria coerenza, non che l'aritmetica sia contraddittoria. d) Vero (T2): descrivono gli stessi moti relativi, ma la copernicana è più semplice. e) Vero (1915).

33. Scaletta: 1) il problema: le geometrie non euclidee e la domanda su quale sia vera; 2) le due risposte respinte: Kant (sintetico a priori) e l'empirismo; 3) la tesi: convenzioni, definizioni mascherate, libere ma guidate dall'esperienza e vincolate dalla non contraddizione; 4) l'esempio del sistema metrico e delle coordinate; 5) Euclide la più comoda; 6) estensione limitata ai principi della fisica e risposta a Le Roy; 7) sviluppo: relatività generale (T1, sezione su Poincaré).

34. Traccia: 1) problema: la ricerca scientifica è libera e promossa dalla Repubblica (art. 9), ma i suoi risultati possono servire alla guerra, che l'Italia ripudia (art. 11); 2) Einstein, pacifista, firma nel 1939 una lettera scritta con Leo Szilárd per timore che la Germania nazista costruisse la bomba per prima; 3) Storia: il progetto Manhattan, Hiroshima e Nagasaki (6 e 9 agosto 1945); 4) Einstein firmò poi, poco prima di morire (1955), il manifesto contro le armi nucleari promosso da Russell; 5) valutazione personale: libertà della ricerca e responsabilità per i suoi usi (vedi anche il capitolo 16, sul principio responsabilità di Jonas).

35. Traccia: 1) Einstein: la simultaneità dipende dal sistema di riferimento, il tempo si misura con orologi e segnali di luce (T3); 2) Bergson: la durata vissuta della coscienza contro il tempo spazializzato della fisica; 3) Parigi, 6 aprile 1922: il dibattito alla Société française de philosophie, poi *Durata e simultaneità* (1922); 4) letteratura: Svevo, *La coscienza di Zeno* (1923), con il «tempo misto» della memoria; oppure Joyce, *Ulisse* (1922), un solo giorno, il 16 giugno 1904, attraverso il flusso di coscienza; 5) sintesi: tempo misurato e tempo vissuto.