CAPITOLO

2

Prospettiva accidentale di volumi architettonici

Un edificio si capisce girandogli intorno: la prospettiva accidentale ferma sulla carta il momento in cui ne vediamo due lati insieme.

OBIETTIVI

1. Trovare il punto di fuga di una retta inclinata, dalla pendenza o dall'angolo, e usarlo per falde, rampe e scale.
2. Disegnare in prospettiva accidentale case con tetti a capanna e a padiglione, torri e gruppi di edifici.
3. Costruire per punti archi e portici in facciate viste d'angolo.
4. Rappresentare l'angolo di una stanza con porte, finestre e arredi, e riconoscere la veduta per angolo della scenografia.
5. Eseguire la restituzione di un'immagine in prospettiva accidentale e leggere con spirito critico lo spazio delle vedute dipinte.
6. Scegliere punto di vista, distanza e angolo per una veduta architettonica e organizzare la tavola.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Le rette inclinate 2
2.2 Case, tetti e torri 5
2.3 Scale, archi e portici 7
2.4 Gli interni in prospettiva accidentale 10
2.5 La prospettiva accidentale e le opere d'arte 12
2.6 Dalla costruzione alla tavola 16

Disegno e Storia dell'arte 4 · Parte I · La prospettiva accidentale e le ombre · versione 1.0
Capitolo 2: Prospettiva accidentale di volumi architettonici · pagine 49–72 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente hai messo in prospettiva accidentale quadrati, cubi, piramidi e cilindri: oggetti semplici, posati sul piano geometrale, con gli spigoli verticali e due famiglie di spigoli orizzontali che fuggono in F_1 e in F_2. Un edificio vero, però, non è fatto solo di spigoli orizzontali e verticali. Le falde di un tetto, la rampa di una scala, la linea di un arco non sono né l'una né l'altra cosa: salgono o scendono mentre si allontanano. È proprio da queste linee che dipende l'aspetto di un'architettura vista d'angolo, cioè il modo in cui la vediamo quasi sempre camminando per strada.

Questo capitolo porta la prospettiva accidentale dai solidi ai **volumi architettonici**: case con tetti a capanna e a padiglione, torri, scale, archi e portici, interni. Gli strumenti restano quelli del capitolo 1: la pianta ausiliaria sotto la LT, i punti di fuga F_1 e F_2 sulla LO, la retta delle altezze nel quadro, i metodi delle tracce, dei raggi visuali e dei punti misuratori. Si aggiunge una sola regola nuova, quella delle rette inclinate, e con essa si può disegnare quasi tutto. Alla fine vedremo come la stessa geometria, letta al contrario, aiuta a capire le vedute dei pittori del Settecento e le scene dei teatri barocchi.

Le convenzioni sono quelle già usate: un punto della pianta ha coordinate $(x; y)$, dove x è la distanza dalla verticale per P (positiva a destra) e y la profondità dietro il quadro; l'immagine di un punto si dà con la distanza dalla verticale per P e l'altezza sopra la LT. La famiglia di sinistra forma con la LT l'angolo indicato per primo («30°/60°»: spigoli di sinistra a 30°, di destra a 60°) e fugge in F_1; quella di destra fugge in F_2.

2.1 Le rette inclinate

2.1.1 Che cosa sappiamo già

Ricordiamo le tre regole su cui si regge tutto il capitolo 1. Il *punto di fuga* di una retta è il punto in cui il quadro è incontrato dalla parallela alla retta condotta per il punto di vista V. Rette parallele hanno lo stesso punto di fuga. Le rette orizzontali hanno la parallela per V orizzontale, all'altezza dell'occhio: per questo fuggono tutte sulla LO. Le rette verticali, parallele al quadro verticale, non hanno punto di fuga e restano verticali.

Gli spigoli di un tetto, invece, sono spesso **rette inclinate**: rette non orizzontali e non verticali che giacciono in un piano verticale. La falda di una casa a capanna, la rampa di una scala, il corrimano di una ringhiera, la generatrice di un tetto conico sono rette di questo tipo. Dove fuggono?

2.1.2 Il punto di fuga di una retta inclinata

Prendiamo una retta inclinata r e la sua **proiezione orizzontale** r', cioè l'ombra che getterebbe sul piano geometrale con il sole a picco: una retta orizzontale, che fugge in un punto F della LO. La parallela a r per V e la parallela a r' per V stanno nello stesso piano verticale, il piano verticale per V parallelo a r. Questo piano taglia il quadro lungo una retta verticale, che passa per F. Ne segue la regola fondamentale:

> **DA RICORDARE**
>
> **Rette inclinate.** Una retta inclinata che giace in un piano verticale fugge in un punto F_i della **verticale per il punto di fuga *F* della sua proiezione orizzontale**: sopra la LO se sale allontanandosi dall'osservatore, sotto la LO se scende allontanandosi. Non fugge sulla LO, che raccoglie solo le rette orizzontali.

Quanto sopra o sotto? Lo dice un triangolo rettangolo. Il raggio VF è orizzontale; il raggio VF_i è parallelo alla retta inclinata; il segmento FF_i è verticale. Il triangolo VFF_i, rettangolo in F, è simile al triangolo che ha per cateti l'avanzamento orizzontale della retta e il suo dislivello. Se la retta sale di 2 m ogni 5 m (una **pendenza** del 40 %), anche FF_i è il 40 % di FV. Basta dunque conoscere la distanza FV, che si legge sulla pianta ausiliaria: è la lunghezza del segmento che unisce V' alla traccia del punto di fuga sulla LT, come nel capitolo 1, perché V e F stanno alla stessa altezza.

2.1.3 La costruzione per ribaltamento

Se la retta è data con il suo angolo β invece che con la pendenza, la stessa costruzione si fa con il goniometro, senza calcoli (Figura 2.1). Si fa ruotare il piano verticale VFF_i attorno alla verticale per F fino a farlo coincidere con il quadro: è un **ribaltamento**, come quelli della geometria descrittiva. Il punto di vista cade sulla LO, in un punto V'_r che dista da F quanto V: è lo stesso punto che nel capitolo 1 hai chiamato punto misuratore della famiglia (per la famiglia di F_2, il punto M_2). Attenzione: non è il V'_r della restituzione del capitolo 1, che sta sotto P a distanza d dalla LO; qui il piano ruota attorno alla verticale per F, e V cade sulla LO. Durante la rotazione l'angolo β non cambia; dunque:

1. si trova il punto di fuga F della proiezione orizzontale (nella figura F_2);
2. si riporta sulla LO, dalla parte di P, il punto V'_r con $FV'_r = FV$ (si misura FV in pianta, con il compasso);
3. in V'_r si disegna l'angolo β sopra la LO; il suo lato incontra la verticale per F nel punto F_i;
4. il simmetrico di F_i rispetto alla LO, F_i', è il punto di fuga delle rette con la stessa inclinazione che scendono allontanandosi.

ESEMPIO SVOLTO

La rampa della Figura 2.1. Prospettiva accidentale con d = 100 mm, h = 30 mm, spigoli a 30°/60°. Una rampa (un cuneo) sale lungo la famiglia di destra di 20 mm su 50 mm. Dove fuggono i suoi spigoli inclinati?

1. F_2 sta 57,7 mm a destra di P: in pianta, la parallela per V' alla famiglia di destra incontra la LT in F_2'.
2. $V'F_2' = \sqrt{(100^2 + 57{,}7^2)} \approx 115{,}5$ mm (teorema di Pitagora); riportata con il compasso sulla LO, dà V'_r 57,7 mm a sinistra di P.
3. Pendenza 20 : 50 = 0,4, quindi $F_2F_i = 0{,}4 \cdot 115{,}5 \approx 46{,}2$ mm: F_i è 76,2 mm sopra la LT. L'angolo della rampa disegnato in V'_r con il goniometro dà lo stesso punto.
4. Controllo: lo spigolo inclinato va da A, sulla LT 16 mm a sinistra di P, a B_t (6,3; 23,0), trovato con il metodo delle tracce; prolungato, passa per F_i.

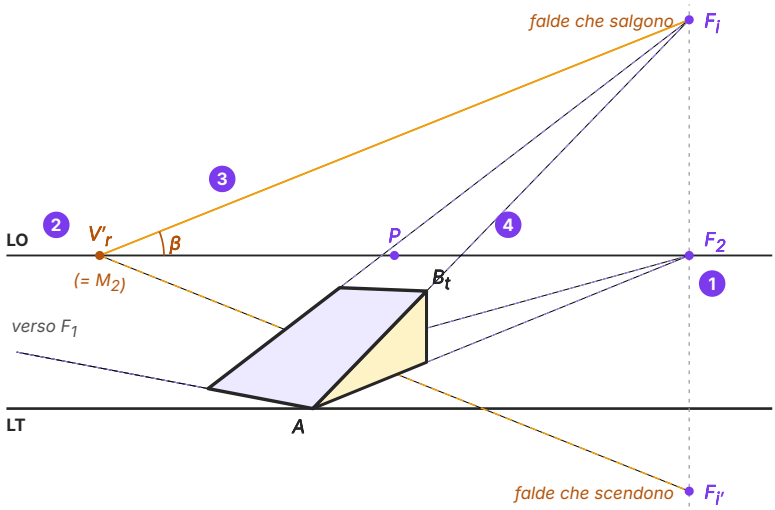


Figura 2.1 Punto di fuga di un piano inclinato (prospettiva accidentale, d = 100 mm, h = 30 mm, 30°/60°). Il cuneo ha lo spigolo A sulla LT, è largo 30 mm verso F_1, lungo 50 mm verso F_2 e alto 20 mm in fondo: la falda sale di 2 ogni 5. 1) Il punto di fuga F_2 della proiezione orizzontale. 2) Il punto di vista ribaltato V'_r, sulla LO, con $F_2V'_r = F_2V$ = 115,5 mm (coincide con il punto misuratore M_2). 3) L'angolo β disegnato in V'_r dà F_i sulla verticale per F_2, 46,2 mm sopra la LO. 4) Gli spigoli inclinati del cuneo passano per F_i; le rette che scendono con la stessa inclinazione fuggono in F_i', simmetrico rispetto alla LO.

2.1.4 Il tetto a capanna: due falde, due punti

Un **tetto a capanna** ha due falde piane, uguali e opposte, che si incontrano nel **colmo**, la linea orizzontale più alta; sui lati corti il muro termina con un triangolo, il **timpano** o frontone. Gli

spigoli inclinati del timpano, che salgono dalla gronda al colmo e poi riscendono, stanno nello stesso piano verticale e hanno la stessa pendenza, una in salita e una in discesa. Fuggono quindi in due punti della stessa verticale: F_i, sopra la LO, e F_i', sotto, alla stessa distanza dalla LO. Il colmo e le linee di gronda sono orizzontali e fuggono nell'altro punto di fuga. Se un disegno mostra le due falde del timpano dirette a punti posti a distanze diverse dalla LO, o una di esse diretta proprio sulla LO, c'è un errore.

2.2 Case, tetti e torri

2.2.1 La casa a capanna

La Figura 2.2a mostra una casa a capanna vista d'angolo. Il lato lungo, di 8 m, è rivolto verso F_1; il lato corto, di 6 m, con il timpano, verso F_2. Lo spigolo verticale più vicino all'osservatore, A, sta sulla LT: è la **retta delle altezze**, sulla quale tutte le quote si leggono in vera grandezza. La gronda sporge di 0,5 m oltre il muro lungo, e la falda la segue senza cambiare inclinazione.

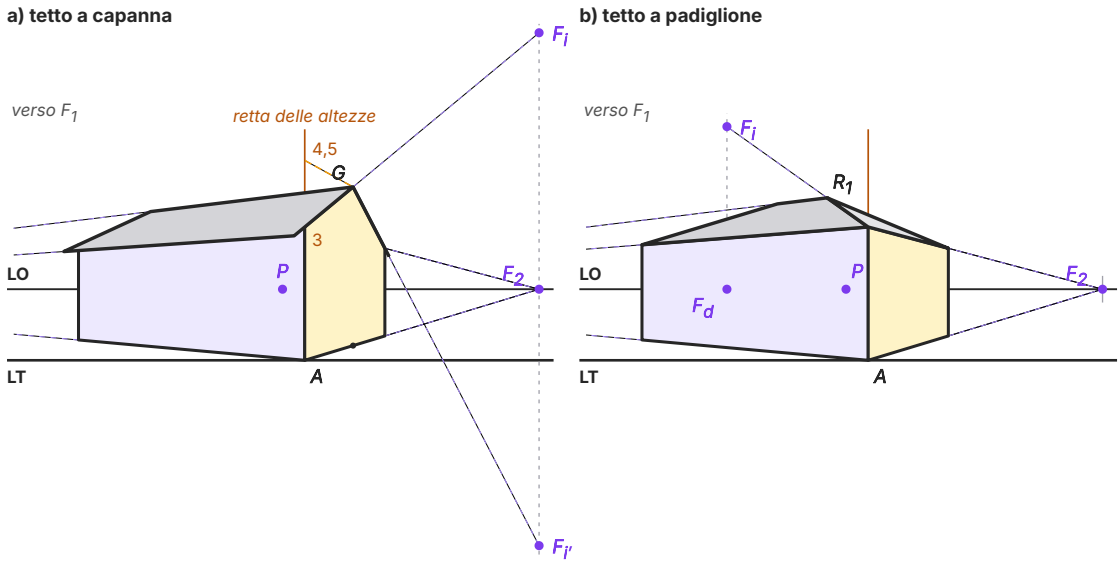


Figura 2.2 Due tetti in prospettiva accidentale (scala 1:100, d = 10 m, h = 1,6 m, 30°/60°; spigolo A sulla LT). a) Casa a capanna di 8 × 6 m, gronda a 3 m con sporto di 0,5 m, colmo a 4,5 m. Le quote si leggono sulla retta delle altezze in A e si portano verso F_2 nel piano del timpano; i due spigoli del timpano fuggono in F_i e in F_i', simmetrici rispetto alla LO; colmo e gronde fuggono in F_1, fuori dalla figura. b) La stessa casa con tetto a padiglione: il colmo R_1R_2 è lungo 2 m; il displuvio anteriore ha la proiezione orizzontale a 45°, che fugge in F_d, e fugge esso stesso in F_i, sulla verticale per F_d.

ESEMPIO SVOLTO

La casa della Figura 2.2a. Scala 1:100, d = 10 m (100 mm), h = 1,6 m (16 mm), 30°/60°; spigolo A sulla LT, 5 mm a destra di P. Muri alti 3 m, colmo a 4,5 m, timpano largo 6 m: ogni falda sale di 1,5 m su 3 m, una pendenza del 50 %.

1. Punti di fuga: F_2 a 57,7 mm a destra di P; F_1 a 173,2 mm a sinistra, fuori dalla figura (su un A3 orizzontale ci sta, con P al centro).
2. Pianta e tracce come nel capitolo 1: la base è un rettangolo di 60 × 80 mm con il vertice in A; le sue immagini vanno verso F_1 e verso F_2. Sulla retta delle altezze si segnano 30 mm (gronda) e 45 mm (colmo).
3. Il punto alto del timpano G sta sopra il punto medio del lato corto. Da 45 mm sulla retta delle altezze si va verso F_2, perché la quota corre nel piano del timpano; la verticale per l'immagine del punto medio taglia questa retta in G, a 15,9 mm a destra di P e 39,0 mm sopra la LT (dunque sopra la LO: il colmo si vede dal basso).
4. I punti di fuga delle falde: F_2V = 115,5 mm (come nell'esempio precedente) e pendenza 0,5, quindi F_i e F_i' stanno 57,7 mm sopra e sotto F_2. Il lato sinistro del timpano, dalla gronda a G, deve passare per F_i; il lato destro, da G in giù, per F_i': è il controllo della costruzione.
5. Il colmo, da G, va verso F_1; la linea di gronda anteriore, sporgente di 0,5 m (5 mm in pianta) e quindi più bassa di 0,25 m, si costruisce con lo stesso metodo e va anch'essa verso F_1.

2.2.2 Il tetto a padiglione

Il **tetto a padiglione** ha quattro falde: due trapezi sui lati lunghi e due triangoli sui lati corti. Se tutte le falde hanno la stessa pendenza, gli spigoli in cui si incontrano due falde, i **displuvi**, hanno in pianta la direzione della bisettrice dell'angolo dei muri: in un edificio rettangolare formano 45° con entrambi i lati. Il colmo è più corto del lato lungo di una larghezza intera: in una casa di 8 × 6 m misura 8 − 6 = 2 m.

Il displuvio si può costruire in due modi, e conviene farlo in entrambi per controllo (Figura 2.2b).

1. **Per punti.** Le estremità del colmo R_1 e R_2 sono punti come gli altri: in pianta stanno sull'asse del rettangolo, a 3 m dai lati corti; con le loro tracce e la retta delle altezze si trova la loro immagine alla quota del colmo. Il displuvio è il segmento che unisce l'angolo della gronda a R_1.
2. **Con il punto di fuga.** La proiezione orizzontale del displuvio è una retta orizzontale a 45° rispetto ai muri, che fugge in un punto F_d della LO, trovato in pianta con la parallela per V' a quella direzione. Il displuvio, che sale allontanandosi, fugge in un punto F_i della verticale per F_d. Il suo dislivello è 1,5 m su un avanzamento orizzontale pari alla diagonale di un quadrato di 3 m, cioè $3 \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}24$ m: la pendenza del displuvio, ≈ 0,354, è minore di quella delle falde.

Con i dati dell'esempio precedente (stessa base, colmo a 4,5 m) F_d cade 26,8 mm a sinistra di P; $F_dV = \sqrt{(100^2 + 26{,}8^2)} \approx 103{,}5$ mm e F_i sta $0{,}354 \cdot 103{,}5 \approx 36{,}6$ mm sopra la LO. L'immagine di R_1, trovata per punti, è a 4,2 mm a sinistra di P e 36,6 mm sopra la LT; il displuvio dalla gronda in A a R_1, prolungato, passa per F_i. Gli altri displuvi hanno direzioni diverse (uno, per esempio, viene verso l'osservatore mentre sale) e i loro punti di fuga cadono lontano: si costruiscono per punti.

2.2.3 Torri, cilindri e gruppi di edifici

Una **torre con tetto piramidale** è un prisma con una piramide sopra: si disegna il prisma, poi si trova il vertice della piramide sulla verticale del centro della base, portando la sua quota dalla retta delle altezze come nel capitolo 1. Gli spigoli della piramide sono rette inclinate che stanno nei piani verticali delle diagonali del quadrato di base; ciascuno ha il suo F_i sulla verticale del punto di fuga della propria diagonale. Nella prospettiva a 45°/45° una diagonale è perpendicolare al quadro e fugge in P: lo spigolo anteriore della piramide fugge allora sulla verticale per P.

Una **torre cilindrica**, con un tetto conico, non ha spigoli orizzontali: per un cilindro con l'asse verticale la distinzione tra prospettiva centrale e accidentale non ha senso, perché conta soltanto la posizione dell'asse. Le basi si costruiscono per 8 o 12 punti con il quadrato circoscritto, come nel capitolo 1; il vertice del cono sta sulla verticale dell'immagine del centro; il contorno del cilindro è dato dalle due verticali tangenti alle ellissi, il contorno del cono dalle due tangenti condotte dal vertice all'ellisse di gronda.

Un **gruppo di edifici**, per esempio quattro corpi di fabbrica attorno a una **corte**, si costruisce a partire da una pianta comune: tutti i corpi paralleli fuggono negli stessi F_1 e F_2, e ogni edificio ha la sua retta delle altezze oppure riceve le quote da una sola retta delle altezze, portate lungo il piano di una facciata fino alla verticale voluta. Solo alla fine si decide che cosa nasconde che cosa: un corpo basso davanti alla corte copre la base delle facciate interne, mentre il tetto di un corpo più lontano si vede sopra quello di un corpo vicino della stessa altezza solo se entrambi stanno sotto la LO, cioè se li guardiamo dall'alto; sopra la LO il tetto lontano appare più basso e resta nascosto, a meno che l'edificio non sia abbastanza più alto.

2.3 Scale, archi e portici

2.3.1 La scala

Una scala è una successione di gradini. Ogni gradino ha un'**alzata**, la faccia verticale, e una **pedata**, la faccia orizzontale su cui si appoggia il piede; il bordo anteriore della pedata è lo spigolo del gradino. Le dimensioni di una scala comoda seguono da secoli una regola pratica tradizionale, che si fa risalire all'architetto francese François Blondel (XVII secolo): il doppio dell'alzata più la pedata misura circa 62–64 cm, la lunghezza di un passo. Con alzate di 16 cm e pedate di 32 cm si ottiene $2 \cdot 16 + 32 = 64$ cm.

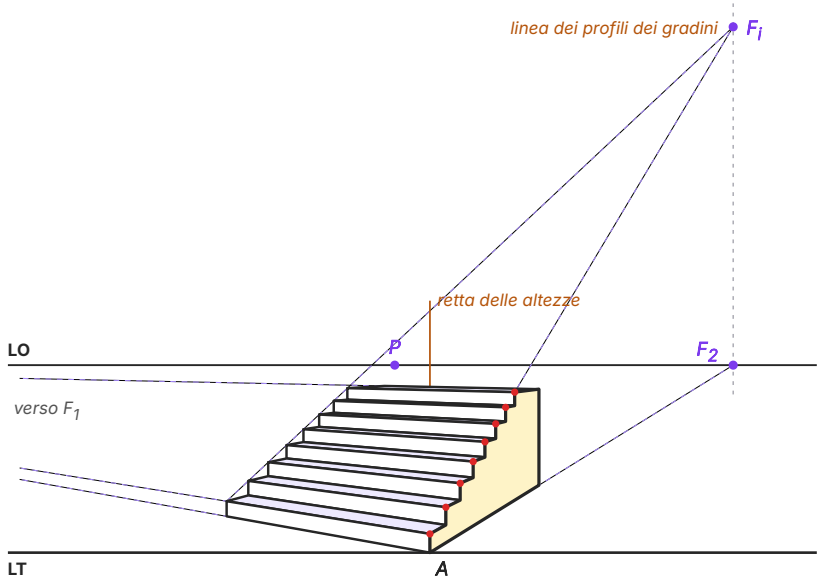


Figura 2.3 Una scala di otto gradini in prospettiva accidentale (scala 1:50, d = 5 m, h = 1,6 m, 30°/60°). Alzata 16 cm, pedata 32 cm, larghezza 2,4 m, pianerottolo profondo 1 m; lo spigolo A del primo gradino sta sulla LT. La scala sale verso F_2; gli spigoli dei gradini sulla sponda destra (punti rossi) sono allineati sulla linea dei profili, che fugge in F_i, sulla verticale per F_2. Gli spigoli orizzontali dei gradini fuggono in F_1, fuori dalla figura.

In prospettiva ogni gradino è un prisma basso, e la costruzione è quella di un prisma ripetuta. C'è però una scorciatoia. Gli spigoli dei gradini, presi su una stessa sponda, stanno su una retta inclinata, la **linea dei profili** (o linea di rampa), che ha la pendenza della scala: alzata diviso pedata. Questa retta fugge su un punto F_i della verticale per il punto di fuga della direzione di salita. Basta costruire bene il primo gradino e il punto F_i: gli spigoli degli altri gradini si trovano dove le loro verticali, o le loro rette verso il punto di fuga laterale, tagliano la linea dei profili (Figura 2.3).

ESEMPIO SVOLTO

La scala della Figura 2.3 su un foglio A3. Scala 1:50: d = 100 mm, h = 32 mm; alzata 3,2 mm, pedata 6,4 mm, larghezza 48 mm; spigolo A sulla LT, 6 mm a destra di P.

1. F_2 è 57,7 mm a destra di P (F_1 173,2 mm a sinistra); $F_2V \approx$ 115,5 mm; pendenza 16 : 32 = 0,5, quindi F_i è 57,7 mm sopra la LO (89,7 mm sopra la LT).
2. Si costruisce il primo gradino, con l'alzata sulla retta delle altezze in A: il suo spigolo destro è in (6,0; 3,2). La retta da questo punto a F_i è la linea dei profili.
3. Su di essa cadono gli spigoli successivi: (8,7; 7,7), (11,2; 11,8), (13,4; 15,5) … fino all'ottavo, (20,5; 27,4). Le pedate, in prospettiva, si accorciano più in fretta delle alzate.

2.3.2 Gli archi in una facciata vista d'angolo

Un arco a tutto sesto è un semicerchio in un piano verticale. In una facciata vista d'angolo il piano dell'arco non è parallelo al quadro, e la sua immagine non è un semicerchio: si costruisce **per punti**. Il metodo più rapido usa cinque punti, come per il cerchio del capitolo 1. Si inscrive l'arco nel mezzo quadrato che ha per base la luce dell'arco e per altezza il raggio: le imposte, la **chiave** (il punto più alto) e i due punti a 45°, che stanno sulle diagonali condotte dal centro dell'arco agli spigoli alti del mezzo quadrato. Questi ultimi hanno la proiezione sulla linea d'imposta a una distanza dalle imposte di circa 0,29 volte il raggio; con il compasso la si ottiene esattamente, sottraendo dal raggio metà della diagonale di un quadrato di lato pari al raggio stesso.

Per un arco grande, cinque punti sono pochi. Allora si **ribalta l'arco sul quadro**: si ruota il piano della facciata attorno alla sua traccia, la retta delle altezze, finché coincide con il quadro. Lì l'arco appare in vera forma e si divide in 12 parti uguali con il compasso. Ogni punto ribaltato dà due informazioni: la sua quota, che dalla retta delle altezze si porta verso il punto di fuga della facciata, e la sua distanza dalla traccia, che si riporta sulla LT e si trasferisce sulla linea di base della facciata con il punto misuratore, come nel capitolo 1. Le due rette si incontrano nell'immagine del punto.

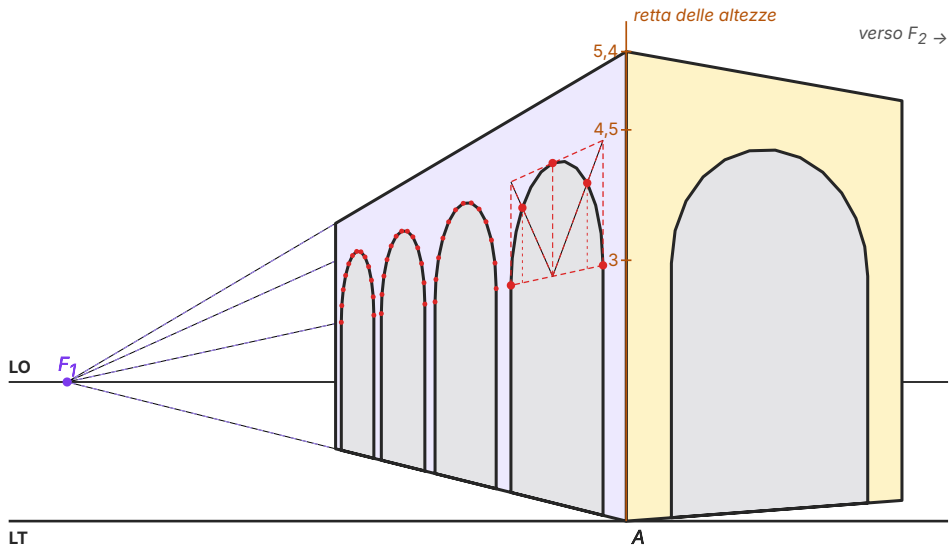


Figura 2.4 Un portico ad archi visto d'angolo (scala 1:100, d = 12 m, h = 1,6 m; facciata a 60° rispetto alla LT, verso F_1; lato corto a 30°, verso F_2, fuori dalla figura). Pilastri di 0,6 m, archi di 3 m di luce, imposte a 3 m, chiavi a 4,5 m, cornice a 5,4 m, tutte lette sulla retta delle altezze in A. Nel primo arco, la costruzione per cinque punti: il mezzo quadrato, le sue diagonali dal centro e i due punti a 45°. Negli altri archi i tredici punti dell'arco, ogni 15°. Le imposte, le chiavi e la cornice di tutti gli archi stanno su rette che fuggono in F_1.

2.3.3 Il portico

Un portico è una fila di archi uguali su pilastri o colonne (Figura 2.4). La ripetizione aiuta: tutte le imposte stanno su una retta orizzontale, tutte le chiavi su un'altra, e in una facciata vista d'angolo entrambe fuggono nello stesso punto di fuga della facciata. Si costruisce con cura il primo arco, si trovano le posizioni dei pilastri sulla linea di base con il metodo delle tracce o dei punti misuratori, e per gli archi successivi bastano le imposte e la chiave, prese sulle due rette verso il punto di fuga, più due o quattro punti intermedi.

Un controllo utile riguarda il punto più alto dell'immagine. Nell'arco che si allontana dall'osservatore, l'immagine della chiave non sta a metà tra le immagini delle imposte, ma più vicina all'imposta lontana: la metà più lontana dell'arco si accorcia di più. È la stessa ragione per cui, nel capitolo 1, l'immagine del centro di un cerchio non era il centro dell'ellisse.

2.4 Gli interni in prospettiva accidentale

2.4.1 L'angolo di una stanza

Se ci si mette di fronte all'angolo di una stanza, invece che di fronte a una parete, le due pareti che si incontrano nello spigolo formano angoli diversi da 0° e 90° con il quadro: è una prospettiva accidentale dall'interno. La stanza è la scatola del volume 3 vista per spigolo. Il quadro taglia le due pareti lungo due verticali, le loro **tracce** T_s (parete sinistra) e T_d (parete destra): sono loro le rette delle altezze, su cui pavimento, porte, finestre e soffitto si misurano in vera grandezza (Figura 2.5). E le rette della parete sinistra fuggono nel punto di fuga di destra, quelle della parete destra nel punto di fuga di sinistra: vedremo subito perché.

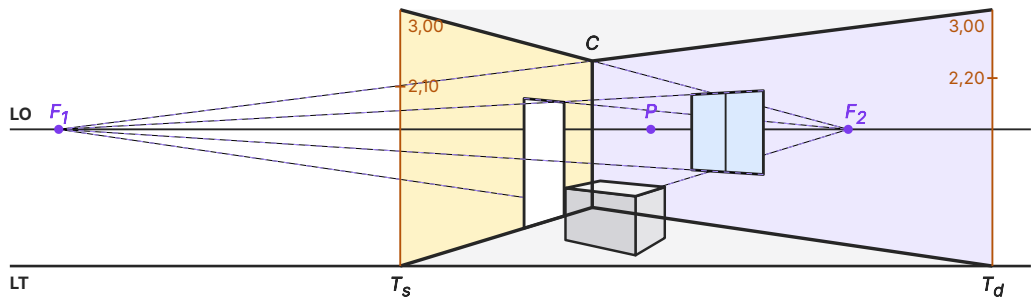


Figura 2.5 L'angolo di una stanza in prospettiva accidentale (scala 1:50, d = 4 m, h = 1,6 m, 30°/60°). L'angolo C è in (−1,2 m; 3,0 m); la stanza è alta 3 m. Le rette orizzontali della parete sinistra fuggono in F_2, quelle della parete destra in F_1. Le altezze vere si leggono sulle tracce delle pareti nel quadro, T_s e T_d: 2,10 m per l'architrave della porta, 2,20 m per quello della finestra. Il tavolo, un prisma con i lati paralleli alle pareti, usa gli stessi punti di fuga.

ESEMPIO SVOLTO

La stanza della Figura 2.5 in scala 1:50. d = 80 mm, h = 32 mm, 30°/60°; l'angolo C in pianta in (−24; 60) mm; stanza alta 60 mm. Porta nella parete sinistra da 16 a 34 mm dall'angolo, alta 42 mm; finestra nella parete destra da 44 a 68 mm dall'angolo, davanzale a 18 mm e architrave a 44 mm.

1. F_1 è 138,6 mm a sinistra di P, F_2 46,2 mm a destra. Prolungate in pianta, le pareti incontrano la LT in T_s, 58,6 mm a sinistra di P, e in T_d, 79,9 mm a destra.
2. Le basi delle pareti vanno da T_s a F_2 e da T_d a F_1; si incontrano nel piede dell'angolo, (−13,7; 13,7). Il soffitto, 60 mm sulle tracce, dà la cima dell'angolo a 48,0 mm: 34,3 mm di altezza apparente, il 57 % del vero, perché l'angolo è lontano dal quadro.
3. Porta: stipiti a 20,3 e 29,7 mm a sinistra di P, architrave portato da T_s verso F_2. Finestra: stipiti a 9,6 e 26,3 mm a destra di P, davanzale e architrave portati da T_d verso F_1.

Perché i punti di fuga si incrociano? La parete sinistra va dall'angolo verso sinistra e verso di noi: allontanandosi da noi, le sue rette orizzontali vanno a destra, e fuggono quindi nel punto di fuga di destra F_2. Simmetricamente, le rette della parete destra fuggono in F_1. Rispetto a un oggetto visto dall'esterno, che mostra la faccia sinistra diretta a F_1, i punti di fuga sembrano scambiati, ma la regola è sempre la stessa: ogni retta fugge dove la porta la sua direzione, non il lato del foglio in cui si trova.

2.4.2 Arredi e oggetti

I mobili si disegnano come prismi: un tavolo, un armadio, un letto hanno quasi sempre i lati paralleli alle pareti e usano quindi gli stessi due punti di fuga. Il loro ingombro si disegna prima in pianta; poi si costruisce la base sul pavimento e si alzano le verticali, prendendo le quote da una delle tracce e portandole lungo una parete fino alla verticale voluta. Un mobile ruotato rispetto alle pareti ha punti di fuga propri, sempre sulla LO: in una stanza i punti di fuga possono essere molti, ma la linea d'orizzonte è una sola.

2.4.3 La veduta per angolo nella scenografia

La prospettiva accidentale ha avuto una storia importante a teatro. Nelle scene del Rinascimento e del primo Seicento la strada o la piazza dipinta si apriva al centro del palcoscenico e fuggiva verso un unico punto, sull'asse della sala; il punto di vista ideale era quello del palco del principe. Secondo il racconto che si trova nelle storie della scenografia, all'inizio del Settecento i Galli Bibiena, una famiglia bolognese di architetti e scenografi, diffusero la **veduta per angolo**: l'architettura dipinta è ruotata rispetto al boccascena e mostra uno spigolo verso il pubblico, con due punti di fuga laterali. Ferdinando Galli Bibiena la descrisse nel suo trattato *L'architettura civile* (1711).

La Figura 2.6 ne mostra la geometria in pianta. Il quadro è il piano del boccascena; da V', al centro della sala, le parallele alle due direzioni dell'architettura dipinta, a 45°, incontrano il quadro in F_1 e F_2, molto più lontani dal centro della metà larghezza dell'apertura. I punti di fuga cadono quindi fuori dalla scena, e lo spettatore ha l'impressione che gli edifici continuino oltre le quinte, in uno spazio molto più vasto del palcoscenico. È il caso a 45°/45° del capitolo 1: i punti di fuga coincidono con i punti di distanza.

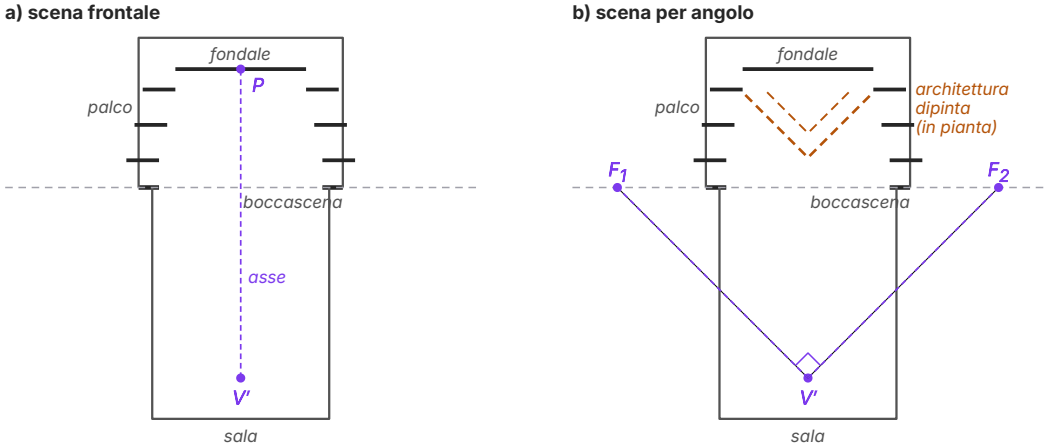


Figura 2.6 Pianta schematica di un teatro (non in scala). a) Scena frontale: le quinte, parallele al boccascena, e il fondale dipinto in prospettiva centrale, con il punto principale P sull'asse della sala. b) Scena per angolo: l'architettura dipinta è ruotata di 45°; le parallele alle sue direzioni condotte dal punto di vista V', perpendicolari tra loro, incontrano il quadro (il piano del boccascena) in F_1 e F_2, fuori dall'apertura della scena.

2.5 La prospettiva accidentale e le opere d'arte

2.5.1 Le vedute di città

Nel Settecento la veduta di città diventa un genere molto richiesto, legato ai viaggiatori del Grand Tour: la incontrerai nel capitolo 11. I vedutisti veneziani, soprattutto Canaletto e suo nipote Bernardo Bellotto, dipingono piazze e canali reali con una precisione che sembra fotografica. Chi osserva le loro tele vede spesso edifici disposti obliquamente rispetto al quadro, con le linee di gronda e i marcapiani che convergono verso due punti di fuga diversi, a volte fuori dal dipinto: una prospettiva accidentale, o più prospettive accidentali accostate, perché in una piazza vera gli edifici non sono mai tutti paralleli tra loro.

Questi pittori si servivano spesso della **camera ottica**, uno strumento che proietta l'immagine di una veduta su un vetro o un foglio, dove la si può ricalcare: Canaletto ne fece uso, e lo vedremo nel capitolo 11. Ma una veduta finita non è il ricalco di una sola proiezione. Il pittore componeva il quadro da molti disegni, spostava il punto di vista, allargava le piazze, raddrizza-

va o accostava edifici: per questo non ha senso pretendere di ritrovare in un dipinto una costruzione unica ed esatta. Ha senso, invece, chiedersi come è costruito lo spazio, e la restituzione è lo strumento giusto.

2.5.2 La restituzione accidentale

La **restituzione prospettica**, che nel volume 3 hai applicato alla prospettiva centrale, ricostruisce il punto di vista e le misure a partire da un'immagine. Con un'immagine accidentale si procede così (Figura 2.7):

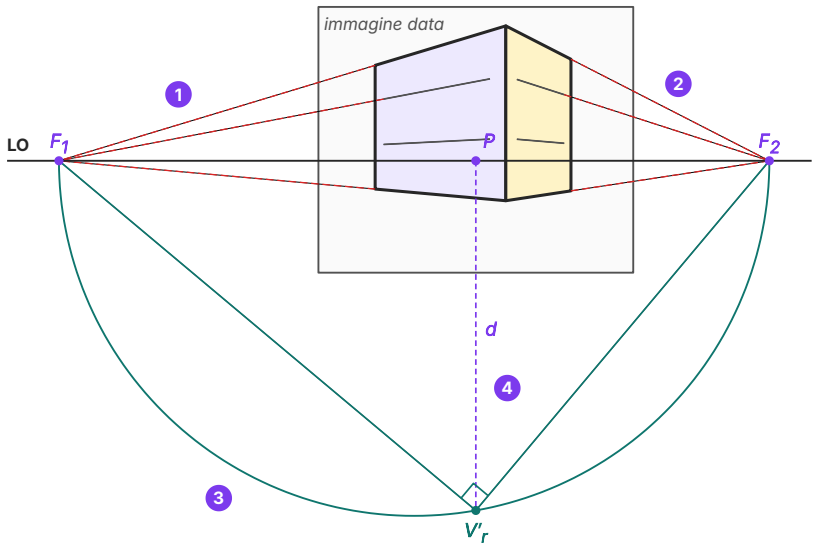


Figura 2.7 Restituzione di un'immagine in prospettiva accidentale (immagine inventata; d = 100 mm, facciate a 40°/50°). 1) e 2) Prolungando le rette orizzontali delle due facciate (in rosso) si trovano F_1 e F_2, e quindi la LO. 3) Sul diametro F_1F_2 si traccia la semicirconferenza: da ogni suo punto F_1F_2 si vede ad angolo retto. 4) La perpendicolare alla LO per P, centro dell'immagine, incontra la semicirconferenza in V'_r: $PV'_r = d$. Qui PF_1 = 119,2 mm e PF_2 = 83,9 mm, e infatti 119,2 · 83,9 ≈ 100².

1. si scelgono due famiglie di spigoli orizzontali, per esempio le gronde e i marcapiani delle due facciate di un edificio, e si prolungano: ogni famiglia converge in un punto, F_1 e F_2;
2. la retta F_1F_2 è la LO. Controllo: le verticali dell'immagine devono essere perpendicolari alla LO; se non lo sono, il quadro era inclinato o l'immagine è stata ruotata;
3. se le due famiglie sono perpendicolari tra loro, come accade quasi sempre negli edifici, il punto di vista ribaltato V'_r vede il segmento F_1F_2 sotto un angolo retto, e quindi sta sulla **semicirconferenza di diametro F_1F_2** (teorema di Talete);
4. per sapere dove, serve il punto principale P. In una fotografia non ritagliata P è, con buona approssimazione, il centro dell'immagine: la perpendicolare alla LO per P incontra la semi-

circonferenza in V'_r, e PV'_r è la distanza principale d. Gli angoli in F_1 e in F_2 tra la LO e le rette verso V'_r sono gli angoli che le due facciate formano con il quadro.

Il triangolo $F_1V'_rF_2$ è rettangolo in V'_r e PV'_r è la sua altezza relativa all'ipotenusa. Per il **secondo teorema di Euclide** il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo delle due proiezioni dei cateti: $d^2 = PF_1 \cdot PF_2$. La distanza principale, quindi, si può anche calcolare dalle due distanze misurate sulla LO, senza disegnare la semicirconferenza.

ESEMPIO SVOLTO

Da dove è stata scattata la foto? In una fotografia stampata a 200 × 150 mm, un edificio ad angolo mostra due facciate. Prolungando i davanzali delle finestre si trovano F_1 a 119 mm a sinistra del centro della foto e F_2 a 84 mm a destra, entrambi sulla stessa orizzontale, che è la LO.

1. Se la foto non è stata ritagliata, P è il centro dell'immagine. Allora $d^2 = 119 \cdot 84 = 9996$ mm^2, e $d \approx 100$ mm: per la foto stampata, l'occhio andrebbe messo 10 cm davanti al centro della stampa per vedere la scena come la vide l'obiettivo.
2. Il disegno conferma: la semicirconferenza di diametro 203 mm e la verticale per P si incontrano 100 mm sotto la LO.
3. Misurando con il goniometro gli angoli in F_1 e in F_2 si trovano circa 40° e 50°: la facciata di sinistra formava con il piano della fotografia un angolo di 40°, l'altra di 50°.
4. Se una misura vera è nota, per esempio l'altezza di una porta, si ricava la scala del disegno e quindi le misure in metri, come nella restituzione centrale.

Se P non è noto, come accade in un dipinto o in una foto ritagliata, serve un dato in più. Un pavimento a piastrelle quadrate, per esempio, offre le diagonali delle piastrelle, che fuggono in un terzo punto F_d della LO. Poiché in pianta le diagonali dividono a metà l'angolo retto tra i lati, la retta V'_rF_d è la bisettrice dell'angolo retto in V'_r: per una proprietà degli angoli alla circonferenza passa per il punto medio dell'altro arco F_1F_2, quello sopra la LO. Basta allora unire quel punto con F_d e prolungare fino alla semicirconferenza per trovare V'_r, e da qui P e d.

COLLEGAMENTI

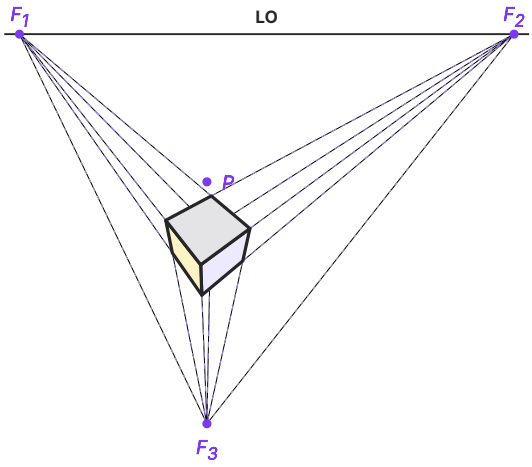
Prospettiva, matematica e storia dell'arte. La restituzione accidentale usa tre risultati che conosci dalla geometria del biennio: il teorema di Talete sull'angolo inscritto in una semicirconferenza, il secondo teorema di Euclide e la proprietà della bisettrice di un angolo inscritto. Gli stessi strumenti servono nel capitolo 11, quando si legge lo spazio delle vedute di Canaletto e di Bellotto, e nel capitolo 9, davanti alle quadrature dei soffitti barocchi. In fisica la stessa geometria descrive la macchina fotografica: la distanza principale di una foto è legata alla lunghezza focale dell'obiettivo, e una foto scattata con un grandangolo, guardata alla giusta distanza, non appare più deformata.

APPROFONDIMENTO

Il quadro inclinato e il quadro orizzontale. Finora il quadro è sempre stato verticale, e per questo le rette verticali sono rimaste verticali. Se si guarda un edificio alto dal basso, o una città dall'alto, e si vuole che il quadro resti perpendicolare alla direzione dello sguardo, il quadro si inclina: anche le verticali, che non sono più parallele al quadro, convergono in un **terzo punto di fuga**, sopra la LO se guardiamo in su, sotto se guardiamo in giù. È la **prospettiva a quadro inclinato**, o a tre punti di fuga (Figura 2.8a); la fotografia di un grattacielo ripresa dal marciapiede ne è l'esempio quotidiano.

Il caso limite è il **quadro orizzontale**: il quadro è un soffitto e l'osservatore guarda verso l'alto. Le verticali fuggono tutte nel punto del soffitto che sta proprio sopra l'occhio (Figura 2.8b). Su questa geometria si fondano le **quadrature** barocche, architetture dipinte che sembrano prolungare i muri reali verso un cielo aperto. Il gesuita Andrea Pozzo la espose nel trattato *Perspectiva pictorum et architectorum* (1693–1700) e la applicò nella chiesa di Sant'Ignazio a Roma (la finta cupola dipinta su tela, 1685; la volta della navata, 1691–1694), che studierai nel capitolo 9: l'illusione funziona pienamente da un solo punto della navata, segnato da un disco nel pavimento.

a) quadro inclinato: tre punti di fuga



b) quadro orizzontale: la quadratura di un soffitto

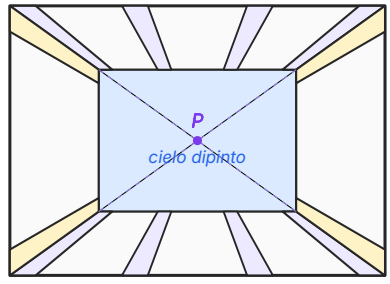


Figura 2.8 Schemi di prospettiva con il quadro non verticale. a) Un cubo visto dall'alto, con il quadro inclinato perpendicolare allo sguardo: gli spigoli orizzontali fuggono in F_1 e F_2 sulla LO, quelli verticali in F_3, sotto. Il punto principale P è l'ortocentro del triangolo $F_1F_2F_3$. b) Una quadratura su un soffitto rettangolare, vista dal basso con il quadro orizzontale: i pilastri dipinti continuano i muri reali, e i loro spigoli verticali fuggono tutti nel punto principale P, sopra l'occhio.

2.6 Dalla costruzione alla tavola

2.6.1 Scegliere il punto di vista

Una veduta architettonica si progetta prima di disegnarla. Le scelte sono tre: la distanza, l'altezza dell'occhio e l'angolo.

1. **L'altezza dell'occhio.** Per una veduta «da pedone» si prende h = 1,6 m: in scala 1:100 sono 16 mm, in scala 1:50 32 mm. L'edificio appare allora come lo vediamo per strada, con le gronde e i colmi sopra la LO e i basamenti sotto. Per una **veduta a volo d'uccello**, che mostra i tetti e l'impianto di un complesso, si alza il punto di vista ben sopra il colmo più alto.
2. **La distanza.** Vale la regola pratica del volume 3: l'oggetto deve stare nel cono ottico di circa 60°, e si prende d almeno pari a circa 1,5 volte la larghezza dell'oggetto in vista. Una casa larga in prospettiva una decina di metri chiede un punto di vista ad almeno 15 m dal quadro; più vicino, le facciate si deformano e l'angolo dello spigolo anteriore appare troppo acuto.
3. **L'angolo.** Con 30°/60° la facciata più vicina a 30° si vede larga e quella a 60° di scorcio: si usa per mostrare il prospetto principale di un edificio e lasciare intuire il fianco. Con 45°/45° le due facciate hanno lo stesso peso e l'immagine è più statica. Con 45°/45° conviene che lo spigolo verticale più vicino non cada proprio sulla verticale per P: l'immagine diventerebbe perfettamente simmetrica e rigida.

2.6.2 L'ordine di lavoro su un foglio A3

Il foglio A3 (area utile 400 × 277 mm), orizzontale, è il formato abituale delle vedute architettoniche. I punti di fuga escono spesso dal foglio: con d = 120 mm e 30°/60° uno dei due cade a 208 mm da P. I rimedi sono quelli del capitolo 1: la prospettiva ridotta (la costruzione in scala ridotta, poi ingrandita) oppure una seconda linea di traccia; mai spostare il punto di fuga a occhio. Il metodo del taglio dei raggi visuali aiuta, perché dà la posizione orizzontale di ogni punto senza passare per i punti di fuga: il punto di fuga che sta sul foglio serve allora soprattutto per le altezze e come controllo. L'ordine di lavoro è questo:

1. squadratura, titolo, scala; posizione della LT (a circa un terzo dell'altezza del foglio dal basso) e della LO;
2. pianta ausiliaria sotto la LT, ruotata dell'angolo scelto, con uno spigolo sulla LT; punto di vista in pianta e punti di fuga;
3. basi delle masse principali sul geometrale; retta delle altezze; volumi in linee sottili;
4. tetti: colmi, gronde, falde con i loro punti di fuga inclinati; poi scale, archi, aperture;
5. controllo: ogni retta orizzontale passa per il suo punto sulla LO, ogni retta inclinata per il suo punto sulla verticale giusta, ogni verticale è verticale;

6. ripasso a china o a matita morbida delle sole linee in vista, con spessori diversi (contorni più forti, dettagli più leggeri); le costruzioni restano visibili ma sottili.

ERRORE FREQUENTE

Gli errori più frequenti nelle vedute d'angolo.

- Le falde del tetto mandate sulla LO, o nello stesso punto di fuga delle gronde: le rette inclinate fuggono sulla verticale del punto di fuga della loro proiezione orizzontale.
- I due spigoli del timpano mandati a punti posti a distanze diverse dalla LO: falde della stessa pendenza danno F_i e F_i' simmetrici.
- Le altezze misurate su uno spigolo che non sta nel quadro, per esempio lo spigolo d'angolo di una stanza: in vera grandezza sono solo sulle tracce delle pareti.
- In un interno, le rette della parete sinistra mandate in F_1: allontanandosi vanno a destra, e fuggono in F_2.
- Gli archi di una facciata d'angolo disegnati con il compasso come semicerchi: si costruiscono per punti.
- Una veduta con d troppo piccolo: gli angoli degli edifici sembrano acuti e le facciate deformate.

IN SINTESI

Prospettiva accidentale di volumi architettonici, in sintesi.

1. Rette orizzontali sulla LO, in F_1 e F_2 (e in altri punti della LO se hanno altre direzioni); rette verticali verticali.
2. Rette inclinate in un piano verticale: sulla verticale per il punto di fuga F della loro proiezione orizzontale, a distanza dalla LO pari a FV moltiplicato per la pendenza; sopra se salgono, sotto se scendono.
3. Quote vere solo sulla retta delle altezze, una verticale che giace nel quadro.
4. Archi e cerchi per punti; displuvi e spigoli di piramidi per punti o con il loro F_i.
5. Restituzione: F_1 e F_2 danno la LO; V'_r sulla semicirconferenza di diametro F_1F_2; $d^2 = PF_1 \cdot PF_2$.

SINTESI

- Le rette inclinate che giacciono in un piano verticale (falde, rampe, corrimano, spigoli di piramidi) non fuggono sulla LO, ma sulla verticale per il punto di fuga della loro proiezione orizzontale.
- Il punto di fuga F_i sta sopra la LO se la retta sale allontanandosi, sotto se scende; la sua distanza dalla LO è FV per la pendenza della retta (triangoli simili).
- Con l'angolo della retta, F_i si costruisce per ribaltamento: il punto di vista ribaltato V'_r sta sulla LO con $FV'_r = FV$ (è il punto misuratore della famiglia), e in V'_r si disegna l'angolo.
- Le due falde di un tetto a capanna fuggono in due punti simmetrici rispetto alla LO, F_i e F_i'; colmo e gronde sono orizzontali.
- Nel tetto a padiglione i displuvi hanno in pianta la direzione a 45° rispetto ai muri: si costruiscono per punti dalle estremità del colmo o con il loro punto di fuga, e i due metodi devono concordare.
- In una scala gli spigoli dei gradini stanno sulla linea dei profili, una retta inclinata con la pendenza alzata/pedata.
- Gli archi in una facciata vista d'angolo si costruiscono per punti: cinque punti con il mezzo quadrato, oppure molti punti ribaltando l'arco sul quadro.
- Nell'angolo di una stanza le altezze vere sono sulle tracce delle pareti; le rette della parete sinistra fuggono nel punto di fuga di destra e viceversa.
- La veduta per angolo, descritta da Ferdinando Galli Bibiena nel 1711, porta i punti di fuga fuori dalla scena e fa sembrare lo spazio più vasto.
- Nella restituzione accidentale F_1 e F_2 danno la LO; il punto di vista ribaltato sta sulla semicirconferenza di diametro F_1F_2; con P noto, $d^2 = PF_1 \cdot PF_2$.
- Con il quadro inclinato anche le verticali convergono in un terzo punto di fuga; con il quadro orizzontale, come nelle quadrature dei soffitti, fuggono nel punto sopra l'occhio.
- Nelle vedute dal vero si usa $h = 1{,}6$ m e una distanza almeno pari a circa 1,5 volte la larghezza dell'oggetto; un punto di fuga fuori dal foglio non si sposta a occhio: si usa la prospettiva ridotta o una seconda linea di traccia.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Una retta inclinata che giace in un piano verticale e sale allontanandosi dall'osservatore fugge:
   A. in un punto della verticale per il punto di fuga della sua proiezione orizzontale, sopra la LO
   B. in un punto della LO
   C. nel punto principale P
   D. in un punto sotto la LO

2. ● I due spigoli inclinati del timpano di un tetto a capanna, con le falde di uguale pendenza, fuggono:

   A. nello stesso punto della LO

   B. uno in F_1 e uno in F_2

   C. in due punti della stessa verticale, simmetrici rispetto alla LO

   D. in due punti della LO simmetrici rispetto a P

3. ● In prospettiva accidentale le altezze si leggono in vera grandezza:

   A. sullo spigolo verticale più alto dell'edificio

   B. su una verticale che giace nel quadro

   C. su qualunque spigolo verticale

   D. sulla LO, a partire dal punto di fuga

4. ● Per costruire con l'angolo β il punto di fuga di una falda che sale verso F_2, il punto di vista ribaltato V'_r si mette:

   A. sotto la LT, alla distanza d

   B. nel punto principale P

   C. sulla verticale per F_2

   D. sulla LO, a una distanza da F_2 uguale a F_2V

5. ●● Una scala con alzate di 15 cm e pedate di 30 cm sale verso F_1; in pianta si misura $F_1V = 160$ mm. La linea dei profili fugge:

   A. 160 mm sopra F_1

   B. 80 mm sopra F_1, sulla verticale per F_1

   C. 80 mm sotto F_1

   D. in F_1

6. ●● Nell'angolo di una stanza disegnato dall'interno, le rette orizzontali della parete di sinistra fuggono:

   A. nel punto di fuga di destra F_2

   B. nel punto di fuga di sinistra F_1

   C. nel punto principale P

   D. in nessun punto, perché sono parallele al quadro

7. ●● In un tetto a padiglione con tutte le falde della stessa pendenza, ogni displuvio in pianta:

   A. è parallelo al lato lungo

   B. è perpendicolare al lato corto

   C. coincide con il colmo

   D. forma un angolo di 45° con i due muri che si incontrano nell'angolo

8. ●● In una restituzione accidentale si misurano $PF_1 = 90$ mm e $PF_2 = 40$ mm. La distanza principale è:

   A. 65 mm
   B. 50 mm
   C. 60 mm
   D. 130 mm

9. ●● In una prospettiva a quadro inclinato di un edificio visto dal basso, gli spigoli verticali:

   A. restano verticali
   B. convergono in un terzo punto di fuga sopra la LO
   C. convergono nel punto principale *P*
   D. convergono in un punto sotto la LO

Lessico e norme

10. ● Completa: una retta inclinata in un piano verticale fugge sulla _____ per il punto di fuga della sua _____ ; la distanza di F_i dalla LO è uguale a *FV* moltiplicato per la _____ della retta; se la retta scende allontanandosi, F_i sta _____ la LO.

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Le linee di gronda di un tetto a capanna fuggono in F_i. b) Il colmo di un tetto a padiglione è più corto del lato lungo dell'edificio. c) In una scala gli spigoli dei gradini di una stessa sponda sono allineati. d) Un arco in una facciata vista d'angolo appare come un semicerchio più piccolo. e) Per disegnare un cilindro verticale in prospettiva accidentale servono F_1 e F_2.

12. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. Termini: 1) colmo; 2) displuvio; 3) timpano; 4) alzata; 5) pedata; 6) linea dei profili. Definizioni: a) faccia orizzontale di un gradino; b) spigolo inclinato in cui si incontrano due falde di un tetto a padiglione; c) linea orizzontale più alta di un tetto a falde; d) faccia verticale di un gradino; e) triangolo di muro sotto le falde, sul lato corto di una casa a capanna; f) retta che unisce gli spigoli dei gradini di una sponda.

13. ●● Completa: prolungando due famiglie di spigoli orizzontali di un'immagine si trovano _____ ; la retta che li unisce è la _____ ; se le due famiglie sono perpendicolari, V'_r sta sulla _____ di diametro F_1F_2, per il teorema di _____ ; se *P* è noto, d^2 = _____ (teorema di _____).

14. ●● Spiega con parole tue la differenza tra una scena frontale e una veduta per angolo, e perché nella seconda i punti di fuga cadono di solito fuori dal boccascena.

15. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) In una veduta a volo d'uccello la LO sta più in alto dei tetti. b) Nella prospettiva a 45°/45° i due punti di fuga coincidono con i punti di distanza. c) In una quadratura su un soffitto, disegnata con il quadro orizzontale, le verticali fuggono nel punto sopra l'occhio dell'osservatore. d) Il displuvio di un tetto a padiglione ha la stessa pendenza delle falde. e) Per una veduta «da pedone» in scala 1:100 si prende $h = 1{,}6$ mm.

Costruire

16. ● **Il punto di fuga di una falda.** Foglio A4 orizzontale; prospettiva accidentale con d = 120 mm, h = 40 mm, 30°/60°. Una falda sale lungo la famiglia di destra con una pendenza del 50 %. a) Trova in pianta F_2 e misura la sua distanza da P. b) Calcola F_2V con il teorema di Pitagora e controllalo con il compasso. c) Costruisci F_i e F_i'. F_1 sta nel foglio?

17. ● **Una rampa a 45°/45°.** d = 100 mm, h = 50 mm, spigoli a 45°/45°. Una rampa inclinata di 30° sale verso il punto di fuga di sinistra. Trova F_1 e il punto ribaltato V'_r, disegna in V'_r l'angolo di 30° con il goniometro e trova F_i. A che distanza dalla LO lo trovi? Perché qui F_1V è la diagonale di un quadrato?

18. ●● **Una casa a capanna (A3).** Scala 1:100; d = 10 m, h = 1,6 m, 30°/60°; lo spigolo A sta sulla LT, 10 mm a destra di P. Il lato con il timpano, largo 8 m, va verso F_2; il lato lungo, di 12 m, verso F_1. Gronda a 4 m, colmo a 6 m. Disegna la casa e scrivi le posizioni di F_1, F_2, F_i, F_i' e le coordinate (distanza dalla verticale per P; altezza sopra la LT) dell'immagine del punto alto del timpano G. Il colmo si vede dall'alto o dal basso?

19. ●● **Lo stesso edificio con il tetto a padiglione.** Con i dati dell'esercizio precedente, sostituisci il tetto a capanna con un tetto a padiglione con tutte le falde della stessa pendenza e il colmo a 6 m. Quanto è lungo il colmo? Trova F_d, punto di fuga della direzione a 45°, e il punto di fuga F_i del displuvio che parte da A; poi costruisci per punti l'estremità del colmo R_1 più vicina e verifica che il displuvio passi per F_i.

20. ●● **Una torre con tetto piramidale.** Scala 1:200; d = 20 m, h = 1,6 m, 45°/45°. Torre a base quadrata di 4 × 4 m, alta 12 m, con lo spigolo anteriore sulla LT 10 mm a sinistra di P; il tetto è una piramide con il vertice a 14 m. Disegna la torre e scrivi le coordinate delle immagini dei quattro vertici del quadrato in cima alla torre e del vertice della piramide. Dove fugge lo spigolo anteriore della piramide, e perché?

21. ●● **Una scala che sale verso sinistra (A3).** Scala 1:50; d = 4 m, h = 1,6 m, 30°/60°. Una scala di 6 gradini, larga 1,2 m, con alzate di 17 cm e pedate di 30 cm, sale verso F_1; lo spigolo del primo gradino sulla sponda anteriore sta sulla LT, 20 mm a destra di P. Verifica che la scala rispetti la regola del passo; trova F_1, F_1V e F_i; scrivi le coordinate degli spigoli dei sei gradini sulla sponda anteriore.

22. ●● **Un arco in una facciata d'angolo.** d = 120 mm, h = 30 mm; la facciata forma 60° con la LT, va verso F_1 e incontra la LT in A, 30 mm a destra di P. Un arco a tutto sesto di raggio 30 mm ha le imposte a 40 mm di altezza, a 20 mm e a 80 mm da A lungo la facciata. Ribalta l'arco sul quadro, dividilo ogni 30° e costruisci le immagini dei 7 punti con il punto misuratore M_1. Scrivi le loro coordinate. L'immagine della chiave è a metà tra le imposte?

23. ●● **L'angolo di una stanza (A3).** Scala 1:50; d = 4 m, h = 1,6 m, 45°/45°. L'angolo della stanza, in pianta, è in (10; 60) mm; la stanza è alta 3 m. Nella parete sinistra una porta da 1,0 m a 1,9 m dall'angolo, alta 2,1 m; nella parete destra una finestra da 1,5 m a 3,0 m dall'angolo, con il davanzale a 0,9 m e l'architrave a 2,2 m. Trova le tracce delle pareti sulla LT, l'immagine dello spigolo d'angolo e quelle degli stipiti della porta e della finestra.

24. ●●● **Un portico visto d'angolo (A3).** Scala 1:100; d = 15 m, h = 1,6 m, 30°/60°. Un portico corre lungo la famiglia di destra a partire dallo spigolo A, sulla LT 20 mm a sinistra di P: un pilastro di 1 m, un arco di 3 m di luce, un pilastro di 1 m e così via, con le imposte a 3,5 m. Costruisci i primi tre archi e scrivi le coordinate delle immagini delle imposte e delle chiavi. Verifica che le tre imposte di sinistra, le tre chiavi e le tre imposte di destra stanno su tre rette che passano per F_2.

25. ●● **Una torre cilindrica.** Scala 1:200; d = 20 m, h = 1,6 m. Una torre cilindrica di raggio 3 m, alta 10 m, coperta da un tetto conico con il vertice a 14 m, ha l'asse in (20; 40) mm. Costruisci le ellissi della base e della gronda per 8 punti e il cono. Scrivi le coordinate delle immagini del centro della base, dei suoi punti anteriore e posteriore e del vertice del cono, e trova le verticali di contorno. Serve sapere l'angolo della prospettiva accidentale? Perché?

Leggere il disegno

26. ● Osserva la Figura 2.2a. Perché F_i e F_i' stanno alla stessa distanza dalla LO? Dove si sposterebbero se il tetto avesse una pendenza del 100 %, cioè falde a 45°? E se la casa fosse ruotata in modo da mostrare il timpano verso F_1?

27. ●● In una fotografia non ritagliata, prolungando le gronde di due facciate perpendicolari si trovano F_1 a 150 mm a sinistra del centro e F_2 a 60 mm a destra. Trova la distanza principale e gli angoli che le due facciate formano con il piano della fotografia (con il goniometro, sul tuo disegno).

28. ●● Uno studente consegna una veduta d'angolo con questi difetti: le falde del timpano vanno entrambe in F_2; le altezze del colmo sono misurate sullo spigolo d'angolo posteriore della casa; nell'interno della stanza le rette della parete sinistra vanno in F_1; gli archi del portico sono semicerchi tracciati con il compasso. Per ciascun difetto spiega la regola violata e come si corregge.

29. ●● In un disegno la linea dei profili di una scala fugge 40 mm sopra F_2, e in pianta si misura F_2V = 100 mm. Qual è la pendenza della scala? Se le alzate sono di 16 cm, quanto sono lunghe le pedate? È una scala comoda?

30. ● Osserva la Figura 2.5. Quale punto di fuga usa la parete di destra, e perché? Su quali rette si leggono le altezze vere? Perché, dei due stipiti della finestra, quello più vicino all'angolo appare più corto? Lo spigolo d'angolo C sta nel quadro?

Verso la verifica

31. ●●● **Una chiesa con il campanile (A3).** Scala 1:200; d = 30 m, h = 1,6 m, 30°/60°; lo spigolo A sta sulla LT, 10 mm a destra di P. Una chiesa a capanna ha la facciata larga 8 m, rivolta verso F_2, e il fianco lungo 14 m, verso F_1; gronde a 8 m, colmo a 10 m. In fondo al fianco, allineato con esso, sorge un campanile a base quadrata di 3 × 3 m, alto 18 m, con una cuspide piramidale che arriva a 21 m. F_1 cade fuori dal foglio: scegli e indica il metodo con cui lavori. Scrivi le posizioni di F_2, F_i, F_i', le coordinate del punto alto della facciata G, dello spigolo anteriore del campanile alla quota di 18 m e del vertice della cuspide.

32. ●●● **Una restituzione senza il punto principale.** In un dipinto (inventato) un pavimento a piastrelle quadrate è visto d'angolo. Su una retta orizzontale, presa come LO, scegli un punto O: le due famiglie di lati delle piastrelle fuggono in F_1, 160 mm a sinistra di O, e in F_2, 90 mm a destra; le diagonali fuggono in F_d, 22,4 mm a sinistra di O. Traccia la circonferenza di diametro F_1F_2 e il punto medio N dell'arco superiore; la retta NF_d incontra l'arco inferiore in V'_r. Trova P e d, e controlla il risultato con il secondo teorema di Euclide.

33. ●●● In 15–20 righe confronta la scena frontale del Rinascimento e la veduta per angolo dei Galli Bibiena, e collegale alle vedute di città del Settecento: che cosa cambia nella posizione dei punti di fuga, nel rapporto tra lo spettatore e lo spazio rappresentato, nell'impressione di profondità? Perché una veduta dipinta non si può trattare come una costruzione geometrica esatta?

PER APPROFONDIRE

- [DOC] M. Docci, R. Migliari, *Scienza della rappresentazione*: i capitoli sulla prospettiva trattano le rette inclinate, il quadro inclinato e la restituzione come parti di un'unica geometria.
- [POZ] A. Pozzo, *Perspectiva pictorum et architectorum*: le tavole del trattato, consultabili nelle biblioteche digitali, mostrano passo per passo la costruzione di architetture dipinte, di altari e di soffitti.

Glossario del capitolo

Alzata
Faccia verticale di un gradino; la sua altezza è il dislivello tra due pedate.

Chiave
Punto più alto di un arco; anche il concio che lo occupa.

Colmo
Linea orizzontale più alta di un tetto a falde, dove si incontrano le falde.

Displuvio
Spigolo inclinato in cui si incontrano due falde di un tetto, dal quale l'acqua scorre verso le due parti.

Linea dei profili
Retta inclinata che unisce gli spigoli dei gradini di una stessa sponda; ha la pendenza della scala.

Pedata
Faccia orizzontale di un gradino, su cui si appoggia il piede.

Pendenza
Rapporto tra il dislivello e l'avanzamento orizzontale di una retta o di un piano inclinato; si esprime anche in percentuale.

Proiezione orizzontale
Proiezione ortogonale di una figura sul piano geometrale; per una retta inclinata è una retta orizzontale.

Quadro orizzontale
Quadro disposto orizzontalmente, come un soffitto; le rette verticali fuggono nel punto principale.

Restituzione prospettica
Ricostruzione del punto di vista e delle misure di un oggetto a partire dalla sua immagine prospettica.

Retta inclinata
Retta non orizzontale né verticale; se giace in un piano verticale, fugge sulla verticale per il punto di fuga della sua proiezione orizzontale.

Ribaltamento
Rotazione di un piano attorno a una retta fino a farlo coincidere con un altro piano, per vedere in vera grandezza le figure che contiene.

Tetto a capanna
Tetto a due falde piane che si incontrano nel colmo, con un timpano su ciascun lato corto.

Tetto a padiglione
Tetto a quattro falde, due trapezi e due triangoli, unite da displuvi inclinati.

Timpano
Superficie triangolare di muro compresa tra le falde di un tetto a capanna e la linea di gronda.

Veduta a volo d'uccello
Veduta con il punto di vista molto più alto degli edifici, che mostra i tetti e l'impianto di un complesso.

Veduta per angolo
Scena teatrale in cui l'architettura dipinta è ruotata rispetto al boccascena, con due punti di fuga laterali.

Soluzioni

1. A. La parallela per V alla retta sta nel piano verticale per V parallelo alla retta, che taglia il quadro lungo la verticale per il punto di fuga della proiezione orizzontale; la retta sale, quindi il punto è sopra la LO.

2. C. Le due falde hanno la stessa proiezione orizzontale (fugge in un solo punto F) e pendenze uguali e opposte: F_i e F_i' sono sulla verticale per F, alla stessa distanza dalla LO.

3. B. Solo nel quadro le misure non si riducono: la retta delle altezze è una verticale che giace nel quadro.

4. D. Il piano verticale VF_2F_i ruota attorno alla verticale per F_2: V cade sulla LO a distanza F_2V (è il punto misuratore M_2).

5. B. Pendenza 15 : 30 = 0,5; $F_1F_i = 0{,}5 \cdot 160 = 80$ mm, sopra la LO perché la scala sale allontanandosi.

6. A. La parete sinistra, allontanandosi dall'osservatore, va verso destra: le sue rette orizzontali fuggono in F_2.

7. D. Con le falde della stessa pendenza il displuvio è la bisettrice dell'angolo dei muri: 45° con ciascuno.

8. C. $d^2 = 90 \cdot 40 = 3600$ mm^2, $d = 60$ mm (secondo teorema di Euclide).

9. B. Il quadro inclinato non è più parallelo alle verticali; guardando in su, le verticali convergono in un punto sopra la LO.

10. Verticale; proiezione orizzontale; pendenza; sotto.

11. a) Falso: le gronde sono orizzontali e fuggono sulla LO (nel punto di fuga del lato lungo). b) Vero: è più corto di una larghezza intera dell'edificio. c) Vero: stanno sulla linea dei profili. d) Falso: il suo piano non è parallelo al quadro, e l'immagine è una curva da costruire per punti. e) Falso: un cilindro verticale non ha spigoli orizzontali; conta solo la posizione del suo asse.

12. 1c; 2b; 3e; 4d; 5a; 6f.

13. F_1 e F_2; LO; semicirconferenza; Talete; $PF_1 \cdot PF_2$; Euclide (il secondo).

14. Traccia di risposta: nella scena frontale le strade e le facciate dipinte fuggono verso un solo punto, sull'asse della sala; nella veduta per angolo l'architettura è ruotata (spesso di 45°) e mostra uno spigolo verso il pubblico, con due punti di fuga laterali. Le parallele per il punto di vista alle due direzioni incontrano il quadro, cioè il piano del boccascena, a una distanza dal centro pari alla distanza del punto di vista (a 45°/45°), che in un teatro è molto maggiore di metà della larghezza della scena: i punti di fuga cadono fuori dall'apertura, e gli edifici sembrano continuare oltre le quinte.

15. a) Vero: il punto di vista è più alto dei tetti. b) Vero. c) Vero. d) Falso: il displuvio sale dello stesso dislivello su un percorso orizzontale più lungo (la diagonale), quindi ha una pendenza minore. e) Falso: 1,6 m in scala 1:100 sono 16 mm.

16. a) F_2 è 69,3 mm a destra di P (misura attesa). b) $F_2V = \sqrt{(120^2 + 69{,}3^2)} \approx 138{,}6$ mm. c) Pendenza 0,5: F_i è $0{,}5 \cdot 138{,}6 \approx 69{,}3$ mm sopra la LO (109,3 mm sopra la LT), F_i' 69,3 mm sotto la LO, cioè 29,3 mm sotto la LT: un punto di fuga di una retta che scende può cadere anche sotto la LT. F_1 è 207,8 mm a sinistra di P: su un A4 orizzontale (area utile 277 mm) non entra, ma qui non serve.

17. $F_1 = D_1$, 100 mm a sinistra di P. F_1V è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con i cateti $d = 100$ mm e $PF_1 = 100$ mm: è la diagonale di un quadrato di lato 100 mm, $100 \cdot \sqrt{2} \approx 141{,}4$ mm. V'_r sulla LO a 141,4 mm da F_1, cioè 41,4 mm a destra di P. Con l'angolo di 30° in V'_r: F_i sulla verticale per F_1, misura attesa ≈ 81,6 mm sopra la LO (± 1 mm).

18. In mm: F_1 173,2 a sinistra di P, F_2 57,7 a destra; $F_2V \approx 115{,}5$; pendenza 2 : 4 = 0,5, quindi F_i 57,7 mm sopra la LO (73,7 sopra la LT) e F_i' 57,7 mm sotto (41,7 mm sotto la LT). Base: A (10,0; 0), angolo del timpano (29,5; 6,5), angolo del fianco (−58,7; 6,0). Gronda: 40 mm sulla retta delle altezze; all'altro angolo del timpano 30,2 mm. G = (22,3; 48,7); l'altra estremità del colmo (−38,0; 38,6). Il colmo sta sopra la LO (16 mm): si vede dal basso.

19. Colmo lungo 12 − 8 = 4 m. F_d è 26,8 mm a sinistra di P; $F_dV = \sqrt{(100^2 + 26{,}8^2)} \approx 103{,}5$ mm. Il displuvio sale di 2 m su $4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}66$ m: pendenza ≈ 0,354; F_i sta $0{,}354 \cdot 103{,}5 \approx 36{,}6$ mm sopra la LO (52,6 mm sopra la LT). Per punti: R_1 sta in pianta a 4 m da entrambi i muri che si incontrano in A; la sua immagine è (−3,0; 44,5), l'altra estremità del colmo (−22,5; 41,2). La retta da (10,0; 40,0), angolo della gronda in A, a R_1, prolungata, passa per F_i.

20. $F_1 = D_1$ e $F_2 = D_2$, 100 mm a sinistra e a destra di P. Quadrato in cima alla torre (quota 60 mm): vertice anteriore (−10,0; 60,0), sinistro (−21,2; 53,6), destro (3,6; 53,6), posteriore (−7,8; 48,5). Vertice della piramide (−8,8; 62,3). Lo spigolo anteriore della piramide sta nel piano verticale della diagonale anteriore–posteriore del quadrato, che a 45°/45° è perpendicolare al quadro e fugge in P: lo spigolo fugge quindi sulla verticale per P. Sale di 2 m su $2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}83$ m (pendenza ≈ 0,707) e $PV = d = 100$ mm: il punto di fuga è 70,7 mm sopra la LO, cioè 78,7 mm sopra la LT.

21. Regola del passo: 2 · 17 + 30 = 64 cm, corretta. In scala: F_1 138,6 mm a sinistra di P, F_2 46,2 mm a destra; $F_1V = \sqrt{(80^2 + 138{,}6^2)} \approx 160{,}0$ mm. Pendenza 17 : 30 ≈ 0,567: $F_i \approx 90{,}7$ mm sopra la LO, cioè 122,7 mm sopra la LT, sulla verticale per F_1. Spigoli dei gradini sulla sponda anteriore: (20,0; 3,4), (14,3; 7,7), (8,9; 11,7), (4,0; 15,5), (−0,7; 19,0), (−5,0; 22,2).

22. F_1 è 69,3 mm a sinistra di P; $F_1V \approx 138{,}6$ mm, quindi M_1 è 69,3 mm a destra di P. Punti (angolo dall'imposta vicina; distanza da A e quota vere in mm → immagine): 0° (20; 40) → (17,5; 38,7); 30° (24,0; 55,0) → (15,3; 51,3); 60° (35,0; 66,0) → (10,0; 58,7); 90°, chiave (50; 70) → (3,7; 59,4); 120° (65,0; 66,0) → (−1,7; 54,5); 150° (76,0; 55,0) → (−5,2; 46,1); 180° (80; 40) → (−6,3; 36,3). Le imposte hanno ascisse 17,5 e −6,3, con il punto medio a 5,6 mm: la chiave (3,7) è spostata verso l'imposta lontana, perché la metà lontana dell'arco si accorcia di più.

23. In mm: $F_1 = D_1$ 80 a sinistra di P, $F_2 = D_2$ 80 a destra. Le pareti, prolungate, incontrano la LT in T_s, 50 mm a sinistra di P, e in T_d, 70 mm a destra (ciascuna dista 84,9 mm dall'angolo). Spigolo d'angolo: da (5,7; 13,7) a (5,7; 48,0). Porta: stipiti a (−2,6; 11,7)–(−2,6; 38,4) e (−11,9; 9,4)–(−11,9; 39,1). Finestra: stipiti a (21,0; 22,6)–(21,0; 40,1) e (43,0; 20,5)–(43,0; 41,8). Le quote della porta si portano da T_s verso F_2, quelle della finestra da T_d verso F_1.

24. F_2 è 86,6 mm a destra di P (F_1, 259,8 mm a sinistra, non serve). Immagini in mm (imposta sinistra, chiave, imposta destra): primo arco (−14,2; 34,0), (−6,6; 45,7), (0,0; 31,4); secondo arco (3,9; 30,7), (9,1; 40,7), (13,7; 29,0); terzo arco (16,5; 28,5), (20,2; 37,2), (23,6; 27,2). Le tre famiglie di punti corrispondenti stanno su rette che passano per F_2, sulla LO a 16 mm dalla LT: sono le orizzontali dell'imposta sinistra, della chiave e dell'imposta destra, tutte parallele alla facciata. In ogni arco la chiave è più vicina all'imposta destra, la più lontana.

25. Immagini in mm: centro della base (14,3; 2,3); punto anteriore (16,0; 1,6); posteriore (12,9; 2,8); punti laterali (3,6; 2,3) e (25,0; 2,3). Il punto medio tra anteriore e posteriore è a 2,2 mm: l'immagine del centro (2,3) è più vicina al punto posteriore. Gronda: centro (14,3; 38,0), punto anteriore (16,0; 41,6), posteriore (12,9; 35,1). Vertice del cono (14,3; 52,3). Le verticali di contorno partono dai punti di tangenza delle rette condotte da V' al cerchio di base: $x \approx 3{,}6$ e $x \approx 25{,}3$ mm. L'angolo non serve: un cilindro con l'asse verticale non ha spigoli orizzontali, e la sua immagine dipende solo dalla posizione dell'asse.

26. Le due falde hanno la stessa proiezione orizzontale e pendenze uguali, una in salita e una in discesa: i triangoli che danno F_i e F_i' sono uguali e simmetrici rispetto alla LO. Con pendenza del 100 % la distanza dalla LO sarebbe uguale a F_2V, cioè 115,5 mm al posto di 57,7 mm (in scala, con $d = 100$ mm): i punti si allontanano dalla LO, il doppio. Con il tim-

pano verso F_1, i due punti starebbero sulla verticale per F_1, alla distanza $F_1V \cdot 0{,}5 = 100$ mm dalla LO.

27. $d^2 = 150 \cdot 60 = 9000$ mm^2, $d \approx 94{,}9$ mm. Disegnando la semicirconferenza di diametro 210 mm e la verticale per il centro si trova V'_r 94,9 mm sotto la LO. Angoli misurati: circa 32° in F_1 (facciata di sinistra) e circa 58° in F_2 (facciata di destra); la loro somma è 90°.

28. Falde in F_2: sono rette inclinate e fuggono sulla verticale per F_2, una sopra e una sotto la LO. Altezze sullo spigolo posteriore: quello spigolo non sta nel quadro, e le sue misure sono ridotte; le quote vanno prese sulla retta delle altezze (lo spigolo sulla LT) e portate indietro verso il punto di fuga. Parete sinistra in F_1: allontanandosi va a destra, e fugge in F_2. Archi come semicerchi: il piano dell'arco non è parallelo al quadro; vanno costruiti per punti (cinque punti con il mezzo quadrato, o più punti con il ribaltamento).

29. Pendenza 40 : 100 = 0,4. Pedata = 16 : 0,4 = 40 cm. Con la regola del passo: $2 \cdot 16 + 40 = 72$ cm, ben più di 62–64 cm: la pedata è troppo lunga per un passo normale e la scala è scomoda (si fanno passi lunghi o due passi per gradino).

30. La parete di destra, allontanandosi, va a sinistra: le sue rette orizzontali fuggono in F_1. Le altezze vere si leggono sulle tracce delle pareti nel quadro, T_s e T_d. Lo stipite più vicino all'angolo è più lontano dal quadro, e l'immagine di un segmento verticale si accorcia con la profondità nel rapporto $d : (d + y)$: per questo appare più corto. Lo spigolo C non sta nel quadro: è il punto più lontano della stanza.

31. Traccia di soluzione. F_1 è 259,8 mm a sinistra di P (fuori dall'A3): si usa la prospettiva ridotta (per esempio a metà scala) o una seconda linea di traccia, aiutandosi con il taglio dei raggi visuali per le ascisse e controllando con F_2. F_2 è 86,6 mm a destra di P; $F_2V = \sqrt{(150^2 + 86{,}6^2)} \approx 173{,}2$ mm; pendenza della facciata 2 : 4 = 0,5, quindi F_i 86,6 mm sopra la LO (94,6 mm sopra la LT) e F'_i 86,6 mm sotto. Immagini in mm: G (17,9; 45,7), angoli della facciata (10,0; 0) e (24,4; 1,5), fondo del fianco (−41,0; 1,5), estremità posteriore del colmo (−30,1; 39,1). Campanile: spigolo anteriore da (−41,0; 1,5) a (−41,0; 74,5), alla quota di 18 m; vertice della cuspide (−41,0; 82,5), costruito per punti dal centro del quadrato.

32. Centro della circonferenza 35 mm a sinistra di O, raggio 125 mm; N 125 mm sopra la LO, sulla verticale del centro. La retta NF_d incontra l'arco inferiore in V'_r, 10 mm a sinistra di O e 122,5 mm sotto la LO: P è 10 mm a sinistra di O e $d \approx 122{,}5$ mm. Controllo: $PF_1 = 150$ mm, $PF_2 = 100$ mm, $150 \cdot 100 = 15\,000$ e $\sqrt{15\,000} \approx 122{,}5$ mm.

33. Traccia di risposta: nella scena frontale lo spazio dipinto è simmetrico e fugge in un punto sull'asse della sala, pensato per il posto del principe; nella veduta per angolo gli edifici sono ruotati e i punti di fuga, laterali, cadono fuori dalla scena: lo spazio sembra continuare oltre le quinte e appare più vasto e meno chiuso. Le vedute di città del Settecento usano spesso più punti di fuga, perché gli edifici reali non sono paralleli tra loro. Un dipinto, però, nasce da molti disegni, da spostamenti del punto di vista e da correzioni volute: la restituzione è un'ipotesi sulla costruzione, non la prova di una costruzione unica.