CAPITOLO

# 1

# La prospettiva accidentale: principi, figure piane e solidi

*Gira l'oggetto e la regola resta la stessa: cambiano soltanto i punti verso cui fuggono i suoi spigoli.*

**OBIETTIVI**

1. Riconoscere una prospettiva accidentale e spiegare perché i due gruppi di spigoli orizzontali fuggono in $F_1$ e $F_2$ sulla LO.
2. Trovare i punti di fuga dalla pianta e controllarli con la semicirconferenza di diametro $F_1F_2$ e con il secondo teorema di Euclide.
3. Misurare le altezze sulla retta delle altezze, posta in un punto del quadro.
4. Costruire figure piane con il metodo dei punti di fuga e delle tracce, con il taglio dei raggi visuali e con i punti misuratori.
5. Disegnare in prospettiva accidentale cerchi, prismi, piramidi, cilindri e coni, da soli e in gruppo.
6. Scegliere distanza, altezza e angolo di una veduta, e rimediare ai punti di fuga che escono dal foglio.

**INDICE DEL CAPITOLO**


1.1 Dalla prospettiva centrale alla prospettiva accidentale ..... 2
1.2 I punti di fuga e la retta delle altezze ..... 4
1.3 Tre metodi di costruzione ..... 9
1.4 Figure piane sul geometrale ..... 14
1.5 I solidi ..... 16
1.6 Dalla teoria al foglio ..... 18

**Disegno e Storia dell'arte 4** · Parte I · La prospettiva accidentale e le ombre · versione 1.0
Capitolo 1: La prospettiva accidentale: principi, figure piane e solidi · pagine 23–48 del volume completo · estratto per lo studio

Cammina lungo un marciapiede e fermati all'incrocio. Il palazzo d'angolo non ti mostra una facciata «di fronte», come una scenografia: ti mostra lo spigolo e, ai due lati, due facciate che si allontanano, ciascuna con le sue file di finestre, i marcapiani e la linea della gronda che corrono verso un punto diverso dell'orizzonte. È la situazione più comune che ci sia: una casa vista dal giardino, un mobile in un angolo della stanza, un libro appoggiato di traverso sul banco. Quasi mai, nella vita, un oggetto ci presenta una faccia esattamente parallela al nostro sguardo.

Nel volume dello scorso anno hai imparato la prospettiva centrale, in cui un gruppo di spigoli fugge nel punto principale $P$ e l'altro resta parallelo alla linea di terra (vol. 3, capp. 3–4). In questo capitolo ruotiamo l'oggetto rispetto al quadro. Vedremo che non serve nessuna regola nuova: bastano la definizione di punto di fuga e qualche teorema della geometria che già conosci, da Talete a Euclide. Ne nasceranno due punti di fuga, tre metodi di costruzione e un modo di disegnare che userai per tutto l'anno, per gli edifici del capitolo 2, per le ombre del capitolo 3 e per leggere le vedute dei pittori del Settecento.

## 1.1 Dalla prospettiva centrale alla prospettiva accidentale

### 1.1.1 Quello che sai già

Ripassiamo il sistema della prospettiva, con i simboli del volume 3 (vol. 3, cap. 3). L'occhio dell'osservatore è il **punto di vista** $V$; il suo piede sul terreno è $V'$. Il terreno è il **piano geometrale** PG, su cui poggiano gli oggetti. Tra l'occhio e gli oggetti sta il **quadro** $Q$, un piano verticale trasparente: l'immagine di un punto è il punto in cui il suo raggio visuale attraversa il quadro. Il quadro taglia il geometrale nella **linea di terra** LT; il piano orizzontale che passa per l'occhio lo taglia nella **linea d'orizzonte** LO, all'altezza $h$ sopra la LT. Il piede della perpendicolare condotta da $V$ al quadro è il **punto principale** $P$, sulla LO; la distanza $VP$ è la **distanza principale** $d$.

Due fatti reggono tutto il resto. Il primo: l'immagine di una retta passa per la sua traccia $T$ (il punto in cui la retta incontra il quadro) e per il suo punto di fuga, che è il punto in cui incontra il quadro la parallela alla retta condotta per $V$. Il secondo: rette parallele hanno la stessa parallela per $V$, quindi lo stesso punto di fuga; e se sono orizzontali, quel punto sta sulla LO. In prospettiva centrale ne hai usati tre: $P$, dove fuggono le rette perpendicolari al quadro, e i punti di distanza $D_1$ e $D_2$, a distanza $d$ da $P$, dove fuggono le rette orizzontali inclinate di 45°.

### 1.1.2 Un oggetto girato rispetto al quadro

Ora prendiamo un cubo appoggiato al geometrale e giriamolo intorno a uno spigolo verticale. Le sue facce non sono più parallele e perpendicolari al quadro: i suoi spigoli orizzontali forma-

no due **famiglie** di rette parallele, e nessuna delle due è perpendicolare al quadro. Nel volume 3 hai già visto il risultato in una figura di confronto (vol. 3, cap. 3): ciascuna famiglia fugge in un suo punto della LO. Ora vogliamo sapere dove sono quei punti e come si costruisce il disegno.

Si chiama **prospettiva accidentale** (o angolare) la prospettiva di un oggetto che ha gli spigoli verticali paralleli al quadro e le due famiglie di spigoli orizzontali oblique rispetto al quadro. Il nome viene dal fatto che i punti di fuga non sono «fissi» come $P$, $D_1$ e $D_2$: dipendono da come l'oggetto è stato girato. Il quadro resta verticale, come in prospettiva centrale: per questo si parla di prospettiva a **quadro verticale**, e gli spigoli verticali, che sono paralleli al quadro, restano verticali anche nel disegno. Esiste anche una prospettiva a **quadro inclinato**, in cui il quadro non è verticale e le verticali convergono in un terzo punto di fuga: è quella delle fotografie di un grattacielo scattate dal basso, e la incontrerai in un approfondimento del capitolo 2.

Chiamiamo **punti di fuga** $F_1$ e $F_2$ della prospettiva accidentale i punti della LO in cui fuggono le due famiglie di spigoli orizzontali: $F_1$ quello di sinistra, $F_2$ quello di destra. La Figura 1.1 mostra il sistema nello spazio. Per trovare $F_1$ si conduce per l'occhio $V$ la parallela agli spigoli che fuggono a sinistra: è orizzontale, perché quegli spigoli sono orizzontali, e quindi incontra il quadro in un punto della LO. Lo stesso per $F_2$. Le due parallele per $V$ sono perpendicolari tra loro, come i due spigoli di un angolo del cubo: questo fatto, come vedremo, è la chiave di tutto il capitolo.

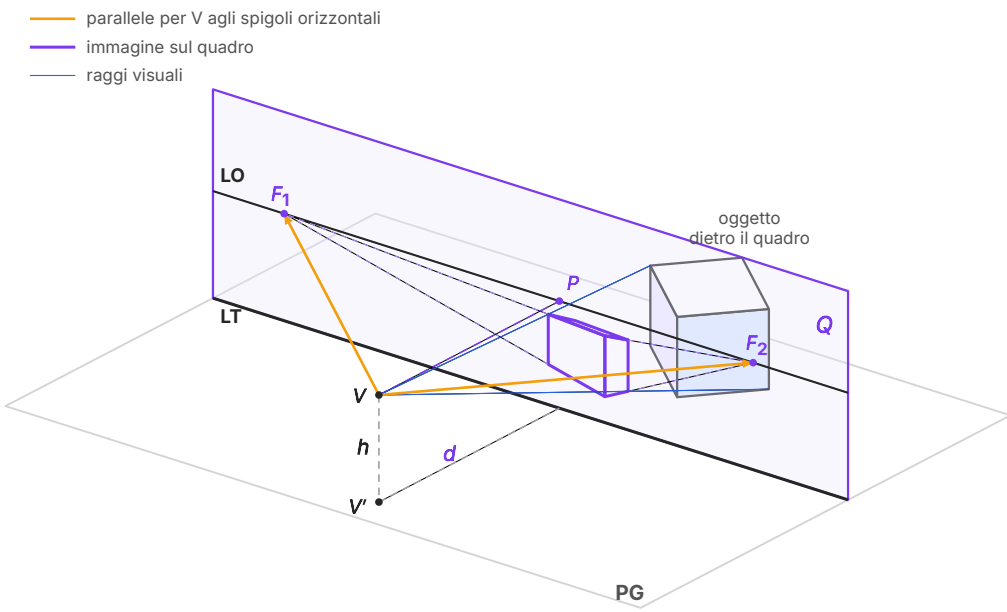



**Figura 1.1** Il sistema della prospettiva accidentale visto nello spazio. Un parallelepipedo dietro il quadro $Q$ ha le facce oblique rispetto al quadro. Le parallele condotte per l'occhio $V$ ai due gruppi di spigoli orizzontali incontrano il quadro sulla LO nei punti di fuga $F_1$ e $F_2$; l'immagine del solido (in viola) ha gli spigoli orizzontali che convergono verso quei punti e gli spigoli verticali verticali.

DA RICORDARE

**Dove fuggono le rette, in prospettiva accidentale.**

- Spigoli orizzontali della prima famiglia → $F_1$, sulla LO; della seconda famiglia → $F_2$, sulla LO.
- Altre rette orizzontali (la diagonale di una faccia orizzontale, il lato di un esagono) → un altro punto della LO, trovato allo stesso modo.
- Spigoli verticali → nessun punto di fuga: restano verticali.
- Rette perpendicolari al quadro → ancora $P$, anche se l'oggetto non ne ha più.
- Figure contenute nel quadro → in vera grandezza.

## 1.2 I punti di fuga e la retta delle altezze

### 1.2.1 Trovare i punti di fuga in pianta

Come nel volume 3, disegniamo la pianta dell'oggetto ribaltando il geometrale sul quadro intorno alla LT: la parte del geometrale che sta dietro il quadro va **sotto la LT**, e la parte davanti, dove sta l'osservatore, va sopra. Il piede del punto di vista, che sta davanti al quadro, finisce dunque **sopra la LT**, sulla verticale di $P$, a distanza $d$ dalla LT. Nella pianta ribaltata le direzioni degli spigoli restano quelle vere: un lato inclinato di 30° sul quadro forma 30° con la LT.

Per trovare i punti di fuga si conducono per $V'$ le parallele ai due lati della pianta (con la squadra, o riportando gli angoli). Esse incontrano la LT in due punti, che chiamiamo $F_1'$ e $F_2'$; i punti di fuga $F_1$ e $F_2$ stanno sulla LO, esattamente sopra di essi (Figura 1.2). Il motivo è semplice: la pianta che hai disegnato è la vista dall'alto del piano orizzontale per l'occhio, abbassata di $h$. Spostando tutto in su di $h$, $V'$ diventa il punto di vista ribaltato sul piano d'orizzonte e la LT diventa la LO.

Quel punto, che indichiamo con $V'_r$, servirà spesso: è il **punto di vista ribaltato**, cioè il punto in cui finisce $V$ se si fa ruotare il piano d'orizzonte intorno alla LO fino a farlo coincidere con il quadro. Sta sulla verticale di $P$, a distanza $d$ sopra la LO. Con $V'_r$ i punti di fuga si possono costruire direttamente sulla LO, senza passare dalla LT: è ciò che faremo quando la LO sarà abbastanza in basso da lasciare spazio sopra di sé. In un foglio A4, invece, $V'_r$ esce spesso dal foglio, e allora si lavora con $V'$ sulla LT e si riportano i punti in su.

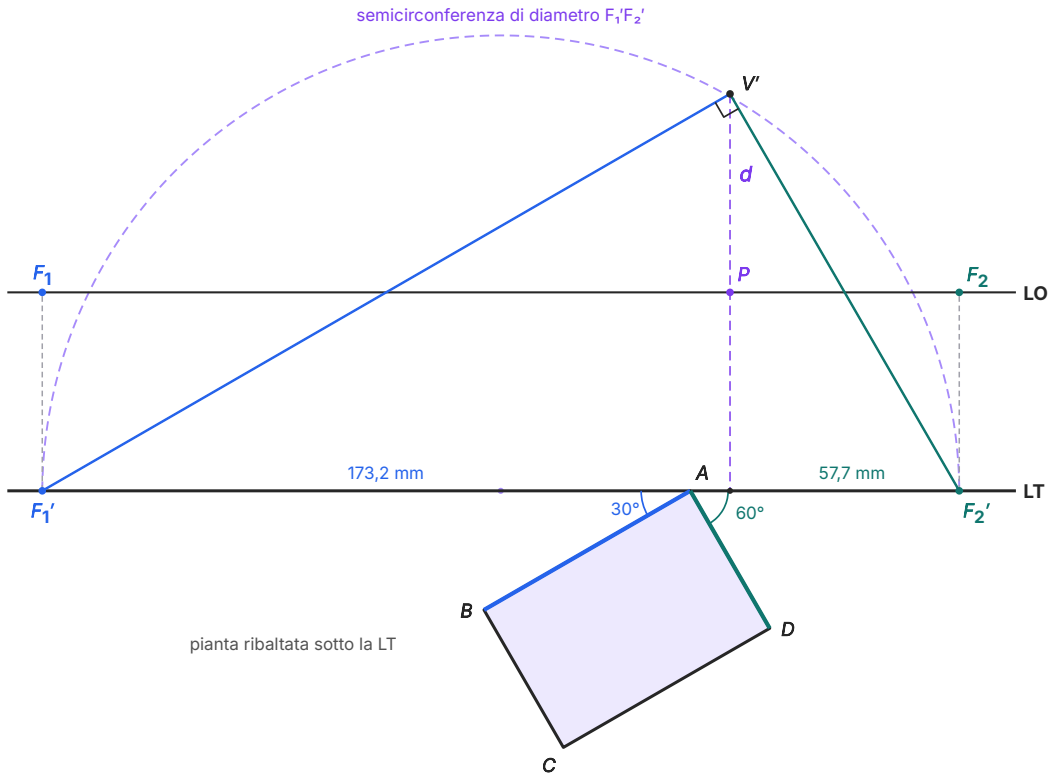



**Figura 1.2** I punti di fuga trovati in pianta (prospettiva accidentale, $d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°). Le parallele condotte da $V'$ ai lati $AB$ e $AD$ del rettangolo incontrano la LT in $F_1'$ e $F_2'$, a 173,2 mm e a 57,7 mm dalla verticale di $P$; i punti di fuga $F_1$ e $F_2$ stanno sulla LO, sopra di essi. L'angolo in $V'$ è retto, quindi $V'$ sta sulla semicirconferenza di diametro $F_1'F_2'$, e $173{,}2 \cdot 57{,}7 \approx 10\,000 = 100^2$.

### 1.2.2 Il punto di vista sulla semicirconferenza

Gli spigoli di un parallelepipedo che si incontrano in un vertice sono perpendicolari, e quindi lo sono anche le loro parallele per l'occhio. Nella pianta ribaltata questo significa che l'angolo $F_1'V'F_2'$ è retto; sulla LO, che l'angolo $F_1V'_rF_2$ è retto. Ricordi il teorema di Talete sul triangolo inscritto in una semicirconferenza: un angolo che «vede» un diametro da un punto della circonferenza è retto, e viceversa il vertice di un angolo retto sta sulla semicirconferenza che ha per diametro il lato opposto. Quindi:

$$V'_r \text{ sta sulla semicirconferenza di diametro } F_1F_2.$$

La **semicirconferenza dei punti di fuga** passa per $V'_r$ soltanto quando le due famiglie sono perpendicolari, cioè per oggetti con gli angoli retti in pianta: parallelepipedi, edifici a pianta rettangolare, stanze. È un controllo prezioso. Se due punti di fuga trovati in un disegno non «vedo-

no» il punto di vista ribaltato sotto un angolo retto, o la costruzione è sbagliata, o l'oggetto non ha gli angoli retti.

C'è un secondo controllo, tutto numerico. Nel triangolo rettangolo $F_1V'_rF_2$ il segmento $V'_rP$ è l'altezza relativa all'ipotenusa, e il **secondo teorema di Euclide** dice che il quadrato dell'altezza è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa:

$$PF_1 \cdot PF_2 = d^2$$

Se i due punti di fuga stanno a 173,2 mm e a 57,7 mm da $P$, il prodotto è circa 10 000 mm², e la distanza principale è 100 mm. Più un punto di fuga si avvicina a $P$, più l'altro si allontana: il loro prodotto resta sempre $d^2$.

**ESEMPIO SVOLTO**

**I punti di fuga a 30°/60°.** Un parallelepipedo è girato in modo che gli spigoli che fuggono a sinistra formino 30° con il quadro e quelli che fuggono a destra 60°; la distanza principale è $d$ = 120 mm. Dove cadono $F_1$ e $F_2$?

1. Il triangolo $PV'_rF_2$ è rettangolo in $P$. La retta $V'_rF_2$ è parallela agli spigoli di destra e quindi forma 60° con la LO: l'angolo in $F_2$ è di 60°, quello in $V'_r$ di 30°. È metà di un triangolo equilatero.
2. In un mezzo triangolo equilatero il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa. Se $PF_2 = a$, allora $V'_rF_2 = 2a$, e per il teorema di Pitagora $(2a)^2 = a^2 + d^2$, cioè $3a^2 = d^2$ e $a = d/\sqrt{3}$ = 120/1,732 ≈ 69,3 mm.
3. Per $F_1$ il ragionamento si rovescia: l'angolo in $F_1$ è di 30°, e $PF_1$ è il cateto maggiore, $d \cdot \sqrt{3} \approx$ 207,8 mm.
4. Controllo con Euclide: 207,8 · 69,3 ≈ 14 400 = 120². I due punti distano 277,1 mm: non entrano in un foglio A4 orizzontale, la cui squadratura è larga 277 mm, e bisogna passare all'A3 o ridurre $d$, come vedrai alla fine del capitolo.

Sul foglio non si fa nessun calcolo: si conducono le parallele con le squadre di 30° e 60° e si misura. I numeri servono a controllare la costruzione.

### 1.2.3 Due casi limite

Quando l'oggetto è girato di **45°**, entrambe le famiglie formano 45° con il quadro: le loro parallele per l'occhio sono le rette a 45° della prospettiva centrale, e i punti di fuga coincidono con i punti di distanza $D_1$ e $D_2$, a distanza $d$ da $P$. È il caso simmetrico: un cubo con uno spigolo davanti a $P$ mostra due facce uguali.

All'estremo opposto, se l'oggetto è girato di **0°**, una famiglia è parallela al quadro e l'altra gli è perpendicolare. La prima non ha punto di fuga (resta parallela alla LT), la seconda fugge in $P$: siamo tornati alla prospettiva centrale. Si capisce allora che la prospettiva centrale è un caso particolare dell'accidentale. Seguendo la rotazione con continuità, uno dei due punti di fuga sci-

vola verso $P$ e l'altro corre all'infinito lungo la LO, sempre con il prodotto delle distanze da $P$ uguale a $d^2$.

### 1.2.4 Come l'angolo cambia l'immagine

Indicheremo l'**angolo di rotazione** con due numeri, come «30°/60°»: il primo è l'angolo che gli spigoli che fuggono verso $F_1$ (a sinistra) formano con il quadro, il secondo quello degli spigoli che fuggono verso $F_2$. La somma è sempre 90°. La Figura 1.3 mostra lo stesso cubo, con uno spigolo verticale nel quadro davanti a $P$, a 45°/45°, 30°/60° e 15°/75°.

La faccia che forma con il quadro l'angolo più piccolo è quella che vediamo più «di fronte»: appare più larga e meno scorciata, e il suo punto di fuga è lontano. L'altra faccia si stringe, e il suo punto di fuga si avvicina a $P$. Per questo nelle vedute di architettura si sceglie spesso un angolo come 30°/60°: una facciata principale ben leggibile e un fianco che dà profondità. Il 45°/45° è utile per oggetti che non hanno una faccia principale, ma dà immagini simmetriche e un po' statiche.

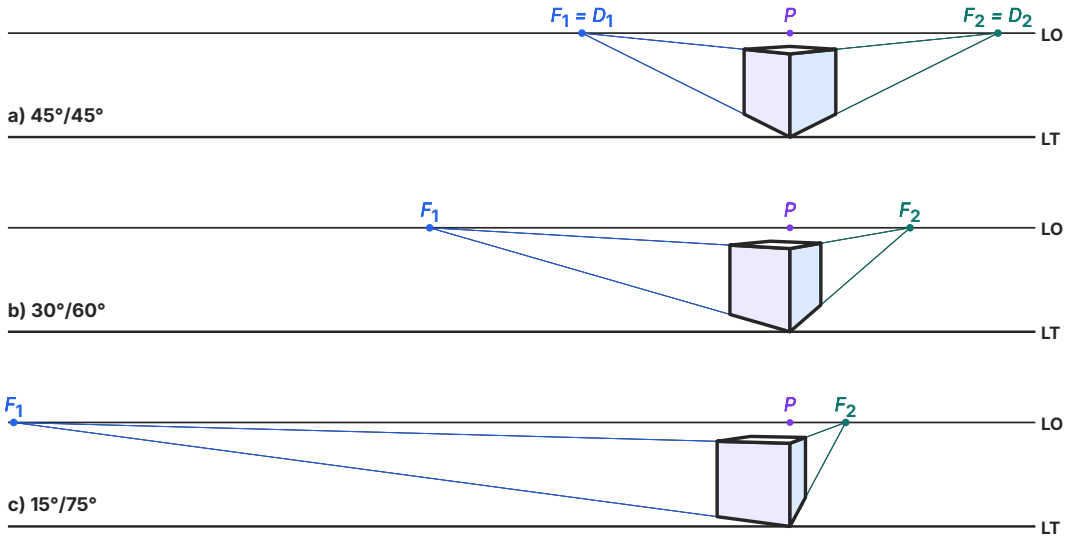



**Figura 1.3** Lo stesso cubo di spigolo 40 mm, con lo spigolo verticale anteriore nel quadro davanti a $P$ ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm), girato di 45°/45°, 30°/60° e 15°/75°. I punti di fuga stanno a 100 e 100 mm da $P$ (e coincidono con i punti di distanza), poi a 173,2 e 57,7 mm, poi a 373,2 e 26,8 mm: in tutti e tre i casi il prodotto è 10 000 mm². La faccia più vicina a essere frontale appare più larga.

### 1.2.5 La retta delle altezze

Gli spigoli verticali restano verticali, ma la loro altezza nel disegno diminuisce con la distanza. Esiste un solo posto in cui un'altezza si disegna in vera grandezza: il quadro stesso, perché un

segmento contenuto nel quadro coincide con la propria immagine. Si chiama retta delle altezze una verticale del quadro su cui si riportano le altezze vere (vol. 3, cap. 3): in prospettiva accidentale la si traccia nella traccia di un lato della pianta.

Il caso più comodo è quello in cui un vertice della pianta, diciamo $A$, sta proprio sulla LT: lo spigolo verticale che parte da $A$ è nel quadro, e su di esso le altezze si misurano con il righello. Dall'estremo superiore si conducono poi le rette verso $F_1$ e $F_2$: sono gli spigoli superiori delle due facce, e tagliano le verticali degli altri vertici all'altezza giusta. Da qui la regola pratica: **quando puoi, metti uno spigolo verticale sulla LT**.

Se nessun vertice sta sulla LT, si prolunga un lato della pianta fino alla sua traccia $T$ sulla LT, si alza in $T$ la retta delle altezze, vi si riporta l'altezza vera e la si unisce al punto di fuga di quel lato. La retta ottenuta è l'immagine di uno spigolo orizzontale, alla quota voluta, che giace nel piano verticale del lato: taglia le verticali dei vertici di quel lato esattamente alla quota cercata.

**ERRORE FREQUENTE**

**Misurare un'altezza sulla verticale sbagliata.** L'errore più comune è riportare l'altezza vera di uno spigolo direttamente sulla sua verticale, anche quando lo spigolo sta dietro il quadro. Un palo alto 40 mm, a 30 mm dietro il quadro, con $d = 100$ mm, ha un'immagine alta $40 \cdot 100/130 \approx 30{,}8$ mm, non 40 mm: lo scorcio è lo stesso rapporto $d/(d + y)$ che conosci dal volume 3. Le altezze vere si misurano **solo** su una verticale che sta nel quadro, e da lì si trasportano con le rette verso i punti di fuga.

**COLLEGAMENTI**

**Prospettiva e geometria.** In questo capitolo lavorano tre teoremi che hai studiato in matematica. Il teorema di Talete sulle parallele spiega gli scorci: un segmento parallelo al quadro si riduce nel rapporto $d/(d + y)$. Il teorema dell'angolo retto inscritto in una semicirconferenza, attribuito anch'esso a Talete, colloca $V'_r$ sull'arco di diametro $F_1F_2$. Il secondo teorema di Euclide lega le posizioni dei punti di fuga alla distanza principale. Nel prossimo paragrafo un quarto risultato, la similitudine di due triangoli isosceli, giustificherà i punti misuratori. È lo stesso spirito con cui Piero della Francesca, nel *De prospectiva pingendi*, trattava la prospettiva come un capitolo della geometria (vol. 3, cap. 3).

Anche la fisica conferma il modello. Una macchina fotografica tenuta dritta, con il sensore verticale, produce con buona approssimazione una prospettiva a quadro verticale: se la giri verso lo spigolo di un edificio, le gronde delle due facciate convergono in due punti all'altezza dell'obiettivo, e le verticali restano verticali. Se invece la inclini verso l'alto, le verticali convergono: è il quadro inclinato.

## 1.3 Tre metodi di costruzione

Per descrivere le figure useremo le coordinate del volume 3: $A(x; y)$ indica il punto del geometrale che sta $x$ millimetri a destra (o a sinistra, se $x$ è negativo) della verticale di $P$ e $y$ millimetri dietro il quadro; nella pianta ribaltata, $y$ millimetri sotto la LT. L'immagine di un punto si indica con l'indice p: $A_p$. Per controllare i disegni daremo le posizioni delle immagini come coppie (distanza dalla verticale di $P$; altezza sopra la LT), in millimetri.

### 1.3.1 Il metodo dei punti di fuga e delle tracce

Il **metodo dei punti di fuga e delle tracce**, detto anche metodo del prolungamento dei lati, discende direttamente dai due fatti ricordati all'inizio del capitolo. Ogni lato della pianta è un tratto di retta: la sua immagine passa per la traccia della retta, sulla LT, e per il punto di fuga della sua famiglia. Basta allora prolungare in pianta ogni lato fino a incontrare la LT, unire la traccia $T$ con $F_1$ o con $F_2$ secondo la famiglia, e cercare i vertici come incroci delle rette ottenute (Figura 1.4).

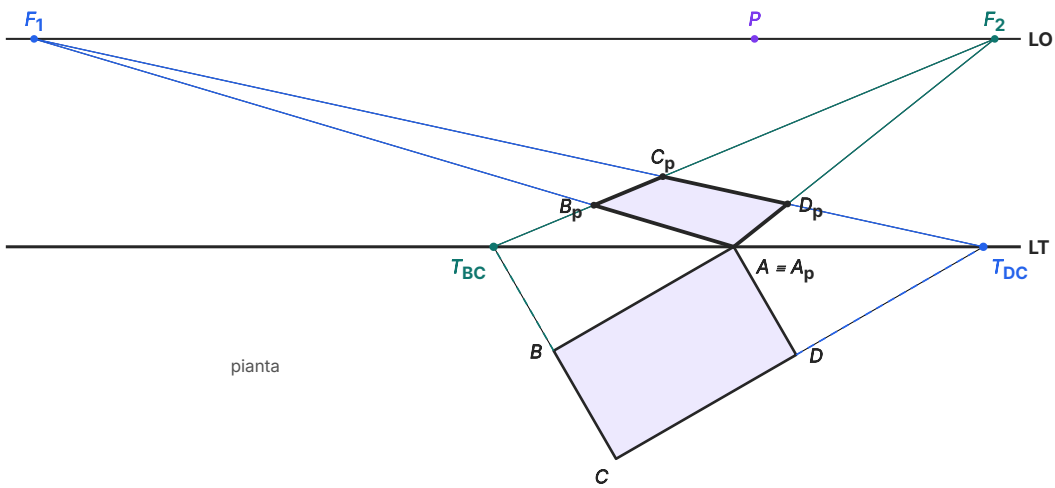



**Figura 1.4** Il metodo dei punti di fuga e delle tracce per un rettangolo di lati 50 mm e 30 mm, con il vertice $A$ sulla LT 5 mm a sinistra della verticale di $P$ ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°). I lati $AB$ e $AD$ partono da $A$, che è la propria immagine; i lati $DC$ e $BC$, prolungati in pianta, hanno le tracce $T_{DC}$, 55,0 mm a destra di $P$, e $T_{BC}$, 62,7 mm a sinistra. Ogni vertice è l'incrocio di una retta verso $F_1$ con una retta verso $F_2$.

**IN SINTESI**

**Il metodo delle tracce, passo per passo.**

1. Traccia la LT e la LO, segna $P$ e, sopra la LT, il piede $V'$ a distanza $d$.
2. Disegna la pianta ruotata sotto la LT; conduci per $V'$ le parallele ai suoi lati, trova $F_1'$ e $F_2'$ sulla LT e riportali sulla LO: sono $F_1$ e $F_2$.
3. Prolunga ogni lato della pianta fino alla LT: trovi la sua traccia.
4. Unisci ogni traccia con il punto di fuga della famiglia del suo lato.
5. I vertici sono gli incroci delle rette delle due famiglie; un vertice che sta sulla LT è già al suo posto.
6. Per i solidi: alza le verticali dai vertici e porta le altezze dalla retta delle altezze.

### 1.3.2 Il metodo del taglio dei raggi visuali

Il secondo metodo è la versione accidentale del metodo dei raggi visuali del volume 3, ed è il più usato per le grandi prospettive di architettura: per questo lo si chiama anche «metodo dell'architetto». Si chiama **metodo del taglio dei raggi visuali** perché trova la posizione orizzontale di ogni punto là dove il suo raggio visuale, visto dall'alto, «taglia» il quadro.

Si disegna la pianta con la sua traccia del quadro e il piede $V'$, che sta a distanza $d$ dalla traccia, dalla parte dell'osservatore; la prospettiva si disegna in una zona separata del foglio, con la LT parallela alla traccia e la verticale di $P$ allineata con $V'$ (Figura 1.5). Per ogni vertice si traccia il raggio visuale $V'A$ in pianta: il punto in cui taglia la traccia del quadro ha la stessa distanza dalla verticale di $P$ che avrà l'immagine. Si porta quel taglio in su con una verticale fino alla prospettiva. Restano da trovare le altezze: si costruiscono $F_1$ e $F_2$ come prima (le parallele per $V'$ ai lati) e si fa passare per il vertice nel quadro la retta delle altezze; le rette verso i punti di fuga tagliano le verticali alla quota giusta.

Il metodo ha due pregi. Non chiede di prolungare i lati fino alla LT, operazione scomoda quando la pianta è grande o le tracce cadono lontano; e porta su ogni punto con una sola verticale, che non dipende dalla famiglia del lato. Ha però bisogno di molto spazio: la pianta, con $V'$ alla distanza $d$, occupa una zona del foglio grande quanto la prospettiva stessa, e i raggi diretti a punti molto spostati di lato tagliano la traccia del quadro con un angolo stretto, cioè in modo poco preciso.

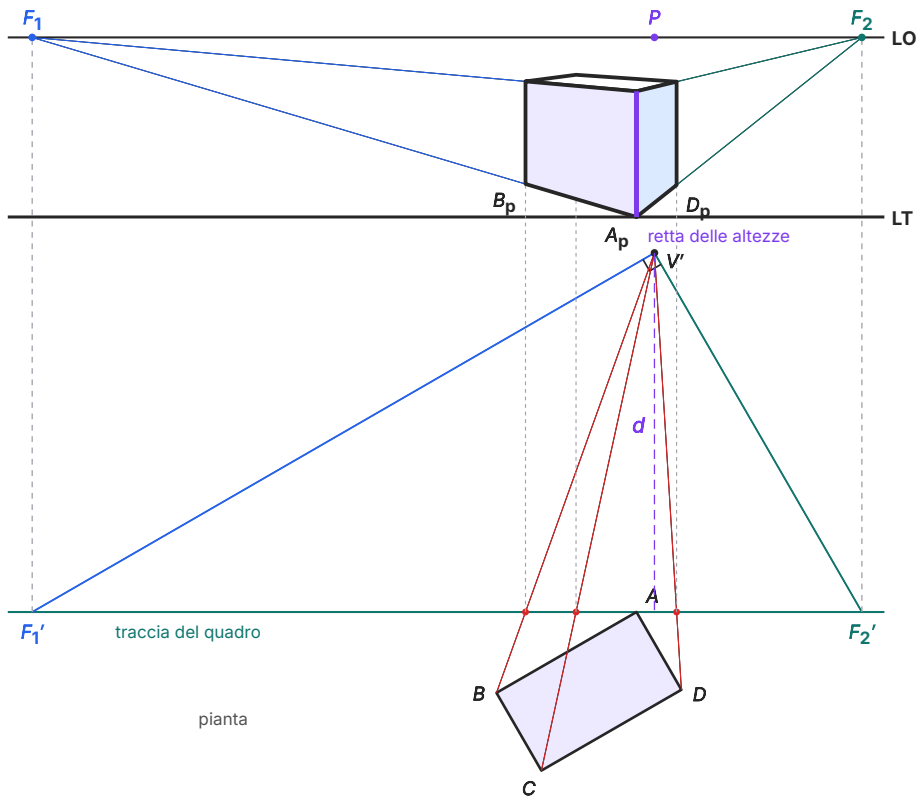



**Figura 1.5** Il metodo del taglio dei raggi visuali per un prisma di base 45 × 25 mm e altezza 35 mm ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°). Sotto, la pianta con la traccia del quadro e il piede $V'$: i raggi visuali (in rosso) tagliano la traccia nei punti che, portati in su, danno le verticali di $B_p$, $C_p$ e $D_p$, a 35,9 mm e 21,8 mm a sinistra e a 6,2 mm a destra di $P$. Il vertice $A$ sta nel quadro: il suo spigolo è la retta delle altezze. Lo spigolo nascosto in $C_p$ non si disegna.

### 1.3.3 Il metodo dei punti misuratori

Il terzo metodo permette di lavorare **solo sul quadro**, senza disegnare la pianta: le lunghezze si misurano direttamente sulla LT. È il più rapido quando l'oggetto è descritto dalle sue misure (un cubo di 40 mm, una stanza di 4 × 5 m) più che da un disegno. Si fonda su due punti della LO, i **punti misuratori** $M_1$ e $M_2$.

**Costruzione.** Sulla LO si centra il compasso in $F_1$ con apertura $F_1V'_r$ e si riporta questa lunghezza sulla LO verso $P$: si ottiene $M_1$. Allo stesso modo, con centro $F_2$ e apertura $F_2V'_r$, si ottiene $M_2$. Si noti che $M_1$, il punto misuratore che serve alla famiglia di $F_1$, cade dalla parte opposta di $P$: a 30°/60° con $d$ = 100 mm, $F_1$ sta 173,2 mm a sinistra di $P$ e $M_1$ 26,8 mm a destra.

**Uso.** Sia $A$ un vertice sulla LT e sia $AB = a$ un lato che fugge verso $F_1$. Si riporta sulla LT, a partire da $A$ e dalla stessa parte verso cui fugge il lato, il segmento $AB_0 = a$ in vera grandezza; si uni-

sce $B_0$ con $M_1$. Questa retta taglia la retta $AF_1$ proprio in $B_p$. Per i lati che fuggono verso $F_2$ si fa lo stesso dall'altra parte, con $M_2$.

**Perché funziona.** Guarda la pianta (Figura 1.6). Il triangolo $ABB_0$ è isoscele, perché $AB_0 = AB$ per costruzione. La retta $B_0B$ è una retta orizzontale come le altre: ha anch'essa un punto di fuga sulla LO, che si trova conducendo da $V'_r$ la sua parallela. Ora confronta il triangolo $ABB_0$ con il triangolo $F_1V'_rM$, dove $M$ è quel punto di fuga: i lati sono a due a due paralleli ($F_1V'_r$ è parallelo ad $AB$, $V'_rM$ a $BB_0$, e la LO alla LT), quindi i due triangoli sono simili, e anche il secondo è isoscele con il vertice in $F_1$. Perciò $F_1M = F_1V'_r$: il punto di fuga della retta $B_0B$ è proprio $M_1$. Le immagini di $B_0$ (che sta nel quadro) e di $B$ stanno quindi sulla retta $B_0M_1$.

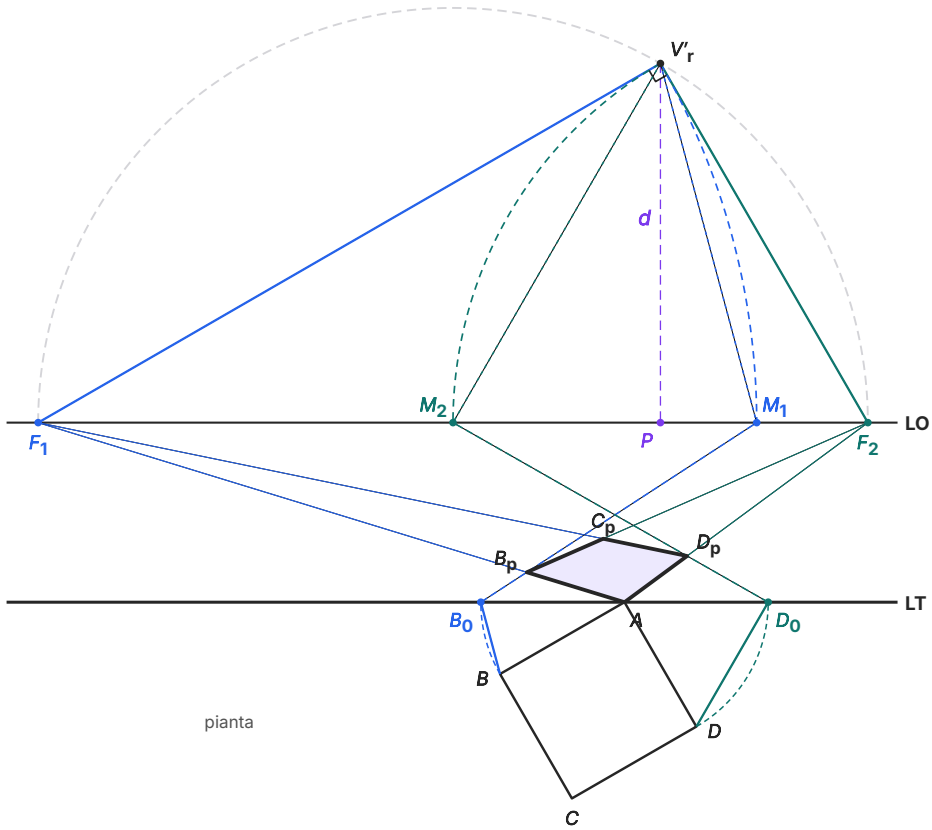



**Figura 1.6** Il metodo dei punti misuratori, dimostrazione e applicazione a un quadrato di lato 40 mm con il vertice $A$ sulla LT 10 mm a sinistra di $P$ ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°). In alto, gli archi con centro in $F_1$ e in $F_2$ portano $V'_r$ sulla LO: $F_1M_1 = F_1V'_r$ = 200 mm, $F_2M_2 = F_2V'_r$ = 115,5 mm. In pianta i triangoli $ABB_0$ e $ADD_0$ sono isosceli, e le loro basi sono parallele alle rette $V'_rM_1$ e $V'_rM_2$. In prospettiva $B_0M_1$ e $D_0M_2$ tagliano le rette da $A$ a $F_1$ e a $F_2$ in $B_p$ e $D_p$.

### 1.3.4 Un quadrato, tre metodi

Quale metodo scegliere? La Tabella 1.1 riassume pregi e limiti di ciascuno, e l'esempio svolto che segue mostra che danno lo stesso risultato. In pratica si combinano: i punti di fuga e le tracce per la struttura, i raggi visuali per i dettagli che stanno lontano dalla LT, i punti misuratori per riportare in fretta misure lungo gli spigoli.

**Tabella 1.1** I tre metodi della prospettiva accidentale a confronto.

| Metodo | Che cosa serve | Pregi | Limiti |
|---|---|---|---|
| Punti di fuga e tracce | pianta sotto la LT, $F_1$ e $F_2$ | discende dalle definizioni; un solo disegno | le tracce possono cadere lontano, fuori dal foglio |
| Taglio dei raggi visuali | pianta con la traccia del quadro e $V'$; $F_1$, $F_2$ per le altezze | ogni punto con una sola verticale; adatto a piante complesse | richiede molto spazio; tagli poco precisi dei raggi molto obliqui |
| Punti misuratori | $F_1$, $F_2$, $M_1$, $M_2$ sulla LO | nessuna pianta: le misure si riportano sulla LT | serve una costruzione in più; poco comodo per punti lontani dagli spigoli |

**ESEMPIO SVOLTO**

**Lo stesso quadrato con i tre metodi.** Prospettiva accidentale con $d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°. Un quadrato di lato 40 mm ha il vertice $A(-10;\,0)$ sulla LT; il lato $AB$ fugge verso $F_1$, il lato $AD$ verso $F_2$.

1. **Punti di fuga.** Le parallele per $V'$ danno $F_1$ a 173,2 mm a sinistra di $P$ e $F_2$ a 57,7 mm a destra. In pianta i vertici sono $B(-44{,}6;\,20{,}0)$, $C(-24{,}6;\,54{,}6)$, $D(10{,}0;\,34{,}6)$.
2. **Tracce.** Il lato $DC$, prolungato, incontra la LT 70,0 mm a destra di $P$; il lato $BC$ 56,2 mm a sinistra. Le rette $AF_1$, $AF_2$, $T_{DC}F_1$ e $T_{BC}F_2$ danno $B_p(-37{,}2;\,8{,}3)$, $C_p(-15{,}9;\,17{,}7)$, $D_p(7{,}4;\,12{,}9)$.
3. **Raggi visuali.** I raggi da $V'$ tagliano la traccia del quadro a 37,2 mm e 15,9 mm a sinistra e a 7,4 mm a destra di $P$: sono le stesse ascisse, e le verticali per quei tagli incontrano le rette verso $F_1$ e $F_2$ negli stessi punti.
4. **Punti misuratori.** $M_1$ sta 26,8 mm a destra di $P$, $M_2$ 57,7 mm a sinistra. Riportando 40 mm sulla LT da $A$ si trovano $B_0$, 50 mm a sinistra di $P$, e $D_0$, 30 mm a destra. Le rette $B_0M_1$ e $D_0M_2$ tagliano $AF_1$ e $AF_2$ ancora in $B_p$ e $D_p$.
5. Le tre costruzioni danno lo stesso disegno, come deve essere: sono tre modi di eseguire la stessa proiezione centrale. In un disegno accurato le differenze tra i tre risultati non superano mezzo millimetro.

## 1.4 Figure piane sul geometrale

### 1.4.1 Rettangoli lontani dalla linea di terra

Se nessun vertice tocca la LT, il metodo delle tracce funziona allo stesso modo, ma ogni lato va prolungato. Prendiamo un rettangolo con il vertice più vicino $A(-20;\ 20)$, il lato $AB$ di 60 mm verso $F_1$ e il lato $AD$ di 30 mm verso $F_2$ ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°). Le rette dei due lati che fuggono verso $F_1$ hanno le tracce 14,6 mm e 74,6 mm a destra di $P$; quelle dei lati che fuggono verso $F_2$ a 31,5 mm e 100,8 mm a sinistra. Bastano quattro rette, due per famiglia: i lati opposti di un rettangolo sono paralleli e fuggono nello stesso punto. I vertici risultano $A_p(-16{,}7;\ 8{,}3)$, $B_p(-48{,}0;\ 16{,}7)$, $C_p(-32{,}4;\ 21{,}6)$ e $D_p(-3{,}4;\ 15{,}7)$.

Le tracce dei lati di una figura lontana cadono spesso molto in là sulla LT: allora conviene il taglio dei raggi visuali, oppure si ricava un vertice con un'altra retta di cui si conosce l'immagine. Una delle più comode è la retta di profondità, perpendicolare al quadro: anche in prospettiva accidentale fugge in $P$, e la sua traccia è il piede del punto sulla LT. È un attrezzo della prospettiva centrale che resta valido: i punti $P$, $D_1$ e $D_2$ non spariscono quando l'oggetto si gira.

### 1.4.2 Un pavimento a 45°

Un caso istruttivo è un pavimento quadrato diviso in piastrelle, girato di 45°/45° ($D_1$ e $D_2$ come punti di fuga). Si dividono in parti uguali i due lati che partono dal vertice sulla LT, si conducono in pianta le parallele ai lati e se ne trovano le tracce: per piastrelle di 20 mm cadono ogni 28,3 mm sulla LT, cioè ogni $20 \cdot \sqrt{2}$ mm, perché la LT taglia le file di piastrelle in diagonale. Ogni traccia si unisce a $D_1$ o a $D_2$.

Confronta il risultato con il pavimento a scacchi del volume 3 (vol. 3, cap. 3): lì le piastrelle avevano i lati in $P$ e nei punti di distanza fuggivano le diagonali. Qui accade il contrario: i lati fuggono nei punti di distanza e le diagonali di una famiglia sono perpendicolari al quadro, quindi fuggono in $P$; le altre diagonali sono parallele alla LT e restano orizzontali. È lo stesso pavimento, girato di 45°: la geometria del quadro non è cambiata, è cambiato soltanto il modo in cui l'oggetto vi si presenta.

### 1.4.3 L'esagono regolare: più di due punti di fuga

Un esagono regolare ha i lati in tre direzioni diverse, a 60° l'una dall'altra. Ogni direzione è una famiglia di rette orizzontali, e ognuna ha il suo punto di fuga sulla LO, trovato come sempre con la parallela per $V'$. Se l'esagono è disposto con due lati paralleli alla LT, quei lati restano orizzontali e gli altri quattro fuggono in due punti simmetrici, a $d/\sqrt{3}$ da $P$ (57,7 mm con $d$ = 100 mm). Se invece è girato in modo generico, ci sono tre punti di fuga. Non c'è niente di strano: «due punti di fuga» descrive i parallelepipedi, non un limite della prospettiva. Qualunque figura del geometrale, con il metodo delle tracce, si disegna lato per lato.

In pratica, per l'esagono conviene disegnare in pianta la circonferenza circoscritta, i sei vertici e le tre diagonali principali, e costruire i vertici come incroci di due rette di cui si conoscono traccia e fuga. Come controllo, le tre diagonali principali devono passare per l'immagine del centro.

### 1.4.4 Il cerchio

Il cerchio si costruisce come in prospettiva centrale, **per punti** (vol. 3, cap. 3): lo si inscrive in un quadrato, che si disegna in prospettiva, e si trovano otto punti della curva. Quattro sono i punti di tangenza, nel punto medio di ogni lato; altri quattro stanno sulle diagonali. In prospettiva accidentale il quadrato circoscritto conviene orientarlo come l'oggetto, con i lati nelle due famiglie. Allora in pianta si tracciano, per ciascuna famiglia, cinque rette parallele ai lati: i due lati, la mediana per il centro e le due rette a distanza $r/\sqrt{2}$ dal centro, che tagliano le diagonali nei punti della circonferenza. Le loro tracce sulla LT, unite a $F_1$ e a $F_2$, danno gli otto punti come incroci (Figura 1.7). La curva che li congiunge è un'ellisse, da tracciare a mano libera o con un curvilineo, tangente ai lati del quadrato nei punti medi.

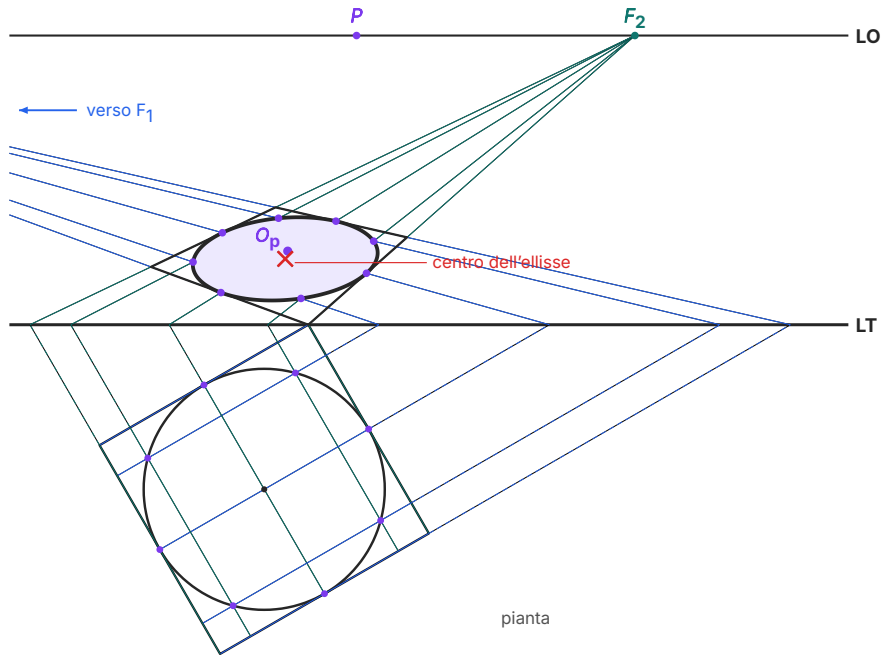



**Figura 1.7** Il cerchio in prospettiva accidentale per otto punti ($d$ = 100 mm, $h$ = 60 mm, 30°/60°). Il cerchio ha raggio 25 mm ed è inscritto in un quadrato con un vertice sulla LT 10 mm a sinistra di $P$. In pianta, cinque rette per famiglia (i lati, le mediane e le rette a $r/\sqrt{2}$ dal centro) danno gli otto punti; le loro tracce, unite a $F_1$ (fuori dal disegno, a sinistra) e a $F_2$, li danno in prospettiva. L'immagine del centro $O_p$ sta 15,3 mm sopra la LT, il centro dell'ellisse 13,7 mm.

**DA RICORDARE**

**Il centro del cerchio non è il centro dell'ellisse.** Vale anche qui la trappola del volume 3. L'immagine $O_p$ del centro del cerchio è l'incrocio delle immagini delle due mediane, ma il centro dell'ellisse è un altro punto: nella Figura 1.7 sta 1,6 mm più in basso e 0,5 mm più a sinistra. La metà del cerchio lontana dall'osservatore si accorcia più di quella vicina, e l'ellisse «scivola» verso di noi. Disegna l'ellisse facendola passare per gli otto punti, mai centrandola su $O_p$.

## 1.5 I solidi

### 1.5.1 Prismi e cubi

Un prisma retto si disegna in quattro mosse: la base in prospettiva, con uno dei tre metodi; le verticali dai vertici; l'altezza vera sulla retta delle altezze; le rette dagli estremi superiori della retta delle altezze verso $F_1$ e $F_2$, che tagliano le verticali e chiudono la faccia superiore. Gli spigoli superiori si fanno passare sempre per i punti di fuga, anche quando sembrerebbe più rapido «copiare» la base spostata in su: la faccia superiore non è la base traslata, perché sta a un'altra altezza rispetto all'occhio.

Per un cubo di spigolo 40 mm con uno spigolo verticale sulla LT 10 mm a sinistra di $P$ ($d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°) si ottengono le verticali dei vertici $B$ e $D$ a 37,2 mm a sinistra e 7,4 mm a destra di $P$; i vertici superiori stanno a 41,7 mm, 43,5 mm e 42,6 mm sopra la LT. Lo spigolo anteriore, nel quadro, è alto proprio 40 mm; gli altri appaiono più bassi (33,3 mm per lo spigolo in $B$, 29,7 mm per quello in $D$). Poiché $h$ = 50 mm è maggiore dello spigolo, la faccia superiore sta sotto la LO e si vede dall'alto.

Un **cubo forato**, attraversato da un foro quadrato perpendicolare a una faccia, non richiede niente di nuovo. Sulla faccia vista si disegna l'apertura, con i lati verticali e i lati orizzontali che fuggono nel punto di fuga di quella faccia; gli spigoli del foro che vanno in profondità sono paralleli all'altra famiglia e fuggono nell'altro punto di fuga. Del foro si disegnano soltanto gli spigoli visibili attraverso l'apertura.

### 1.5.2 Piramidi e coni

Il vertice di una piramide retta sta sulla verticale del centro della base. In prospettiva si trova l'immagine del centro come incrocio delle diagonali della base (oppure delle mediane), si alza la verticale e vi si porta l'altezza con la retta delle altezze: si prende la retta di una famiglia che passa per il centro, se ne trova la traccia $T$ sulla LT, si alza in $T$ la retta delle altezze, vi si segna l'altezza vera e la si unisce al punto di fuga di quella famiglia. L'incrocio con la verticale del centro è il vertice.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Una piramide più alta dell'occhio.** Una piramide a base quadrata di lato 40 mm e altezza 60 mm ha un vertice della base sulla LT, nel piede di $P$; prospettiva accidentale con $d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, 30°/60°.

1. Il centro della base è $O$(−7,3; 27,3). La retta della seconda famiglia (verso $F_2$) per $O$ ha la traccia sulla LT 23,1 mm a sinistra di $P$.
2. In quella traccia si alza la retta delle altezze e si segnano 60 mm; il punto ottenuto si unisce a $F_2$.
3. La verticale per $O_p$, che sta 5,7 mm a sinistra di $P$, taglia quella retta 57,9 mm sopra la LT: è il vertice. Sta **sopra la LO**, di 7,9 mm, perché il vertice vero è più alto dell'occhio.
4. Le facce visibili sono le due che partono dal vertice anteriore della base; le altre due, e gli spigoli di base posteriori, sono nascosti.
5. Controllo: un punto alto esattamente quanto l'occhio ha l'immagine sulla LO, ovunque si trovi. Un vertice più alto finisce sopra la LO, uno più basso sotto.

Il cono si costruisce come la piramide, con la base ellittica disegnata per otto o dodici punti. Il suo **contorno apparente**, cioè la linea che separa nel disegno il solido dallo sfondo, è formato da due **generatrici di contorno**, le generatrici lungo le quali i raggi visuali sfiorano la superficie: nel disegno sono le due **tangenti** all'ellisse di base condotte dall'immagine del vertice, non le rette che vanno agli estremi di un diametro. Se l'immagine del vertice cade dentro l'ellisse, come per un cono molto basso visto dall'alto, le tangenti non esistono e tutto il contorno della base è visibile; altrimenti l'arco della base compreso tra i due punti di tangenza, dietro il cono, è nascosto.

### 1.5.3 Cilindri

Un cilindro con l'asse verticale ha due basi circolari, da disegnare come ellissi per otto punti, a due quote diverse: quella inferiore sul geometrale, quella superiore portata in su con la retta delle altezze. Il contorno apparente è dato da due verticali, tangenti a tutte e due le ellissi: un piano verticale che passa per l'occhio e sfiora il cilindro lo sfiora lungo una generatrice verticale e si proietta in una retta verticale. Per questo le due ellissi hanno gli estremi a destra e a sinistra sulle stesse verticali. Della base inferiore si vede solo l'arco anteriore, tra i due punti di tangenza.

### 1.5.4 Gruppi di solidi e punto di vista

Quando si disegnano più solidi insieme, li si dispone in un'unica pianta e si costruisce tutto con gli stessi $F_1$ e $F_2$, se i solidi sono orientati allo stesso modo (Figura 1.8); un solido girato diversamente ha i suoi punti di fuga, sulla stessa LO. Conviene costruire per primi i solidi più vicini,

che nascondono parte di quelli dietro, e disegnare a matita leggera tutto, anche le linee nascoste, per poi ripassare a inchiostro soltanto le **linee visibili**. Nella tavola finita gli spigoli nascosti **non si disegnano**: un tratteggio nascosto, utile nelle proiezioni ortogonali, in prospettiva confonderebbe la lettura dello spazio.

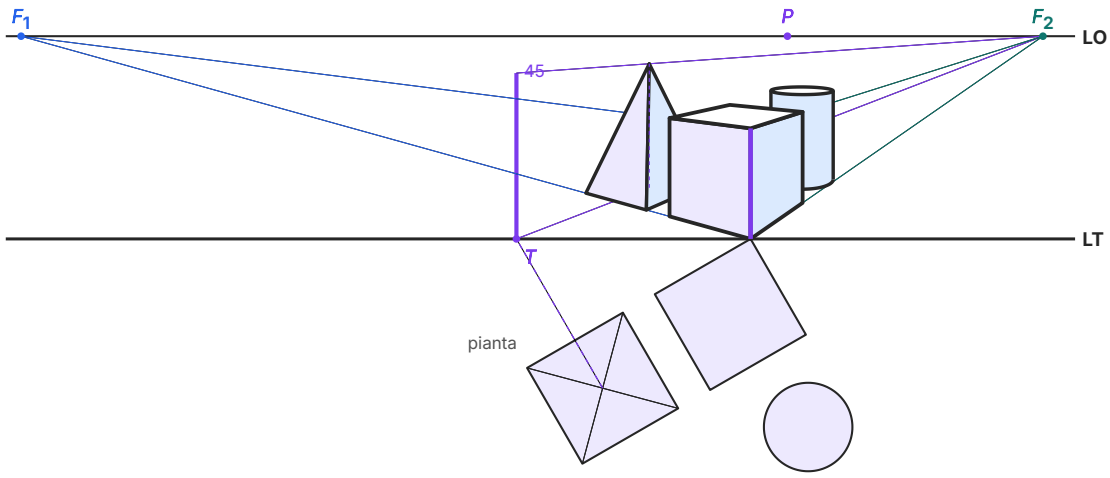



**Figura 1.8** Un gruppo di solidi a 30°/60° ($d$ = 120 mm, $h$ = 55 mm): un cubo di spigolo 30 mm con lo spigolo anteriore sulla LT (retta delle altezze, in viola), una piramide di base 30 mm e altezza 45 mm, un cilindro di raggio 12 mm e altezza 34 mm. Il vertice della piramide è portato dalla retta delle altezze alzata nella traccia $T$, 73,5 mm a sinistra di $P$, della retta per il centro della base diretta verso $F_2$. Le parti coperte dai solidi più vicini e le linee nascoste sono omesse.

L'altezza dell'occhio cambia il carattere del disegno, esattamente come in prospettiva centrale (vol. 3, cap. 3). Con il punto di vista ribassato ($h$ piccolo, la LO vicina alla LT) le facce superiori si schiacciano, i solidi più alti dell'occhio superano la LO e si vedono da sotto: è la veduta monumentale. Con il punto di vista rialzato ($h$ grande) le facce superiori si aprono e il gruppo si legge quasi come una pianta. Un solido sollevato sopra l'occhio, come una mensola o una lampada appesa, mostra la faccia inferiore: le sue rette orizzontali fuggono ancora in $F_1$ e $F_2$, ma scendono verso la LO invece di salirvi.

## 1.6 Dalla teoria al foglio

### 1.6.1 Scegliere distanza, altezza e angolo

Prima di tracciare una linea bisogna decidere tre cose. La **distanza principale** $d$: ciò che si disegna deve stare dentro il cono ottico di circa 60°, e la regola pratica del volume 3 chiede $d$ almeno pari a una volta e mezzo la larghezza dell'oggetto (vol. 3, cap. 3). Con $d$ troppo piccola gli spi-

goli lontani si deformano e l'angolo dello spigolo anteriore appare acutissimo; con $d$ molto grande i punti di fuga si allontanano tanto che il disegno diventa quasi un'assonometria.

L'**altezza** $h$: decide se il disegno è una veduta normale, dal basso o dall'alto. In un disegno di architettura alla scala 1:100 l'occhio di una persona in piedi, a circa 1,6 m, sta a 16 mm sopra la LT. L'**angolo**: decide quale faccia domina, come hai visto nella Figura 1.3. Ricorda infine che le scelte si condizionano a vicenda: la distanza tra $F_1$ e $F_2$ cresce con $d$ e cresce ancora quando un angolo si avvicina a 0°.

**IN SINTESI**

**Le scelte prima del disegno.**

- $d \geq 1{,}5$ volte la larghezza dell'oggetto (cono ottico di circa 60°).
- $h$ all'altezza di un occhio umano in scala per una veduta normale; più bassa per una veduta monumentale, più alta per una veduta d'insieme.
- 30°/60° per mostrare una facciata principale; 45°/45° per un oggetto senza facciata principale.
- Uno spigolo verticale sulla LT, davanti a $P$ o vicino: è la retta delle altezze gratuita.
- Controllare prima che $F_1$ e $F_2$ entrino nel foglio: $PF_1 \cdot PF_2 = d^2$.

### 1.6.2 Quando un punto di fuga esce dal foglio

Capita spesso, e più spesso di quanto si creda: con $d = 150$ mm, a 30°/60°, i punti di fuga distano 346 mm, più della larghezza di un A4. Si dice allora che un punto di fuga è **inaccessibile**. La soluzione sbagliata, e frequente, è avvicinarlo «a occhio»: si ottiene un disegno che non corrisponde a nessun punto di vista. Le soluzioni corrette sono due.

La prima è la **prospettiva ridotta**. Si esegue tutta la costruzione in scala ridotta, per esempio metà: pianta, $d$ e $h$ dimezzati. I punti di fuga cadono a metà distanza e stanno nel foglio; l'immagine ottenuta è identica a quella vera, ma rimpicciolita della metà. Si raddoppiano poi le misure, a partire dal piede di $P$ sulla LT, e si ridisegna il risultato in scala vera. È un'idea vicina a quella del punto di distanza ridotto del volume 3 (vol. 3, cap. 4): anche lì si riducono le misure nella stessa proporzione perché il punto entri nel foglio.

La seconda è una **seconda linea di traccia**. Si traccia in pianta una retta $g$ parallela alla LT, a una profondità $y_0$ dietro il quadro. La sua immagine è una retta orizzontale, all'altezza $h \cdot y_0/(d + y_0)$ sopra la LT, che si trova anche con un punto di distanza. Ogni lato della pianta incontra la LT nella sua traccia e la retta $g$ in un punto $G$; l'immagine di $G$ si trova con la retta di profondità per $G$, che fugge in $P$. L'immagine del lato è allora la retta che unisce la traccia con $G_p$: passa per il punto di fuga inaccessibile senza bisogno di vederlo.

Entrambe le soluzioni costruiscono la stessa proiezione; sono approssimate soltanto nel senso pratico che ogni passaggio in più aggiunge un piccolo errore di disegno, e che in scala ridotta un errore di mezzo millimetro, raddoppiato, diventa di un millimetro.

**APPROFONDIMENTO**

**Perché la prospettiva ridotta funziona.** Ingrandire o rimpicciolire un'intera scena, compreso l'occhio, a partire da un punto del quadro, non cambia nessun angolo: i raggi visuali verso i punti corrispondenti restano paralleli a quelli di prima. È un'**omotetia** nello spazio, con il centro nel piede di $P$ sulla LT e rapporto 1/2. Ogni retta va in una retta parallela, ogni triangolo in un triangolo simile, e l'immagine sul quadro si trasforma con la stessa omotetia. In particolare $F_1$ e $F_2$, che dipendono solo dalle direzioni e da $d$, finiscono a metà distanza da $P$. Raddoppiare le misure del disegno ridotto significa applicare l'omotetia inversa, di rapporto 2: si ritrova esattamente la prospettiva voluta. Lo stesso ragionamento giustifica le riduzioni e gli ingrandimenti fotografici: una fotografia stampata più grande è ancora una prospettiva esatta, per un occhio che la guardi da una distanza proporzionalmente maggiore.

### 1.6.3 L'ordine di lavoro e gli errori frequenti

Su un foglio squadrato si procede sempre nello stesso ordine: si decide dove mettere la LT, la LO e $P$ in modo che $F_1$, $F_2$ e la pianta entrino nel foglio; si disegna la pianta; si trovano i punti di fuga e, se servono, i punti misuratori; si costruisce la base; si alzano le verticali e si portano le altezze; si ripassano a inchiostro le sole linee visibili, con il tratto più marcato per i contorni. Le linee di costruzione restano sottili e leggere, ma non si cancellano: mostrano come il disegno è stato costruito, e permettono a chi lo corregge di trovare un errore.

**ERRORE FREQUENTE**

**Gli errori più frequenti nella prospettiva accidentale.**

- Mettere $F_1$ o $F_2$ fuori dalla LO, o disegnare i due punti di fuga a quote diverse: le rette orizzontali fuggono tutte sulla LO.
- Far convergere gli spigoli verticali: con il quadro verticale restano verticali.
- Misurare le altezze su una verticale che non sta nel quadro.
- Confondere le famiglie: unire a $F_2$ uno spigolo che, in pianta, è parallelo ai lati che fuggono verso $F_1$.
- Spostare a occhio un punto di fuga inaccessibile, invece di usare la prospettiva ridotta o una seconda linea di traccia.
- Centrare l'ellisse sull'immagine del centro del cerchio.

**SINTESI**

- La prospettiva accidentale (o angolare) rappresenta un oggetto con gli spigoli verticali paralleli al quadro e le due famiglie di spigoli orizzontali oblique rispetto al quadro; con il quadro verticale gli spigoli verticali restano verticali.
- Ogni famiglia di rette orizzontali parallele fugge in un punto della LO: per un parallelepipedo sono $F_1$ e $F_2$, trovati come tracce sulla LT delle parallele condotte per $V'$ ai lati della pianta e riportati sulla LO.
- Le due famiglie sono perpendicolari, quindi $V'_r$ sta sulla semicirconferenza di diametro $F_1F_2$ (Talete) e $PF_1 \cdot PF_2 = d^2$ (secondo teorema di Euclide).
- A 45°/45° i punti di fuga coincidono con $D_1$ e $D_2$; a 0°/90° la prospettiva diventa centrale. La faccia che forma con il quadro l'angolo minore appare più larga e ha il punto di fuga più lontano.
- Le altezze vere si misurano solo su una retta delle altezze, verticale nel quadro; conviene mettere uno spigolo verticale sulla LT.
- Metodo dei punti di fuga e delle tracce: ogni lato della pianta si prolunga fino alla LT, e la sua immagine unisce la traccia al punto di fuga della sua famiglia.
- Metodo del taglio dei raggi visuali: i raggi da $V'$ tagliano in pianta la traccia del quadro e danno, con una verticale, la posizione di ogni punto; le altezze si portano con i punti di fuga.
- Metodo dei punti misuratori: $F_1M_1 = F_1V'_r$, $F_2M_2 = F_2V'_r$; le lunghezze si riportano in vera grandezza sulla LT e si uniscono al punto misuratore. Si dimostra con due triangoli isosceli simili.
- Ogni figura piana si disegna lato per lato; un esagono può avere tre punti di fuga. Il cerchio si costruisce per otto punti, e l'immagine del suo centro non è il centro dell'ellisse.
- Prismi, piramidi, cilindri e coni si costruiscono dalla pianta, con le verticali e la retta delle altezze; i contorni di cilindri e coni sono tangenti alle ellissi; le linee nascoste non si disegnano.
- Si sceglie $d$ almeno pari a 1,5 volte la larghezza dell'oggetto, $h$ secondo la veduta voluta, l'angolo secondo la faccia da mostrare.
- Un punto di fuga inaccessibile non si sposta mai a occhio: si usa la prospettiva ridotta (un'omotetia) o una seconda linea di traccia.

## ESERCIZI

### Comprendere e ricordare

1. ● Un parallelepipedo appoggiato al geometrale è rappresentato in prospettiva accidentale a quadro verticale quando:
   - **A.** i suoi spigoli verticali sono paralleli al quadro e nessuna delle due famiglie di spigoli orizzontali è parallela o perpendicolare al quadro
   - **B.** una delle sue facce è parallela al quadro
   - **C.** i suoi spigoli verticali sono inclinati rispetto al quadro
   - **D.** uno dei suoi spigoli orizzontali è perpendicolare al quadro

2. ● Il punto di fuga di una famiglia di rette orizzontali parallele si trova:
   - **A.** sulla LT, nella traccia della retta più vicina
   - **B.** sempre nel punto principale $P$
   - **C.** sulla LO, dove incontra il quadro la parallela alle rette condotta per $V$
   - **D.** sulla verticale di $V'$, a distanza $d$ dalla LO

3. ● In una prospettiva accidentale a 45°/45° i punti di fuga $F_1$ e $F_2$:
   - **A.** coincidono con $P$
   - **B.** coincidono con i punti di distanza $D_1$ e $D_2$
   - **C.** cadono sempre fuori dal foglio
   - **D.** stanno sulla LT

4. ● Il punto di vista ribaltato $V'_r$ sta sulla semicirconferenza di diametro $F_1F_2$ perché:
   - **A.** $F_1$ e $F_2$ sono sempre simmetrici rispetto a $P$
   - **B.** la distanza principale è uguale all'altezza dell'occhio
   - **C.** $F_1F_2$ è sempre uguale a $2d$
   - **D.** le due famiglie di spigoli sono perpendicolari, quindi l'angolo $F_1V'_rF_2$ è retto

5. ● In prospettiva accidentale un'altezza si può misurare in vera grandezza:
   - **A.** su qualunque spigolo verticale dell'oggetto
   - **B.** sulla LO
   - **C.** su una verticale che sta nel quadro
   - **D.** solo sugli spigoli più lontani dal quadro

6. ● Il punto misuratore $M_1$ si trova sulla LO in modo che:
   - **A.** $F_1M_1 = F_1V'_r$
   - **B.** $PM_1 = d$
   - **C.** $M_1$ sia il punto medio di $F_1F_2$
   - **D.** $M_1$ coincida con $D_1$

7. ● Un cubo è girato in modo che le facce di sinistra formino 20° con il quadro e quelle di destra 70°; uno spigolo verticale sta davanti a $P$. Quale faccia appare più larga?
   **A.** quella di destra, perché il suo punto di fuga è più vicino a $P$
   **B.** le due facce appaiono uguali
   **C.** dipende soltanto dall'altezza dell'occhio
   **D.** quella di sinistra, che è più vicina a essere frontale

8. ● In prospettiva accidentale l'immagine del centro di un cerchio del geometrale, che sta sotto la LO:
   **A.** coincide con il centro dell'ellisse
   **B.** sta più lontano dalla LT del centro dell'ellisse
   **C.** sta sulla LO
   **D.** coincide con il punto di tangenza sul lato anteriore del quadrato circoscritto

9. ● Un punto di fuga cade fuori dal foglio. Un rimedio corretto è:
   **A.** avvicinare il punto di fuga a occhio fin dentro il foglio
   **B.** usare al suo posto un punto di distanza
   **C.** eseguire la costruzione in scala ridotta e poi ingrandire il risultato
   **D.** disegnare le rette di quella famiglia parallele alla LT

### Lessico e norme

10. ● Completa. La prospettiva accidentale si chiama anche _____ . Con il quadro verticale gli spigoli verticali restano _____ . Ogni famiglia di rette orizzontali parallele fugge in un punto della _____ . Il punto in cui una retta incontra il quadro si chiama _____ . La verticale del quadro su cui si misurano le altezze vere è la _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $F_1$ e $F_2$ stanno sulla LO, da parti opposte rispetto a $P$. b) Se una faccia del cubo è parallela al quadro, la prospettiva è ancora accidentale. c) La distanza tra $F_1$ e $F_2$ non dipende da $d$. d) Per un parallelepipedo, $PF_1 \cdot PF_2 = d^2$. e) Uno spigolo verticale lontano si disegna inclinato. f) Un segmento contenuto nel quadro appare in vera grandezza.

12. ● Abbina ogni metodo o strumento alla sua descrizione. 1) Metodo dei punti di fuga e delle tracce. 2) Metodo del taglio dei raggi visuali. 3) Metodo dei punti misuratori. 4) Retta delle altezze. a) Il raggio da $V'$ a un punto della pianta taglia la traccia del quadro alla distanza giusta dalla verticale di $P$. b) Le lunghezze lungo gli spigoli si riportano in vera grandezza sulla LT e si uniscono a un punto della LO. c) Ogni lato della pianta si prolunga fino alla LT e la sua immagine unisce la traccia al punto di fuga. d) Verticale di un punto del quadro, su cui le altezze sono vere.

13. ● Spiega in una riga che cosa indicano i simboli $F_1$, $F_2$, $M_1$, $V'$, $V'_r$, $T$ e $A_p$.

14. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) A 0°/90° la prospettiva accidentale diventa centrale. b) A 30°/60° il punto di fuga più vicino a $P$ è quello degli spigoli che formano 60° con il quadro. c) $M_1$ sta dalla stessa parte di $F_1$ rispetto a $P$. d) Per misurare un lato che fugge verso $F_1$ con $M_1$, la sua lunghezza si riporta sulla LT dalla stessa parte verso cui fugge il lato. e) In un quadrato a 45°/45° con un vertice sulla LT nel piede di $P$, la diagonale che parte da quel vertice fugge in $P$. f) Le rette perpendicolari al quadro fuggono in $F_1$.

15. ● Definisci in una o due righe: punto di fuga inaccessibile; prospettiva ridotta; seconda linea di traccia; generatrici di contorno.

### Costruire

**Dati comuni per gli esercizi «Costruire».** Foglio A4 orizzontale, squadratura 277 × 190 mm. Salvo indicazione diversa: LT a 75 mm dal bordo inferiore della squadratura, $P$ a 195 mm dal bordo sinistro, $d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, pianta ribaltata sotto la LT e $V'$ sopra la LT; «30°/60°» significa che i lati che fuggono verso $F_1$ (a sinistra) formano 30° con il quadro e quelli che fuggono verso $F_2$ 60°. Le coordinate $A(x; y)$ sono in mm, $x$ dalla verticale di $P$, $y$ profondità dietro il quadro. Le misure date nelle soluzioni sono valori attesi da controllare con il righello, a ±1 mm.

16. ● **I punti di fuga.** Con i dati comuni, a 30°/60°, traccia LT e LO, segna $P$ e $V'$, conduci per $V'$ le parallele ai lati di un rettangolo girato di 30°/60° e trova $F_1$ e $F_2$. Misura $PF_1$ e $PF_2$, calcola il loro prodotto e confrontalo con $d^2$. Disegna infine la semicirconferenza di diametro $F_1'F_2'$ e controlla che passi per $V'$.

17. ● **I punti misuratori.** Sullo stesso foglio trova $M_1$ e $M_2$, lavorando sulla LT con $V'$ e riportando i punti sulla LO. Misura $F_1'V'$ e $F_2'V'$: perché il primo è esattamente il doppio di $d$?

18. ●● **Un quadrato con le tracce.** Con i dati comuni disegna un quadrato $ABCD$ di lato 40 mm con $A(-10; 0)$ sulla LT, il lato $AB$ verso $F_1$ e il lato $AD$ verso $F_2$ (30°/60°). Usa il metodo dei punti di fuga e delle tracce e misura le tracce di $DC$ e di $BC$ e le posizioni di $B_p$, $C_p$ e $D_p$.

19. ●● **Lo stesso quadrato con gli altri due metodi.** Ripeti l'esercizio precedente su un altro foglio, una volta con il taglio dei raggi visuali (pianta separata, traccia del quadro e $V'$ a 100 mm) e una volta con i punti misuratori. Dove cadono i tagli dei raggi visuali e i punti $B_0$ e $D_0$? Confronta i tre disegni.

20. ●● **Un rettangolo lontano dalla LT.** Con i dati comuni, ma con la LT a 85 mm dal bordo inferiore della squadratura, disegna il rettangolo con il vertice più vicino $A(-20; 20)$, il lato $AB$ di 60 mm verso $F_1$ e il lato $AD$ di 30 mm verso $F_2$ (30°/60°), con il metodo delle tracce. Trova le tracce dei quattro lati e le immagini dei vertici.

21. ●● **Un pavimento a 45°.** Con $P$ sulla mezzeria verticale della squadratura, la LT a 95 mm dal bordo inferiore, $d$ = 100 mm e $h$ = 50 mm, disegna un pavimento quadrato di 60 × 60 mm, girato di 45°/45°, con un vertice $A$ sulla LT nel piede di $P$, diviso in 3 × 3 piastrelle da 20 mm. Dove cadono le tracce delle file di piastrelle? Dove si trovano le immagini degli altri tre vertici? In quale punto fuggono le diagonali $AC$ delle piastrelle?

22. ●●● **Un esagono.** Con $P$ sulla mezzeria verticale, la LT a 80 mm dal bordo inferiore, $d$ = 100 mm, $h$ = 50 mm, disegna un esagono regolare di lato 25 mm con il centro in $O(-10; 50)$ e due lati paralleli alla LT (i vertici sinistro e destro stanno sulla retta frontale per $O$). Trova i punti di fuga dei lati obliqui e costruisci l'esagono. Controlla che le tre diagonali principali passino per $O_p$.

23. ●● **Un cubo.** Con i dati comuni, a 30°/60°, disegna un cubo di spigolo 40 mm con lo spigolo verticale anteriore sulla LT 10 mm a sinistra di $P$. A quali distanze da $P$ cadono le verticali degli spigoli $B$ e $D$? A che altezza sopra la LT stanno i tre vertici superiori visibili? Quali facce si vedono?

24. ●● **Una piramide.** Con i dati comuni, a 30°/60°, disegna una piramide a base quadrata di lato 40 mm e altezza 60 mm, con un vertice della base sulla LT nel piede di $P$. Porta l'altezza con una retta delle altezze alzata nella traccia della retta per il centro della base diretta verso $F_2$. Dove cade il vertice? Quali facce sono visibili?

25. ●●● **Un cilindro.** Con i dati comuni, a 30°/60°, disegna un cilindro di raggio 20 mm e altezza 40 mm con il centro della base in $O(-10; 40)$, costruendo le due basi per otto punti in un quadrato circoscritto girato di 30°/60°. Dove cadono le due verticali di contorno? Di quanto differiscono, in altezza, l'immagine del centro della base e il centro dell'ellisse?

### Leggere il disegno

26. ●● In un disegno di una scatola rettangolare, gli spigoli orizzontali di sinistra, prolungati, si incontrano in un punto 150 mm a sinistra del punto principale $P$, che è segnato; quelli di destra in un punto 50 mm a destra di $P$. Entrambi i punti stanno 45 mm sopra la LT. a) Dove passa la LO, e quanto vale $h$? b) Quanto vale la distanza principale $d$? c) Di quanti gradi è girata la scatola? (Ragiona sul rapporto $PF_1 : PF_2$.)

27. ●● Uno studente ha disegnato un cubo in prospettiva accidentale: gli spigoli della base convergono verso due punti della LO, mentre gli spigoli della faccia superiore, prolungati, si incontrano in due punti 10 mm sopra la LO. Che cosa ha sbagliato, e come si corregge?

28. ●● Uno studente deve disegnare un palo alto 40 mm che sta 30 mm dietro il quadro ($d$ = 100 mm). Ha disegnato la sua immagine alta 40 mm, misurandola con il righello sulla verticale del palo. Qual è l'altezza corretta dell'immagine? Come avrebbe dovuto procedere?

29. ●● Osserva la Figura 1.7. Quale dei due punti segnati sta più vicino alla LT, l'immagine del centro del cerchio o il centro dell'ellisse? Spiega perché, e dì che cosa accadrebbe se si disegnasse l'ellisse centrata su $O_p$.

30. ●● Osserva la Figura 1.3. In quale dei tre disegni la faccia di sinistra appare più larga? Che cosa accade a $F_2$ quando l'angolo della faccia di sinistra diminuisce, e che cosa accadrebbe a 0°/90°?

### Verso la verifica

31. ●●● **Una torretta.** Su un A4 orizzontale (LT a 75 mm dal bordo inferiore, $P$ a 195 mm dal bordo sinistro, $d$ = 100 mm, $h$ = 60 mm, 30°/60°) disegna una torretta: un prisma a base quadrata di lato 30 mm e altezza 35 mm, con il vertice $A(-10; 0)$ sulla LT, coperto da un tetto a piramide con il vertice a 60 mm dal suolo. Costruisci con il metodo delle tracce e controlla due vertici con il taglio dei raggi visuali. Dove cade l'immagine del vertice del tetto, e perché?

32. ●●● **Un punto di fuga inaccessibile.** Devi disegnare un cubo di spigolo 40 mm a 30°/60°, con lo spigolo verticale anteriore nel piede di $P$, con $d$ = 150 mm e $h$ = 60 mm, su un A4 orizzontale. a) Dove cadrebbero $F_1$ e $F_2$? Entrano nella squadratura? b) Esegui la costruzione in scala 1:2 e poi raddoppiala: dove cadono le verticali di $B$ e $D$, e a che altezza i vertici superiori? c) In alternativa usa una seconda linea di traccia a 40 mm di profondità: a che altezza sopra la LT sta la sua immagine, e dove la incontra l'immagine della retta dello spigolo $AB$?

33. ●●● **Progettare una veduta.** Devi rappresentare in prospettiva accidentale a 30°/60° un blocco largo 90 mm (larghezza dell'immagine da contenere nel cono ottico). a) Quale distanza principale minima suggerisce la regola pratica? b) Con quella distanza, dove cadono $F_1$ e $F_2$? Basta un A4 orizzontale, o serve un A3? c) Se il blocco è un edificio disegnato alla scala 1:100, a che altezza sopra la LT metti la LO per una veduta normale? Che cosa cambierebbe con $h$ = 120 mm?

### PER APPROFONDIRE

- [DOC] M. Docci, R. Migliari, *Scienza della rappresentazione*: i capitoli sulla prospettiva trattano il quadro verticale e il quadro inclinato come casi della proiezione centrale, con i punti misuratori e la restituzione.

# Glossario del capitolo

**Famiglia di rette**
Insieme di rette parallele tra loro; in prospettiva hanno tutte lo stesso punto di fuga.

**Generatrici di contorno**
Generatrici di un cilindro o di un cono lungo le quali i raggi visuali sono tangenti alla superficie; formano il contorno apparente.

**Linee visibili**
Spigoli e contorni non nascosti da altre parti del disegno; le sole ripassate nella tavola finita.

**Metodo dei punti di fuga e delle tracce**
Costruzione che unisce la traccia di ogni lato della pianta con il punto di fuga della sua famiglia; detto anche del prolungamento dei lati.

**Metodo del taglio dei raggi visuali**
Costruzione che trova la posizione di ogni punto dove il suo raggio visuale, in pianta, taglia la traccia del quadro.

**Prospettiva accidentale**
Prospettiva a quadro verticale di un oggetto le cui due famiglie di spigoli orizzontali sono oblique rispetto al quadro; detta anche angolare.

**Prospettiva ridotta**
Costruzione eseguita in scala ridotta e poi ingrandita; si basa su un'omotetia.

**Punti di fuga della prospettiva accidentale**
Punti della LO in cui fuggono le due famiglie di spigoli orizzontali di un oggetto in prospettiva accidentale.

**Punti misuratori**
Punti della LO ($M_1$, $M_2$) con $F_1M_1 = F_1V'_r$ e $F_2M_2 = F_2V'_r$, che permettono di riportare lunghezze vere dalla LT.

**Punto di fuga inaccessibile**
Punto di fuga che cade fuori dal foglio da disegno.

**Punto di vista ribaltato**
Posizione del punto di vista dopo la rotazione del piano d'orizzonte sul quadro intorno alla LO; sta a distanza $d$ da $P$ sulla sua verticale ($V'_r$).

**Quadro inclinato**
Quadro non verticale; le rette verticali convergono in un terzo punto di fuga.

**Quadro verticale**
Quadro perpendicolare al geometrale: gli spigoli verticali restano verticali nel disegno.

**Retta delle altezze**
Verticale che sta nel quadro, su cui le altezze si riportano in vera grandezza.

**Seconda linea di traccia**
Retta del geometrale parallela alla LT, a profondità nota, usata al posto di un punto di fuga inaccessibile.

**Semicirconferenza dei punti di fuga**
Semicirconferenza di diametro $F_1F_2$, che passa per il punto di vista ribaltato quando le due famiglie sono perpendicolari.

**Traccia**
Punto in cui una retta incontra il quadro; per una retta del geometrale è un punto della LT.

# Soluzioni

**1.** A. Gli spigoli verticali, paralleli al quadro, restano verticali; le due famiglie di spigoli orizzontali hanno due punti di fuga distinti sulla LO. Con una faccia parallela al quadro (B) la prospettiva è centrale; spigoli verticali inclinati (C) danno il quadro inclinato.

**2.** C. È la definizione di punto di fuga; per rette orizzontali la parallela per $V$ è orizzontale e incontra il quadro sulla LO. In $P$ fuggono soltanto le rette perpendicolari al quadro.

**3.** B. Le parallele per l'occhio a rette inclinate di 45° sul quadro incontrano la LO a distanza $d$ da $P$, nei punti di distanza.

**4.** D. L'angolo in $V'_r$ è uguale all'angolo tra le due famiglie, che per un parallelepipedo è retto; un angolo retto inscritto ha i lati che passano per gli estremi di un diametro (Talete).

**5.** C. Solo un segmento contenuto nel quadro coincide con la propria immagine; gli spigoli dietro il quadro si accorciano nel rapporto $d/(d + y)$.

**6.** A. Si centra il compasso in $F_1$ con apertura $F_1V'_r$ e si riporta la lunghezza sulla LO verso $P$; $M_1$ cade dall'altra parte di $P$ rispetto a $F_1$.

**7.** D. La faccia che forma con il quadro l'angolo minore (20°) è vista più di fronte: il suo punto di fuga è lontano e la faccia appare larga e poco scorciata. L'altra fugge verso un punto vicino a $P$ e appare stretta.

**8.** B. La metà lontana del cerchio si accorcia più della metà vicina, quindi l'ellisse è spostata verso l'osservatore, cioè verso la LT; l'immagine del centro sta più in alto, più lontano dalla LT.

**9.** C. È la prospettiva ridotta: l'immagine in scala ridotta è simile a quella vera (omotetia), e la si ingrandisce. Avvicinare il punto a occhio (A) produce una prospettiva che non corrisponde a nessun punto di vista.

**10.** Angolare; verticali; LO (linea d'orizzonte); traccia; retta delle altezze.

**11.** a) V. b) F: con una faccia parallela al quadro la prospettiva è centrale. c) F: le distanze da $P$ sono proporzionali a $d$, quindi anche $F_1F_2$. d) V (secondo teorema di Euclide nel triangolo $F_1V'_rF_2$). e) F: con il quadro verticale gli spigoli verticali restano verticali. f) V.

**12.** 1 – c; 2 – a; 3 – b; 4 – d.

**13.** $F_1$, $F_2$: punti di fuga, sulla LO, delle due famiglie di spigoli orizzontali (a sinistra e a destra). $M_1$: punto misuratore della famiglia di $F_1$, con $F_1M_1 = F_1V'_r$. $V'$: piede del punto di vista sul geometrale, nella pianta ribaltata sopra la LT a distanza $d$. $V'_r$: punto di vista ribaltato sul quadro intorno alla LO, a distanza $d$ da $P$ sulla sua verticale. $T$: traccia di una retta, punto in cui la retta incontra il quadro (per una retta del geometrale, un punto della LT). $A_p$: immagine prospettica del punto $A$.

**14.** a) V: una famiglia fugge in $P$, l'altra è parallela alla LT. b) V: a 30°/60° con $d$ = 100 mm il punto di fuga degli spigoli a 60° dista 57,7 mm da $P$, l'altro 173,2 mm. c) F: $M_1$ cade dalla parte opposta di $P$. d) V: il triangolo isoscele $ABB_0$ ha $B_0$ sulla LT dalla parte di $B$. e) V: quella diagonale è perpendicolare al quadro. f) F: fuggono in $P$.

**15.** Punto di fuga inaccessibile: punto di fuga che cade fuori dal foglio. Prospettiva ridotta: costruzione eseguita in scala ridotta (pianta, $d$ e $h$ ridotti nello stesso rapporto), poi ingrandita; è un'omotetia. Seconda linea di traccia: retta del geometrale parallela alla LT, a una profondità nota, la cui immagine è orizzontale e fornisce un secondo punto dell'immagine di ogni lato, senza bisogno del punto di fuga. Generatrici di contorno: generatrici di un cilindro o di un cono lungo le quali i raggi visuali sono tangenti alla superficie; formano il contorno apparente del solido.

**16.** $PF_1$ = 173,2 mm ($F_1$ a 21,8 mm dal bordo sinistro della squadratura), $PF_2$ = 57,7 mm ($F_2$ a 252,7 mm dal bordo sinistro). Prodotto: 173,2 · 57,7 ≈ 10 000 mm² = 100². La semicirconferenza ha il centro sulla LT 57,7 mm a sinistra della verticale di *P* e il raggio di 115,5 mm: passa per *V'*, che sta 100 mm sopra la LT.

**17.** $F_1'V'$ = 200,0 mm e $F_2'V'$ = 115,5 mm. $M_1$ cade 200,0 − 173,2 = 26,8 mm a destra di *P*; $M_2$ 115,5 − 57,7 = 57,7 mm a sinistra, simmetrico di $F_2$. Il triangolo che ha i vertici in *V'*, in $F_1'$ e nel piede di *P* sulla LT è un mezzo triangolo equilatero, con l'angolo di 30° in $F_1'$: il cateto opposto a 30°, che misura *d*, è metà dell'ipotenusa, quindi $F_1'V' = 2d$ = 200 mm.

**18.** Pianta: *B*(−44,6; 20,0), *C*(−24,6; 54,6), *D*(10,0; 34,6). Tracce: *DC* a 70,0 mm a destra di *P*, *BC* a 56,2 mm a sinistra. Immagini (distanza dalla verticale di *P*; altezza sopra la LT): $B_p$(−37,2; 8,3), $C_p$(−15,9; 17,7), $D_p$(7,4; 12,9).

**19.** Raggi visuali: i tagli sulla traccia del quadro cadono a 37,2 mm e 15,9 mm a sinistra e 7,4 mm a destra della verticale di *P*, le stesse ascisse dell'esercizio precedente. Punti misuratori: $B_0$ 50 mm a sinistra di *P*, $D_0$ 30 mm a destra; $M_1$ 26,8 mm a destra, $M_2$ 57,7 mm a sinistra. Le rette $B_0M_1$ e $D_0M_2$ tagliano $AF_1$ e $AF_2$ in (−37,2; 8,3) e (7,4; 12,9). I tre disegni devono coincidere entro mezzo millimetro: sono la stessa proiezione.

**20.** Pianta: *B*(−72,0; 50,0), *C*(−57,0; 76,0), *D*(−5,0; 46,0). Tracce: *AB* a 14,6 mm a destra di *P*, *DC* a 74,6 mm a destra (verso $F_1$); *AD* a 31,5 mm a sinistra, *BC* a 100,8 mm a sinistra (verso $F_2$). Immagini: $A_p$(−16,7; 8,3), $B_p$(−48,0; 16,7), $C_p$(−32,4; 21,6), $D_p$(−3,4; 15,7).

**21.** $F_1 = D_1$ e $F_2 = D_2$, a 100 mm da *P*. Le tracce delle file cadono ogni 20 · √2 ≈ 28,3 mm: a 0; 28,3; 56,6; 84,9 mm a destra di *P* (rette verso $D_1$) e alle stesse distanze a sinistra (rette verso $D_2$). Vertici: $B_p$(−29,8; 14,9), $D_p$(29,8; 14,9), $C_p$ sulla verticale di *P*, 23,0 mm sopra la LT. Le diagonali *AC* sono perpendicolari al quadro e fuggono in *P*: i vertici intermedi delle piastrelle sulla diagonale principale stanno sulla verticale di *P* a 11,0 e 18,1 mm sopra la LT. Le altre diagonali sono parallele alla LT e restano orizzontali.

**22.** I lati obliqui formano 60° con la LT: fuggono in due punti della LO a $d/\sqrt{3}$ ≈ 57,7 mm a sinistra e a destra di *P*; i lati paralleli alla LT restano orizzontali. Vertici (pianta → immagine): (15,0; 50,0) → (10,0; 16,7); (2,5; 71,7) → (1,5; 20,9); (−22,5; 71,7) → (−13,1; 20,9); (−35,0; 50,0) → (−23,3; 16,7); (−22,5; 28,3) → (−17,5; 11,0); (2,5; 28,3) → (1,9; 11,0). $O_p$(−6,7; 16,7): la diagonale tra i vertici sinistro e destro è frontale e passa per $O_p$, le altre due lo attraversano entrambe.

**23.** Verticali di *B* e *D*: 37,2 mm a sinistra e 7,4 mm a destra di *P*; quella del vertice nascosto *C* a 15,9 mm a sinistra. Vertici superiori: sopra *A* 40,0 mm (spigolo nel quadro), sopra *B* 41,7 mm, sopra *C* 43,5 mm, sopra *D* 42,6 mm. Basi: $B_p$ a 8,3 mm, $D_p$ a 12,9 mm. Si vedono le due facce laterali che partono dallo spigolo *A* e la faccia superiore, che sta sotto la LO (40 < 50).

**24.** Centro della base *O*(−7,3; 27,3); la retta per *O* verso $F_2$ ha la traccia 23,1 mm a sinistra di *P*. Vertice della piramide: 5,7 mm a sinistra di *P*, 57,9 mm sopra la LT, cioè 7,9 mm sopra la LO. Base: $B_p$(−28,9; 8,3), $C_p$(−9,5; 17,7), $D_p$(14,9; 12,9). Sono visibili le due facce che partono dagli spigoli *AB* e *AD*; le facce su *BC* e su *CD* sono nascoste.

**25.** Verticali di contorno a 21,8 mm a sinistra e 7,2 mm a destra di *P*, tangenti a entrambe le ellissi. Base inferiore: immagine del centro a 14,3 mm sopra la LT, centro dell'ellisse a 13,5 mm (circa 0,7 mm più in basso); i punti anteriore e posteriore della circonferenza sulla retta di profondità per *O* stanno a 8,3 e 18,8 mm. Base superiore: centro dell'ellisse a 42,7 mm, immagine del centro a 42,9 mm. Si vede tutta la base superiore e, di quella inferiore, solo l'arco anteriore tra le due verticali di contorno.

**26.** a) I due punti di fuga stanno sulla LO, quindi la LO è la retta orizzontale 45 mm sopra la LT: *h* = 45 mm. b) $d^2 = PF_1 \cdot PF_2 = 150 \cdot 50 = 7500$ mm², $d = \sqrt{7500}$ ≈ 86,6 mm. c) Il rapporto è 150 : 50 = 3. A 30°/60° i due punti stanno a $d\sqrt{3}$ e $d/\sqrt{3}$ da *P*, il cui rapporto è 3 (lo hai visto nell'esempio svolto sui punti di fuga a 30°/60°): gli spigoli di sinistra formano 30° con il quadro, quelli di destra 60°.

**27.** Gli spigoli superiori sono paralleli a quelli della base, quindi hanno lo stesso punto di fuga: per ogni famiglia uno solo, sulla LO. Lo studente ha fatto convergere a occhio gli spigoli superiori. Si corregge unendo l'estremo superiore dello spigolo nel quadro (retta delle altezze) con gli stessi $F_1$ e $F_2$ della base.

**28.** L'immagine è alta $40 \cdot 100/(100 + 30) \approx 30{,}8$ mm. Doveva portare l'altezza da una retta delle altezze: prolungare in pianta una retta per il piede del palo fino alla LT (o usare la retta di profondità, che fugge in *P*), segnare 40 mm sulla verticale della traccia e unire quel punto al punto di fuga della retta; l'incrocio con la verticale del palo dà la cima.

**29.** Il centro dell'ellisse sta più vicino alla LT: 13,7 mm contro i 15,3 mm di $O_p$, e 0,5 mm più a sinistra. La metà lontana del cerchio si accorcia di più, quindi i punti anteriore e posteriore non sono equidistanti da $O_p$. Un'ellisse centrata su $O_p$ non passerebbe per gli otto punti costruiti e non sarebbe tangente ai lati del quadrato nei punti medi.

**30.** Nel disegno c), a 15°/75°: la faccia di sinistra forma con il quadro l'angolo più piccolo. Diminuendo quell'angolo $F_1$ si allontana (100, 173,2, 373,2 mm da *P*) e $F_2$ si avvicina a *P* (100, 57,7, 26,8 mm), sempre con prodotto 10 000 mm². A 0°/90° $F_2$ coinciderebbe con *P* e $F_1$ andrebbe all'infinito: la prospettiva diventerebbe centrale.

**31.** $F_1$ e $F_2$ a 173,2 mm e 57,7 mm da *P* (dipendono da *d*, non da *h*). Pianta: *B*(−36,0; 15,0), *C*(−21,0; 41,0), *D*(5,0; 26,0); tracce di *DC* a 50,0 mm a destra e di *BC* a 44,6 mm a sinistra di *P*. Base: $B_p$(−31,3; 7,8), $D_p$(4,0; 12,4); vertici superiori del prisma a 35,0 (sopra *A*), 38,3 (sopra *B*), 42,3 (sopra *C*, a 14,9 mm a sinistra di *P*) e 40,2 mm (sopra *D*). Il vertice del tetto sta 12,9 mm a sinistra di *P*, esattamente sulla LO (60,0 mm sopra la LT): è alto quanto l'occhio, e ogni punto alla quota dell'occhio ha l'immagine sulla LO. Con i raggi visuali: i tagli di *B* e *D* cadono a 31,3 mm a sinistra e 4,0 mm a destra di *P*.

**32.** a) $F_1$ a $150 \cdot \sqrt{3} \approx 259{,}8$ mm a sinistra di *P*, $F_2$ a $150/\sqrt{3} \approx 86{,}6$ mm a destra: distano 346,4 mm e non entrano nella squadratura di 277 mm. b) In scala 1:2 ($d = 75$ mm, $h = 30$ mm, cubo di 20 mm) i punti di fuga stanno a 129,9 mm e 43,3 mm. Raddoppiando: verticali di *B* e *D* a 30,6 mm a sinistra e 16,2 mm a destra di *P*; basi $B_p$ a 7,1 mm e $D_p$ a 11,3 mm; vertici superiori a 40,0 (sopra *A*), 42,4 (*B*), 45,3 (*C*, a 10,7 mm a sinistra) e 43,8 mm (*D*). c) La seconda linea di traccia a 40 mm di profondità ha l'immagine a $60 \cdot 40/190 \approx 12{,}6$ mm sopra la LT. Il prolungamento dello spigolo *AB* incontra la retta *g* nel punto (−69,3; 40), la cui retta di profondità ha il piede sulla LT 69,3 mm a sinistra di *P*; la sua immagine sta a 54,7 mm a sinistra di *P*, sulla retta a 12,6 mm. L'immagine di *AB* sta sulla retta da *A* a quel punto.

**33.** a) $d \geq 1{,}5 \cdot 90 = 135$ mm. b) $F_1$ a $135 \cdot \sqrt{3} \approx 233{,}8$ mm a sinistra di *P* e $F_2$ a $135/\sqrt{3} \approx 77{,}9$ mm a destra: distano 311,8 mm, più dei 277 mm di un A4 orizzontale; serve un A3 orizzontale (400 mm), oppure una prospettiva ridotta. c) Occhio a circa 1,6 m, cioè 16 mm sopra la LT alla scala 1:100: veduta normale, con le gronde viste dal basso, se l'edificio, come quasi sempre, è più alto di 1,6 m. Con $h = 120$ mm (12 m in scala) la veduta diventa dall'alto: si vedono le coperture, e il blocco si legge quasi come una pianta.