CAPITOLO

4

Prospettiva centrale di solidi e spazi architettonici

Una stanza, un portico, una piazza: con un punto e due regole la superficie del foglio si apre come una finestra.

OBIETTIVI

1. Disegnare in prospettiva centrale prismi, piramidi, cilindri e coni sul piano geometrale, con le altezze prese sulla retta delle altezze e i contorni corretti.
2. Costruire la scatola prospettica di un interno con pavimento, soffitto a cassettoni, porte, finestre e gradini.
3. Mettere in prospettiva archi frontali e archi in piani perpendicolari al quadro, portici e volte a botte cassettonate.
4. Rappresentare in prospettiva centrale una piazza con gli edifici che la delimitano.
5. Eseguire la restituzione prospettica di un'immagine e leggere con spirito critico la geometria dello spazio dipinto nelle opere del Rinascimento.
6. Spiegare il principio delle finte prospettive e dell'anamorfosi.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 I solidi sul piano geometrale 2
4.2 La scatola prospettica: lo spazio interno 7
4.3 Archi, portici e volte 9
4.4 Lo spazio aperto: la piazza e la città 13
4.5 Dalla pittura alla geometria 14
4.6 Dalla costruzione alla tavola 19

Disegno e Storia dell'arte 3 · Parte II · La prospettiva centrale · versione 1.0
Capitolo 4: Prospettiva centrale di solidi e spazi architettonici · pagine 111–136 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente hai imparato a mettere in prospettiva un pavimento, un quadrato, un cerchio: figure piane, appoggiate sul piano geometrale. Ma un pittore del Quattrocento non dipingeva pavimenti vuoti. Sopra quei pavimenti metteva colonne, gradini, altari, pareti con porte e finestre, soffitti a cassettoni, portici che si allontanano verso il fondo. E un architetto, prima di costruire una piazza o una cappella, voleva vederla come l'avrebbe vista chi ci sarebbe entrato.

Questo capitolo porta la prospettiva centrale nella terza dimensione. Il metodo non cambia: un punto si mette in prospettiva con la sua pianta e la sua altezza, le rette perpendicolari al quadro fuggono in P, le profondità si riportano con i punti di distanza, le altezze si misurano in vera grandezza sulla retta delle altezze (cap. 3). Cambia l'oggetto: prima i solidi, poi gli spazi chiusi (la stanza, la volta), infine gli spazi aperti della città. Nell'ultima parte faremo il percorso inverso, quello di chi guarda un dipinto: dall'immagine alla geometria che l'ha generata. È qui che il disegno incontra la storia dell'arte che studierai nei capitoli 6–16.

Le convenzioni restano quelle del capitolo 3: la pianta ausiliaria è disegnata **sotto** la LT; un punto della pianta è dato dalle coordinate $(x; y)$, dove x è la distanza, misurata sulla LT, dalla verticale per P (positiva a destra) e y è la profondità dietro il quadro; z è l'altezza sul geometrale. Le misure sono in millimetri sul foglio, in metri quando si parla di edifici.

4.1 I solidi sul piano geometrale

4.1.1 Un metodo in tre passi

Ogni solido a facce piane è fatto di vertici e spigoli. Per metterlo in prospettiva basta trovare l'immagine dei vertici e unirli nell'ordine giusto. Per un vertice che sta sul geometrale servono due rette: la perpendicolare al quadro che passa per il suo piede, che fugge in P, e la retta a 45° che porta la sua profondità sulla LT e poi a un punto di distanza. Per un vertice che sta in alto serve, in più, l'altezza. L'altezza si misura in vera grandezza nel quadro, dove nulla si accorcia, e poi si «porta indietro» verso P lungo una retta perpendicolare al quadro, fino alla verticale del piede.

Il lavoro si ordina sempre così:

1. **la pianta**: disegna sotto la LT la pianta del solido nella posizione data e trova, con il metodo dei punti di distanza, la prospettiva della sua **base**;
2. **le altezze**: alza le verticali dai vertici della base (le verticali restano verticali, perché sono parallele al quadro) e taglia ciascuna all'altezza giusta, presa sulla **retta delle altezze**;

3. **la pulizia**: decidi quali facce si vedono e ripassa con il tratto grosso solo gli spigoli in vista; le linee di costruzione restano sottili, gli spigoli nascosti nel disegno finito non si tracciano.

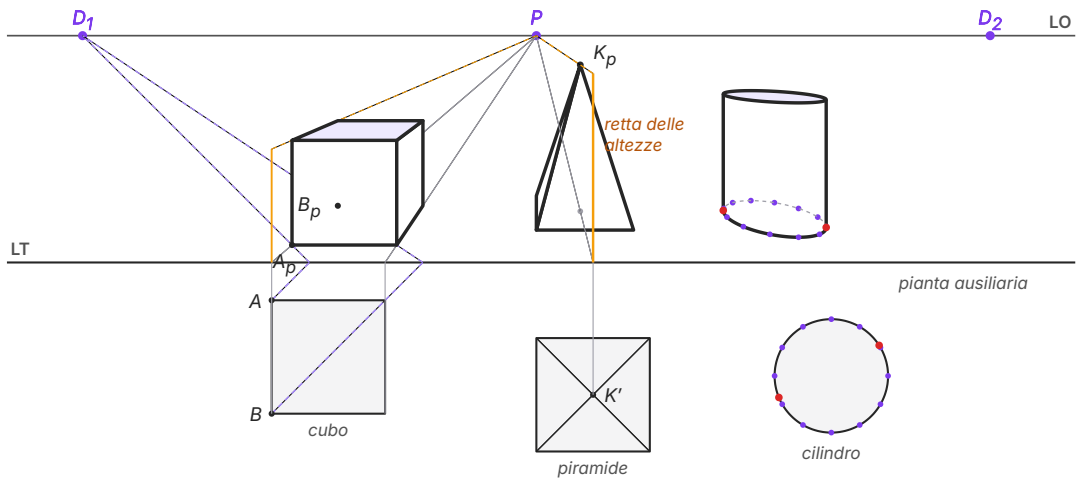


Figura 4.1 Cubo, piramide e cilindro sul piano geometrale, in prospettiva centrale (d = 120 mm, h = 60 mm; misure sul foglio). Sotto la LT la pianta ausiliaria. Cubo di spigolo 30 mm con lo spigolo sinistro da $A(-70; 10)$ a $B(-70; 40)$: le profondità arrivano da D_1 (tratteggio viola), l'altezza dalla retta delle altezze (arancio) nel quadro. Piramide a base quadrata di lato 30 mm, alta 50 mm, con il piede del vertice in $K'(15; 35)$: l'altezza è misurata in vera grandezza sulla verticale x = 15 e portata verso P. Cilindro di raggio 15 mm e altezza 40 mm, centro della base in (78; 30): la base è costruita per 12 punti (viola); i punti rossi sono i piedi delle due generatrici di contorno; in grigio la parte nascosta della base, che nel disegno finito si cancella.

4.1.2 Prisma e cubo

Un parallelepipedo posato sul geometrale con le facce parallele e perpendicolari al quadro è il caso più semplice e il più frequente: è il modello di un edificio, di un altare, di un piedistallo. I suoi spigoli sono di tre famiglie, e ciascuna si comporta in modo diverso (Figura 4.1):

- gli spigoli **verticali** restano verticali;
- gli spigoli orizzontali **paralleli al quadro** (frontali) restano orizzontali, cioè paralleli alla LT, e si accorciano tanto più quanto più sono lontani;
- gli spigoli orizzontali **perpendicolari al quadro** convergono in P.

Ne segue che le facce frontali del parallelepipedo appaiono come **rettangoli** simili a quelli veri, ridotti nel rapporto $d : (d + y)$, dove y è la profondità della faccia. La faccia anteriore e la posteriore hanno la stessa forma e grandezze diverse; le facce laterali e quelle orizzontali diventano trapezi.

ESEMPIO SVOLTO

Il cubo della Figura 4.1. Cubo di spigolo 30 mm, con la faccia anteriore alla profondità 10 mm e lo spigolo sinistro in $x = -70$; $d = 120$ mm, $h = 60$ mm.

1. In pianta il quadrato ha i vertici $A(-70; 10)$, $(-40; 10)$, $(-40; 40)$, $B(-70; 40)$. Da A e da B traccia le rette a 45° fino alla LT: le incontrano in $x = -70 + 10 = -60$ e in $x = -70 + 40 = -30$. Unisci questi due punti con D_1.
2. Dal piede di A sulla LT ($x = -70$) traccia la retta verso P: le due rette dirette in D_1 la tagliano in A_p e in B_p. Per i tre triangoli simili del capitolo 3, A_p sta 4,6 mm sopra la LT e 64,6 mm a sinistra della verticale per P ($70 \cdot 120/130 \approx 64{,}6$); B_p sta 15,0 mm sopra la LT e 52,5 mm a sinistra ($70 \cdot 120/160$).
3. Per A_p e B_p traccia le orizzontali: sono gli spigoli frontali di base; tagliale con la retta che va da $x = -40$ verso P. Il quadrato di base è un trapezio.
4. Sulla verticale $x = -70$, nel quadro, misura 30 mm dalla LT: è la retta delle altezze. Dall'estremo superiore traccia la retta verso P: taglia la verticale di A_p alla quota 32,3 mm e quella di B_p alla quota 37,5 mm. Lo spigolo anteriore appare alto 27,7 mm ($30 \cdot 120/130$), il posteriore 22,5 mm ($30 \cdot 120/160$).
5. Completa la faccia superiore con le orizzontali e la retta verso P, e ripassa gli spigoli in vista.

Controllo: il rapporto tra lo spigolo posteriore e quello anteriore è $22{,}5 : 27{,}7 \approx 0{,}81$, uguale a $130 : 160$. Le immagini dei segmenti frontali stanno tra loro come le inverse delle distanze dall'occhio, $(d + y)$.

4.1.3 Quali facce si vedono

Un solido convesso mostra le facce rivolte verso il punto di vista e nasconde le altre. Per un parallelepipedo la regola si legge sul disegno: la faccia anteriore si vede sempre; delle due facce laterali si vede quella rivolta verso la verticale per P (se il solido sta tutto a sinistra di P, la faccia destra; se sta tutto a destra, la sinistra; se è a cavallo, nessuna delle due); delle due facce orizzontali si vede quella rivolta verso la LO.

DA RICORDARE

Sopra e sotto la linea d'orizzonte. Una faccia orizzontale che sta **sotto** la LO, come il piano di un tavolo o la cima di un cubo posato a terra, si vede dall'alto. Una faccia che sta **sopra** la LO, come un soffitto, una mensola alta, l'intradosso di un architrave, si vede dal basso. Una faccia che sta **alla stessa altezza** dell'occhio, cioè proprio sul piano d'orizzonte, si riduce a un segmento sulla LO. Per questo un solido che attraversa la LO (un pilastro, un edificio) mostra solo le facce verticali: né la base né la cima.

4.1.4 La piramide e il vertice in alto

Una piramide si costruisce come un prisma di cui interessa un solo punto in alto: il **vertice**. Si mette in prospettiva il poligono di base, si trova l'immagine del piede del vertice (il centro della base, in una piramide retta) e si alza la verticale; l'altezza si prende sulla retta delle altezze. Nella Figura 4.1 la piramide è alta 50 mm e il piede del vertice è $K'(15; 35)$: sulla verticale $x = 15$, nel quadro, si misurano 50 mm; la retta che dall'estremo superiore va in P taglia la verticale del piede, a 11,6 mm da quella di P, nel punto K_p, 52,3 mm sopra la LT. Poiché $h = 60$ mm, il vertice resta sotto la LO, e la piramide si vede leggermente dall'alto.

Le facce in vista sono quelle rivolte verso l'osservatore: nella figura la faccia anteriore e, appena, quella sinistra, perché il vertice sta a destra della verticale per P. Se il vertice superasse la LO (una piramide alta, o un punto di vista basso), le facce posteriori resterebbero comunque nascoste: un vertice sopra la LO non cambia le facce che si vedono, cambia solo la forma dei loro triangoli.

4.1.5 Cilindro e cono

La base di un cilindro o di un cono è un cerchio sul geometrale, e la sua prospettiva si costruisce come nel capitolo 3: il quadrato circoscritto, le sue diagonali, otto o dodici punti della circonferenza portati in prospettiva e uniti con il curvilineo. Il cerchio superiore di un cilindro si costruisce allo stesso modo, alla quota del cilindro: basta alzare le verticali dai punti della base e tagliarle all'altezza giusta, ancora una volta con la retta delle altezze.

Resta da tracciare il contorno. Il **contorno apparente** di un solido è la linea che, nell'immagine, separa il solido da ciò che gli sta dietro: per un cilindro verticale è formato da due generatrici, quelle in cui i raggi visuali sfiorano la superficie. Le loro immagini sono verticali e sono **tangenti alle due ellissi** delle basi, nei loro punti più a sinistra e più a destra. Nella pianta i loro piedi sono i punti di tangenza delle rette condotte dal piede del punto di vista, V', alla circonferenza di base (i punti rossi della Figura 4.1): non sono le estremità del diametro parallelo alla LT. Il cono si comporta allo stesso modo, con una differenza: le sue generatrici di contorno partono dall'immagine del vertice e sono le due rette **tangenti all'ellisse di base** condotte da quel punto (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 3, per le generatrici di contorno in assonometria).

ERRORE FREQUENTE

Contorni e centri dei solidi rotondi. Due errori ricorrenti. Il primo: far passare il contorno di un cilindro per le estremità del diametro frontale, o il contorno di un cono per l'immagine del centro della base, invece di tracciare le tangenti all'ellisse. Il secondo: disegnare l'ellisse con il centro nell'immagine del centro del cerchio. Nella Figura 4.1 il centro della base del cilindro è a 12,0 mm sopra la LT, mentre i punti anteriore e posteriore del cerchio stanno a 6,7 e 16,4 mm: il loro punto medio è a 11,5 mm. L'immagine del centro è più vicina al punto posteriore, perché la metà lontana del cerchio si accorcia di più. Con un punto di vista alto, o con un cerchio vicino al quadro, la differenza diventa ben visibile.

4.1.6 Gruppi di solidi e linee nascoste

Quando i solidi sono più d'uno, ciascuno si costruisce da solo, a partire dalla pianta comune, e solo alla fine si decide chi copre chi. Conviene lavorare **dal più vicino al più lontano**: il solido più vicino al quadro si ripassa per intero; di quelli dietro si ripassano solo le parti che non cadono dentro i contorni già tracciati. Un solido più alto, anche se più lontano, può sporgere sopra uno più basso e più vicino: la pianta dice chi sta davanti, la prospettiva dice che cosa sporge.

Le linee nascoste, che nelle proiezioni ortogonali si disegnano tratteggiate, nella tavola prospettica finita si omettono: la prospettiva rappresenta ciò che l'occhio vede, non ciò che sa. Durante la costruzione, però, servono: si tracciano leggere e si cancellano alla fine, oppure si lasciano visibili solo le linee di costruzione sottili, se l'insegnante lo chiede.

IN SINTESI

Un solido in prospettiva centrale, in sintesi.

1. Pianta sotto la LT; prospettiva della base con le rette verso P e verso D_1 o D_2.
2. Verticali dai vertici della base; altezze in vera grandezza sulla retta delle altezze, nel quadro, portate verso P.
3. Cerchi per 8 o 12 punti; contorni come tangenti alle ellissi (cilindro: verticali; cono: dal vertice).
4. Facce in vista: quelle rivolte verso V; le orizzontali si vedono dall'alto sotto la LO, dal basso sopra la LO.
5. Spigoli in vista a tratto grosso, costruzione sottile, spigoli nascosti omessi.

4.2 La scatola prospettica: lo spazio interno

4.2.1 Una stanza vista dall'ingresso

Immagina di stare sulla soglia di una stanza rettangolare e di guardare dritto davanti a te, verso la parete di fondo. Se il quadro coincide con il piano della soglia, la stanza diventa una **scatola prospettica**: un parallelepipedo cavo di cui vedi l'interno, con il pavimento, il soffitto, le due pareti laterali e la parete di fondo (Figura 4.2). È lo spazio che i pittori del Quattrocento hanno costruito infinite volte per le loro Annunciazioni, i loro studi di santi, le loro sale.

La scatola è il caso del prisma «visto da dentro», e le stesse regole bastano a disegnarla:

- il rettangolo della soglia sta nel quadro, ed è in **vera grandezza**: i suoi lati verticali sono le rette delle altezze delle due pareti;
- i quattro spigoli lunghi (pavimento–pareti e soffitto–pareti) sono perpendicolari al quadro e fuggono in P;
- la **parete di fondo** è parallela al quadro: appare come un rettangolo simile a quello vero, ridotto nel rapporto $d : (d + L)$, dove L è la profondità della stanza;
- le profondità di porte, finestre e righe del pavimento si trovano con i punti di distanza; le altezze con le rette delle altezze, cioè con i lati della soglia.

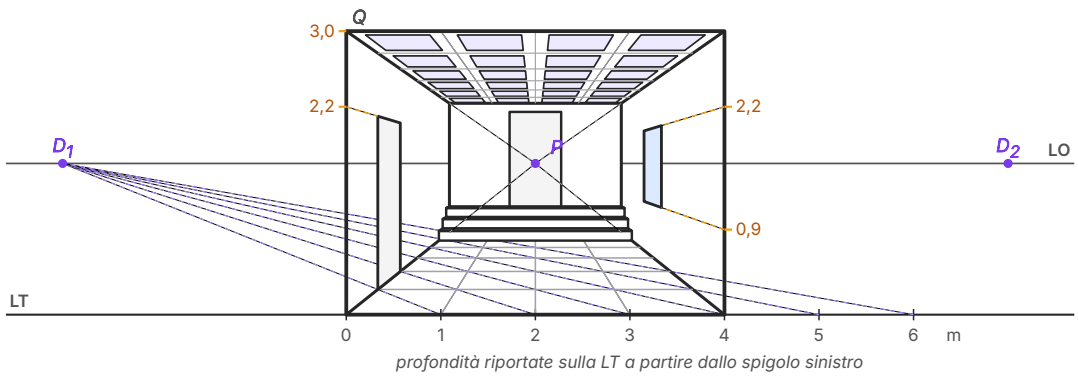


Figura 4.2 Scatola prospettica: una stanza di 4 × 6 m, alta 3 m, vista dalla soglia (d = 5 m, h = 1,6 m). Le profondità da 1 a 6 m sono riportate sulla LT a partire dallo spigolo sinistro e mandate in D_1: le rette tagliano lo spigolo sinistro del pavimento alle profondità giuste. Sui lati della soglia, in arancio, le altezze della porta (2,2 m) e della finestra (da 0,9 a 2,2 m), portate verso il fondo lungo le pareti. In alto il soffitto a cassettoni, quadrati di 1 m; in fondo una gradinata di tre gradini (alzata 0,2 m, pedata 0,4 m) e una porta.

ESEMPIO SVOLTO

La stanza della Figura 4.2 su un foglio A3. Scala 1 : 50: la stanza larga 4 m, alta 3 m e profonda 6 m diventa 80 × 60 × 120 mm; d = 5 m = 100 mm; h = 1,6 m = 32 mm. Foglio A3 orizzontale; LT a 70 mm dal bordo inferiore della cornice; P sulla verticale di mezzo.

1. Disegna la soglia: un rettangolo 80 × 60 mm, con la base sulla LT, centrato sulla verticale di P. La LO è 32 mm sopra la LT; D_1 e D_2 stanno sulla LO a 100 mm da P.
2. Unisci i quattro vertici della soglia con P.
3. Sulla LT, a destra dello spigolo sinistro, segna le profondità 20, 40, … 120 mm (cioè 1, 2, … 6 m) e unisci ogni segno con D_1: le rette tagliano lo spigolo sinistro del pavimento nei punti di profondità 1, 2, … 6 m. Da questi punti le orizzontali danno le righe del pavimento.
4. All'ultima riga (6 m) disegna la parete di fondo: un rettangolo largo 80 · 100/220 ≈ 36,4 mm e alto 60 · 100/220 ≈ 27,3 mm. Il suo spigolo inferiore sta 17,5 mm sopra la LT (32 · 120/220).
5. Porta: sullo spigolo sinistro della soglia misura 2,2 m = 44 mm e porta la quota verso P lungo la parete; le profondità della porta (da 1 a 2 m) vengono dal passo 3.

Controllo: lo spigolo inferiore della parete di fondo si trova anche con il metodo dei raggi visuali: 120 mm di profondità, a una distanza dall'occhio di 220 mm, danno 32 · 120/220 ≈ 17,5 mm. I due metodi devono coincidere.

4.2.2 Pavimento, soffitto e cassettoni

Il pavimento a riquadri del capitolo 3 diventa ora la base di tutta la costruzione: le sue righe danno le profondità, le sue colonne le larghezze. Il soffitto si costruisce allo stesso modo, ma **capovolto**: le sue righe sono orizzontali, le sue colonne fuggono in P, e la profondità di ogni riga si trova portando in alto, lungo le verticali delle pareti, le righe del pavimento. Il pavimento sta sotto la LO e si vede dall'alto; il soffitto sta sopra la LO e si vede dal basso: per questo i riquadri del soffitto si stringono *verso il basso*, avvicinandosi alla LO.

Un **soffitto a cassettoni** è un soffitto diviso da travi o cornici in riquadri incavati, i cassettoni (o lacunari), di tradizione romana e ripreso dagli architetti del Rinascimento. In prospettiva ogni cassettone è un quadrato dentro un quadrato: si disegna la griglia delle cornici e, in ogni riquadro, un quadrato più piccolo, rientrato di una misura costante. Il rientro si riporta come ogni altra misura: in larghezza sulla soglia, in profondità con i punti di distanza. Il risultato, come nella Figura 4.2, è il ritmo serrato di riquadri che si stringono verso il fondo, uno degli effetti più cercati dai pittori: la profondità diventa leggibile, quasi misurabile.

DA RICORDARE

Il punto di distanza ridotto. In un interno la distanza principale è spesso più grande del foglio, e D_1 o D_2 cadono fuori dalla tavola. Si usa allora il **punto di distanza ridotto**: il punto $D/2$, sulla LO a distanza $d/2$ da P, al quale si mandano le profondità **dimezzate** riportate sulla LT. Le rette così ottenute incontrano quelle dirette in P negli stessi punti: dimezzando sia la distanza sia le profondità, i triangoli simili non cambiano. Allo stesso modo si possono usare $D/3$ e un terzo delle profondità.

4.2.3 Porte, finestre e gradini

Una porta o una finestra in una parete laterale è un rettangolo in un piano perpendicolare al quadro: i suoi lati verticali restano verticali, quelli orizzontali fuggono in P. Basta conoscere due profondità (gli stipiti) e due altezze (il davanzale e l'architrave). Le profondità vengono dai punti di distanza, le altezze dalla soglia, che è la retta delle altezze della parete. Lo spessore del muro, se si vuole mostrarlo, è una piccola faccia frontale (lo stipite visto di taglio), che si vede solo sul lato della finestra rivolto verso P.

Una gradinata è una successione di prismi bassi. Ogni gradino ha un'**alzata**, la faccia verticale frontale, e una **pedata**, la faccia orizzontale su cui si poggia il piede. In una gradinata frontale, che sale allontanandosi, le alzate sono rettangoli frontali via via più stretti e bassi, le pedate trapezi che si assottigliano: in prospettiva i gradini sembrano diventare sempre più ripidi, perché le pedate si accorciano più in fretta delle alzate. Se la gradinata sta tutta sotto la LO si vedono alzate e pedate; se l'occhio sta più in basso della pedata di un gradino, quella pedata scompare.

4.3 Archi, portici e volte

4.3.1 L'arco frontale

Gli archi a tutto sesto sono il segno dell'architettura del primo Rinascimento: i portici di Brunelleschi a Firenze (cap. 6), gli archi trionfali dipinti, le cappelle. In prospettiva centrale un arco si comporta in due modi molto diversi, secondo il piano in cui sta.

Un **arco frontale** sta in un piano parallelo al quadro. Come ogni figura parallela al quadro, la sua immagine è **simile** alla figura vera: un semicerchio resta un **semicerchio**, più piccolo se è più lontano. Il suo centro è l'immagine del centro vero, e il raggio si riduce nel rapporto $d : (d + y)$. Un arco largo 4 m alla profondità di 6 m, con $d = 6$ m, appare largo la metà di un arco uguale posto nel quadro; si traccia con il compasso. È la ragione per cui gli archi trasversali di un portico, visti dall'asse, formano in prospettiva una serie di semicerchi via via più piccoli, con i centri sulla retta che va dal centro dell'arco più vicino a P: sono concentrici solo se l'occhio sta proprio alla quota delle imposte.

4.3.2 L'arco in un piano perpendicolare al quadro

Un arco nella parete laterale di un portico o di una navata sta in un piano verticale perpendicolare al quadro. La sua immagine **non** è un semicerchio, e nemmeno una semiellisse simmetrica: la parte più vicina appare più alta e più larga di quella lontana, e il punto più alto dell'immagine non è a metà tra le due imposte. Si usa allora la **costruzione per punti**, come per il cerchio sul geometrale: si dividono il semicerchio in parti uguali e si mettono in prospettiva i punti di divisione, uno per uno (Figura 4.3).

ESEMPIO SVOLTO

Arco laterale per tredici punti (Figura 4.3). Parete verticale perpendicolare al quadro, a 3,5 m a destra della verticale per P; arco a tutto sesto di raggio 1,5 m, dalla profondità 1 m alla profondità 4 m, con l'imposta a 2 m di altezza; $d = 4$ m, $h = 1{,}6$ m.

1. **Ribaltamento.** Ruota la parete attorno alla sua traccia verticale sul quadro, fino a farla coincidere con il quadro: ogni punto di profondità y finisce a distanza y a destra della traccia, alla sua vera altezza. Disegna così l'arco in vera grandezza e dividi il semicerchio in 12 parti uguali (ogni 15°): hai 13 punti.
2. **Profondità.** Da ogni punto dell'arco ribaltato scendi in verticale fino alla LT e unisci il punto trovato con D_1: la retta taglia la linea di terra della parete (la retta dal piede della traccia a P) alla profondità di quel punto. Alza la verticale.
3. **Altezze.** Da ogni punto dell'arco ribaltato porta l'orizzontale fino alla traccia della parete, che è la retta delle altezze, e da lì la retta verso P: taglia la verticale del passo 2 nell'immagine del punto.
4. **Curva.** Unisci i 13 punti con il curvilineo, senza spigoli. Le imposte stanno sulle verticali dei piedritti.

Il metodo usa solo strumenti già noti: il ribaltamento (*Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 5), i punti di distanza e la retta delle altezze (cap. 3). Con 7 punti (ogni 30°) l'arco è già riconoscibile; con 13 la curva è precisa.

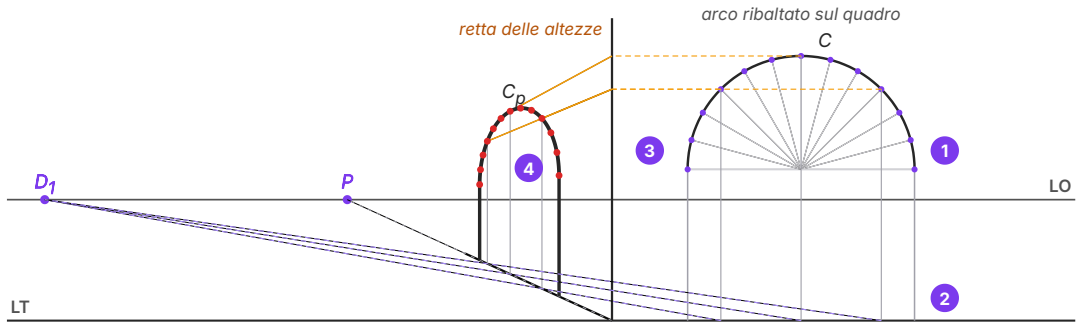


Figura 4.3 Arco a tutto sesto in una parete perpendicolare al quadro, costruito per punti (d = 4 m, h = 1,6 m; parete a 3,5 m dalla verticale per P; raggio 1,5 m, imposta a 2 m). 1) L'arco ribaltato sul quadro, diviso in 12 parti. 2) Le profondità: dalla LT a D_1. 3) Le altezze: orizzontali fino alla retta delle altezze e poi verso P. 4) I 13 punti dell'immagine (rossi) uniti con il curvilineo. La costruzione completa è mostrata per tre punti; C_p è l'immagine della chiave C: non sta a metà tra le imposte.

4.3.3 Il portico

Un portico è una sequenza di campate uguali: archi su colonne verso l'esterno, un muro verso l'interno, e archi trasversali che dividono una campata dall'altra. Visto in prospettiva centrale, mette insieme i due casi dell'arco: gli archi trasversali, in piani paralleli al quadro, sono semicerchi; le arcate della fronte, in un piano perpendicolare al quadro, si costruiscono per punti (Figura 4.4).

Il disegno è più semplice di quanto sembri, perché la ripetizione aiuta. Le colonne, alte uguali, hanno le loro sommità su una retta che fugge in P, e così le basi, le imposte degli archi e la cornice. Le profondità delle colonne vengono dai punti di distanza; ma una volta trovate le prime due, le altre si possono controllare con la **diagonale** della campata, come le piastrelle del pavimento a scacchi: in una fila di campate quadrate, le diagonali di tutte le campate fuggono nello stesso punto di distanza. Il modello è lo Spedale degli Innocenti di Brunelleschi, a Firenze (dal 1419; cap. 6): un portico di campate quadrate, con archi a tutto sesto su colonne e una volta a vela su ogni campata, che sembra fatto apposta per essere visto in prospettiva.

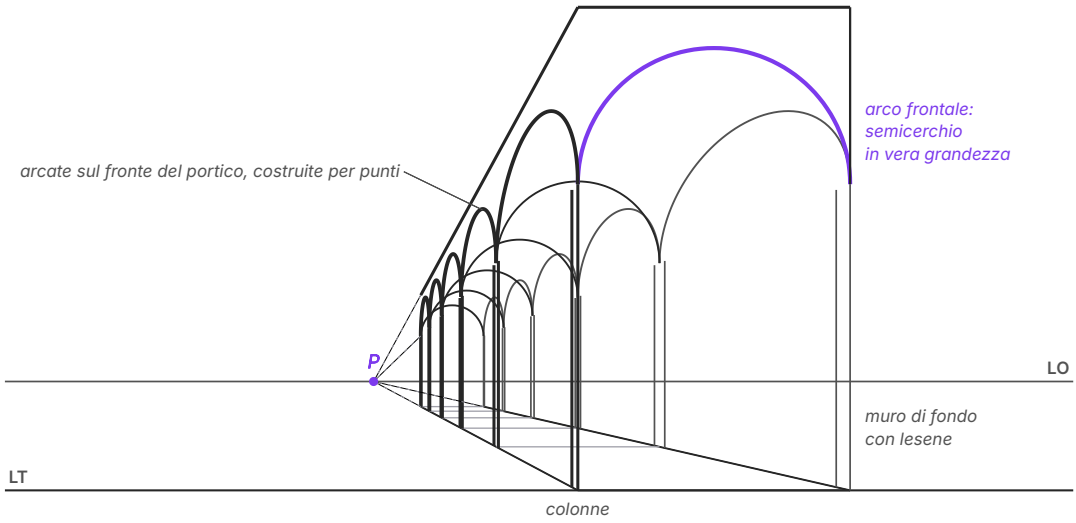


Figura 4.4 Un portico di cinque campate quadrate di 4 m, visto dalla piazza in prospettiva centrale (d = 6 m, h = 1,6 m; fronte del portico a 3 m a destra della verticale per P). Colonne alte 4,5 m fino all'imposta, archi di raggio 2 m. In viola l'arco trasversale nel quadro, in vera grandezza; gli altri archi trasversali sono semicerchi via via più piccoli. Le arcate della fronte, in un piano perpendicolare al quadro, sono costruite per punti come nella Figura 4.3. Schema, senza le volte.

4.3.4 La volta a botte cassettonata

Una volta a botte è un semicilindro (*Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 16). Se il suo asse è perpendicolare al quadro, la prospettiva è la più elegante del capitolo: ogni sezione trasversale della volta è un semicerchio in un piano frontale, e quindi resta un semicerchio; ogni generatrice è una retta perpendicolare al quadro, e quindi fugge in P. L'intera volta si disegna con il compasso e con la riga (Figura 4.5).

La **volta a botte cassettonata** è divisa in cassettoni da due famiglie di cornici: le generatrici, che corrono parallele all'asse, e gli anelli, che la attraversano. Per disegnarla:

1. traccia l'**arco di testata**, quello che chiude la volta sul davanti, nel quadro: un semicerchio in vera grandezza; dividilo in parti uguali (otto, per esempio);
2. unisci i punti di divisione con P: sono le generatrici, che vanno fermate alla profondità della volta;
3. trova con i punti di distanza le profondità degli anelli e, per ognuna, disegna il semicerchio frontale: centro sulla retta che va dal centro dell'arco di testata a P, raggio ridotto nel rapporto $d : (d + y)$;
4. in ogni riquadro così ottenuto disegna il cassettone, rientrato dalle cornici.

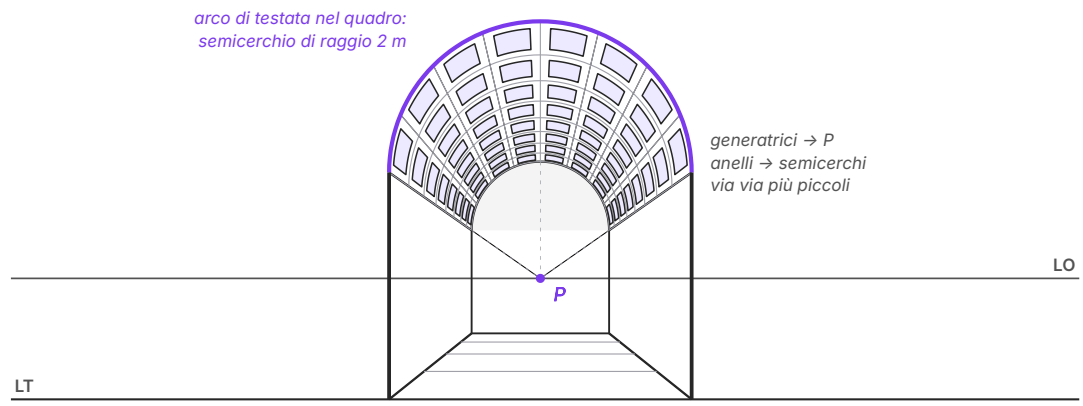


Figura 4.5 Volta a botte cassettonata con l'asse perpendicolare al quadro (d = 5 m, h = 1,6 m, P sull'asse). Luce 4 m, imposta a 3 m, profondità 6 m; otto cassettoni per anello, anelli ogni 0,75 m. L'arco di testata è nel quadro (viola); le generatrici fuggono in P; gli anelli sono semicerchi via via più piccoli, di raggio $2 \cdot 5/(5 + y)$ m, con i centri sulla retta che va dal centro dell'arco di testata a P (non concentrici, perché l'occhio è più basso dell'imposta). Il punto di vista, più basso dell'imposta, mostra la volta da sotto.

Con il punto di vista più basso dell'imposta, come nella figura, la volta si vede tutta da sotto, e i cassettoni vicini all'imposta si schiacciano fino a diventare sottili strisce. È la situazione della *Trinità* di Masaccio in Santa Maria Novella a Firenze (affresco, c. 1425–1428; cap. 7): una cappella coperta da una volta a botte cassettonata, dipinta su una parete e vista da un punto di vista basso, all'altezza degli occhi di chi sta in chiesa. Ritroveremo l'opera alla fine del capitolo.

4.4 Lo spazio aperto: la piazza e la città

4.4.1 Una piazza vista dal suo asse

La prospettiva centrale è nata anche come strumento per rappresentare la città: secondo il racconto della *Vita di Filippo Brunelleschi* attribuita ad Antonio di Tuccio Manetti, una delle due tavolette dimostrative di Brunelleschi mostrava Piazza della Signoria (cap. 3). Una piazza rettangolare vista da un punto del suo asse è una scatola prospettica senza soffitto: il pavimento è il geometrale, le facciate degli edifici ai lati sono le pareti, e il fondo è chiuso da un edificio frontale o lasciato aperto verso l'orizzonte (Figura 4.6).

Gli edifici ai lati sono parallelepipedi con una faccia (la facciata sulla piazza) perpendicolare al quadro: le loro linee di gronda, i marcapiani, le file di finestre fuggono in P; i loro spigoli verticali restano verticali. Gli spigoli anteriori, verso l'osservatore, mostrano la faccia frontale dell'edificio, che si vede soltanto per il primo di ogni lato o per uno più alto di quello che lo pre-

cede. Le finestre di una stessa fila hanno davanzali e architravi su due rette che fuggono in *P*; le loro larghezze si accorciano con la profondità.

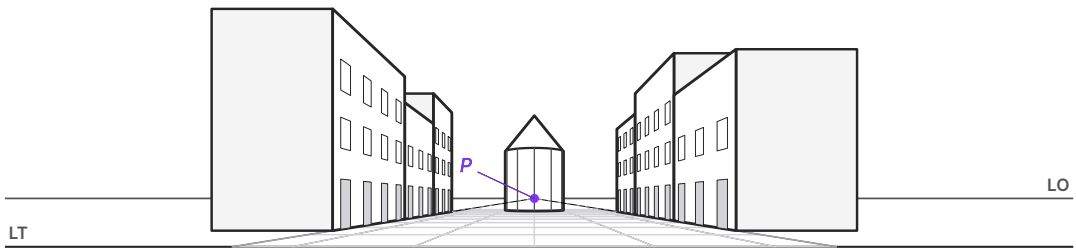


Figura 4.6 Una piazza larga 20 m in prospettiva centrale, con *P* sull'asse (*d* = 12 m, *h* = 1,6 m). Pavimento a riquadri di 4 m; edifici ai lati alti da 9 a 12 m, con le facciate perpendicolari al quadro; sul fondo un edificio a pianta circolare (cilindro di raggio 4 m alto 8 m, con un tetto conico) che copre il punto principale. Schema geometrico, non la copia di un dipinto.

L'edificio circolare sul fondo è un cilindro con un cono sopra: lo si costruisce come nella prima parte del capitolo. Poiché la sua cornice sta sopra la LO, del cerchio superiore si vede solo la metà rivolta verso l'osservatore, che appare come una curva convessa verso il basso. Uno schema simile, con la piazza pavimentata, gli edifici ai lati e un edificio a pianta centrale in mezzo alla scena, si riconosce nella tavola di Urbino, una delle tre dette della «città ideale» (le altre sono a Baltimora e a Berlino), di autore e data discussi (cap. 8). In quelle tavole la città è un modello: uno spazio regolare, misurabile, costruito per un solo punto di vista.

COLLEGAMENTI

Prospettiva e trattati. Il passaggio dalle figure piane ai solidi è anche l'ordine di un trattato del Quattrocento: il *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca, scritto in volgare prima del 1482 (cap. 9), procede dalle superfici piane ai corpi solidi e poi a forme complesse come le parti del corpo umano, che Piero mette in prospettiva punto per punto.

4.5 Dalla pittura alla geometria

4.5.1 La restituzione prospettica

Finora siamo andati dalla pianta all'immagine. Si può fare anche il cammino inverso: dato un disegno o un dipinto in prospettiva centrale, ricostruirne la geometria, cioè ritrovare la LO, il punto principale, la distanza e, se le misure lo permettono, la pianta degli oggetti rappresentati. Questa operazione si chiama **restituzione prospettica** ed è l'applicazione più diretta della ri-

chiesta delle Indicazioni nazionali di studiare la prospettiva «anche in rapporto alle opere d'arte».

La restituzione si fonda sulle proprietà del capitolo 3, lette al contrario (Figura 4.7):

1. **Il punto principale.** Le immagini delle rette perpendicolari al quadro (i lati delle piastrelle in profondità, le linee di gronda, i bordi di un tavolo, le travi del soffitto) si prolungano: il loro punto d'incontro è *P*. Ne bastano due, ma è bene controllare con una terza.
2. **La linea d'orizzonte.** È l'orizzontale per *P*. Nella figura misura l'altezza del punto di vista: nel dipinto, è il livello degli occhi dell'osservatore previsto dal pittore.
3. **Il punto di distanza.** Se il pavimento è fatto di piastrelle quadrate, le loro diagonali sono rette orizzontali a 45° sul quadro: prolungate, si incontrano sulla LO in D_1 o in D_2. La distanza PD_1 è la distanza principale *d*.
4. **La pianta.** Con *P*, *d* e la LO si possono ritrovare le profondità di ogni riga del pavimento, e da qui la pianta dello spazio dipinto, come nel metodo dei punti di distanza percorso all'indietro.

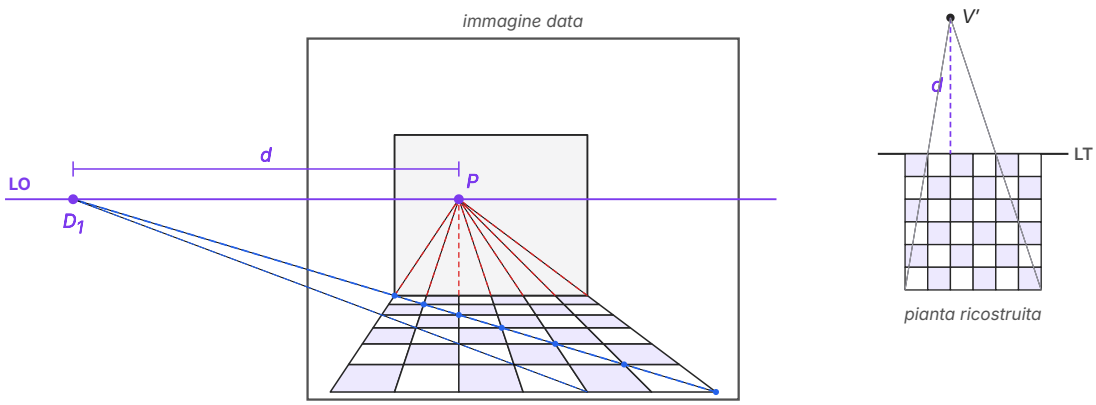


Figura 4.7 Restituzione prospettica di un pavimento inventato di 6 × 6 piastrelle quadrate. A sinistra l'immagine data: prolungando le rette in profondità (rosse) si trova *P*; l'orizzontale per *P* è la LO; la diagonale che passa per i vertici delle piastrelle (blu) incontra la LO in D_1, e PD_1 è la distanza *d*, qui uguale a 6 lati di piastrella misurati sulla LT. A destra la pianta ricostruita, con il piede del punto di vista *V'* a distanza *d* dalla LT.

Se si conosce la misura vera di un oggetto che sta nel quadro, per esempio il lato di una piastrella sulla prima riga, l'intera ricostruzione si mette in scala. Una piastrella di 40 cm che nell'immagine, sulla LT, misura 20 mm fissa la scala 1 : 20: una distanza principale di 150 mm nell'immagine corrisponde a 3 m. Il pittore, in altre parole, ha costruito il dipinto per un osservatore a 3 m dalla parete.

ESEMPIO SVOLTO

Quanto è profonda la stanza dipinta? In un disegno (inventato) un pavimento a piastrelle quadrate di 30 cm ha la prima riga sulla LT, dove ogni piastrella misura 15 mm. Le rette in profondità si incontrano in P, 90 mm sopra la LT; le diagonali incontrano la LO a 135 mm da P. La parete di fondo poggia sul pavimento lungo un'orizzontale 45 mm sopra la LT.

1. Scala: 15 mm per 30 cm, cioè 1 : 20.
2. Distanza principale: $d = 135$ mm, cioè $135 \cdot 20 = 2700$ mm = 2,7 m. Altezza del punto di vista: $h = 90$ mm, cioè 1,8 m.
3. Profondità della parete di fondo: un punto del pavimento alla profondità y appare all'altezza $h \cdot y/(d + y)$ sopra la LT. Quindi $90 \cdot y/(135 + y) = 45$, da cui $y = 135$ mm, cioè 2,7 m: la stanza dipinta è profonda 9 piastrelle.

Controllo: un punto del pavimento che sta a metà altezza tra la LT e la LO si trova sempre a una profondità uguale a d. Lo dicono i triangoli simili: a profondità d le distanze dall'occhio raddoppiano e ogni misura si dimezza.

4.5.2 I dipinti: una geometria da verificare

La restituzione si può tentare su molti dipinti del Rinascimento. Prima di farlo, però, bisogna sapere che un dipinto non è un esercizio di geometria. I pittori costruivano lo spazio con la prospettiva, ma la piegavano alle esigenze della figurazione: allungavano un pavimento, alzavano un orizzonte, correggevano a occhio una parte lontana, usavano più di un punto di fuga per le figure e per l'architettura. Per questo gli studiosi che hanno ricostruito la geometria di una stessa opera non arrivano sempre agli stessi risultati, e una restituzione va presentata come un'ipotesi, verificata sull'immagine. La Tabella 4.1 raccoglie le opere di questo volume su cui la restituzione è stata più studiata.

Tabella 4.1 Quattro opere da leggere con la restituzione prospettica (le schede sono nei capitoli indicati).

Opera	Dati	Che cosa cercare
Masaccio, *Trinità*	affresco, c. 1425–1428; Santa Maria Novella, Firenze (cap. 7)	la volta a botte cassettonata e il punto principale molto basso, all'altezza degli occhi di chi guarda; la profondità della cappella dipinta
Piero della Francesca, *Flagellazione*	tempera su tavola, data discussa; Galleria Nazionale delle Marche, Urbino (cap. 9)	il pavimento a riquadri della loggia, da cui si ricava la pianta; una celebre restituzione fu pubblicata nel 1953 da Rudolf Wittkower e B. A. R. Carter
Pietro Perugino, *Consegna delle chiavi*	affresco, 1481–1482; Cappella Sistina, Città del Vaticano (cap. 10)	la grande piazza lastricata a riquadri e l'edificio a pianta centrale sul fondo
Leonardo da Vinci, *Cenacolo*	tempera e olio su intonaco, c. 1494–1498; refettorio di Santa Maria delle Grazie, Milano (cap. 11)	il soffitto a cassettoni e le pareti laterali; le rette in profondità convergono verso la testa di Cristo, dove i restauri hanno trovato il foro di un chiodo

Nel *Cenacolo*, il foro di chiodo nell'intonaco, all'altezza della testa di Cristo, è di solito interpretato come il punto in cui Leonardo fissò i fili usati per tracciare le rette in profondità: un indizio materiale del metodo, non una prova che tutto il dipinto segua una sola costruzione. Nella *Trinità*, la posizione bassa del punto principale fa sì che la cappella dipinta sembri aprirsi nella parete, alla quota dei fedeli; quanto sia profonda, e che pianta abbia, è invece oggetto di ricostruzioni diverse. Il compito di uno studente, davanti a una buona riproduzione, è più modesto e più utile: trovare P e la LO, controllare se tutte le rette in profondità vanno davvero nello stesso punto, cercare un pavimento o un soffitto a riquadri per stimare d, e dire dove la costruzione si mostra rigorosa e dove il pittore se ne allontana.

4.5.3 Le finte prospettive

La prospettiva può anche ingannare. Una **finta prospettiva** è una pittura o un rilievo che, visto da un punto preciso, fa credere all'osservatore di vedere uno spazio che non esiste: una cappella dove c'è un muro, un colonnato dove c'è una parete piana. È un caso particolare del **trompe-l'œil** (in francese, «inganna l'occhio»), il genere di pittura che cerca di far scambiare l'immagine per la realtà. Ogni finta prospettiva ha un **punto di vista privilegiato**: solo da lì l'illusione è perfetta; spostandosi, le linee si piegano e l'inganno si scopre.

Il caso più celebre è a Milano, nella chiesa di Santa Maria presso San Satiro, ricostruita a partire dal 1478 con il contributo di Donato Bramante (cap. 11). Dietro il transetto, dove avrebbe dovuto aprirsi il coro, correva una strada, la contrada del Falcone, e mancava lo spazio per costruirlo. Bramante realizzò un coro finto: un rilievo profondo meno di un metro, costruito in muratura e rivestito di terracotta e stucco dipinti e dorati, che dalla navata appare come un

braccio coperto da una volta a botte cassettonata, profondo come gli altri bracci della chiesa (Figura 4.8). È una **prospettiva in rilievo**: non una pittura su una superficie piana, ma uno spazio vero, compresso in profondità, in cui ogni punto è stato spostato lungo il proprio raggio visuale fino a stare dentro il poco spazio disponibile.

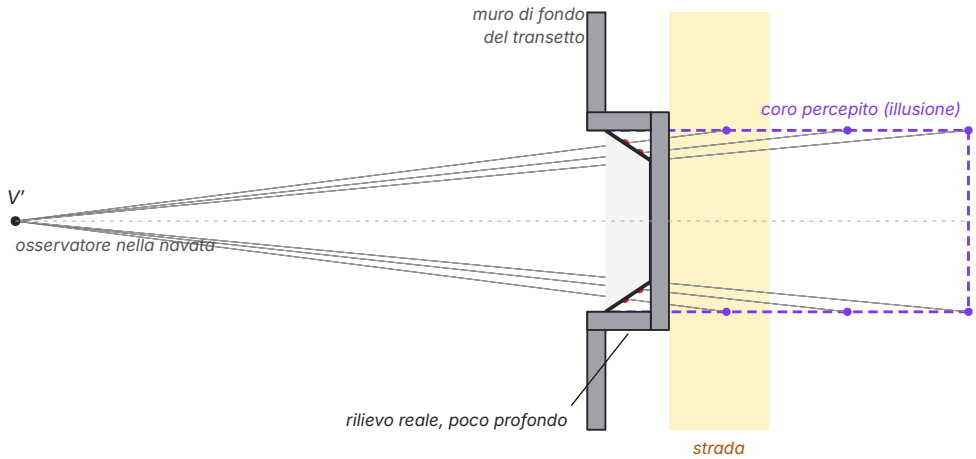


Figura 4.8 Il principio del finto coro di Santa Maria presso San Satiro (pianta schematica, senza scala, proporzioni indicative). Dall'osservatore *V'*, nella navata, ogni punto del coro percepito (viola) e il punto del rilievo reale (rosso) stanno sullo stesso raggio visuale: per questo, da *V'*, il rilievo poco profondo e il coro profondo danno la stessa immagine. Dietro il rilievo corre la strada.

Lo stesso principio, portato in scena, è nel Teatro Olimpico di Vicenza, progettato da Andrea Palladio nel 1580, l'anno della sua morte, e inaugurato il 3 marzo 1585 con l'*Edipo re* di Sofocle (cap. 16). Attraverso le aperture della scena fissa si vedono le «sette vie» della città di Tebe, realizzate da Vincenzo Scamozzi in legno e stucco: strade che nella realtà sono profonde pochi metri, ma che salgono e si restringono più in fretta di strade vere, e che dalla platea sembrano proseguire a lungo. In una **prospettiva accelerata** come questa la profondità reale è ridotta e la diminuzione delle grandezze è anticipata: è la prospettiva centrale costruita nello spazio invece che sul quadro.

APPROFONDIMENTO

L'anamorfosi. Se la finta prospettiva nasconde la geometria, l'**anamorfosi** (dal greco, «ritrasformazione») la mette in mostra: è un'immagine deformata in modo che si possa riconoscere solo da un punto di vista insolito, di solito molto di lato e vicinissimo al quadro, o con uno specchio curvo. L'esempio più noto è negli *Ambasciatori* di Hans Holbein il Giovane (1533, olio su tavola; National Gallery, Londra; cap. 14). Ai piedi dei due personaggi una macchia allungata attraversa il pavimento: guardata di sbieco, da vicino al bordo destro del quadro e dall'alto, o da sinistra e dal basso, si ricompone in un teschio. Si è ipotizzato che il dipinto fosse pensato per essere visto passando accanto a una porta o lungo una scala, ma non sappiamo con certezza come fosse collocato in origine.

Geometricamente l'anamorfosi è la stessa operazione della prospettiva: un'immagine proiettata da un punto su un piano. Cambia solo la posizione del punto: invece di stare davanti al quadro, a distanza normale, sta di lato e molto vicino. Per questo chi guarda dal punto «giusto» vede la figura corretta, e chi guarda di fronte vede una forma stirata. Puoi provarlo da solo: disegna un cerchio su una griglia quadrata, poi riporta i suoi punti su una griglia trapezia molto allungata, costruita in prospettiva con un punto di vista radente.

4.6 Dalla costruzione alla tavola

4.6.1 Scegliere il foglio, la distanza, l'altezza

Una tavola di prospettiva si prepara prima di tracciare la prima linea. Per un gruppo di solidi basta un foglio A4 orizzontale (area utile 277 × 190 mm); per un interno, un portico o una piazza serve un **A3 orizzontale** (400 × 277 mm), perché i punti di distanza cadono lontano da P. Le scelte da fare sono tre:

- **la distanza principale** d: deve essere almeno una volta e mezza la larghezza dell'oggetto da rappresentare (cap. 3), altrimenti le parti laterali si deformano; per un interno visto dalla soglia si sceglie spesso d uguale o un po' maggiore della larghezza della stanza;
- **l'altezza del punto di vista** h: 1,6–1,7 m in scala per un osservatore in piedi; più bassa per mostrare un soffitto o una volta, più alta per mostrare un pavimento o una piazza dall'alto;
- **la posizione di** P: sull'asse per uno spazio simmetrico e solenne, spostata di lato per mostrare meglio una parete o una fila di archi, come nella Figura 4.4.

Poi si dispone la tavola: la LT abbastanza in basso da lasciare spazio sopra per gli oggetti e sotto per la pianta ausiliaria, la LO alla distanza h in scala, P, D_1 e D_2. Se i punti di distanza escono dal foglio, si usano i punti di distanza ridotti. Le costruzioni si tracciano con una matita dura e un tratto leggero; il disegno finito si ripassa con una matita più morbida o con un pennarello a punta fine, con lo spessore maggiore per i contorni e gli spigoli in vista.

ERRORE FREQUENTE

Gli errori più frequenti nella tavola.

- Un punto di fuga di rette orizzontali fuori dalla LO: tutte le rette orizzontali fuggono sulla LO, senza eccezioni.
- Le profondità misurate sulla LO, o a partire da *P*: si misurano sulla LT, a partire dal piede della retta in questione, e si mandano al punto di distanza.
- Le altezze misurate sulla verticale di un punto lontano: si misurano solo nel quadro, sulla retta delle altezze, e poi si portano indietro.
- Il cerchio disegnato come un'ellisse centrata nell'immagine del centro, o il cilindro con il contorno passante per le estremità del diametro frontale.
- Un arco in una parete laterale disegnato con il compasso: solo gli archi frontali restano semicerchi.
- Gli spigoli nascosti lasciati nel disegno finito, con lo stesso tratto di quelli in vista.

L'ultimo controllo è il più semplice: guardare il disegno da lontano. Se lo spazio sembra deformato, quasi sempre la distanza scelta è troppo piccola, oppure una profondità è stata riportata dalla parte sbagliata. Se invece tutto sembra al suo posto, prova a misurare la tavola: è la prova che il disegno, come quello di Brunelleschi e di Piero, non è un'impressione ma una costruzione.

SINTESI

- Un solido si mette in prospettiva partendo dalla pianta: prima la base con il metodo dei punti di distanza, poi le verticali, poi le altezze misurate in vera grandezza sulla retta delle altezze e portate verso P.
- Gli spigoli verticali restano verticali, quelli frontali restano orizzontali e si accorciano, quelli perpendicolari al quadro fuggono in P. Le figure frontali appaiono simili alle vere, ridotte nel rapporto $d : (d + y)$.
- Le facce orizzontali sotto la LO si vedono dall'alto, quelle sopra dal basso; quelle alla quota dell'occhio si riducono a un segmento sulla LO. Gli spigoli nascosti non si disegnano nella tavola finita.
- Il contorno apparente di un cilindro è dato da due verticali tangenti alle ellissi delle basi; quello di un cono dalle tangenti all'ellisse di base condotte dall'immagine del vertice. L'immagine del centro di un cerchio non è il centro dell'ellisse.
- Una stanza vista dalla soglia è una scatola prospettica: la soglia è in vera grandezza, gli spigoli lunghi vanno in P, la parete di fondo è un rettangolo ridotto; porte, finestre, cassettoni e gradini si costruiscono con i punti di distanza e le rette delle altezze.
- Se i punti di distanza escono dal foglio, si usano i punti di distanza ridotti, con le profondità ridotte nella stessa proporzione.
- Un arco frontale resta un semicerchio; un arco in un piano perpendicolare al quadro si costruisce per punti, ribaltando l'arco sul quadro e usando i punti di distanza e la retta delle altezze.
- In un portico visto dall'asse gli archi trasversali sono semicerchi via via più piccoli, con i centri su una retta che va in P; in una volta a botte con l'asse perpendicolare al quadro le generatrici vanno in P e gli anelli sono semicerchi.
- Una piazza vista dal suo asse è una scatola prospettica senza soffitto; uno schema di questo tipo si ritrova nelle tavole della «città ideale».
- La restituzione prospettica ricava da un'immagine P (incontro delle rette in profondità), la LO, i punti di distanza (incontro delle diagonali di un pavimento a quadrati), d e la pianta. Nei dipinti va presentata come un'ipotesi da verificare.
- Le finte prospettive (il coro di Bramante in Santa Maria presso San Satiro, le vie di Scamozzi nel Teatro Olimpico) e l'anamorfosi usano la stessa geometria per ingannare, o per sorprendere, un osservatore che sta in un punto preciso.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In prospettiva centrale gli spigoli verticali di un cubo posato sul geometrale:
   - **A.** convergono in P
   - **B.** convergono nei punti di distanza
   - **C.** restano verticali
   - **D.** convergono in un punto sopra la LO

2. ● Le immagini degli spigoli di un cubo che sono orizzontali e perpendicolari al quadro:
   - **A.** convergono nel punto principale P
   - **B.** restano parallele alla LT
   - **C.** convergono in D_1
   - **D.** restano parallele tra loro

3. ● L'altezza di un solido si misura in vera grandezza:
   - **A.** sulla verticale del suo piede, a qualsiasi profondità
   - **B.** sulla retta delle altezze, nel quadro
   - **C.** sulla LO, a partire da P
   - **D.** nella pianta ausiliaria

4. ● Le generatrici di contorno di un cilindro verticale in prospettiva sono:
   - **A.** le generatrici che passano per l'immagine del centro della base
   - **B.** le generatrici che passano per gli estremi del diametro parallelo alla LT
   - **C.** rette che convergono in P
   - **D.** due verticali tangenti alle ellissi delle basi

5. ● Un arco a tutto sesto di raggio R, in un piano parallelo al quadro alla profondità y, appare come:
   - **A.** una semiellisse con l'asse maggiore verticale
   - **B.** un semicerchio di raggio $R \cdot d/(d + y)$
   - **C.** un semicerchio di raggio R
   - **D.** una curva da costruire per punti

6. ● Il piano di un tavolo, più basso dell'occhio dell'osservatore, si vede:
   - **A.** dall'alto, perché sta sotto la LO
   - **B.** dal basso, perché sta sopra la LO
   - **C.** ridotto a un segmento sulla LO
   - **D.** solo se il tavolo è nel quadro

7. ● In una scatola prospettica la parete di fondo, parallela al quadro, profonda L, appare:
   A. un trapezio con i lati obliqui verso P
   B. un rettangolo in vera grandezza
   C. un rettangolo simile alla parete vera, ridotto nel rapporto $d : (d + L)$
   D. un quadrato, qualunque sia la sua forma vera

8. ●● In una restituzione prospettica il punto principale si trova:
   A. all'incontro delle diagonali delle piastrelle
   B. a metà della LT
   C. all'incontro delle immagini di due rette verticali
   D. all'incontro delle immagini delle rette perpendicolari al quadro

9. ●● Le diagonali delle piastrelle quadrate di un pavimento, con i lati paralleli e perpendicolari al quadro, prolungate si incontrano:
   A. in un punto di distanza, sulla LO
   B. nel punto principale
   C. sulla LT
   D. in un punto sotto la LT

10. ●● Il coro di Santa Maria presso San Satiro a Milano è:
    A. un affresco su una parete piana
    B. una prospettiva in rilievo, poco profonda, che da un punto preciso appare come un coro profondo
    C. un'anamorfosi visibile solo con uno specchio
    D. un coro vero, demolito nell'Ottocento

Lessico e norme

11. ● Completa: una stanza vista dalla soglia, con il quadro sul piano della soglia, si dice _____ ; il rettangolo della soglia è in _____ e i suoi lati verticali sono le _____ delle pareti; gli spigoli lunghi fuggono in _____ ; la parete di fondo appare come un rettangolo _____ a quello vero.

12. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Una faccia orizzontale posta esattamente all'altezza dell'occhio si riduce a un segmento sulla LO. b) Il contorno di un cono passa per l'immagine del centro della base. c) Nella tavola finita gli spigoli nascosti si disegnano tratteggiati. d) Un arco in un piano frontale resta un semicerchio. e) In una gradinata frontale che sale allontanandosi, le pedate si accorciano più in fretta delle alzate.

13. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. Termini: 1) contorno apparente; 2) punto di distanza ridotto; 3) restituzione prospettica; 4) finta prospettiva; 5) anamorfosi; 6) arco di testata. Definizioni: a) immagine deformata che si riconosce solo da un punto di vista insolito; b) l'arco che chiude una volta sul davanti; c) ricostruzione della geometria a partire da un'immagine; d) linea che nell'immagine separa un solido da ciò che sta dietro; e) punto sulla LO a distanza $d/2$ da P; f) pittura o rilievo che fa vedere uno spazio inesistente da un punto preciso.

14. ● Completa: un arco in un piano perpendicolare al quadro si costruisce _____ ; si _____ l'arco sul quadro attorno alla traccia della parete, lo si divide in parti _____ ; le profondità dei punti si trovano con il punto di _____ , le altezze con la _____ .

15. ● Spiega con parole tue la differenza tra il punto di vista privilegiato di una finta prospettiva e il punto di vista di una normale costruzione prospettica. Che cosa succede in ciascun caso se l'osservatore si sposta di qualche metro?

16. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se un dipinto contiene un pavimento a quadrati, si può ricavare la distanza principale. b) Una restituzione prospettica dimostra che il pittore ha usato una sola costruzione per tutto il dipinto. c) Le immagini di due spigoli verticali di uno stesso edificio, in prospettiva centrale, sono parallele. d) Per restituire la LO basta conoscere il punto principale. e) Senza nessuna misura vera, la restituzione dà le proporzioni dello spazio, ma non le sue dimensioni in metri.

Costruire

Per le tavole usa un foglio squadrato con la cornice. Salvo indicazione diversa: foglio A4 orizzontale (area utile 277 × 190 mm), LT a 100 mm dal bordo inferiore della cornice, verticale per P a metà del foglio, pianta ausiliaria sotto la LT; coordinate $(x; y)$ in mm, con x misurata sulla LT dalla verticale per P (positiva a destra) e y profondità dietro il quadro; z altezza. Per gli interni e gli spazi architettonici usa un foglio A3 orizzontale (400 × 277 mm). Lascia visibili le linee di costruzione e ripassa gli spigoli in vista.

17. ● **Un parallelepipedo.** $d = 120$ mm, $h = 50$ mm. Un parallelepipedo largo 40 mm (lungo x), profondo 30 mm e alto 50 mm ha il vertice anteriore sinistro della base in $A(-60; 20)$. Disegnane la prospettiva e scrivi le coordinate (distanza dalla verticale per P; altezza sopra la LT) delle immagini dei vertici. Che cosa noti nella faccia superiore? Perché?

18. ● **Un cubo con una faccia nel quadro.** $d = 100$ mm, $h = 70$ mm. Un cubo di spigolo 40 mm ha la faccia anteriore nel quadro, con gli spigoli verticali in $x = 20$ e $x = 60$. Disegnalo. Quanto misura in prospettiva lo spigolo posteriore orizzontale? Quale faccia laterale si vede?

19. ● **Una piramide alta.** $d = 120$ mm, $h = 40$ mm. Piramide retta a base quadrata, lato 40 mm, con la base da $x = -20$ a $x = 20$ e da $y = 20$ a $y = 60$, alta 60 mm. Trova l'immagine del vertice con la retta delle altezze e disegna la piramide. Il vertice sta sopra o sotto la LO? Quali facce si vedono?

20. ●● **Un cilindro.** $d = 120$ mm, $h = 60$ mm. Cilindro di raggio 20 mm e altezza 50 mm, con il centro della base in (40; 40). Costruisci le due basi per 12 punti e traccia le generatrici di contorno. Scrivi le coordinate delle immagini del centro della base e dei punti anteriore (40; 20) e posteriore (40; 60) della base, e verifica che l'immagine del centro non è a metà tra le due. Dove cadono le generatrici di contorno?

21. ●● **Un cono.** $d = 120$ mm, $h = 50$ mm. Cono retto di raggio 20 mm e altezza 60 mm con il centro della base in (−40; 30). Disegnalo e traccia le generatrici di contorno. A che altezza sopra la LT si trova l'immagine del vertice? Si vede la base?

22. ●● **Un gruppo di solidi.** $d = 120$ mm, $h = 70$ mm. Un parallelepipedo 60 × 20 mm di base (larghezza × profondità), alto 25 mm, ha la base da $x = -30$ a $x = 30$ e da $y = 10$ a $y = 30$. Dietro, un cilindro di raggio 15 mm alto 60 mm ha il centro della base in (0; 60). Disegna il gruppo e decidi quale parte del cilindro resta nascosta dal parallelepipedo. Il cilindro sporge sopra il parallelepipedo?

23. ●● **Una stanza (A3).** Stanza larga 5 m, profonda 7 m, alta 3,5 m, in scala 1 : 50, vista dalla soglia con P sull'asse; $d = 5$ m, $h = 1{,}6$ m. Nella parete sinistra una porta dalla profondità 1 m alla profondità 2 m, alta 2,2 m; nella parete destra una finestra dalla profondità 3 m alla profondità 4,5 m, con il davanzale a 1 m e l'architrave a 2,4 m. Pavimento a quadrati di 1 m. Disegna la scatola prospettica e scrivi le dimensioni in mm della parete di fondo nel disegno. Se i punti di distanza escono dal foglio, usa $D/2$.

24. ●● **Una gradinata.** Scala 1 : 50, $d = 4$ m, $h = 1{,}6$ m, P sull'asse. Una gradinata larga 3 m, di quattro gradini con alzata 15 cm e pedata 30 cm, comincia alla profondità di 2 m e sale allontanandosi. Disegnala (alzate e pedate) e scrivi le altezze sopra la LT degli spigoli superiori delle quattro alzate. Che cosa noti nelle pedate?

25. ●● **Un arco in una parete laterale.** $d = 100$ mm, $h = 50$ mm. Parete verticale perpendicolare al quadro, in $x = 60$; arco a tutto sesto di raggio 30 mm dalla profondità 20 alla profondità 80 mm, con l'imposta a 40 mm. Costruisci l'arco per 7 punti (ogni 30°) con il ribaltamento e scrivi le coordinate delle immagini dei punti. Il punto più alto dell'immagine è a metà tra le imposte?

26. ●●● **Un portico (A3).** Portico di quattro campate quadrate di 3 m, in scala 1 : 100, visto dall'asse della galleria; colonne alte 3 m fino all'imposta, archi trasversali a tutto sesto di raggio 1,5 m; $d = 8$ m, $h = 1{,}6$ m. Disegna gli archi trasversali (alle profondità 0, 3, 6, 9 e 12 m) e le arcate laterali, costruite per punti. Scrivi i raggi, in mm sul foglio, dei cinque archi trasversali.

27. ●●● **Una volta a botte cassettonata (A3).** Scala 1 : 50, P sull'asse, $d = 6$ m, $h = 1{,}6$ m. Volta a botte di luce 4 m (raggio 2 m), imposta a 3 m, profonda 8 m; otto cassettoni per anello, anelli ogni metro. Disegna la volta e i muri che la reggono, e scrivi in una tabella, per ogni anello, la profondità, il raggio dell'immagine e l'altezza del suo centro sopra la LT, in mm sul foglio.

Leggere il disegno

28. ● Osserva la Figura 4.1. Perché del cubo si vede la faccia destra e non la sinistra? Perché della piramide si vede appena la faccia sinistra? Perché l'ellisse superiore del cilindro sembra leggermente inclinata, e non con gli assi orizzontale e verticale?

29. ●● Osserva la Figura 4.7. Verifica sulla figura che la distanza PD_1 è uguale a 6 lati di piastrella misurati sulla LT. Se il lato vero di una piastrella è 50 cm, quanto valgono la distanza principale e l'altezza del punto di vista, che nella figura è uguale a 3 lati di piastrella?

30. ●● In una riproduzione di un dipinto trovi P 90 mm sopra il bordo anteriore del pavimento (che consideri la LT); le diagonali delle piastrelle incontrano la LO a 135 mm da P; sulla prima riga ogni piastrella misura 15 mm. Supponi che le piastrelle vere misurino 30 cm. Trova la scala, d e h in metri, e la profondità, in metri e in piastrelle, di una riga del pavimento che nel dipinto sta 30 mm sopra la LT.

31. ●● Uno studente consegna una tavola con questi difetti: i lati della finestra in una parete laterale vanno in un punto 15 mm sopra la LO; l'arco della parete laterale è un semicerchio tracciato con il compasso; la profondità della porta è misurata sulla LO, a partire da P. Per ciascun difetto spiega la regola violata e come si corregge.

32. ● Osserva la Figura 4.8. Perché il coro sembra profondo solo a chi sta nella navata, vicino all'asse? Che cosa vedrebbe un visitatore che entra nel coro, o che lo guarda molto di lato?

Verso la verifica

33. ●●● **Un tempietto in una piazza (A3).** Scala 1 : 100, d = 12 m, h = 1,6 m, P sull'asse. Una piazza è pavimentata a riquadri di 2 m. Al centro, con l'asse a 10 m di profondità e sulla verticale di P, sorge un tempietto circolare: un cilindro di raggio 1,5 m alto 3 m, coperto da un tetto conico con il vertice a 4,5 m da terra. Disegna il pavimento fino alla profondità di 12 m e il tempietto, con le generatrici di contorno del cilindro e del cono. Scrivi, in mm sul foglio, le altezze sopra la LT dell'immagine del centro della base, dei punti anteriore e posteriore della base, del vertice; di' quali parti del cerchio superiore si vedono.

34. ●●● **Restituzione di un'opera.** Scegli una delle opere della Tabella 4.1 e procurati una buona riproduzione (quella del museo o della chiesa che la conserva). Su un foglio trasparente sovrapposto, trova P e la LO; indica le rette che usi; se l'opera ha un pavimento o un soffitto a riquadri, cerca un punto di distanza. Scrivi poi in 10–15 righe dove la costruzione ti sembra rigorosa, dove ti sembra che il pittore se ne allontani, e perché una restituzione è un'ipotesi.

35. ●●● Prospettiva come regola, prospettiva come inganno. In 15–20 righe confronta la scatola prospettica di un interno dipinto e la finta prospettiva del coro di Bramante: che cosa hanno in comune dal punto di vista geometrico, che cosa le distingue (supporto, punto di vista, rapporto con lo spazio reale), e perché entrambe si fondano sullo stesso principio della proiezione centrale.

PER APPROFONDIRE

- [PIE] Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*: le tavole del trattato mostrano, uno dopo l'altro, i solidi, gli edifici e i capitelli costruiti per punti; se ne trovano riproduzioni nelle biblioteche digitali.
- [KEM] M. Kemp, *La scienza dell'arte*: i capitoli sul Quattrocento discutono le ricostruzioni prospettiche della *Trinità*, della *Flagellazione* e del *Cenacolo*, e i loro limiti.
- [DOC] M. Docci, R. Migliari, *Scienza della rappresentazione*: per chi vuole vedere come la prospettiva diventa un ramo della geometria proiettiva, con la restituzione e le prospettive in rilievo.
- [PAN] E. Panofsky, *La prospettiva come «forma simbolica»*: un saggio breve e discusso sul significato della prospettiva nella cultura del Rinascimento.

Glossario del capitolo

Anamorfosi
Immagine deformata in modo da essere riconoscibile solo da un punto di vista insolito, molto di lato e vicino al quadro, o con uno specchio curvo.

Arco di testata
L'arco che chiude sul davanti una volta a botte; se la volta ha l'asse perpendicolare al quadro e comincia nel quadro, è in vera grandezza.

Arco frontale
Arco in un piano parallelo al quadro: in prospettiva centrale resta un arco di circonferenza, ridotto nel rapporto $d : (d + y)$.

Contorno apparente
Linea che nell'immagine separa un solido da ciò che gli sta dietro; per un cilindro e un cono è formato dalle generatrici tangenti ai raggi visuali.

Costruzione per punti
Metodo con cui una curva (un cerchio, un arco in un piano perpendicolare al quadro) si mette in prospettiva portando in prospettiva un numero sufficiente di suoi punti e unendoli con il curvilineo.

Finta prospettiva
Pittura o rilievo che, visto da un punto preciso, fa credere di vedere uno spazio che non esiste.

Prospettiva accelerata
Prospettiva costruita nello spazio, in cui la profondità reale è ridotta e la diminuzione delle grandezze è anticipata, perché uno spazio poco profondo sembri molto più profondo.

Prospettiva in rilievo
Spazio reale compresso in profondità, in cui ogni punto è spostato lungo il proprio raggio visuale, così che da un punto di vista dato appaia come uno spazio più profondo.

Punto di distanza ridotto
Punto sulla LO a distanza $d/2$ (o $d/3$) da P, usato con le profondità ridotte nella stessa proporzione quando D_1 e D_2 escono dal foglio.

Punto di vista privilegiato
L'unica posizione da cui una finta prospettiva o un'anamorfosi si vede correttamente.

Restituzione prospettica
Ricostruzione, a partire da un'immagine in prospettiva, della LO, del punto principale, della distanza e, se possibile, della pianta degli oggetti rappresentati.

Scatola prospettica
Rappresentazione in prospettiva centrale di uno spazio interno visto dall'ingresso: pavimento, soffitto, pareti laterali e parete di fondo di un parallelepipedo cavo.

Soffitto a cassettoni
Soffitto diviso da cornici o travi in riquadri incavati (cassettoni o lacunari), di tradizione romana.

Trompe-l'œil
Pittura che cerca di far scambiare l'immagine per la realtà (dal francese «inganna l'occhio»).

Volta a botte cassettonata
Volta a botte divisa in cassettoni da cornici parallele all'asse e da anelli trasversali.

Soluzioni

1. C. Le verticali sono parallele al quadro: le loro immagini restano parallele a se stesse, cioè verticali.

2. A. Le rette perpendicolari al quadro fuggono tutte nel punto principale.

3. B. Solo nel quadro nulla si accorcia; da lì l'altezza si porta indietro verso *P*.

4. D. Sono le generatrici in cui i raggi visuali sfiorano il cilindro; le loro immagini sono verticali e tangenti alle ellissi delle basi.

5. B. Una figura parallela al quadro ha un'immagine simile, ridotta nel rapporto $d : (d + y)$.

6. A. Sotto la LO una faccia orizzontale mostra la sua parte superiore.

7. C. La parete è parallela al quadro: la sua immagine è simile, ridotta.

8. D. Le rette perpendicolari al quadro fuggono in *P*; le diagonali, invece, danno i punti di distanza.

9. A. Sono rette orizzontali a 45° sul quadro: fuggono in D_1 o in D_2.

10. B. È un rilievo profondo meno di un metro che, dalla navata, appare come un braccio coperto da una volta a botte.

11. scatola prospettica; vera grandezza; rette delle altezze; *P*; simile (ridotto nel rapporto $d : (d + L)$).

12. a) V. b) F: le generatrici di contorno di un cono sono le tangenti all'ellisse di base condotte dall'immagine del vertice. c) F: nella tavola finita gli spigoli nascosti si omettono. d) V. e) V.

13. 1–d; 2–e; 3–c; 4–f; 5–a; 6–b.

14. per punti; ribalta; uguali; distanza (D_1 o D_2); retta delle altezze (la traccia della parete sul quadro).

15. Traccia di risposta: ogni prospettiva è esatta per un solo punto di vista, ma una normale costruzione si guarda comunque come un'immagine su un piano, e da un'altra posizione resta leggibile come rappresentazione. Una finta prospettiva vuole invece essere scambiata per lo spazio reale: funziona solo dal punto di vista privilegiato; spostandosi, le linee del finto spazio non si comportano come quelle vere (non scorrono le une rispetto alle altre come gli oggetti a distanze diverse) e l'inganno si scopre.

16. a) V: le diagonali danno i punti di distanza e quindi *d*. b) F: indica una costruzione coerente nelle parti esaminate; il pittore può aver corretto o cambiato costruzione altrove. c) V: le verticali restano verticali. d) V: la LO è l'orizzontale per *P*. e) V: serve almeno una misura vera per fissare la scala.

17. Immagini (distanza dalla verticale per *P*; altezza sopra la LT), in mm: base anteriore (−51,4; 7,1) e (−17,1; 7,1); base posteriore (−42,4; 14,7) e (−14,1; 14,7); i quattro vertici superiori a (−51,4; 50,0), (−17,1; 50,0), (−42,4; 50,0), (−14,1; 50,0). Rapporti: 120/140 per la faccia anteriore, 120/170 per la posteriore. La faccia superiore è alla quota 50 mm, uguale a *h*: sta sul piano d'orizzonte e si riduce a un segmento sulla LO. Del solido si vedono la faccia anteriore e la faccia destra (il solido è tutto a sinistra di *P*).

18. La faccia anteriore è nel quadro: quadrato in vera grandezza, da (20; 0) a (60; 40). Faccia posteriore: rapporto 100/140; vertici a (14,3; 20,0), (42,9; 20,0), (14,3; 48,6), (42,9; 48,6). Lo spigolo posteriore orizzontale misura $40 \cdot 100/140 \approx 28{,}6$ mm. Il cubo è tutto a destra di *P*: si vede la faccia sinistra; la faccia superiore, a quota $40 < 70$, si vede dall'alto.

19. Base: vertici anteriori (−17,1; 5,7) e (17,1; 5,7), posteriori (−13,3; 13,3) e (13,3; 13,3); piede del vertice (0; 10,0). La verticale $x = 0$ coincide con quella di *P*, e la retta dalla cima della retta delle altezze a *P* sarebbe verticale: conviene mettere la retta delle altezze in un altro punto della LT, per esempio in $x = 20$, portare la quota 60 mm verso *P* fino alla profon-

dità 40 e da lì in orizzontale sulla verticale del piede. Vertice: (0; 55,0), 15 mm sopra la LO; la base sta sotto la LO. Si vede soltanto la faccia anteriore: le facce laterali, inclinate verso il vertice, sono rivolte dalla parte opposta al punto di vista (che sta sulla verticale di mezzo), la posteriore anche. I vertici posteriori della base cadono dentro il triangolo anteriore: la piramide appare come un solo triangolo, con la base (−17,1; 5,7)–(17,1; 5,7) e il vertice (0; 55,0).

20. Immagini (mm): centro (30,00; 15,00); punto anteriore (34,29; 8,57); punto posteriore (26,67; 20,00); punti laterali (15,00; 15,00) e (45,00; 15,00). Il punto medio tra anteriore e posteriore è a 14,29 mm: l'immagine del centro (15,00) è più vicina al punto posteriore. Le generatrici di contorno partono dai punti di tangenza delle rette condotte da $V'(0; -120)$ alla circonferenza, ≈ (20,2; 42,5) e ≈ (58,7; 32,8): le loro immagini sono le verticali $x \approx 14{,}9$ e $x \approx 46{,}1$ mm, tangenti alle ellissi. Base superiore: centro (30,00; 52,50), punto anteriore (34,29; 51,43), posteriore (26,67; 53,33): sta sotto la LO e si vede tutta.

21. Centro della base (−32,0; 10,0); vertice (−32,0; 58,0): 8 mm sopra la LO ($h = 50$). Punti anteriore e posteriore della base: (−36,9; 3,8) e (−28,2; 14,7). Le generatrici di contorno sono le tangenti all'ellisse di base condotte dal vertice. La base sta sul geometrale e appoggia a terra: non si vede (se ne disegna solo l'arco anteriore, tra i due punti di tangenza).

22. Traccia di soluzione: il parallelepipedo occupa in prospettiva la fascia tra le verticali $x = \pm 27{,}7$ (fronte, rapporto 120/130) e arriva con lo spigolo superiore anteriore a $(70 \cdot 10 + 25 \cdot 120)/130 \approx 28{,}5$ mm sopra la LT e con quello posteriore a $(70 \cdot 30 + 25 \cdot 120)/150 = 34{,}0$ mm. Il cilindro, a profondità 45–75, ha la base tra $70 \cdot 45/165 \approx 19{,}1$ e $70 \cdot 75/195 \approx 26{,}9$ mm sopra la LT: la parte bassa del cilindro, fino alla quota apparente di 34,0 mm, è coperta dal parallelepipedo; la cima del cilindro (centro a $(70 \cdot 60 + 60 \cdot 120)/180 \approx 63{,}3$ mm) sporge ampiamente sopra di esso. Si ripassano per intero il parallelepipedo e la parte del cilindro che esce dal suo contorno; la base del cilindro non si disegna.

23. In scala: stanza 100 × 140 × 70 mm, $d = 100$ mm, $h = 32$ mm; D_1, D_2 a 100 mm da P (stanno sull'A3; $D/2$ a 50 mm se si preferisce). Parete di fondo: rapporto 100/240; $100 \cdot 100/240 \approx 41{,}7$ mm per $70 \cdot 100/240 \approx 29{,}2$ mm, con lo spigolo inferiore $32 \cdot 140/240 \approx 18{,}7$ mm sopra la LT. Porta (parete sinistra, $x = -50$): piedi a (−41,7; 5,3) e (−35,7; 9,1), architrave a (−41,7; 42,0) e (−35,7; 40,6). Finestra (parete destra, $x = 50$): stipite anteriore a $x \approx 31{,}2$ mm, posteriore a $x \approx 26{,}3$ mm; davanzale da 24,5 a 25,7 mm, architrave da 42,0 a 40,4 mm sopra la LT.

24. In scala: larghezza 60 mm, alzata 3 mm, pedata 6 mm, prima alzata a $y = 40$ mm; $d = 80$ mm, $h = 32$ mm. Spigoli superiori delle alzate (altezza sopra la LT): 12,67; 15,49; 18,06; 20,41 mm; le alzate appaiono alte 2,00; 1,90; 1,82; 1,74 mm. Le pedate in prospettiva sono alte solo 0,92; 0,75; 0,61; 0,48 mm: si accorciano più in fretta delle alzate, e la gradinata sembra sempre più ripida. Tutta la gradinata (cima a 0,6 m) sta sotto la LO: alzate e pedate si vedono.

25. Punti (profondità; quota) e immagini (distanza dalla verticale per P; altezza sopra la LT), in mm: 0° (20; 40) → (50,0; 41,7); 30° (24,0; 55,0) → (48,4; 54,0); 60° (35,0; 66,0) → (44,4; 61,8); 90°, chiave (50; 70) → (40,0; 63,3); 120° (65,0; 66,0) → (36,4; 59,7); 150° (76,0; 55,0) → (34,1; 52,8); 180° (80; 40) → (33,3; 44,4). Le imposte appaiono in $x = 50{,}0$ e 33,3 mm (metà: 41,7). L'immagine della chiave, (40,0; 63,3), non è il punto più alto della curva: questo cade in $x \approx 41{,}1$ mm, a ≈ 63,5 mm sopra la LT (curva calcolata per 1800 punti). La chiave sta dalla parte dell'imposta lontana: la metà vicina dell'arco appare più larga di quella lontana.

26. Raggio vero 1,5 m = 15 mm; raggi in prospettiva $15 \cdot 80/(80 + y)$, con y in mm sul foglio (0, 30, 60, 90, 120): 15,00; 10,91; 8,57; 7,06; 6,00 mm. Le colonne in profondità hanno le sommità su rette verso P; le arcate laterali si costruiscono per punti come nell'esercizio precedente.

27. In scala: raggio 40 mm, imposta 60 mm, $d = 120$ mm, $h = 32$ mm, profondità 160 mm. Per ogni anello, alla profondità y (mm): raggio $40 \cdot 120/(120 + y)$ e altezza del centro sopra la LT $(32 \cdot y + 60 \cdot 120)/(120 + y)$. $y = 0$: 40,00 e 60,00; 20: 34,29 e 56,00;

40: 30,00 e 53,00; 60: 26,67 e 50,67; 80: 24,00 e 48,80; 100: 21,82 e 47,27; 120: 20,00 e 46,00; 140: 18,46 e 44,92; 160: 17,14 e 44,00 mm. Le generatrici dividono in otto parti l'arco di testata e vanno in P.

28. Il cubo sta tutto a sinistra della verticale per P: la sua faccia destra è rivolta verso il punto di vista, la sinistra no. Il vertice della piramide sta a destra della verticale per P ($x = 15$), mentre il bordo sinistro della base è proprio sulla verticale ($x = 0$): la faccia sinistra, inclinata verso il vertice, si volta appena verso l'osservatore. L'ellisse è inclinata perché il cilindro sta di lato rispetto a P: l'immagine di un cerchio orizzontale che non è sull'asse ha gli assi inclinati, e solo un cerchio con il centro sulla verticale per P ha l'immagine con gli assi orizzontale e verticale.

29. Nella figura PD_1 è il lato della piastrella sulla LT stanno nel rapporto 6 : 1. Con il lato di 50 cm: $d = 6 \cdot 0{,}5 = 3$ m; $h = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ m.

30. Scala 15 mm : 300 mm = 1 : 20. $d = 135 \cdot 20 = 2700$ mm = 2,7 m; $h = 90 \cdot 20 = 1800$ mm = 1,8 m. Per la riga a 30 mm: $90 \cdot y/(135 + y) = 30$, quindi $60\,y = 4050$, $y = 67{,}5$ mm, cioè $67{,}5 \cdot 20 = 1350$ mm = 1,35 m: 4,5 piastrelle.

31. 1) I lati orizzontali della finestra sono rette orizzontali perpendicolari al quadro: fuggono in P, sulla LO, non 15 mm sopra; si correggono mandandoli in P. 2) Solo un arco frontale resta un semicerchio; quello della parete laterale va costruito per punti (ribaltamento, punti di distanza, retta delle altezze). 3) Le profondità si riportano sulla LT, a partire dal piede della retta della parete, e si mandano al punto di distanza; misurate sulla LO non hanno senso.

32. Il rilievo è costruito perché ogni suo punto stia sul raggio visuale che va da un punto della navata, sull'asse, al punto corrispondente del coro immaginato: solo da lì il rilievo e il coro profondo danno la stessa immagine. Chi entra nel coro, o lo guarda molto di lato, vede le superfici inclinate e scorciate del rilievo, la parete di fondo vicinissima e le linee che non si raccordano più con quelle della chiesa: l'illusione si rompe.

33. In scala 1 : 100: $d = 120$ mm, $h = 16$ mm; raggio 15 mm, centro della base a 100 mm di profondità. Altezze sopra la LT: centro della base 7,27 mm; punto anteriore (profondità 85) 6,63 mm; punto posteriore (115) 7,83 mm (il centro dell'ellisse è a metà, 7,23 mm, più in basso dell'immagine del centro); punti laterali a ±8,18 mm dalla verticale per P; contorno del cilindro sulle verticali a ±8,20 mm. Il cerchio superiore (a 3 m = 30 mm, sopra la LO): punto anteriore 24,20 mm, posteriore 23,15 mm; se ne vede solo l'arco anteriore, perché la faccia superiore sta sopra l'occhio. Vertice del cono (4,5 m = 45 mm): 31,82 mm, sopra la LO; le generatrici di contorno del cono sono le tangenti dal vertice all'ellisse superiore. Righe del pavimento (profondità 0, 2, 4, ..., 12 m): 0; 2,29; 4,00; 5,33; 6,40; 7,27; 8,00 mm sopra la LT. Il tempietto copre il punto principale.

34. Traccia di risposta: si valutano la scelta motivata delle rette (almeno tre rette in profondità che convergono, o la constatazione che non convergono esattamente), l'individuazione della LO e di un punto di distanza dove il pavimento o il soffitto lo permettono, e la consapevolezza che una restituzione dipende dalla riproduzione, dalle scelte del pittore e dalle ipotesi di chi la fa (per esempio, che le piastrelle siano quadrate).

35. Traccia di risposta: in comune, la proiezione centrale da un punto di vista: ogni punto dell'immagine (o del rilievo) sta sul raggio visuale che va dall'occhio al punto dello spazio rappresentato. Differenze: la scatola dipinta sta su una superficie piana e si dichiara come immagine, la finta prospettiva di Bramante è un rilievo e vuole essere scambiata per spazio reale; la prima si legge da molti punti, la seconda funziona solo da quello privilegiato; la prima rappresenta uno spazio separato da quello di chi guarda, la seconda prolunga lo spazio vero della chiesa. Entrambe dimostrano che la prospettiva è una costruzione geometrica, non una semplice copia di ciò che si vede.