CAPITOLO

3

La prospettiva: principi e figure piane

Un occhio fermo, un piano trasparente e una regola: così la Firenze del Quattrocento insegnò alla pittura a misurare lo spazio.

OBIETTIVI

1. Spiegare perché la prospettiva è una proiezione centrale e in che cosa differisce dall'assonometria.
2. Ricostruire le tappe della nascita della prospettiva: Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, Dürer.
3. Riconoscere e disegnare gli elementi della prospettiva: V, Q, PG, LT, LO, P, d, h, D_1 e D_2.
4. Usare le proprietà della proiezione centrale: punti di fuga, rette parallele al quadro, riduzione con la profondità.
5. Costruire in prospettiva centrale punti e figure piane con il metodo dei raggi visuali e con il metodo dei punti di distanza.
6. Disegnare il pavimento a scacchi, il cerchio per otto punti e le altezze con la retta delle altezze.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Perché la prospettiva 2
3.2 Una regola nata a Firenze 4
3.3 Gli elementi della prospettiva 7
3.4 Le proprietà della proiezione centrale 9
3.5 Due metodi per i punti e le figure piane 13
3.6 Figure piane, altezze e punto di vista 17

Disegno e Storia dell'arte 3 · Parte II · La prospettiva centrale · versione 1.0
Capitolo 3: La prospettiva: principi e figure piane · pagine 83–110 del volume completo · estratto per lo studio

Stai in fondo a un lungo corridoio, o al centro di una strada diritta. I bordi del pavimento, le file delle finestre, i cordoli del marciapiede sono paralleli, eppure li vedi correre l'uno verso l'altro e quasi toccarsi in lontananza; le porte vicine sono alte, quelle in fondo piccolissime. Nessuna di queste cose è vera, e tutte sono esatte: è così che l'occhio vede. Una fotografia lo conferma, e lo conferma un disegno costruito con le regole di questo capitolo.

Nel volume dello scorso anno hai imparato a rappresentare un oggetto con un'immagine sola grazie all'assonometria (*Disegno e Storia dell'arte 2*, capp. 3–5), che conserva le misure ma non mostra le cose come le vediamo. Ora cambiamo prospettiva, alla lettera. Vedremo perché la prospettiva è una proiezione centrale, come è nata a Firenze nel primo Quattrocento, quali sono i suoi elementi e le sue proprietà, e impareremo due metodi per disegnare in prospettiva centrale punti e figure piane. Nel capitolo 4 gli stessi metodi serviranno per i solidi, gli interni e i portici, e per leggere lo spazio dipinto nelle opere del Rinascimento.

3.1 Perché la prospettiva

3.1.1 Vedere e misurare

Un disegno può avere due compiti diversi. Il primo è **misurare**: dire con esattezza quanto è lungo, largo e alto un oggetto, in modo che qualcun altro possa costruirlo. Le proiezioni ortogonali (*Disegno e Storia dell'arte 1*, capp. 5–6) e le assonometrie (*Disegno e Storia dell'arte 2*, capp. 3–5) servono a questo: in un'assonometria cavaliera un cubo ha tutti gli spigoli verticali uguali, che stiano davanti o dietro, e gli spigoli paralleli restano paralleli. Proprio per questo un'assonometria ci sembra a volte un po' innaturale: un oggetto lungo disegnato in cavaliera sembra allargarsi verso il fondo, perché siamo abituati a vedere accorciarsi ciò che si allontana.

Il secondo compito è **mostrare**: dare l'immagine che un osservatore avrebbe davanti agli occhi se guardasse l'oggetto da un certo punto. È il compito della prospettiva (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 3), che rinuncia a conservare le misure per conservare l'apparenza. In prospettiva un oggetto lontano è più piccolo di uno uguale vicino, e le rette parallele che si allontanano convergono verso un punto. La parola viene dal latino *perspicere*, «vedere attraverso»; nel latino medievale *perspectiva* era il nome dell'ottica, la scienza della visione.

Tabella 3.1 Assonometria e prospettiva a confronto.

	Assonometria	Prospettiva
Raggi proiettanti	paralleli tra loro (proiezione parallela)	uscenti da un punto, l'occhio (proiezione centrale)
Rette parallele	restano parallele	convergono in un punto di fuga, se non sono parallele al quadro
Misure	si leggono lungo gli assi con i coefficienti di riduzione	cambiano con la distanza: non si misurano direttamente
Che cosa offre	un disegno leggibile e misurabile	l'immagine che vede un osservatore fermo

3.1.2 Una proiezione centrale

In *Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 5, hai distinto due famiglie di proiezioni: nella proiezione parallela i raggi proiettanti sono tutti paralleli, nella **proiezione centrale** escono tutti da un unico centro a distanza finita. La prospettiva è una proiezione centrale in cui il centro è l'occhio dell'osservatore, considerato come un punto fermo, e il quadro è un piano posto tra l'occhio e l'oggetto. Ogni punto dell'oggetto manda all'occhio un raggio; dove il raggio attraversa il quadro, lì si disegna il punto. Se il quadro fosse un vetro e si tracciasse sul vetro, con un pennarello e un occhio chiuso, il contorno di ciò che si vede dietro, si otterrebbe proprio una prospettiva.

Questa definizione ha due conseguenze che non bisogna dimenticare. La prima: una prospettiva è esatta per **un solo** punto di vista, a una distanza e a un'altezza precise; guardata da un altro punto, appare un po' deformata. La seconda: l'occhio del modello è uno solo e non si muove, mentre noi guardiamo con due occhi che si spostano di continuo. La prospettiva è dunque un modello geometrico della visione, non la visione stessa.

3.1.3 Una costruzione, non una copia

Per questo è meglio pensare alla prospettiva come a una **costruzione geometrica** e non come a una «copia realistica» del mondo. È una regola che stabilisce, dato un punto di vista, dove va ogni punto dell'immagine: si può applicare a un edificio che esiste, a uno che si sta progettando o a uno spazio inventato da un pittore. Lo storico dell'arte Erwin Panofsky, in un saggio del 1927, la definì una «forma simbolica»: un modo di rappresentare lo spazio legato a un'epoca e a una cultura, e non l'unico modo possibile. Non a caso la pittura del Medioevo, che usava altri sistemi, non era per questo meno capace di raccontare.

COLLEGAMENTI

Prospettiva, matematica e fotografia. La proiezione centrale è parente stretta di due cose che conosci. In matematica, la riduzione delle misure con la distanza si dimostra con i triangoli simili e con il teorema di Talete (*Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 2), e la trasformazione che allarga o restringe una figura a partire da un centro è un'omotetia: un oggetto frontale in prospettiva è l'omotetico dell'oggetto vero, con centro nell'occhio. In fisica, una macchina fotografica con un obiettivo ordinario produce, con buona approssimazione, una proiezione centrale: il centro è l'obiettivo e il quadro è il sensore. Per questo nelle fotografie le rotaie convergono, proprio come nelle costruzioni di questo capitolo.

3.2 Una regola nata a Firenze

3.2.1 Prima della regola

Gli antichi conoscevano alcuni effetti della prospettiva, e la pittura del Trecento aveva conquistato una profondità convincente: Giotto costruisce spazi a scatola con una **prospettiva intuitiva** (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 15), e in alcuni dipinti senesi della metà del secolo, come un'*Annunciazione* di Ambrogio Lorenzetti (1344), le linee del pavimento convergono già quasi in un punto. Mancava però una regola generale che permettesse di costruire qualsiasi spazio in modo coerente e di controllarlo. È questa regola che Firenze mette a punto nei primi decenni del Quattrocento: non un'invenzione dal nulla, ma la trasformazione di un'esperienza in un **metodo geometrico**.

3.2.2 Le tavolette di Brunelleschi

Le prime prove che conosciamo sono due piccoli dipinti di Filippo Brunelleschi, l'architetto della cupola di Santa Maria del Fiore (cap. 6), oggi perduti. Ne abbiamo il racconto nella *Vita di Filippo Brunelleschi* attribuita ad Antonio di Tuccio Manetti e scritta negli anni Ottanta del Quattrocento, molti decenni dopo i fatti; la data dei dipinti non è documentata. Secondo Manetti la prima tavoletta, di circa mezzo braccio per lato, mostrava il Battistero di San Giovanni e la piazza intorno, dipinti come li si vedeva stando dentro la porta centrale del Duomo, a circa tre braccia dalla soglia. Al posto del cielo Brunelleschi aveva messo argento brunito, in cui si specchiavano il cielo vero e le nuvole.

La tavoletta andava guardata in un modo particolare. Nel punto del dipinto che stava di fronte all'occhio del pittore c'era un forellino, piccolo «quanto una lenta» (una lenticchia) dalla parte dipinta e allargato a imbuto sul retro. L'osservatore guardava dal retro attraverso il foro e con l'altra mano teneva uno specchio davanti al dipinto: vedeva così il dipinto riflesso, dal punto esatto da cui era stato costruito e alla giusta distanza, e, scrive Manetti, gli pareva di vedere il vero. Il foro è il **punto di vista** unico di cui abbiamo parlato; il punto del dipinto davanti

al foro è quello che chiameremo **punto principale**. Una seconda tavoletta raffigurava la piazza della Signoria con il palazzo dei Signori (oggi Palazzo Vecchio); era troppo grande per il gioco dello specchio, e Brunelleschi l'aveva ritagliata lungo il profilo degli edifici, perché sopra di essi si vedesse il cielo vero.

APPROFONDIMENTO

Il racconto di Manetti. Per la *Vita* (ed. G. Milanesi, 1887) Brunelleschi mise in pratica per primo ciò che i pittori al tempo dell'autore chiamavano prospettiva, e lo mostrò «in una tavoletta di circa mezzo braccio quadro». Manetti scrive di aver avuto in mano la tavoletta e di averla vista «più volte»: è un testimone tardo ma diretto dell'oggetto, non dell'esperimento. Nessuno dei due dipinti è sopravvissuto, e gli studiosi discutono ancora come fossero costruiti.

Che cosa dimostra l'esperimento? Che un'immagine costruita da un punto preciso, guardata da quel punto, può confondersi con la realtà. È la prova pratica della definizione che abbiamo dato: la prospettiva è il taglio, sul quadro, dei raggi che vanno all'occhio.

3.2.3 Alberti: la finestra e il velo

Il primo testo che spiega come costruire una prospettiva è il *De pictura* di Leon Battista Alberti, scritto in latino nel 1435 e tradotto dall'autore in volgare nel 1436, con una dedica a Brunelleschi in cui Alberti loda la cupola appena compiuta (cap. 8). Nel primo libro Alberti descrive che cosa fa quando dipinge. Traccia sulla superficie un rettangolo grande quanto vuole, «el quale reputo essere una finestra aperta per donde io miri quello che quivi sarà dipinto» (*Della pittura*, I). Nel testo latino: *quod quidem mihi pro aperta finestra est ex qua historia contueatur*, «che per me è una finestra aperta da cui si guardi la storia» (traduzione della redazione). Il dipinto è dunque il **quadro**: una finestra attraverso cui si vede uno spazio.

Poi Alberti fissa nel rettangolo un punto, il *punto centrico*, là dove cade il raggio che va diritto dall'occhio alla finestra: è il nostro punto principale *P*. Lo pone non più in alto dell'altezza delle figure umane che vuole dipingere, così che chi guarda e le figure dipinte sembrino stare sullo stesso piano. La retta orizzontale che passa per il punto centrico, che Alberti chiama *linea centrica*, corrisponde alla nostra LO. Divide la linea di base in braccia, cioè in parti proporzionali all'altezza di un uomo dipinto, e unisce le divisioni al punto centrico: sono le immagini delle rette del pavimento perpendicolari al quadro. Per trovare a che altezza vanno le linee trasversali del pavimento usa una costruzione a parte, una specie di vista laterale, in cui i raggi dall'occhio tagliano una retta verticale: è, nella sostanza, il metodo dei raggi visuali che studierai tra poco. Infine controlla il risultato: il disegno è giusto se una stessa retta passa per la diagonale di più quadrati del pavimento. Questo procedimento è chiamato dagli studiosi moderni **costruzione legittima**.

Alberti critica esplicitamente una regola di bottega del suo tempo: disegnare la prima linea trasversale a caso e poi rimpicciolire ogni fascia del pavimento di un terzo rispetto alla precedente. Secondo lui chi fa così sbaglia, perché non sa dove sta l'occhio; anche se le fasce dimi-

nuiscono con un rapporto costante, quel rapporto non corrisponde a nessun punto di vista. Nel secondo libro Alberti propone anche uno strumento, il **velo**, che tra gli amici era solito chiamare *intersegazione*: un velo sottilissimo, a trama rada, diviso da fili più grossi in tanti quadrati e teso tra l'occhio e la cosa da ritrarre. Il pittore vede l'oggetto attraverso la griglia e lo riporta, quadrato per quadrato, su un foglio quadrettato allo stesso modo.

3.2.4 Piero della Francesca e i trattati

Una generazione dopo, Piero della Francesca (cap. 9), pittore e matematico, scrive il *De prospectiva pingendi* (la data è discussa, tra gli anni Settanta e Ottanta del Quattrocento), un trattato in tre libri dedicato alla prospettiva per i pittori: nei primi due costruisce figure piane e solidi, nel terzo usa un metodo per pianta e alzato adatto a corpi complessi, come una testa umana o un capitello. Piero procede come un geometra: enuncia, costruisce, dimostra. Con lui la prospettiva diventa una parte della matematica applicata. Nei secoli successivi i trattati si moltiplicano, in Italia e fuori, e la prospettiva entra nelle botteghe, nei cantieri e, molto più tardi, nelle scuole.

APPROFONDIMENTO

Le macchine per la prospettiva di Dürer. Il pittore tedesco Albrecht Dürer, che aveva soggiornato in Italia, pubblicò a Norimberga nel 1525 un manuale di geometria per artisti, l'*Underweysung der Messung* («Istruzione sulla misura»). Nell'ultima parte illustra con xilografie alcuni **prospettografi**, apparecchi che realizzano alla lettera la definizione di prospettiva. In uno un disegnatore ritrae un uomo seduto attraverso una lastra di vetro, tenendo l'occhio fermo dietro un mirino. In un altro due uomini disegnano un liuto: un filo teso, fissato a un gancio sulla parete, fa le veci del raggio visuale; il punto in cui il filo attraversa un telaio vuoto viene misurato e riportato su uno sportello incernierato al telaio. Nell'edizione del 1538 si aggiunsero altre due scene, tra cui quella di un disegnatore che ritrae una figura distesa attraverso una griglia, proprio come il velo di Alberti.

Il gancio sulla parete è il punto di vista V, il telaio è il quadro, il filo è il raggio: la proiezione centrale fatta con un pezzo di spago.

COLLEGAMENTI

Dalla prospettiva intuitiva alla regola. In *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 15, hai visto che Giotto costruisce lo spazio intorno alle figure con stanze e logge aperte sul davanti, ma senza far convergere in un solo punto le rette in profondità. Nei capitoli 6–9 di questo volume vedrai che cosa cambia quando la regola esiste: Brunelleschi progetta edifici come sequenze di moduli misurabili, Masaccio dipinge nella *Trinità* una cappella che sembra sfondare il muro, Donatello scolpisce in pochi millimetri di marmo una piazza profonda, Piero e Mantegna fanno della prospettiva il fondamento della pittura. Il capitolo 4 ti mostrerà come leggere queste opere con la geometria.

3.3 Gli elementi della prospettiva

3.3.1 Punto di vista, quadro e piano geometrale

Fissiamo ora gli elementi del sistema e i loro simboli, che userai in tutto il volume (Figura 3.1).

- Il **punto di vista** V (o centro di proiezione) è la posizione dell'occhio dell'osservatore. Non chiamarlo PV: nelle proiezioni ortogonali PV è il piano verticale. La sua proiezione sul terreno si chiama piede del punto di vista e si indica con V'.
- Il **quadro** Q è il piano su cui si forma l'immagine (*Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 5). In questo volume il quadro è sempre **verticale**, come la finestra di Alberti.
- Il **piano geometrale** PG è il piano orizzontale su cui poggiano gli oggetti e l'osservatore: il pavimento, il terreno.
- La **linea di terra** LT è l'intersezione tra il quadro e il piano geometrale: il bordo inferiore della finestra, appoggiato a terra.
- I **raggi visuali** sono le rette che uniscono V ai punti dell'oggetto. L'immagine di un punto A, che indichiamo con A_p, è il punto in cui il raggio visuale VA attraversa il quadro.

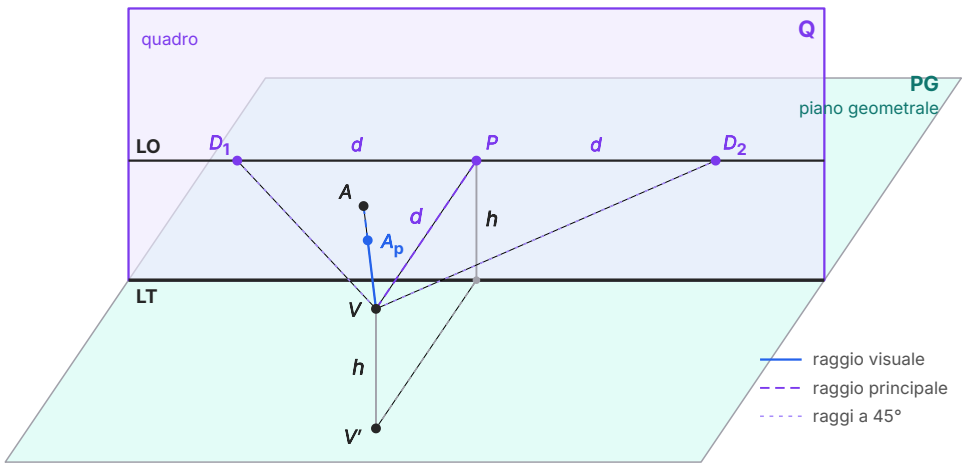


Figura 3.1 Il sistema della prospettiva centrale visto nello spazio. Il punto di vista *V*, alla distanza *d* dal quadro *Q* e all'altezza *h* dal piano geometrale PG; la linea di terra LT e la linea d'orizzonte LO; il punto principale *P* e i punti di distanza D_1 e D_2. Il raggio visuale da *V* al punto *A* del geometrale attraversa il quadro in A_p, l'immagine di *A*.

3.3.2 Orizzonte, punto principale e distanze

Il piano orizzontale che passa per l'occhio si chiama **piano d'orizzonte**; la sua intersezione con il quadro è la **linea d'orizzonte** LO, una retta orizzontale del quadro che sta esattamente all'altezza degli occhi dell'osservatore. Per questo quando sei in riva al mare l'orizzonte ti sembra sempre «all'altezza degli occhi», che tu sia seduto sulla sabbia o in cima a un faro.

- Il **punto principale** *P* è il piede della perpendicolare condotta da *V* al quadro: il punto che l'osservatore guarda diritto davanti a sé. Sta sempre sulla LO. Il raggio *VP* si chiama raggio principale.
- La **distanza principale** *d* è la distanza tra *V* e *P*, cioè tra l'occhio e il quadro.
- L'**altezza del punto di vista** *h* è la distanza tra la LO e la LT, cioè l'altezza dell'occhio sopra il geometrale.
- I **punti di distanza** D_1 e D_2 stanno sulla LO, a sinistra e a destra di *P*, a una distanza da *P* uguale a *d*. Nel paragrafo che segue vedrai perché sono così importanti.

Nel disegno sul foglio il quadro coincide con il foglio stesso: si tracciano la LT e, all'altezza *h* sopra di essa, la LO; su questa si segnano *P* e, a distanza *d* da *P*, i punti D_1 e D_2. La circonferenza del quadro con centro *P* e raggio *d*, che passa per i due punti di distanza, si chiama **cerchio di distanza**.

3.3.3 Il campo visivo e la scelta della distanza

Con l'occhio fermo vediamo con nitidezza solo ciò che sta dentro un cono di raggi non troppo aperto intorno al raggio principale, il **cono ottico**. Fuori di esso la visione si fa confusa, e in un disegno prospettico le figure appaiono stirate in modo innaturale. In pratica si considera un cono con un'apertura di circa **60°**: la porzione di spazio che ricade al suo interno è il **campo visivo** utile del disegno.

Da questo nasce una **regola pratica** per scegliere d: ciò che si disegna deve stare dentro il cono di 60°. Poiché è più comodo ragionare con una misura che con un angolo, si dice: prendi la distanza principale almeno pari a circa **1,5 volte la larghezza** di ciò che vuoi rappresentare. Con una distanza troppo piccola le parti laterali si deformano; con una distanza molto grande la prospettiva diventa piatta e le profondità si leggono male.

ESEMPIO SVOLTO

Perché proprio 1,5? Una larghezza di 120 mm, centrata davanti all'osservatore, deve stare dentro un cono di 60°.

1. Vista dall'alto, la sezione orizzontale del cono di 60° è un angolo di 60° con il vertice in V'. Se completiamo il triangolo con un lato parallelo al quadro, otteniamo un **triangolo equilatero** la cui altezza, uscente da V', misura d.
2. In un triangolo equilatero di lato l l'altezza vale $l \cdot \sqrt{3}/2$ (teorema di Pitagora sul mezzo triangolo). Quindi il lato, cioè la larghezza vista alla distanza d, è $l = 2d/\sqrt{3} \approx 1{,}15\,d$.
3. Perché 120 mm stiano nel cono serve $1{,}15\,d \geq 120$ mm, cioè $d \geq 104$ mm circa.
4. La regola pratica chiede $d \geq 1{,}5 \cdot 120 = 180$ mm. È più prudente del minimo, e lo è a ragione: l'oggetto ha anche una profondità e un'altezza, e i suoi punti vicini al quadro, ai bordi, sono quelli che si deformano di più.

3.4 Le proprietà della proiezione centrale

3.4.1 L'immagine di un punto e di una retta

L'immagine di un punto è l'intersezione del suo raggio visuale con il quadro. Se il punto sta **nel quadro**, il raggio lo incontra proprio lì: il punto è l'immagine di sé stesso. Ne segue che **le figure contenute nel quadro sono in vera grandezza**, e che i punti della LT, che sta nel quadro, restano dove sono.

Una retta che non sia parallela al quadro lo incontra in un punto, la sua **traccia** T: è un punto del quadro e quindi coincide con la propria immagine. L'immagine di tutta la retta è una retta che passa per T. Per trovarne un secondo punto immagina di percorrere la retta allontanandoti all'infinito: il raggio visuale verso un punto sempre più lontano diventa sempre più parallelo

alla retta stessa. Al limite il raggio è la **parallela alla retta condotta per *V***, e il punto in cui questa parallela incontra il quadro è il **punto di fuga** *F* della retta: l'immagine del suo «punto all'infinito». L'immagine di una retta è quindi la retta *TF*; l'immagine di una semiretta che parte dal quadro e si allontana è il segmento *TF*, che si avvicina a *F* senza raggiungerlo.

Una conseguenza importantissima: due rette **parallele** hanno la stessa parallela per *V*, e quindi lo **stesso punto di fuga**. Ecco perché i binari, i bordi della strada, gli spigoli di un corridoio convergono: non perché si avvicinino davvero, ma perché fuggono tutti verso lo stesso punto del quadro.

3.4.2 Dove fuggono le rette orizzontali

Se una retta è orizzontale, anche la sua parallela per *V* è orizzontale e sta nel piano d'orizzonte: incontra il quadro sulla LO. Quindi **tutte le rette orizzontali fuggono in un punto della linea d'orizzonte**. Tra esse ce ne sono due famiglie speciali, che conviene ricavare con una vista dall'alto (Figura 3.2b).

- Le rette **perpendicolari al quadro** (rette di profondità) hanno per *V* una parallela che è il raggio principale stesso: fuggono nel **punto principale *P***.
- Le rette orizzontali inclinate di **45°** sul quadro hanno per *V* una parallela che forma con il raggio principale un triangolo rettangolo isoscele: il cateto *VP* misura *d*, quindi anche l'altro cateto, sulla LO, misura *d*. Il punto di fuga sta a distanza *d* da *P*: è un **punto di distanza**. Le rette a 45° che, allontanandosi, vanno verso destra fuggono in D_2; quelle che vanno verso sinistra fuggono in D_1.
- Una retta orizzontale con un'altra inclinazione fugge in un altro punto *F* della LO, tanto più lontano da *P* quanto più la retta è inclinata sul quadro.

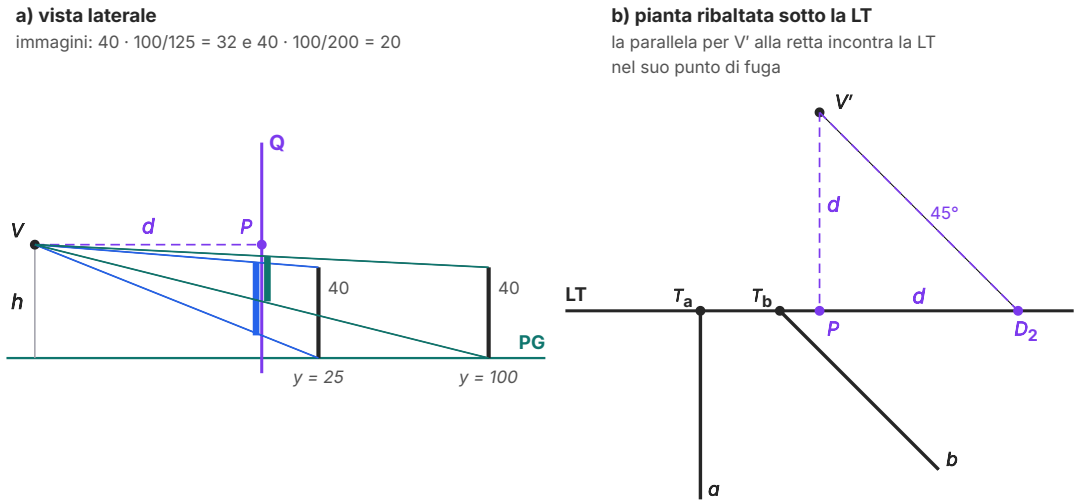


Figura 3.2 Due viste del sistema prospettico. a) Vista laterale: due pali alti 40 alle profondità $y = 25$ e $y = 100$ dietro il quadro, con $d = 100$ e $h = 50$. I raggi da V tagliano il quadro in segmenti di 32 e di 20: l'immagine si riduce nel rapporto $d/(d + y)$. b) Pianta ribaltata sotto la LT: la parallela per V' alla retta a, perpendicolare al quadro, incontra la LT in P; la parallela alla retta b, a 45°, la incontra in D_2, a distanza d da P. T_a e T_b sono le tracce delle due rette.

DA RICORDARE

Dove fuggono le rette.

- Rette parallele tra loro → stesso punto di fuga.
- Rette orizzontali → un punto della LO.
- Rette perpendicolari al quadro → il punto principale P.
- Rette orizzontali a 45° sul quadro → D_1 o D_2.
- Rette parallele al quadro (orizzontali frontali, verticali) → nessun punto di fuga: restano parallele a sé stesse.
- Figure contenute nel quadro → in vera grandezza.

3.4.3 Le rette parallele al quadro

Una retta **parallela al quadro** non lo incontra: non ha traccia, e la sua parallela per V non incontra il quadro, quindi non ha nemmeno un punto di fuga. La sua immagine è una retta **parallela a quella vera**. Le rette verticali, in un quadro verticale, restano verticali: è la ragione per cui gli spigoli verticali di un edificio, in prospettiva centrale, si disegnano con la squadra. Le rette orizzontali parallele al quadro, dette **frontali**, restano orizzontali. Un segmento frontale non conserva però la sua lunghezza: si accorcia, quanto più è lontano.

La Figura 3.3 riassume i casi. Le rette sono disegnate nella pianta, sotto la LT, e le loro immagini sopra: per ognuna la traccia sulla LT è il punto di partenza dell'immagine, il punto di fuga quello di arrivo.

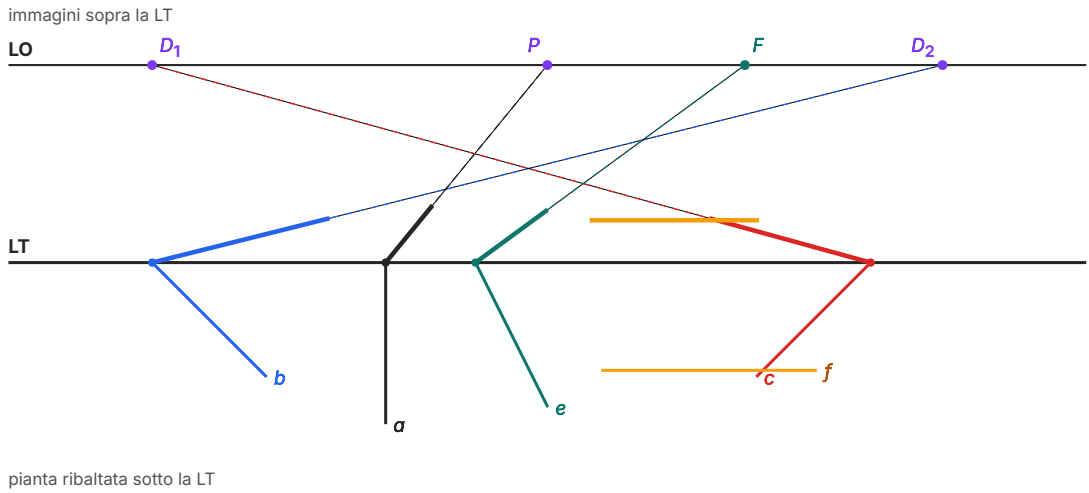


Figura 3.3 Dove fuggono le rette orizzontali (d = 110, h = 55). In pianta, sotto la LT, quattro rette che partono dal quadro e un segmento frontale f; sopra, le loro immagini. La retta a, perpendicolare al quadro, fugge in P; le rette b e c, a 45°, fuggono in D_2 e in D_1; la retta e, con un'altra inclinazione, fugge in un punto F della LO. Il segmento frontale f resta orizzontale, più corto.

3.4.4 Più lontano, più piccolo

Di quanto si accorcia un segmento frontale? Guardiamo il sistema di fianco (Figura 3.2a). Un palo verticale alto a, alla profondità y dietro il quadro, è visto da V, che sta a distanza d dal quadro. I raggi verso la cima e verso il piede formano con il palo un triangolo; il quadro taglia questo triangolo con una retta parallela al palo, e ne stacca un triangolo simile, con il vertice in V. Le basi dei due triangoli stanno tra loro come le loro altezze, cioè come le distanze da V: d e $d + y$. Quindi:

$$\text{lunghezza dell'immagine} = \text{lunghezza vera} \cdot \frac{d}{d+y}$$

È il teorema di Talete applicato alla visione, e vale per ogni segmento parallelo al quadro: verticale o orizzontale. Al raddoppiare della distanza dall'occhio (non dal quadro) l'immagine si dimezza. Un segmento nel quadro ($y = 0$) resta in vera grandezza; uno molto lontano diventa piccolissimo, e all'infinito si riduce a un punto della LO. Questa è l'unica formula del capitolo: tutto il resto si costruisce con riga e squadra, e la formula serve a controllare le costruzioni.

ESEMPIO SVOLTO

Un quadrato che si allontana. Con $d = 120$ mm un segmento frontale di 40 mm sta alla profondità $y = 60$ mm dietro il quadro. Quanto è lunga la sua immagine?

1. La distanza dall'occhio è $d + y = 120 + 60 = 180$ mm.
2. Il rapporto di riduzione è $d/(d + y) = 120/180 = 2/3$.
3. L'immagine misura $40 \cdot 2/3 \approx 26{,}7$ mm.
4. Controllo: alla profondità $y = 120$ mm la distanza dall'occhio è 240 mm, il doppio di d, e l'immagine misura $40 \cdot 120/240 = 20$ mm, cioè la metà del vero.

3.5 Due metodi per i punti e le figure piane

3.5.1 La pianta sotto la linea di terra

Per disegnare in prospettiva una figura del piano geometrale dobbiamo conoscerne la pianta e averla sullo stesso foglio. Il modo più semplice è **ribaltare** il geometrale nel quadro, ruotandolo intorno alla LT come una pagina (il ribaltamento che conosci: *Disegno e Storia dell'arte 1*, cap. 5, e *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 1). In questo libro la parte del geometrale che sta **dietro** il quadro si ribalta **sotto la LT**: un punto A alla profondità y dietro il quadro si disegna y millimetri sotto la LT, sulla verticale che passa per la sua vera posizione. La sinistra resta a sinistra e la destra a destra; la parte del geometrale davanti al quadro, dove sta l'osservatore, finisce sopra la LT, e il piede V' si trova sulla verticale di P, a distanza d sopra la LT. La pianta e la prospettiva occupano così due zone diverse del foglio e si leggono senza sovrapporsi.

Per dare le posizioni con i numeri useremo due coordinate: $A(x; y)$, dove x è la distanza (in mm) dalla verticale di P, positiva verso destra e negativa verso sinistra, e y è la profondità dietro il quadro. Così $A(30; 40)$ sta 30 mm a destra della verticale di P e 40 mm dietro il quadro, cioè, sul foglio, 40 mm sotto la LT.

3.5.2 Il metodo dei raggi visuali

Il **metodo dei raggi visuali**, detto anche metodo del taglio, applica direttamente la definizione: costruisce i raggi visuali in due viste e ne cerca l'intersezione con il quadro. È il metodo della costruzione di Alberti e dei trattati del Quattrocento, e si impara per primo perché mostra che cosa accade davvero (Figura 3.4). Servono la pianta, una vista laterale e lo spazio per la prospettiva.

1. **Larghezze, in pianta.** Si disegnano la traccia del quadro (una retta orizzontale), il piede V' alla distanza d e la pianta della figura. I raggi visuali da V' ai vertici tagliano la traccia del quadro: ogni taglio dà la posizione orizzontale dell'immagine del vertice.

2. **Altezze, nella vista laterale.** Si disegnano di fianco il quadro (una retta verticale), il geometrale, il punto di vista V alla distanza d dal quadro e all'altezza h, e i punti della figura alle loro profondità. I raggi da V tagliano il quadro: ogni taglio dà l'altezza dell'immagine sopra la LT.
3. **Incrocio.** Le posizioni orizzontali si riportano in verticale, le altezze in orizzontale, fino alla zona della prospettiva: ogni vertice dell'immagine è l'incrocio delle due linee.

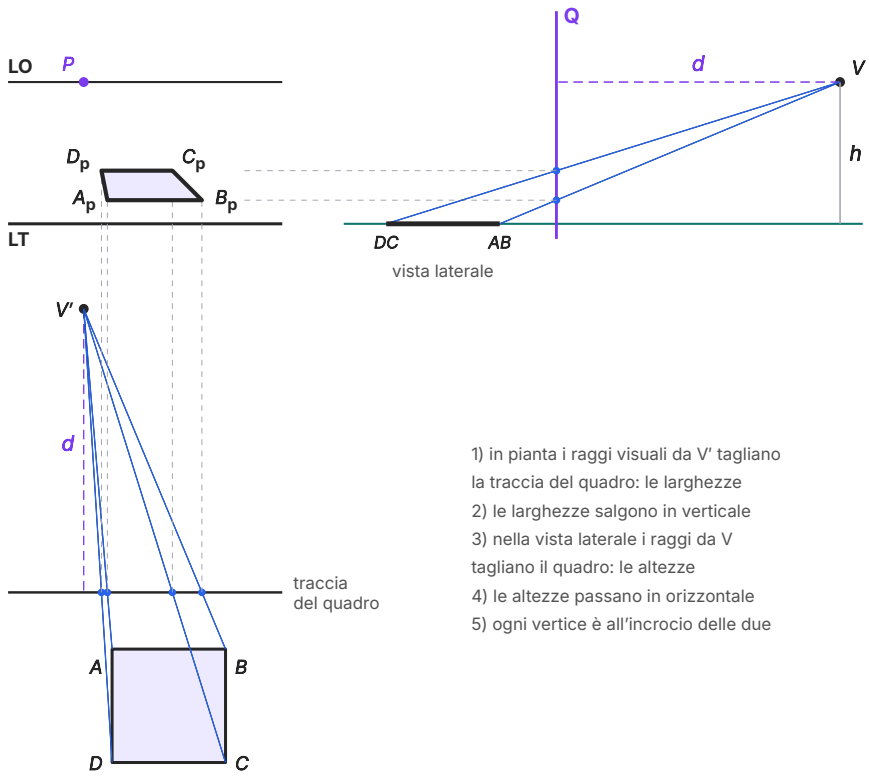


Figura 3.4 Il metodo dei raggi visuali per il quadrato di vertici $A(10; 20)$, $B(50; 20)$, $C(50; 60)$, $D(10; 60)$, in mm; prospettiva centrale, d = 100 mm, h = 50 mm. In pianta i raggi da V' tagliano la traccia del quadro e danno le larghezze; nella vista laterale i raggi da V tagliano il quadro e danno le altezze: 8,3 mm per il lato AB, 18,8 mm per il lato DC.

Il metodo è sicuro e generale: vale anche per punti fuori dal geometrale, perché nella vista laterale si può dare a ogni punto la sua altezza. Ha però un difetto pratico: richiede tre disegni sul foglio e molti trasporti, e le intersezioni tra raggi quasi paralleli, come quelli verso A e verso D in figura, sono poco precise.

3.5.3 Il metodo dei punti di distanza

Il **metodo dei punti di distanza** usa invece le proprietà delle rette che fuggono in P e in D_1, D_2, e lavora su un solo disegno: la pianta ribaltata sotto la LT e la prospettiva sopra di essa. Per trovare l'immagine di un punto $A(x; y)$ del geometrale si fanno passare per A due rette di cui sappiamo disegnare l'immagine (Figura 3.5):

- la **retta di profondità** per A, perpendicolare al quadro. In pianta è la perpendicolare da A alla LT; la sua traccia è il piede A_0, sulla LT alla distanza x dalla verticale di P. La sua immagine è la retta A_0P;
- la **retta a 45°** per A. In pianta incontra la LT in un punto A_1 che dista da A_0 esattamente y, perché il triangolo AA_0A_1 è rettangolo isoscele. Se A_1 sta a sinistra di A_0, la retta, allontanandosi, va verso destra e fugge in D_2; la sua immagine è la retta A_1D_2.

L'immagine A_p è l'incrocio delle due rette immagine. Non serve neppure tracciare la retta a 45° in pianta: basta riportare la profondità y sulla LT, a partire da A_0, dalla parte opposta rispetto al punto di distanza che si usa. Si può usare anche D_1, riportando y verso destra: il risultato è lo stesso, e scegliere il punto di distanza più comodo evita incroci troppo obliqui.

IN SINTESI

Il punto $A(x; y)$ con i punti di distanza.

1. Traccia LT e LO alla distanza h; segna P e, a distanza d da P, i punti D_1 e D_2.
2. In pianta, sotto la LT, segna A e la perpendicolare da A alla LT: il piede è A_0. Unisci A_0 con P.
3. Sulla LT riporta la profondità y da A_0 verso sinistra: trovi A_1. Unisci A_1 con D_2 (oppure riporta y verso destra e unisci con D_1).
4. L'incrocio di A_0P con A_1D_2 è A_p.
5. Le profondità si misurano sempre **sulla LT**, mai sulla LO.

ESEMPIO SVOLTO

Il punto $A(30; 40)$ con $d = 100$ mm e $h = 50$ mm.

1. Il piede A_0 sta sulla LT 30 mm a destra della verticale di P; si unisce con P.
2. Riportata la profondità 40 mm verso sinistra, A_1 sta 30 − 40 = −10, cioè 10 mm a sinistra della verticale di P; si unisce con D_2, che sta 100 mm a destra di P.
3. Le due rette si incontrano in A_p.
4. Controllo con la formula: il rapporto di riduzione è 100/(100 + 40) = 5/7. L'immagine sta 30 · 5/7 ≈ 21,4 mm a destra della verticale di P. Quanto all'altezza, il punto si trova sulla retta che sale da A_0 a P, ai 2/7 del percorso (1 − 5/7): 50 · 2/7 ≈ 14,3 mm sopra la LT. Misura sul tuo disegno: devi ritrovare questi valori a meno di mezzo millimetro.

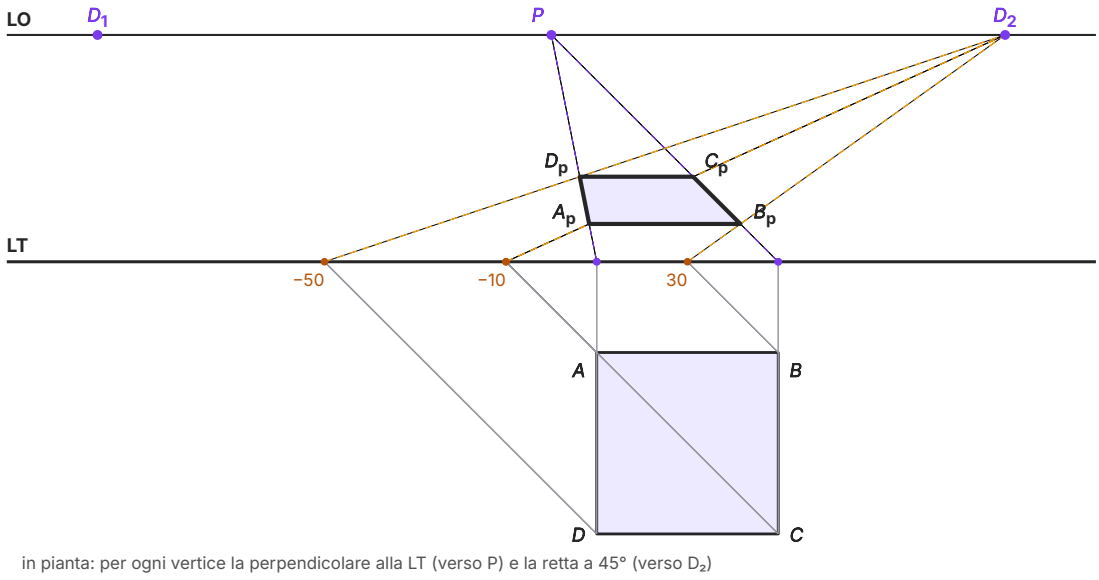


Figura 3.5 Il metodo dei punti di distanza per lo stesso quadrato della Figura 3.4, con gli stessi d = 100 mm e h = 50 mm. Per ogni vertice, in pianta, la perpendicolare alla LT dà il piede, da unire con P; la retta a 45° dà sulla LT il punto (a −10, 30 e −50 mm), da unire con D_2. A e C stanno sulla stessa diagonale a 45°, che fugge in D_2.

3.5.4 Lo stesso quadrato, due metodi

Confronta la Figura 3.4 e la Figura 3.5: il quadrato è lo stesso, e la sua immagine è la stessa. Il lato vicino AB sta 8,3 mm sopra la LT e misura 40 · 100/120 ≈ 33,3 mm; il lato lontano DC sta 18,8 mm sopra la LT e misura 40 · 100/160 = 25 mm. I due metodi sono due strade per la stessa proiezione centrale, e da qui in poi useremo quasi sempre il secondo, più rapido, tenendo il

primo come controllo. Osserva anche la diagonale AC: è una retta a 45°, e la sua immagine punta dritta verso D_2. Nel prossimo paragrafo questa osservazione diventerà uno strumento.

ERRORE FREQUENTE

Tre errori che falsano tutta la costruzione. Il primo è segnare P o i punti di distanza fuori dalla LO: tutte le rette orizzontali fuggono sulla LO, e un punto di fuga più alto o più basso produce un pavimento in salita o in discesa. Il secondo è riportare le profondità sulla LO invece che sulla LT: le misure vere si prendono solo dove il quadro incontra il geometrale, cioè sulla LT (o su rette del quadro, come vedrai per le altezze). Il terzo è usare il punto di distanza sbagliato: se la profondità è stata riportata verso sinistra, la retta va a D_2, che sta a destra; se si unisce con D_1 si ottiene un punto davanti al quadro, sotto la LT, e ci si accorge dell'errore solo alla fine.

3.6 Figure piane, altezze e punto di vista

3.6.1 Segmenti, quadrati e poligoni

Con il metodo dei punti di distanza ogni figura piana si costruisce per vertici. Alcuni casi, però, si risolvono a colpo d'occhio con le proprietà della proiezione:

- un **segmento perpendicolare al quadro** sta sulla retta che va dal suo piede sulla LT a P; basta trovare con D_2 (o D_1) i suoi due estremi;
- un **segmento parallelo al quadro** resta orizzontale: trovato un estremo, l'altro sta sulla stessa orizzontale, sulla retta di profondità dell'altro estremo;
- un **quadrato con un lato sulla LT** ha il lato anteriore in vera grandezza; i lati laterali fuggono in P, e il lato posteriore si trova con una sola retta: la diagonale, che fugge in D_1 o in D_2;
- un **quadrato ruotato di 45°**, con le diagonali parallela e perpendicolare al quadro, ha tutti i lati a 45°: due lati fuggono in D_1, due in D_2, e la diagonale di profondità fugge in P;
- un **esagono regolare** o un **ottagono regolare** si disegnano partendo dalla pianta: si ricavano le profondità e le distanze dei vertici dalla verticale di P, e si costruiscono i vertici uno alla volta. Nell'ottagono con i lati paralleli e perpendicolari al quadro, quattro lati fuggono in P o sono frontali e gli altri quattro, a 45°, fuggono nei punti di distanza: è un buon controllo.

3.6.2 Il pavimento a scacchi

Il pavimento a riquadri è la figura simbolo della prospettiva del Quattrocento: lo trovi sotto i piedi delle figure di Masaccio, di Piero, di Raffaello, e nella costruzione di Alberti. Costruirlo è facile, e la Figura 3.6a ne mostra il segreto (Figura 3.6a: 8 × 8 riquadri di 10 mm, d = 100 mm, h = 50 mm).

- Sulla LT si divide il lato anteriore del pavimento in parti uguali (qui 8 da 10 mm) e si uniscono i punti di divisione con P: sono le immagini delle file di riquadri in profondità.
- Dall'angolo anteriore sinistro si traccia la diagonale verso D_2. Essendo la diagonale di un quadrato, è una retta a 45°: incontra le rette di profondità proprio negli angoli dei riquadri, uno dopo l'altro.
- Per ogni punto di incontro si traccia un'orizzontale: sono le immagini delle file trasversali. Il pavimento è finito senza aver misurato nessuna profondità.

Osserva le fasce trasversali: si stringono sempre più verso la LO, ma non in progressione costante. Con i dati della figura le linee trasversali stanno a 0; 4,5; 8,3; 11,5; 14,3; 16,7; 18,8; 20,6 e 22,2 mm sopra la LT: le differenze tra una linea e la successiva (4,5; 3,8; 3,2; 2,7…) non stanno in un rapporto fisso. È la ragione geometrica per cui Alberti respingeva la regola delle fasce ridotte ogni volta di un terzo. Ed è anche il suo metodo di controllo: se una stessa retta passa per gli angoli di più riquadri, il pavimento è giusto.

3.6.3 Il cerchio

Un cerchio del geometrale, in prospettiva, diventa in generale un'**ellisse** (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 1: l'ellisse è una sezione del cono, e qui il cono è quello dei raggi visuali che vanno dall'occhio al cerchio). Come in assonometria (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 3), la si costruisce per **otto punti** a partire dal **quadrato circoscritto** (Figura 3.6b):

- si disegna in prospettiva il quadrato circoscritto e le sue mediane: i loro estremi sono i quattro punti di tangenza del cerchio;
- si disegnano le due diagonali, che fuggono in D_1 e in D_2;
- gli altri quattro punti stanno sulle diagonali, alla distanza $r/\sqrt{2} \approx 0{,}71\ r$ dal centro. Si trovano tracciando dalla LT due rette di profondità verso P, a distanza $0{,}71\ r$ dalla mediana (la misura si costruisce sul lato anteriore, che sta nel quadro o è frontale, con il triangolo rettangolo isoscele: *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 3);
- si raccordano gli otto punti a mano libera o con il curvilineo, sapendo che la curva è tangente ai lati del quadrato nei punti medi.

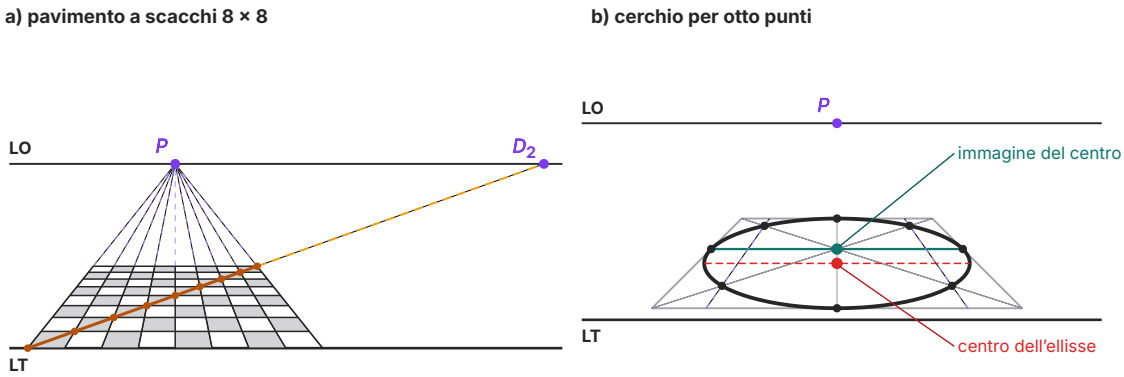


Figura 3.6 Due figure classiche. a) Pavimento a scacchi di 8 × 8 riquadri di 10 mm, con il lato anteriore sulla LT; d = 100 mm, h = 50 mm. Le divisioni della LT fuggono in P; la diagonale, che fugge in D_2, incontra le rette di profondità negli angoli dei riquadri e dà le file trasversali. b) Cerchio di raggio 40 mm con il centro alla profondità 45 mm, per otto punti; d = 80 mm, h = 40 mm (i punti di distanza sono fuori dalla figura). L'immagine del centro (in verde, sul diametro frontale) sta più in alto del centro dell'ellisse (in rosso, sull'asse maggiore).

ERRORE FREQUENTE

Il centro che non è il centro. L'errore più diffuso nella prospettiva dei cerchi è disegnare un'ellisse centrata sull'immagine del centro del cerchio. È sbagliato: la metà anteriore del cerchio è più vicina all'occhio e appare più grande di quella posteriore, quindi il centro dell'ellisse sta **più vicino alla LT** dell'immagine del centro. Nella Figura 3.6b il punto più vicino dell'ellisse sta 2,4 mm sopra la LT e il più lontano 20,6 mm: il centro dell'ellisse è a metà, 11,5 mm, mentre l'immagine del centro del cerchio è a 14,4 mm. Per la stessa ragione il diametro frontale del cerchio, che passa per l'immagine del centro, non è l'asse maggiore dell'ellisse. Costruisci sempre per otto punti, e lascia che sia la costruzione a dire dove sta il centro.

3.6.4 Le altezze: la retta delle altezze

Finora abbiamo lavorato sul geometrale. Per disegnare un punto ad altezza z sopra il geometrale, come la cima di un palo o il piano di un tavolo, ci serve una misura vera dell'altezza; e l'unico posto dove le altezze sono in vera grandezza è il **quadro**. Si sceglie allora una **retta delle altezze**: una verticale del quadro che parte da un punto T della LT, sulla quale si riportano le altezze vere (Figura 3.7a). Se si unisce T con P, e con P anche il punto H della retta delle altezze alla quota z, si ottengono le immagini di due rette di profondità parallele, una sul geometrale e una alla quota z. Tra di esse, a qualunque profondità, un segmento verticale ha l'immagine di un'altezza z.

Per alzare un palo di altezza z dal punto A_p del geometrale si procede così: da A_p si traccia l'orizzontale fino alla retta TP; da lì si sale in verticale fino alla retta HP; si torna in orizzontale fino alla verticale di A_p. Le orizzontali sono rette frontali, alla stessa profondità del palo: per

questo il trasporto è lecito. Con lo stesso metodo si costruisce una figura piana sollevata, come il piano di un tavolo: si costruisce la sua pianta sul geometrale e poi si sollevano i vertici; oppure si usa direttamente una retta di profondità alla quota z uscente dalla retta delle altezze.

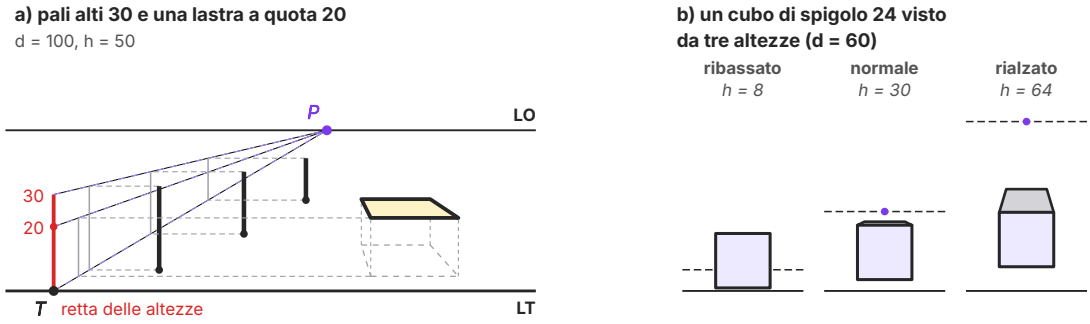


Figura 3.7 La retta delle altezze e il punto di vista. a) Prospettiva centrale con d = 100 mm e h = 50 mm: la retta delle altezze in T porta le quote vere 20 e 30 mm; tre pali alti 30 mm a profondità diverse e una lastra quadrata di 30 mm sollevata a quota 20 mm si costruiscono trasportando le altezze lungo rette frontali. b) Lo stesso cubo, con la faccia anteriore 10 mm dietro il quadro e d = 60 mm, visto con tre altezze del punto di vista: con h minore dello spigolo la faccia superiore non si vede; con h maggiore si vede, tanto più ampia quanto più h cresce.

Un punto più alto dell'occhio ha l'immagine sopra la LO; uno più basso sotto. La LO taglia perciò ogni oggetto alla quota dell'occhio: di ciò che sta sotto vediamo le facce superiori, di ciò che sta sopra le facce inferiori, come il soffitto di una stanza o il cornicione di un palazzo visto dalla strada. Un segmento verticale che attraversa la quota h è tagliato dalla LO esattamente in quel punto, a qualunque distanza si trovi: è un modo rapido per controllare le altezze. Se un uomo alto 1,6 m guarda una piazza piana, la LO passa all'altezza della testa di tutte le persone alte come lui, vicine o lontane.

3.6.5 Il punto di vista ribassato, normale, rialzato

Cambiando h cambia il carattere dell'immagine (Figura 3.7b). Con un **punto di vista ribassato**, quasi a terra, la LO è bassa, gli oggetti si stagliano contro il cielo e appaiono monumentali: è la veduta «dal basso». Con un **punto di vista normale** l'occhio è all'altezza di una persona in piedi (circa 1,5–1,7 m nella scala del disegno): è la veduta più naturale, quella dei pittori del Quattrocento quando vogliono che lo spettatore entri nello spazio dipinto. Con un **punto di vista rialzato** la LO sale, il pavimento si apre e si vede la pianta degli oggetti quasi dall'alto: è la «veduta a volo d'uccello» delle vedute di città. Spostando P a destra o a sinistra, invece, si sceglie quale lato dell'oggetto mostrare.

3.6.6 Uno sguardo alla prospettiva accidentale

In tutti gli esempi di questo capitolo gli oggetti hanno le facce parallele o perpendicolari al quadro: le loro rette orizzontali fuggono in P o sono frontali. È la **prospettiva centrale** (detta anche frontale), con un solo punto di fuga per le rette di profondità. Se invece l'oggetto è ruotato rispetto al quadro, come un cubo visto di spigolo, le sue rette orizzontali formano due famiglie, perpendicolari tra loro, nessuna delle quali è perpendicolare al quadro. Ciascuna famiglia fugge in un suo punto della LO: F_1 e F_2 (Figura 3.8). È la **prospettiva accidentale** (o angolare). Le verticali restano verticali, e se le facce sono inclinate di 45° sul quadro i due punti di fuga coincidono con i punti di distanza. I metodi per costruirla li studierai il prossimo anno.

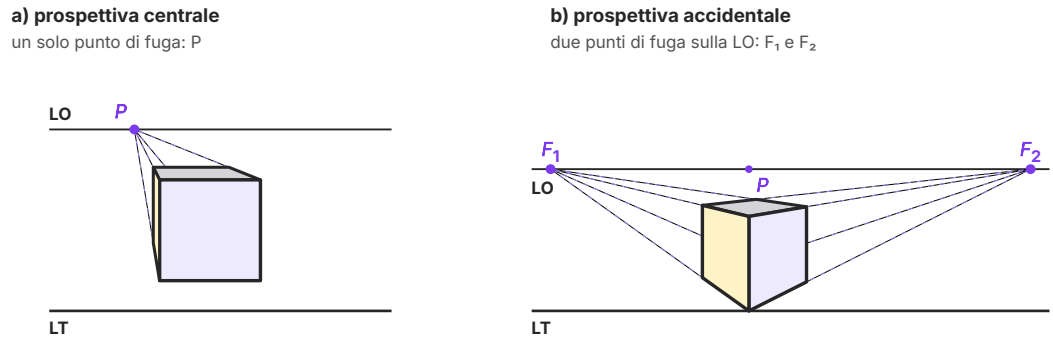


Figura 3.8 Lo stesso cubo di spigolo 40 mm in due prospettive (d = 100 mm, h = 60 mm). a) Prospettiva centrale: una faccia parallela al quadro, in vera forma ridotta; gli spigoli di profondità fuggono in P. b) Prospettiva accidentale: il cubo, con uno spigolo verticale nel quadro, è ruotato di 40° e 50° rispetto al quadro; i due gruppi di spigoli orizzontali fuggono in F_1 e F_2, sulla LO.

COLLEGAMENTI

La prospettiva nella storia dell'arte di questo volume. Le regole di questo capitolo saranno la chiave per leggere molte opere: il pavimento a scacchi e la volta a cassettoni della *Trinità* di Masaccio (cap. 7), le piazze delle tavole della «città ideale» (cap. 8), la *Flagellazione* di Piero della Francesca (cap. 9), la piazza della *Consegna delle chiavi* di Perugino (cap. 10), il *Cenacolo* di Leonardo (cap. 11). Nel capitolo 4 imparerai a fare il cammino inverso: dall'immagine dipinta risalire a P, alla LO e alla distanza d.

SINTESI

- La prospettiva è una proiezione centrale: i raggi visuali escono dall'occhio, il punto di vista V, e l'immagine di ogni punto è il loro taglio sul quadro verticale Q. È esatta per un solo punto di vista; è una costruzione geometrica, non una copia della realtà.
- La regola nasce a Firenze nei primi decenni del Quattrocento: le tavolette di Brunelleschi (note dal racconto attribuito a Manetti), il *De pictura* di Alberti (1435–1436) con la «finestra aperta», il punto centrico, la costruzione legittima e il velo; poi il *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca e i prospettografi di Dürer (1525).
- Elementi: punto di vista V e piede V', quadro Q, piano geometrale PG, linea di terra LT, piano e linea d'orizzonte LO, punto principale P, distanza principale d, altezza del punto di vista h, punti di distanza D_1 e D_2 sulla LO a distanza d da P.
- Regola pratica: il disegno deve stare nel cono ottico di circa 60°; si prende d almeno pari a circa 1,5 volte la larghezza dell'oggetto.
- L'immagine di una retta va dalla sua traccia T al suo punto di fuga F, che è il taglio sul quadro della parallela alla retta condotta per V. Rette parallele hanno lo stesso punto di fuga.
- Le rette orizzontali fuggono sulla LO: quelle perpendicolari al quadro in P, quelle a 45° in D_1 o D_2. Le rette parallele al quadro non hanno punto di fuga; le figure nel quadro sono in vera grandezza.
- Un segmento parallelo al quadro alla profondità y si riduce nel rapporto $d/(d+y)$: è il teorema di Talete applicato ai raggi visuali.
- La pianta si ribalta sotto la LT. Il metodo dei raggi visuali usa pianta e vista laterale; il metodo dei punti di distanza incrocia la retta di profondità (verso P) con la retta a 45° (verso D), riportando le profondità sulla LT. I due metodi danno la stessa immagine.
- Nel pavimento a scacchi la diagonale verso un punto di distanza dà tutte le file trasversali; le fasce non diminuiscono con un rapporto costante.
- Il cerchio diventa un'ellisse da costruire per otto punti: il suo centro non coincide con l'immagine del centro del cerchio, che sta più in alto.
- Le altezze si misurano in vera grandezza sulla retta delle altezze, nel quadro, e si trasportano lungo rette di profondità e rette frontali. Il punto di vista può essere ribassato, normale o rialzato.
- Nella prospettiva accidentale un oggetto ruotato rispetto al quadro ha due punti di fuga F_1 e F_2 sulla LO: la studierai il prossimo anno.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In una prospettiva i raggi proiettanti:
   - **A.** sono paralleli tra loro e perpendicolari al quadro
   - **B.** sono paralleli tra loro e obliqui rispetto al quadro
   - **C.** escono tutti da un punto, il punto di vista
   - **D.** sono perpendicolari al piano geometrale

2. ● Il punto principale P è:
   - **A.** il piede della perpendicolare condotta dal punto di vista al quadro
   - **B.** il punto in cui la LT incontra la LO
   - **C.** la proiezione di V sul piano geometrale
   - **D.** il punto di fuga delle rette a 45°

3. ● La linea d'orizzonte si trova:
   - **A.** sempre a metà altezza del foglio
   - **B.** sulla LT
   - **C.** all'altezza d sopra la LT
   - **D.** all'altezza h sopra la LT

4. ● Le rette orizzontali perpendicolari al quadro hanno il punto di fuga:
   - **A.** nel punto principale P
   - **B.** in D_1 o in D_2
   - **C.** sulla LT
   - **D.** non hanno punto di fuga

5. ● Una retta orizzontale che forma 45° con il quadro e, allontanandosi, va verso sinistra fugge:
   - **A.** in P
   - **B.** in D_2
   - **C.** in D_1
   - **D.** in un punto della LT

6. ● In prospettiva centrale, uno spigolo verticale di un edificio:
   - **A.** fugge verso un punto sopra la LO
   - **B.** resta verticale e si accorcia con la distanza
   - **C.** resta verticale e conserva la sua lunghezza
   - **D.** fugge in P

7. ● Con d = 100 mm un segmento frontale lungo 60 mm sta 50 mm dietro il quadro. La sua immagine misura:
   A. 30 mm
   B. 40 mm
   C. 50 mm
   D. 60 mm

8. ● In prospettiva un cerchio del geometrale che sta dietro il quadro diventa un'ellisse:
   A. il cui centro coincide con l'immagine del centro del cerchio
   B. il cui asse maggiore è l'immagine del diametro frontale
   C. il cui centro sta più vicino alla LT dell'immagine del centro del cerchio
   D. il cui centro sta sulla LO

9. ● Nel *De pictura* Alberti paragona il rettangolo del dipinto:
   A. a uno specchio
   B. a una finestra aperta
   C. a un velo dipinto
   D. a una porta

10. ● Secondo il racconto attribuito a Manetti, chi guardava la tavoletta del Battistero di Brunelleschi:
    A. la osservava da lontano, a occhi socchiusi
    B. la guardava attraverso un velo quadrettato
    C. la confrontava con un disegno in pianta
    D. guardava da un foro nel retro della tavoletta il dipinto riflesso in uno specchio

Lessico e norme

11. ● Completa: il punto di vista si indica con _____ e il suo piede sul geometrale con _____ ; la retta in cui il quadro incontra il geometrale è la _____ ; il piano orizzontale per l'occhio taglia il quadro nella _____ ; il piede della perpendicolare da V al quadro è il _____ ; la distanza tra V e il quadro è la _____ .

12. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Tutte le rette orizzontali fuggono sulla LO. b) I punti di distanza stanno sulla LT, a distanza d da P. c) Due rette parallele al quadro hanno lo stesso punto di fuga. d) Una figura contenuta nel quadro è in vera grandezza. e) Le profondità si riportano sulla LO. f) Un segmento verticale lontano si disegna verticale.

13. ● Abbina ogni simbolo al suo significato. 1) V'; 2) Q; 3) PG; 4) h; 5) D_2; 6) T. a) piano su cui si forma l'immagine; b) altezza dell'occhio sopra il geometrale; c) punto in cui una retta incontra il quadro; d) piede del punto di vista; e) punto di fuga delle rette orizzontali a 45° che si allontanano verso destra; f) piano orizzontale di appoggio.

14. ●● Spiega con parole tue la differenza tra la **traccia** e il **punto di fuga** di una retta. Perché la traccia è un punto «vero» della retta, mentre il punto di fuga non lo è?

15. ●● Spiega perché due rette parallele hanno lo stesso punto di fuga, e perché le rette parallele al quadro non ne hanno uno.

16. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Il *De pictura* fu scritto prima in latino (1435) e poi in volgare (1436). b) Le tavolette di Brunelleschi sono conservate agli Uffizi. c) Alberti chiama «punto centrico» il punto in cui cade il raggio che va diritto dall'occhio al quadro. d) Il nome «costruzione legittima» è di Alberti. e) L'*Underweysung der Messung* di Dürer fu pubblicata a Norimberga nel 1525. f) Alberti consigliava di ridurre ogni fascia del pavimento di un terzo rispetto alla precedente.

Costruire

17. ● **Gli elementi.** Su un foglio A4 orizzontale, LT a 100 mm dal bordo inferiore della squadratura, P sulla mezzeria verticale del foglio, con $d = 100$ mm e $h = 50$ mm, traccia LT e LO, segna P, D_1 e D_2 e il piede V' ribaltato. Disegna poi il cerchio di distanza, fin dove lo consente la squadratura. Quali punti, oltre ai punti di distanza, stanno sul cerchio sulla verticale di P, e quale parte del cerchio esce dalla squadratura?

18. ● **Un punto.** Sullo stesso foglio costruisci con i punti di distanza l'immagine del punto $A(30; 40)$. Misura la distanza di A_p dalla verticale di P e dalla LT e controlla con il rapporto $d/(d + y)$.

19. ● **Due segmenti.** Con $d = 100$ mm e $h = 50$ mm disegna: a) il segmento di profondità da $(-20; 0)$ a $(-20; 60)$; b) il segmento frontale lungo 60 mm, alla profondità 50 mm, con l'estremo sinistro in $(-30; 50)$. Quanto misura l'immagine del segmento frontale? A che altezza sopra la LT si trova?

20. ● **Un quadrato sulla LT.** Il quadrato di lato 40 mm ha il lato anteriore sulla LT, da $(-20; 0)$ a $(20; 0)$. Disegnalo in prospettiva ($d = 100$ mm, $h = 50$ mm) usando una sola retta a 45°. Quanto è lungo, e a che altezza sta, il lato posteriore?

21. ●● **Un quadrato ruotato.** Il quadrato ha i vertici in $(0; 0)$, $(30; 30)$, $(0; 60)$, $(-30; 30)$. Disegnalo con $d = 100$ mm e $h = 50$ mm. In quali punti fuggono i suoi lati? E le sue diagonali? Calcola le posizioni delle immagini dei vertici e confrontale con il disegno.

22. ●● **Un esagono regolare.** Un esagono regolare di lato 30 mm ha il centro in $(0; 50)$ e due vertici sulla retta frontale per il centro. Disegna la pianta sotto la LT, ricava le coordinate dei vertici e costruisci la prospettiva ($d = 100$ mm, $h = 50$ mm). Quali lati dell'esagono restano orizzontali?

23. ●● **Un ottagono regolare.** L'ottagono regolare è inscritto nel quadrato di lato 60 mm con i vertici in $(-30; 10)$, $(30; 10)$, $(30; 70)$, $(-30; 70)$, con quattro lati sui lati del quadrato. Trova il lato dell'ottagono e la misura degli angoli tagliati del quadrato, poi disegnalo in prospettiva ($d = 100$ mm, $h = 50$ mm). Dove fuggono i lati obliqui?

24. ●● **Un pavimento a scacchi.** Su un foglio A4 orizzontale disegna con $d = 120$ mm e $h = 60$ mm un pavimento di 6×6 riquadri di 15 mm, con il lato anteriore sulla LT, centrato sulla verticale di P. Usa una sola diagonale. Misura l'altezza delle linee trasversali sopra la LT e la larghezza del lato posteriore; poi colora i riquadri a scacchiera.

25. ●● **Un cerchio.** Disegna per otto punti il cerchio di raggio 30 mm con il centro in (0; 45), con d = 100 mm e h = 50 mm. Segna con colori diversi l'immagine del centro del cerchio e il centro dell'ellisse, e misura la loro distanza.

26. ●●● **Un piano sollevato.** Il piano quadrato di un tavolino, di lato 40 mm, con i vertici sopra i punti (10; 20), (50; 20), (50; 60), (10; 60), sta a quota 30 mm. Con d = 100 mm e h = 50 mm disegna la sua impronta sul geometrale, la retta delle altezze con origine in T(−40; 0) e il piano sollevato. Disegna anche le quattro gambe. Il piano si vede da sopra o da sotto? Perché?

27. ●●● **I due metodi a confronto.** Su un foglio A3 verticale disegna con il metodo dei raggi visuali (pianta, vista laterale e prospettiva) il rettangolo di vertici (−50; 30), (−10; 30), (−10; 50), (−50; 50), con d = 100 mm e h = 50 mm. Poi, nella stessa zona della prospettiva, ricostruiscilo con i punti di distanza e verifica che i vertici coincidano.

Leggere il disegno

28. ●● In una prospettiva centrale le immagini di due rette di profondità del pavimento si incontrano in un punto che sta 50 mm sopra la LT; la diagonale di un riquadro del pavimento, prolungata, incontra l'orizzontale per quel punto 90 mm più a destra. Trova h, P, il punto di distanza e la distanza principale d. A che distanza dal quadro si trovava l'occhio?

29. ●● Uno studente ha disegnato un cerchio in prospettiva così: ha segnato l'immagine del centro, vi ha centrato un'ellisse con gli assi orizzontale e verticale e l'ha fatta passare per le immagini dei quattro punti medi dei lati del quadrato circoscritto. Il disegno è giusto? Spiega perché, e dì come avrebbe dovuto procedere.

30. ●● Osserva la Figura 3.6a. Con i dati della didascalia calcola a che altezza sopra la LT stanno la prima, la seconda e l'ottava linea trasversale del pavimento, e verifica che la diagonale verso D_2 passi per l'angolo dei riquadri.

31. ●● In una prospettiva centrale con d = 100 mm un palo alto 30 mm, che poggia sul geometrale, ha un'immagine alta 20 mm. A che profondità si trova? Dove si trova la sua immagine rispetto alla LO, se h = 50 mm?

32. ●● Osserva la Figura 3.8. Perché nella prospettiva accidentale non c'è nessuno spigolo che fugge in P? Che cosa accadrebbe se il cubo fosse ruotato esattamente di 45° rispetto al quadro?

Verso la verifica

33. ●●● **Una stanza vista da dentro.** Su un foglio A4 orizzontale (d = 120 mm, h = 60 mm, LT a 100 mm dal bordo inferiore della squadratura) disegna il pavimento di una stanza di 80 × 80 mm, dalla profondità 10 mm alla profondità 90 mm, tra x = −40 e x = 40, diviso in 4 × 4 riquadri da 20 mm. Al centro del pavimento disegna un tappeto circolare di raggio 20 mm (centro in (0; 50)) e in (30; 70) un palo alto 40 mm, con la retta delle altezze sulla LT in x = 60. Riporta le misure di controllo: larghezza dei lati anteriore e posteriore del pavimento, quote delle linee trasversali, altezza dell'immagine del palo, posizione del centro dell'ellisse del tappeto rispetto all'immagine del suo centro.

34. ●●● **Scegliere la distanza.** Devi rappresentare in prospettiva centrale un oggetto largo 120 mm, centrato davanti all'osservatore. a) Qual è la distanza minima perché stia in un cono ottico di 60°? (Ragiona sul triangolo equilatero, senza trigonometria.) b) Che cosa suggerisce la regola pratica? c) Confronta l'immagine di un segmento frontale di 40 mm alla profondità 60 mm con $d = 120$ mm e con $d = 180$ mm, e spiega che cosa cambia nell'aspetto del disegno.

35. ●●● **Dalla finestra al metodo.** In 15–20 righe spiega come Alberti costruisce un pavimento nel *De pictura* e mettilo a confronto con il metodo dei punti di distanza: che cosa corrisponde al «punto centrico» e alla «linea centrica»? A quale passaggio della costruzione corrisponde il controllo della diagonale? Perché Alberti respinge la regola delle fasce ridotte di un terzo?

PER APPROFONDIRE

- [ALB] L. B. Alberti, *De pictura*: leggi nel primo libro la descrizione della «finestra aperta» e della costruzione del pavimento, e nel secondo quella del velo; il testo volgare si trova in rete nelle biblioteche digitali.
- [PIE] Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*: sfoglia le tavole del primo libro e confronta le costruzioni dei poligoni con quelle di questo capitolo.
- [KEM] M. Kemp, *La scienza dell'arte*: i primi capitoli raccontano Brunelleschi, Alberti e Piero e discutono le ricostruzioni delle tavolette.
- [PAN] E. Panofsky, *La prospettiva come «forma simbolica»*: un saggio breve e impegnativo sul significato della prospettiva nella storia della cultura.

Glossario del capitolo

Altezza del punto di vista
Distanza dell'occhio dal piano geometrale; nel disegno è la distanza tra la LO e la LT (h).

Cono ottico
Cono dei raggi visuali entro cui l'occhio fermo vede con nitidezza; nel disegno si considera un'apertura di circa 60°.

Costruzione legittima
Nome dato dagli studiosi moderni alla costruzione prospettica del pavimento descritta da Alberti nel *De pictura*.

Distanza principale
Distanza tra il punto di vista e il quadro, uguale a quella tra il punto principale e ciascun punto di distanza (d).

Linea d'orizzonte
Retta del quadro in cui lo taglia il piano d'orizzonte; sta all'altezza dell'occhio e vi fuggono tutte le rette orizzontali (LO).

Metodo dei punti di distanza
Costruzione di un punto come incrocio della sua retta di profondità (verso il punto principale) e della sua retta a 45° (verso un punto di distanza).

Metodo dei raggi visuali
Costruzione che trova in pianta e in vista laterale il taglio dei raggi visuali sul quadro; detto anche metodo del taglio.

Piano geometrale
Piano orizzontale su cui poggiano gli oggetti e l'osservatore (PG).

Prospettiva accidentale
Prospettiva di un oggetto ruotato rispetto al quadro, le cui rette orizzontali fuggono in due punti della LO; detta anche angolare.

Prospettiva centrale
Prospettiva di un oggetto con le facce parallele e perpendicolari al quadro, in cui le rette di profondità fuggono nel punto principale; detta anche frontale.

Prospettografo
Apparecchio per disegnare una prospettiva con il punto di vista fisso, come quelli illustrati da Dürer.

Punti di distanza
Punti della LO a distanza d dal punto principale, a sinistra (D_1) e a destra (D_2); vi fuggono le rette orizzontali a 45° sul quadro.

Punto di fuga
Punto in cui il quadro è incontrato dalla parallela a una retta condotta per il punto di vista; vi convergono le immagini della retta e delle sue parallele.

Punto di vista
Posizione dell'occhio dell'osservatore, centro della proiezione centrale (V); il suo piede sul geometrale è V'.

Punto principale
Piede della perpendicolare condotta dal punto di vista al quadro; sta sulla LO e vi fuggono le rette perpendicolari al quadro (P).

Raggio visuale
Retta che unisce il punto di vista a un punto dell'oggetto; il suo taglio sul quadro è l'immagine del punto.

Retta delle altezze
Retta verticale del quadro, uscente da un punto della LT, su cui si misurano le altezze in vera grandezza per trasportarle in profondità.

Velo
Velo sottile diviso da fili in quadrati, teso tra l'occhio e l'oggetto per ritrarre dal vero; Alberti lo chiama anche intersegazione.

Soluzioni

1. C. La prospettiva è una proiezione centrale (o conica): i raggi visuali escono da V.

2. A. È il piede del raggio principale; sta sulla LO. La proiezione di V sul geometrale è il piede V'; le rette a 45° fuggono nei punti di distanza.

3. D. La LO è l'intersezione del quadro con il piano orizzontale per l'occhio, quindi sta all'altezza h del punto di vista.

4. A. La loro parallela per V è il raggio principale, che incontra il quadro in P.

5. C. La parallela per V va verso sinistra e incontra la LO a distanza d a sinistra di P, cioè in D_1.

6. B. È parallelo al quadro: non ha punto di fuga e resta verticale; la sua lunghezza si riduce nel rapporto $d/(d + y)$.

7. B. $60 \cdot 100/(100 + 50) = 40$ mm.

8. C. La metà anteriore appare più grande: il centro dell'ellisse è più basso dell'immagine del centro, e il diametro frontale non è l'asse maggiore.

9. B. «el quale reputo essere una finestra aperta per donde io miri quello che quivi sarà dipinto» (*Della pittura*, I). Il velo è uno strumento descritto nel secondo libro; lo specchio è quello dell'esperimento di Brunelleschi.

10. D. Il foro fissava il punto di vista; lo specchio rimandava all'occhio l'immagine dipinta, alla distanza giusta.

11. V; V'; linea di terra (LT); linea d'orizzonte (LO); punto principale P; distanza principale d.

12. a) V. b) F: stanno sulla LO, a distanza d da P. c) F: le rette parallele al quadro non hanno punto di fuga; restano parallele a sé stesse. d) V. e) F: si riportano sulla LT, dove il quadro incontra il geometrale. f) V: le verticali sono parallele al quadro.

13. 1-d; 2-a; 3-f; 4-b; 5-e; 6-c.

14. Traccia di risposta. La traccia è il punto in cui la retta attraversa il quadro: appartiene alla retta e, stando nel quadro, coincide con la propria immagine. Il punto di fuga è il taglio sul quadro della parallela alla retta condotta per V: è l'immagine del punto all'infinito della retta, verso cui le immagini dei suoi punti si avvicinano senza raggiungerlo. Nessun punto reale della retta si proietta nel punto di fuga.

15. Traccia di risposta. Il punto di fuga di una retta dipende solo dalla sua direzione: si trova con la parallela per V. Due rette parallele hanno la stessa parallela per V, quindi lo stesso punto di fuga. Se una retta è parallela al quadro, anche la sua parallela per V lo è e non lo incontra: non c'è punto di fuga, e l'immagine della retta è parallela alla retta stessa.

16. a) V. b) F: sono perdute; le conosciamo dal racconto della *Vita* attribuita a Manetti. c) V. d) F: è un nome dato dagli studiosi moderni. e) V. f) F: Alberti critica quella regola di bottega, perché non corrisponde a nessun punto di vista certo.

17. Misure di controllo: D_1 e D_2 a 100 mm da P sulla LO; V' ribaltato 100 mm sopra la LT, sulla verticale di P. Il cerchio di distanza ha centro P e raggio 100 mm: passa per D_1 e D_2 e per i punti della verticale di P a 100 mm sopra e sotto P. Il punto più basso sta 50 mm sotto la LT, cioè 50 mm sopra il bordo inferiore della squadratura; il più alto starebbe 250 mm sopra quel bordo: la parte superiore del cerchio esce dalla squadratura, alta 190 mm, e si disegna solo l'arco che vi resta dentro.

18. Piede A_0 sulla LT a 30 mm a destra della verticale di P; A_1 a $30 - 40 = -10$ mm (10 mm a sinistra), unito con D_2. A_p sta $30 \cdot 100/140 \approx 21{,}4$ mm a destra della verticale di P e $50 \cdot 40/140 \approx 14{,}3$ mm sopra la LT.

19. a) L'estremo $(-20; 0)$ è sulla LT; l'altro ha l'immagine sulla retta da $(-20; 0)$ a P, a $-20 \cdot 100/160 =$

−12,5 mm dalla verticale di P e $50 \cdot 60/160 = 18{,}75 \approx 18{,}8$ mm sopra la LT. b) L'immagine è orizzontale, lunga $60 \cdot 100/150 = 40$ mm, e sta $50 \cdot 50/150 \approx 16{,}7$ mm sopra la LT, tra −20 e +20 mm.

20. I lati laterali vanno da (±20; 0) a P; la diagonale da (−20; 0) a D_2 incontra il lato destro nel vertice posteriore destro. Il lato posteriore è orizzontale, a $50 \cdot 40/140 \approx 14{,}3$ mm sopra la LT, lungo $40 \cdot 100/140 \approx 28{,}6$ mm (da −14,3 a +14,3 mm).

21. I lati sono tutti a 45°: i due che, allontanandosi, vanno verso destra (da (0; 0) a (30; 30) e da (−30; 30) a (0; 60)) fuggono in D_2; gli altri due in D_1. La diagonale (0; 0)–(0; 60) è di profondità e fugge in P; la diagonale (−30; 30)–(30; 30) è frontale e resta orizzontale. Immagini: (0; 0) sulla LT; (±30; 30) → ±23,1 mm, a 11,5 mm sopra la LT; (0; 60) → sulla verticale di P, a $18{,}75 \approx 18{,}8$ mm.

22. Vertici (in mm): (30; 50), (15; 76,0), (−15; 76,0), (−30; 50), (−15; 24,0), (15; 24,0) ($25{,}98 = 30 \cdot \sqrt{3}/2$, per il teorema di Pitagora). Immagini (distanza dalla verticale di P; altezza sopra la LT): (±20,0; 16,7), (±8,5; 21,6), (±12,1; 9,7). Restano orizzontali i due lati frontali, quello anteriore e quello posteriore; gli altri quattro fuggono in punti della LO.

23. Il lato dell'ottagono è $l = 60/(1 + \sqrt{2}) \approx 24{,}85$ mm; ogni angolo del quadrato è tagliato di $(60 - l)/2 \approx 17{,}57$ mm su ciascun lato (ricavalo dal triangolo rettangolo isoscele dell'angolo: ipotenusa l, cateti $l/\sqrt{2}$). Vertici: (±12,43; 10), (±30; 27,57), (±30; 52,43), (±12,43; 70). Immagini: (±11,3; 4,5), (±23,5; 10,8), (±19,7; 17,2), (±7,3; 20,6). Il lato anteriore e quello posteriore restano orizzontali; i due laterali fuggono in P; i quattro lati obliqui sono a 45° e fuggono in D_1 e D_2.

24. Divisioni della LT ogni 15 mm da −45 a +45 mm, unite con P; diagonale dall'angolo anteriore sinistro (−45; 0) verso D_2. Linee trasversali a 6,7; 12,0; 16,4; 20,0; 23,1; 25,7 mm sopra la LT; il lato posteriore (profondità 90 mm) misura $90 \cdot 120/210 \approx 51{,}4$ mm.

25. Il quadrato circoscritto va da (−30; 15) a (30; 75): il lato anteriore è lungo $2 \cdot 26{,}1 = 52{,}2$ mm, a 6,5 mm sopra la LT; quello posteriore $2 \cdot 17{,}1 = 34{,}3$ mm, a 21,4 mm. Gli altri quattro punti si trovano sulle rette di profondità in $x = \pm 21{,}2$ mm ($30/\sqrt{2}$). Il punto più vicino dell'ellisse sta a 6,5 mm, il più lontano a 21,4 mm: il centro dell'ellisse è a 14,0 mm sopra la LT, l'immagine del centro del cerchio a 15,5 mm. Distanza ≈ 1,5 mm: piccola, ma misurabile; cresce se il cerchio si avvicina al quadro o è più grande rispetto a d.

26. Impronta a terra: lato anteriore a 8,3 mm sopra la LT, da 8,3 a 41,7 mm; lato posteriore a 18,8 mm, da 6,3 a 31,3 mm. Sulla retta delle altezze in T(−40; 0) si segna la quota 30 mm e la si unisce con P; trasportando le altezze lungo rette frontali, il lato anteriore del piano sta a $50 + (30 - 50) \cdot 100/120 \approx 33{,}3$ mm sopra la LT e quello posteriore a $50 - 20 \cdot 100/160 = 37{,}5$ mm. Il piano si vede da **sopra**: sta a 30 mm, più in basso dell'occhio ($h = 50$ mm), e la sua immagine resta sotto la LO.

27. Vertici dell'immagine (distanza dalla verticale di P; altezza sopra la LT): (−50; 30) → (−38,5; 11,5); (−10; 30) → (−7,7; 11,5); (−10; 50) → (−6,7; 16,7); (−50; 50) → (−33,3; 16,7). Il foglio A3 verticale serve perché i tre disegni, con $d = 100$ mm, occupano in altezza circa 50 + 100 + 50 mm, oltre ai margini, e la vista laterale richiede in larghezza la profondità più d. Con i punti di distanza (profondità 30 e 50 riportate sulla LT verso sinistra e unite con D_2) si ritrovano gli stessi punti.

28. P è il punto di incontro delle rette di profondità: la LO è l'orizzontale per P e $h = 50$ mm. La diagonale di un riquadro è una retta a 45°: incontra la LO in un punto di distanza, che sta 90 mm a destra di P (D_2). Quindi $d = 90$ mm: l'occhio era a 90 mm dal quadro, nella scala del disegno.

29. No. L'immagine del centro del cerchio non è il centro dell'ellisse (che sta più in basso), e il diametro frontale non è l'asse maggiore: i punti medi dei lati laterali del quadrato non sono gli estremi dell'asse orizzontale. Bisogna costruire il quadrato circoscritto in prospettiva, trovare i quattro punti di tangenza e i quattro punti sulle diagonali, e raccordare gli otto punti tangenzialmente ai lati del quadrato.

30. Altezza sopra la LT di una trasversale alla profondità y: $50 \cdot y/(100 + y)$. Prima ($y = 10$): $50 \cdot 10/110 \approx 4{,}5$ mm; seconda ($y = 20$): $50 \cdot 20/120 \approx 8{,}3$ mm; otta-

va ($y = 80$): $50 \cdot 80/180 \approx 22{,}2$ mm. La diagonale va da $(-40; 0)$ a $(40; 80)$: sulla trasversale k passa per $x = -40 + 10k$, cioè per un angolo dei riquadri, perché ogni riquadro è un quadrato e la diagonale è a 45°.

31. Il rapporto di riduzione è $20/30 = 2/3 = 100/(100 + y)$, quindi $100 + y = 150$ e $y = 50$ mm. Il piede sta $50 \cdot 50/150 \approx 16{,}7$ mm sopra la LT e la cima $16{,}7 + 20 = 36{,}7$ mm: tutta l'immagine sta sotto la LO (50 mm), perché il palo è più basso dell'occhio.

32. Nessuno spigolo orizzontale del cubo è perpendicolare al quadro: le due famiglie di spigoli orizzontali formano 40° e 50° con il quadro e fuggono in due punti della LO diversi da P, F_1 e F_2. Se il cubo fosse ruotato di 45°, le due famiglie sarebbero rette a 45° e fuggirebbero nei punti di distanza: $F_1 = D_1$ e $F_2 = D_2$.

33. Lato anteriore (profondità 10): $80 \cdot 120/130 \approx 73{,}8$ mm, a $60 \cdot 10/130 \approx 4{,}6$ mm sopra la LT; trasversali a 12,0 mm ($y = 30$), 17,6 mm ($y = 50$), 22,1 mm ($y = 70$); lato posteriore ($y = 90$) lungo $80 \cdot 120/210 \approx 45{,}7$ mm, a 25,7 mm. Le file in profondità partono dalla LT in −40, −20, 0, 20, 40 mm e fuggono in P; il lato anteriore, che non tocca la LT, si trova con i punti di distanza (profondità 10 mm); poi la diagonale dall'angolo $(-40; 10)$ verso D_2 dà le trasversali. Tappeto: punto più vicino ($y = 30$) a 12,0 mm, più lontano ($y = 70$) a 22,1 mm, centro dell'ellisse a 17,1 mm, immagine del centro a 17,6 mm. Palo: piede in (18,9; 22,1), immagine alta $40 \cdot 120/190 \approx 25{,}3$ mm (cima a 47,4 mm, sotto la LO).

34. a) Nel triangolo equilatero di altezza d il lato è $2d/\sqrt{3} \approx 1{,}15\,d$: serve $1{,}15\,d \geq 120$ mm, cioè $d \geq 104$ mm circa. b) La regola pratica suggerisce $d \geq 1{,}5 \cdot 120 = 180$ mm. c) Con $d = 120$ mm l'immagine misura $40 \cdot 120/180 \approx 26{,}7$ mm; con $d = 180$ mm misura $40 \cdot 180/240 = 30$ mm. Con la distanza maggiore le dimensioni si riducono meno con la profondità: il disegno appare meno «profondo» ma più naturale e meno deformato ai bordi.

35. Traccia di risposta. Alberti fissa nel rettangolo il punto centrico (il punto principale P), non più alto delle figure umane; divide la base in braccia e unisce le divisioni al punto centrico (le rette di profondità verso P). Le trasversali le ricava da una costruzione a parte, una vista laterale in cui i raggi dall'occhio tagliano una perpendicolare posta alla distanza scelta (il metodo dei raggi visuali). La linea centrica è la LO, che passa per il punto centrico ed è il limite che nessuna quantità più bassa dell'occhio può superare. Il controllo con una retta che attraversa la diagonale di più quadrati corrisponde all'uso della retta a 45° verso il punto di distanza, che nel metodo moderno diventa il procedimento stesso. Alberti respinge la regola dei terzi perché parte da una prima linea messa a caso e non da un punto di vista certo: le fasce diminuiscono con un rapporto costante, mentre nella proiezione centrale non è così.