CAPITOLO

1

Teoria delle ombre: figure piane e solidi

«Ombra è privazione di luce, e sola opposizione de' corpi densi opposti ai raggi luminosi [...]» — Leonardo da Vinci, Trattato della pittura, § 537

OBIETTIVI

1. Distinguere l'ombra reale dall'ombra virtuale e usare la regola del piano più vicino.
2. Costruire l'ombra di rette e segmenti in qualunque posizione, con il piano luminoso e il punto di rottura.
3. Costruire le ombre di poligoni e cerchi paralleli o perpendicolari ai piani di proiezione, anche quando si spezzano sulla LT.
4. Trovare separatrice, ombra propria e ombra portata di prismi, cilindri, piramidi e coni, anche cavi o forati, con il metodo inverso dove serve.
5. Costruire le ombre che un solido getta su un altro con i raggi a ritroso e con il piano luminoso.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Dai fondamenti al metodo 2
1.2 Il metodo generale: punti e rette 3
1.3 Le ombre delle figure piane 6
1.4 Le ombre dei solidi 9
1.5 Ombre portate su altri solidi 15

Disegno e Storia dell'arte 3 · Parte I · La teoria delle ombre · versione 1.0
Capitolo 1: Teoria delle ombre: figure piane e solidi · pagine 23–48 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda la facciata di un palazzo in una mattina di sole. Il cornicione disegna sotto di sé una fascia scura, le finestre hanno un bordo d'ombra sugli stipiti, una colonna getta sul muro alle sue spalle una striscia che si piega sul gradino. Nessuna di queste ombre è casuale: dipende dalla forma dell'oggetto, dalla superficie che la riceve e dalla direzione della luce, e chi conosce le regole può prevederla con riga e squadra prima ancora che l'edificio esista.

Nel volume dello scorso anno (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6) hai imparato i **fondamenti**: le sorgenti, il vocabolario delle ombre, la convenzione del raggio a 45°, le ombre di punti, di segmenti verticali e orizzontali, di un prisma e di un cilindro. Questo capitolo trasforma quei fondamenti in un **metodo**, cioè in una procedura che funziona per qualunque figura: un punto in qualunque posizione, una retta in qualunque direzione, un poligono o un cerchio, un solido isolato o un gruppo di solidi che si fanno ombra a vicenda. È la «teoria delle ombre» che le Indicazioni nazionali chiedono di studiare in modo sistematico nel secondo biennio; nel cap. 2 la applicherai agli elementi e ai volumi dell'architettura.

1.1 Dai fondamenti al metodo

Ripartiamo da ciò che sai. Una sorgente **impropria**, come il Sole, manda raggi paralleli; una sorgente **propria**, come una lampada, manda raggi divergenti da un punto. Su un corpo illuminato la **linea separatrice** divide la parte in luce dall'**ombra propria**; l'**ombra portata** è quella che il corpo getta su un'altra superficie (se cade su un'altra parte del corpo stesso è l'**ombra autoportata**), e il suo contorno è l'ombra della separatrice. L'ombra di un punto P è il punto in cui il raggio luminoso che passa per P incontra la superficie che riceve l'ombra: tutto il resto è una conseguenza di questa definizione.

Nelle proiezioni ortogonali useremo sempre la **convenzione del raggio a 45°**: il raggio è parallelo alla diagonale del cubo che va dal vertice in alto, a sinistra e davanti a quello opposto; le sue proiezioni r' e r'' formano entrambe 45° con la LT. Le coordinate dei punti si scrivono come in *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6: $P(x; y; z)$, dove x è la larghezza, misurata sulla LT a partire da un'origine O e crescente verso **sinistra**, y l'aggetto (la distanza dal PV) e z la quota (la distanza dal PO); le misure sono in millimetri. Con questa scelta il raggio, scendendo, si sposta verso destra e verso il PV: le larghezze e gli aggetti delle ombre **diminuiscono**.

IN SINTESI

Le regole da tenere sotto mano (*Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6). Per un punto $P(x; y; z)$, con la convenzione a 45°:

- se $y > z$ l'ombra cade sul PO, in $P_o' = (x - z; y - z)$;
- se $z > y$ l'ombra cade sul PV, in $P_o'' = (x - y; z - y)$;
- se $y = z$ l'ombra cade sulla LT, nel punto di larghezza $x - y$.

Un segmento parallelo a un piano vi getta un'ombra parallela e uguale; un solido si costruisce in tre passi: separatrice, ombra propria, ombra portata.

1.2 Il metodo generale: punti e rette

1.2.1 Ombra reale e ombra virtuale

Il raggio che passa per un punto P del primo diedro scende verso destra e verso il fondo, e prima o poi incontra il PO oppure il PV. Se lo prolunghiamo oltre il primo incontro, attraversa quel piano e incontra anche l'altro, ma in una regione che non appartiene al primo diedro: sotto il PO o dietro il PV. Chiamiamo **ombra reale** la traccia del raggio sul piano che esso incontra per primo, l'unica che si vede davvero; chiamiamo **ombra virtuale** la traccia sull'altro piano, che nessun osservatore vedrebbe perché il piano che la riceve è nascosto dal primo. L'ombra virtuale si indica con lo stesso simbolo, ma si disegna con un tratto sottile e tratteggiato e, la prima volta, con la parola «virtuale» (Figura 1.1a e b).

Quale piano incontra per primo il raggio? Con la convenzione a 45° il raggio scende di un millimetro per ogni millimetro di cui si avvicina al PV: per raggiungere il PO deve scendere di z, per raggiungere il PV deve avanzare di y. Arriva prima dove la distanza è minore. Ne nasce una regola che conviene ripetere a ogni punto, la **regola del piano più vicino**: **l'ombra reale cade sul piano a cui il punto è più vicino**. Il punto $A(60; 35; 20)$ della figura è più vicino al PO (20 mm) che al PV (35 mm), e la sua ombra reale è sul PO; il punto $B(60; 15; 35)$ è più vicino al PV, e la sua ombra reale è sul PV.

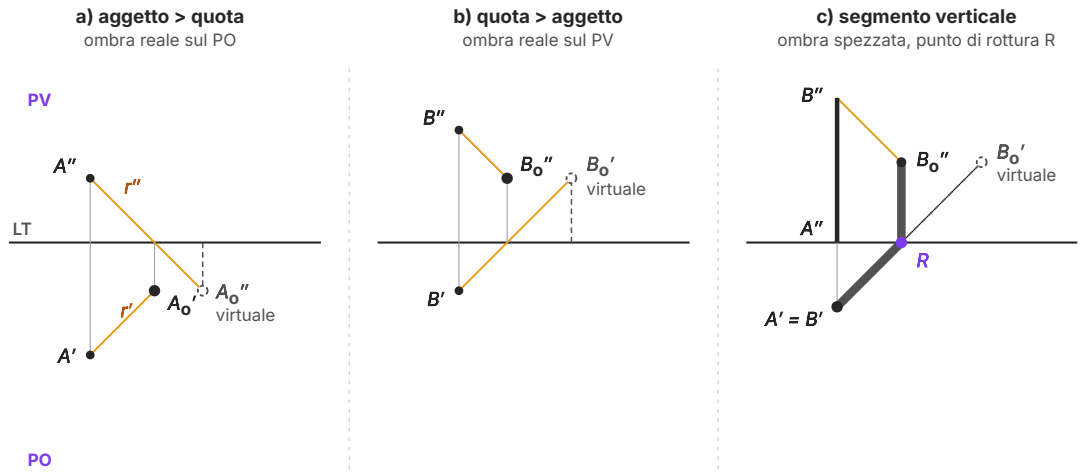


Figura 1.1 Ombra reale e ombra virtuale (misure in mm). a) $A(60; 35; 20)$ è più vicino al PO: ombra reale $A_0' = (40; 15)$ sul PO, ombra virtuale $A_0'' = (25; -15)$ sotto la LT. b) $B(60; 15; 35)$ è più vicino al PV: ombra reale $B_0'' = (45; 20)$, virtuale $B_0' = (25; -20)$ dietro la LT. c) Segmento verticale alto 45 mm con il piede in (60; 20): la retta che unisce il piede all'ombra virtuale della cima, $B_0' = (15; -25)$, taglia la LT nel punto di rottura R, a 40 mm; dal punto di rottura l'ombra sale verticale fino a $B_0'' = (40; 25)$.

A che cosa serve un'ombra che non si vede? A costruire quelle che si vedono. L'ombra di un segmento è un segmento (vedremo tra poco perché), e per disegnarla bastano le ombre dei suoi estremi **sullo stesso piano**. Quando un estremo ha l'ombra reale sul PO e l'altro sul PV, l'ombra virtuale di uno dei due sul piano dell'altro permette di tracciare la retta che contiene l'ombra e di trovare il punto in cui questa attraversa la LT.

ESEMPIO SVOLTO

Due punti, due piani. Trova le ombre di $P(70; 40; 25)$ e di $Q(60; 18; 42)$.

1. P: aggetto 40, quota 25. È più vicino al PO, quindi l'ombra reale è sul PO: in pianta si parte da P' e ci si sposta di 25 mm verso destra e di 25 mm verso la LT, cioè $P_0' = (45; 15)$. Con la costruzione: da P'' la parallela a r'' incontra la LT nel punto di larghezza $70 - 25 = 45$; da lì una linea di richiamo scende fino alla parallela a r' tracciata da P'.
2. Q: aggetto 18, quota 42. È più vicino al PV: $Q_0'' = (60 - 18; 42 - 18) = (42; 24)$. L'ombra virtuale sul PO si ottiene spostandosi di 42 mm, la quota: $(18; -24)$, un punto con aggetto negativo, cioè dietro il PV, che in pianta si disegna sopra la LT.

Controllo: la differenza tra aggetto e quota (15 per P, −24 per Q) è l'aggetto dell'ombra sul PO, reale per P e virtuale per Q: se è positiva, l'ombra sul PO sta davanti alla LT ed è reale; se è negativa, sta dietro il PV ed è virtuale.

1.2.2 L'ombra di una retta: il piano luminoso

I raggi luminosi che passano per i punti di una retta a sono paralleli tra loro e tutti appoggiati sulla retta: formano quindi un piano, che si chiama **piano luminoso** della retta. L'**ombra di una retta** su un piano è l'intersezione del suo piano luminoso con quel piano: dunque è ancora una retta (o, se il piano luminoso fosse parallelo al piano che riceve l'ombra, non ci sarebbe ombra su di esso). Per un segmento basta allora trovare le ombre di due punti e unirle. Dall'idea del piano luminoso seguono quattro regole, che conviene saper giustificare e non solo ricordare.

DA RICORDARE

Le regole delle rette (convenzione a 45°).

- **Retta parallela a un piano.** L'ombra su quel piano è parallela alla retta, e un segmento vi getta un'ombra uguale: i raggi traslano tutti i punti della stessa quantità. È la **regola delle figure parallele**, che vale per qualunque figura parallela al piano che riceve l'ombra.
- **Retta perpendicolare al PO** (verticale). Il suo piano luminoso è verticale e contiene r': l'ombra sul PO è inclinata di 45° come r'; sul PV, a cui la retta è parallela, l'ombra è verticale.
- **Retta perpendicolare al PV.** Simmetricamente: l'ombra sul PV è inclinata di 45° come r''; sul PO, a cui la retta è parallela, l'ombra è perpendicolare alla LT.
- **Retta che incontra un piano.** Il punto d'incontro è ombra di sé stesso: l'ombra della retta su quel piano passa per esso. Il piede di un palo, l'attacco di una mensola alla parete sono punti già noti dell'ombra.

1.2.3 L'ombra spezzata e il punto di rottura

Quando l'ombra di un segmento cade in parte sul PO e in parte sul PV, si piega sulla LT: è l'ombra spezzata che conosci da *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6. Il punto in cui si piega si chiama **punto di rottura** e lo indicheremo con R (in *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6, era K). È un punto della LT che appartiene a entrambe le ombre, e quindi si trova in due modi indipendenti, che devono dare lo stesso risultato: in pianta, come intersezione con la LT della retta che unisce l'ombra reale di un estremo sul PO all'ombra virtuale dell'altro estremo sul PO; in prospetto, con le ombre reale e virtuale sul PV (Figura 1.1c).

Per un segmento verticale la costruzione è immediata, perché il primo tratto dell'ombra parte dal piede a 45° e il secondo sale verticale: il punto di rottura sta sulla LT alla larghezza $x - y$ del piede. Per un segmento in posizione qualunque, invece, il metodo dell'ombra virtuale è indispensabile.

ESEMPIO SVOLTO

Ombra spezzata di un segmento in posizione generica. Il segmento va da $A(100; 50; 10)$ a $B(50; 20; 40)$.

1. A è più vicino al PO ($10 < 50$): $A_o' = (90; 40)$. B è più vicino al PV ($20 < 40$): $B_o'' = (30; 20)$. L'ombra si spezza.
2. In pianta: l'ombra virtuale di B sul PO è $(50 - 40; 20 - 40) = (10; -20)$. La retta da $(90; 40)$ a $(10; -20)$ scende di 60 mm in aggetto su 80 mm di larghezza; per arrivare da aggetto 40 ad aggetto 0 percorre i $40/60 = 2/3$ del tratto, quindi incontra la LT a $90 - 2/3 \cdot 80 \approx 36{,}7$ mm.
3. Controllo in prospetto: l'ombra virtuale di A sul PV è $(100 - 50; 10 - 50) = (50; -40)$. La retta da $(50; -40)$ a $(30; 20)$ sale di 60 mm su 20 mm di larghezza e taglia la LT a $50 - 40/60 \cdot 20 \approx 36{,}7$ mm. Le due costruzioni danno lo stesso punto R.
4. L'ombra reale è la spezzata $A_o' \to R$ sul PO e $R \to B_o''$ sul PV; i tratti virtuali restano sottili e tratteggiati.

ERRORE FREQUENTE

Unire un'ombra sul PO con un'ombra sul PV. Il segmento che congiunge A_o' e B_o'' non è l'ombra di niente: i due punti stanno su piani diversi, e in epura sono disegnati in due viste diverse. Un'ombra si traccia sempre unendo punti dello stesso piano; quando gli estremi cadono su piani diversi, cerca prima il punto di rottura con un'ombra virtuale.

1.3 Le ombre delle figure piane

Una figura piana, in un disegno di ombre, si pensa come una **lastra**: un cartoncino sottilissimo e opaco che ha due facce. Una delle due facce è rivolta verso la luce ed è in luce; l'altra è in ombra propria. Il contorno della lastra è la sua separatrice, e l'ombra portata è la figura che ha per contorno l'ombra del contorno: per un poligono basta trovare le ombre dei vertici e unirle nello stesso ordine.

1.3.1 Poligoni nelle diverse posizioni

Conviene distinguere le posizioni della lastra rispetto ai piani di proiezione, perché ognuna ha una scorciatoia.

- **Lastra parallela al PO** (orizzontale, alla quota z). Se tutti i vertici hanno aggetto maggiore di z, l'ombra è tutta sul PO ed è uguale alla lastra, traslata di z verso destra e di z verso la LT: basta l'ombra di un vertice. Sul PV, invece, la lastra non è parallela e la sua ombra è deformata.

- **Lastra parallela al PV** (frontale, all'aggetto y). Simmetricamente, se tutti i vertici hanno quota maggiore di y l'ombra cade sul PV, uguale alla lastra e traslata di y verso destra e verso il basso.
- **Lastra perpendicolare al PO e al PV** (di profilo, cioè parallela al piano laterale). Non è parallela a nessuno dei due piani: le ombre dei vertici si trovano una per una, e i lati verticali hanno ombre a 45° sul PO e verticali sul PV, quelli perpendicolari al PV ombre a 45° sul PV e perpendicolari alla LT sul PO.
- **Lastra perpendicolare al PO e inclinata sul PV** (verticale, come un pannello ruotato). I lati verticali seguono le regole delle verticali; i lati orizzontali, paralleli al PO, hanno sul PO ombre parallele e uguali a sé stessi.

In ognuna di queste posizioni l'ombra può cadere tutta sul PO, tutta sul PV, oppure spezzarsi sulla LT. La Figura 1.2 mostra il caso più istruttivo: un esagono regolare orizzontale, alla quota 26 mm, con quattro vertici più vicini al PO e due più vicini al PV. Si costruiscono entrambe le ombre complete, quella sul PO (un esagono uguale, traslato) e quella sul PV (un esagono deformato); di ciascuna si tiene la parte reale. Le due parti si incontrano sulla LT negli stessi due punti di rottura, R_1 e R_2: un controllo prezioso, perché se i punti trovati in pianta e in prospetto non coincidono c'è un errore.

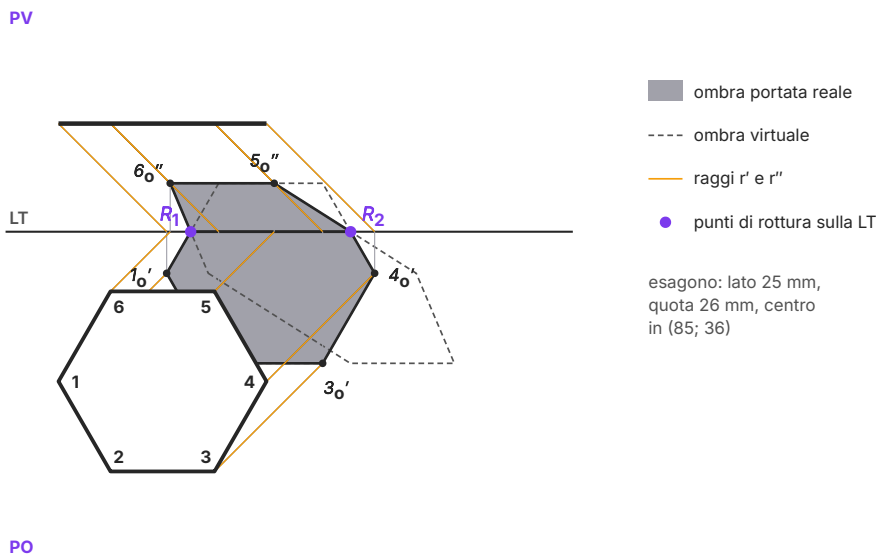


Figura 1.2 Ombra di un esagono regolare parallelo al PO, divisa tra PO e PV. Lato 25 mm, quota 26 mm, centro in (85; 36). I vertici 1–4 hanno aggetto maggiore della quota e gettano ombra sul PO (l'ombra di 2, sotto la lastra, non si vede in pianta), i vertici 5 e 6 sul PV. L'esagono d'ombra sul PO è uguale alla lastra e traslato di 26 mm; quello sul PV è deformato. Le parti reali si incontrano nei punti di rottura R_1 (78,2 mm) e R_2 (39,8 mm), gli stessi in pianta e in prospetto.

ESEMPIO SVOLTO

Una lastra frontale che si spezza. Un quadrato di lato 30 mm è parallelo al PV, all'aggetto 25 mm, con le larghezze da 40 a 70 mm e le quote da 20 a 50 mm.

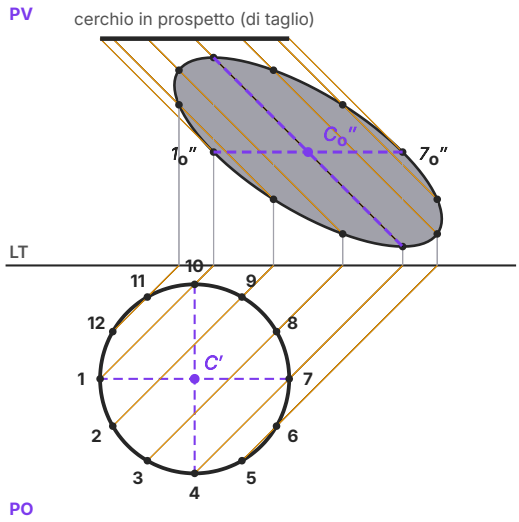
1. I vertici superiori hanno quota 50 > 25: ombra sul PV, in (15; 25) e (45; 25). I vertici inferiori hanno quota 20 < 25: ombra sul PO, in (20; 5) e (50; 5).
2. Il lato superiore è parallelo al PV: la sua ombra è un segmento orizzontale lungo 30 mm, alla quota 25. Il lato inferiore è parallelo al PO: sul PO la sua ombra è parallela alla LT e lunga 30 mm, all'aggetto 5.
3. I lati verticali si spezzano: i loro punti alla quota 25, uguale all'aggetto, hanno l'ombra sulla LT, nei punti di rottura di larghezza $40 - 25 = 15$ e $70 - 25 = 45$.
4. Sul PV l'ombra è il rettangolo largo 30 mm e alto 25 mm sopra la LT; sul PO è il parallelogramma di vertici (15; 0), (45; 0), (50; 5), (20; 5).

La faccia della lastra rivolta verso l'osservatore è in luce: la luce viene dal davanti.

1.3.2 Il cerchio

Un cerchio parallelo al PO getta sul PO, per la regola delle figure parallele, un **cerchio uguale**, con il centro nell'ombra del centro: è la costruzione che hai usato per la base superiore del cilindro. Sul PV, al quale non è parallelo, la sua ombra è invece un'**ellisse**. Si costruisce per punti: si divide la circonferenza in 8 o in 12 parti uguali, si trova l'ombra di ciascun punto con il suo raggio e si uniscono le ombre con una curva continua, aiutandosi con il curvilineo (Figura 1.3).

Due diametri perpendicolari del cerchio diventano due diametri dell'ellisse che non sono più perpendicolari tra loro, ma conservano una proprietà: ciascuno divide a metà le corde parallele all'altro. Si chiamano **diametri coniugati**, e sono utili per controllare il disegno. Il diametro parallelo alla LT, che è parallelo anche al PV, ha un'ombra parallela e uguale: un segmento orizzontale di 50 mm per un cerchio di raggio 25 mm. Il diametro perpendicolare al PV ha un'ombra a 45°, lunga $50 \cdot \sqrt{2} \approx 70{,}7$ mm. Per un cerchio parallelo al PV tutto si ripete scambiando i ruoli dei due piani: sul PV l'ombra è un cerchio uguale, sul PO un'ellisse.



cerchio parallelo al PO:
r = 25 mm, quota 60 mm,
centro in (70; 30)

diametri coniugati:
il diametro parallelo alla LT resta orizzontale (50 mm); quello perpendicolare al PV diventa un segmento a 45° (≈ 70,7 mm)

Figura 1.3 Ombra sul PV di un cerchio parallelo al PO, costruita per 12 punti. Raggio 25 mm, quota 60 mm, centro in (70; 30). In pianta da ogni punto si traccia la parallela a *r'* fino alla LT e si sale con una linea di richiamo; in prospetto la si incontra con la parallela a *r''* uscente dallo stesso punto. Il centro ha l'ombra in C_o'' = (40; 30); i diametri coniugati (in viola) sono le ombre dei due diametri perpendicolari del cerchio.

Un errore da evitare: l'ellisse d'ombra è **esatta**, non un ovale, e non si traccia con il compasso. Più punti costruisci, più il disegno è preciso; con 12 punti, scelti a 30° l'uno dall'altro, la curva è già ben determinata.

1.3.3 Quale faccia è in luce

Per una lastra in posizione qualunque, quale delle due facce è in luce? È quella da cui arriva il raggio: guardando la lastra nella vista in cui appare di taglio (come un segmento), si vede da che parte la colpisce la retta a 45°. Una lastra orizzontale ha in luce la faccia superiore, una lastra frontale quella anteriore, una lastra di profilo quella rivolta a sinistra. La faccia in ombra propria, se si vede in una delle proiezioni, si campisce con il tono chiaro dell'ombra propria.

1.4 Le ombre dei solidi

1.4.1 L'ordine del lavoro

Per un solido il metodo ha sempre le stesse fasi, in quest'ordine:

1. **separatrice**: si individuano le facce (o le generatrici) in luce e quelle in ombra; gli spigoli che separano una faccia in luce da una in ombra formano la separatrice, che si ripassa con

un tratto deciso;

2. **ombra propria**: si campiscono con un tono chiaro le facce in ombra che si vedono in pianta e in prospetto;
3. **ombra portata**: si costruisce l'ombra della separatrice, punto per punto, sul piano a cui ogni punto è più vicino, cercando i punti di rottura quando l'ombra passa dal PO al PV; poi la si campisce con un tono più scuro.

La parte dell'ombra portata che sta sotto il solido, in pianta, o dietro di esso, in prospetto, non si vede e non si campisce: il solido la copre.

1.4.2 Prismi e cilindri

Per i prismi e i cilindri con l'asse verticale la separatrice si trova in pianta, con le rette a 45° parallele a r' tangenti alla base: per il prisma toccano due spigoli verticali, per il cilindro due generatrici. Lo hai fatto in *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 6. Il caso nuovo è quello del solido **vicino al PV**: quando la quota della base superiore supera l'aggetto di uno spigolo, l'ombra di quello spigolo si spezza sulla LT e sale sul PV. Si procede allora come per il segmento verticale: dal piede dello spigolo a 45° fino alla LT, poi verticalmente fino all'ombra della sua cima sul PV; le ombre degli spigoli orizzontali paralleli al PV sono sul PV parallele e uguali a essi, quelle degli spigoli perpendicolari al PV sono inclinate di 45°.

Un cilindro **coricato**, con l'asse parallelo alla LT, ha la separatrice formata da due generatrici orizzontali, ma non si trovano né in pianta né in prospetto: le tangenti utili si vedono nella vista in cui le basi appaiono come cerchi, cioè nel **fianco**, sul piano laterale (Figura 1.4). Nel fianco il raggio proiettato è ancora a 45°; le due tangenti a 45° al cerchio lo toccano agli estremi del diametro perpendicolare alla loro direzione, e quei due punti sono le tracce delle generatrici separatrici, S_1 davanti e in basso, S_2 dietro e in alto. Con le linee di richiamo si riportano in prospetto, dove si vede la separatrice S_1, bassa, e in pianta, dove si vede S_2.

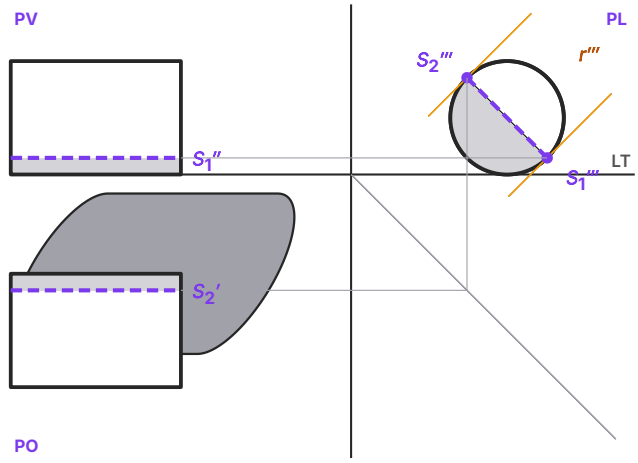


Figura 1.4 Cilindro coricato con l'asse parallelo alla LT (raggio 20 mm, lungo 60 mm, asse all'aggetto 55 mm e alla quota 20 mm). Nel fianco le tangenti parallele a r''' individuano le generatrici separatrici S_1 (quota ≈ 5,9 mm) e S_2 (aggetto ≈ 40,9 mm), riportate con le linee di richiamo. L'ombra portata sul PO è delimitata dalle ombre delle due separatrici, parallele alla LT, e dalle ombre delle basi; la sua larghezza misurata perpendicolarmente alla LT è $2 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} \approx 56{,}6$ mm.

Il cilindro coricato ha due proprietà facili da controllare. Le fasce d'ombra propria visibili sono sottili: in prospetto quella sotto S_1 è alta $r - r/\sqrt{2}$, circa 0,29 volte il raggio; in pianta quella dietro S_2 ha la stessa larghezza. E l'ombra portata, essendo l'ombra di due rette parallele alla LT, è una striscia con i bordi paralleli alla LT, chiusa alle estremità dalle ombre delle basi, che sono cerchi di profilo e diventano sul PO archi d'ellisse.

Se invece il cilindro è coricato con l'**asse perpendicolare al PV**, le basi sono parallele al PV e appaiono come cerchi in prospetto: le tangenti utili sono le parallele a r'', che toccano il cerchio agli estremi del diametro perpendicolare a esse, uno in basso a sinistra e uno in alto a destra. Sono le tracce delle due generatrici separatrici, perpendicolari al PV: sul PO gettano ombre perpendicolari alla LT, sul PV ombre a 45°. In ombra propria resta la metà del cilindro rivolta in basso a destra; in pianta se ne vede la striscia a destra della separatrice alta.

1.4.3 Piramidi e coni: il metodo inverso

Per una piramide o un cono la separatrice non si può trovare con le tangenti a 45°, perché le facce laterali non sono verticali. Si inverte allora l'ordine delle fasi: è il **metodo inverso**. Si trova prima l'ombra portata, poi da essa si ricava la separatrice.

1. Si costruisce l'**ombra del vertice** V_o, con la regola del piano più vicino.
2. Poiché ogni spigolo laterale (o ogni generatrice) unisce il vertice a un punto della base, che sta sul PO ed è ombra di sé stesso, la sua ombra sul PO è il segmento che unisce quel punto a

V_o'. L'ombra portata è quindi la figura racchiusa dalla base e dalle **due tangenti** condotte da V_o' al contorno della base.

3. I punti di tangenza indicano gli spigoli (o le generatrici) che fanno da separatrice: sono quelli la cui ombra coincide con il contorno dell'ombra portata. Le facce dalla parte di V_o' sono in ombra propria.

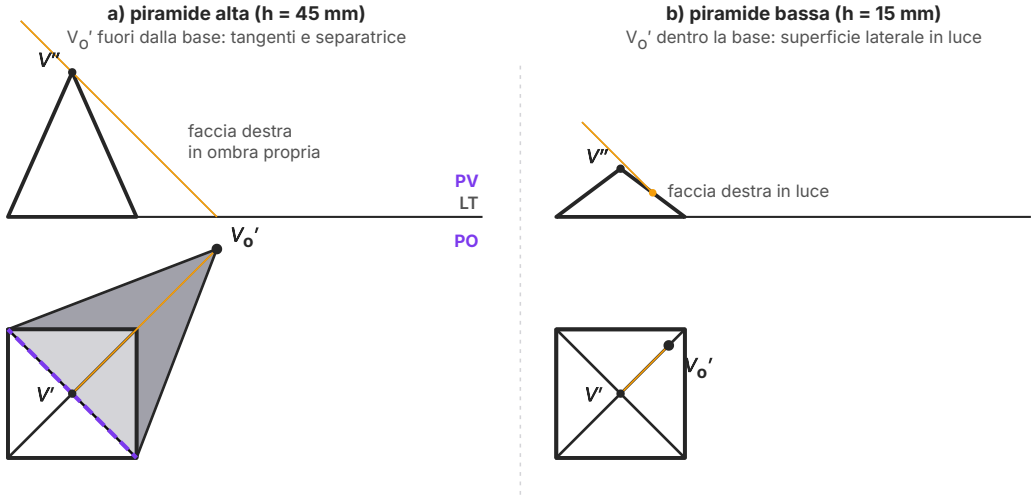


Figura 1.5 Il metodo inverso per una piramide retta a base quadrata (lato 40 mm, centro della base in (110; 55)). a) Altezza 45 mm: V_o' = (65; 10) cade fuori dalla base; le tangenti da V_o' toccano i vertici (130; 35) e (90; 75), e gli spigoli che li uniscono al vertice formano la separatrice. In ombra propria le facce di destra e di dietro. b) Altezza 15 mm: V_o' = (95; 40) cade dentro la base: non c'è separatrice e le facce laterali sono tutte in luce. In prospetto il confronto tra la faccia destra e il raggio a 45° conferma i due risultati.

Che cosa succede se V_o' cade **dentro** la base, come nella piramide bassa della Figura 1.5b? Le tangenti non esistono, l'ombra portata coincide con la base, e nessuno spigolo fa da separatrice: tutta la superficie laterale è in luce. Non è un paradosso. Una piramide molto schiacciata ha le facce poco inclinate, e il sole, che arriva dall'alto con un'inclinazione maggiore della loro, le illumina tutte. Si può verificare senza trigonometria. Nella piramide della figura la faccia di destra contiene rette perpendicolari al PV, quindi in prospetto si vede di taglio, come il lato destro del triangolo. Se quel lato è più ripido di r'' (sale più di quanto avanza: 45 mm su 20 mm), il raggio radente al vertice passa fuori dalla faccia e la faccia è in ombra; se è meno ripido (15 mm su 20 mm), il raggio la colpisce e la faccia è in luce. Il confine è un'altezza uguale a metà del lato: 20 mm.

ESEMPIO SVOLTO

Il metodo inverso con i numeri. Piramide della Figura 1.5a: base quadrata di lato 40 mm con il centro in (110; 55), lati paralleli e perpendicolari alla LT, altezza 45 mm.

1. Vertice V(110; 55; 45): aggetto 55 > quota 45, ombra sul PO in V_o' = (110 − 45; 55 − 45) = (65; 10).
2. La base occupa le larghezze da 90 a 130 e gli aggetti da 35 a 75. V_o' è a destra e verso la LT rispetto alla base: le tangenti condotte da esso toccano il vertice sinistro posteriore (130; 35) e il vertice destro anteriore (90; 75).
3. Separatrice: gli spigoli V–(130; 35) e V–(90; 75). In ombra propria le due facce che stanno tra loro dalla parte di V_o': quella di destra e quella di dietro; in pianta si vedono entrambe.
4. Ombra portata: la figura chiusa dai segmenti da (130; 35) a (65; 10) e da (65; 10) a (90; 75) e dai due lati della base rivolti verso V_o', quello posteriore e quello di destra. Tutti i suoi punti hanno aggetto positivo: l'ombra non raggiunge il PV.

Controllo: la faccia destra in prospetto sale di 45 mm su 20 mm, più ripida del raggio a 45°: è in ombra, come previsto.

Per il **cono** la costruzione è la stessa, con le tangenti da V_o' al cerchio di base: i punti di tangenza T_1 e T_2 sono i piedi delle due generatrici separatrici. Se il cono è alto e vicino al PV, il vertice ha l'ombra reale sul PV e quella virtuale sul PO (Figura 1.6). Il metodo non cambia: le tangenti si tracciano dall'ombra **virtuale** V_o', che si trova dietro la LT; dove incontrano la LT danno i punti di rottura R_1 e R_2, e dai punti di rottura l'ombra prosegue sul PV con due segmenti che si incontrano in V_o''. In prospetto il cono copre una parte della propria ombra sul PV, e della sua ombra propria si vede soltanto la stretta fascia tra la generatrice separatrice anteriore e il contorno destro.

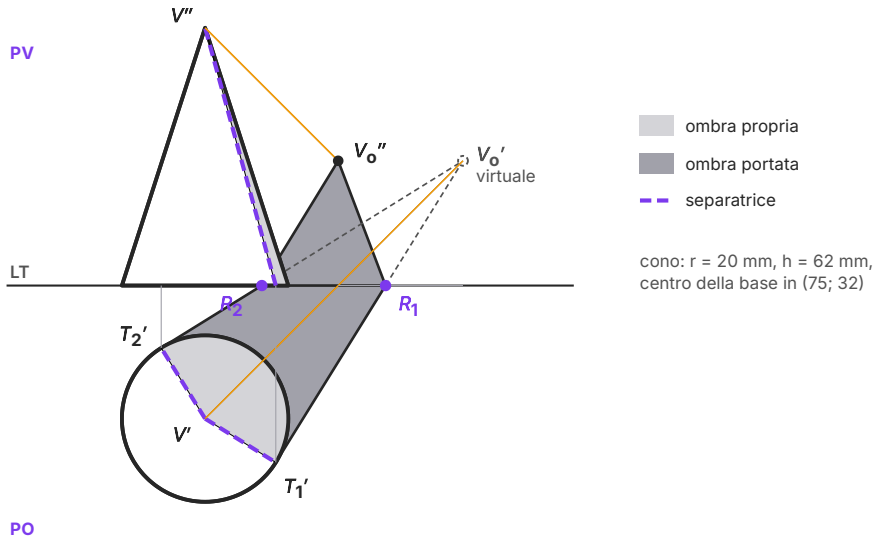


Figura 1.6 Ombra di un cono retto (raggio 20 mm, altezza 62 mm, centro della base in (75; 32)) che cade in parte sul PV. Il vertice ha l'ombra reale V_0'' = (43; 30) sul PV e l'ombra virtuale V_0' = (13; −30). Le tangenti da V_0' al cerchio di base danno le generatrici separatrici T_1 e T_2 e incontrano la LT nei punti di rottura R_1 (≈ 31,6 mm) e R_2 (≈ 61,4 mm), da cui l'ombra sale fino a V_0''.

ERRORE FREQUENTE

Le tangenti a 45° sul cono. Trattare un cono come un cilindro, tracciando le tangenti alla base parallele a r', porta a una separatrice sbagliata: le generatrici di un cono convergono nel vertice e non sono verticali, quindi i piani luminosi tangenti al cono passano per il vertice e non sono paralleli tra loro. Le tangenti vanno condotte dall'ombra del vertice. Lo stesso vale per la piramide, dove le tangenti a 45° sceglierebbero spigoli sbagliati.

1.4.4 Solidi cavi e forati

Un **solido cavo**, come una scatola aperta in alto, ha anche superfici interne, e la luce che entra dall'apertura vi disegna ombre portate dai bordi. Il metodo non cambia: i bordi dell'apertura sono segmenti, e le loro ombre si trovano sul piano interno che il raggio incontra per primo. Prendiamo una vaschetta aperta in alto, con le pareti sottili, profonda 20 mm, con l'interno di 60 × 60 mm (larghezze da 30 a 90, aggetti da 20 a 80). Il bordo della parete sinistra, alla quota 20, getta sul fondo un'ombra parallela a sé stesso e spostata di 20 mm verso destra; il bordo della parete anteriore un'ombra spostata di 20 mm verso il fondo. Sul fondo resta in luce un quadrato di 40 × 40 mm, 1600 mm² su 3600. Le pareti interne di sinistra e anteriore, rivolte dalla parte opposta alla luce, sono in ombra propria; sulle pareti interne di destra e di fondo, in luce, i bordi gettano due triangoli d'ombra, vicino agli angoli.

In un solido **forato** da un foro verticale la luce arriva sul piano d'appoggio solo dove l'apertura superiore, traslata dell'altezza del solido verso destra e verso il fondo, si sovrappone ancora all'apertura inferiore. Un prisma alto 15 mm con un foro quadrato di 30 mm lascia arrivare sul PO un quadratino di luce di 15 × 15 mm; se il prisma fosse alto 30 mm o più, il fondo del foro sarebbe tutto in ombra.

1.5 Ombre portate su altri solidi

Quando più solidi stanno vicini, l'ombra di uno può cadere su un altro, prima di raggiungere il PO o il PV. Il principio resta lo stesso, l'ombra di un punto sulla prima superficie che il suo raggio incontra, ma ora quella superficie può essere una faccia di un altro solido, orizzontale, verticale o inclinata. Due metodi permettono di trovarla senza calcolare un punto alla volta a caso.

1.5.1 Il metodo dei raggi a ritroso

Il **metodo dei raggi a ritroso** parte dall'ombra sul terreno, che è facile da costruire, e risale lungo i raggi. Si disegna l'ombra portata del primo solido sul PO come se il secondo non ci fosse; si guarda dove questa ombra incontra il contorno della base del secondo solido; da quei punti si risale a ritroso, lungo r' in pianta e lungo r'' in prospetto, fino al solido che fa ombra. Si scopre così **quale punto** del primo solido manda la sua ombra sul bordo del secondo; da lì in poi l'ombra prosegue sulle facce del secondo solido, secondo le regole delle rette.

Nella Figura 1.7 un palo alto 55 mm sta davanti e a sinistra di un gradino. La sua ombra sul PO parte dal piede e va a 45° fino al punto K, dove incontra lo spigolo anteriore della base del gradino. Risalendo da K'' lungo r'' si trova il punto C del palo, alla quota 15 mm, che getta ombra proprio in K. La faccia anteriore del gradino è parallela al PV e quindi al palo: l'ombra vi sale verticale, da K fino allo spigolo superiore, alto 20 mm, che riceve l'ombra del punto D del palo, alla quota 35 mm. Oltre, sul piano orizzontale del gradino, l'ombra riprende la direzione di r' e termina nell'ombra della cima, $B_o' = (55; 30)$.

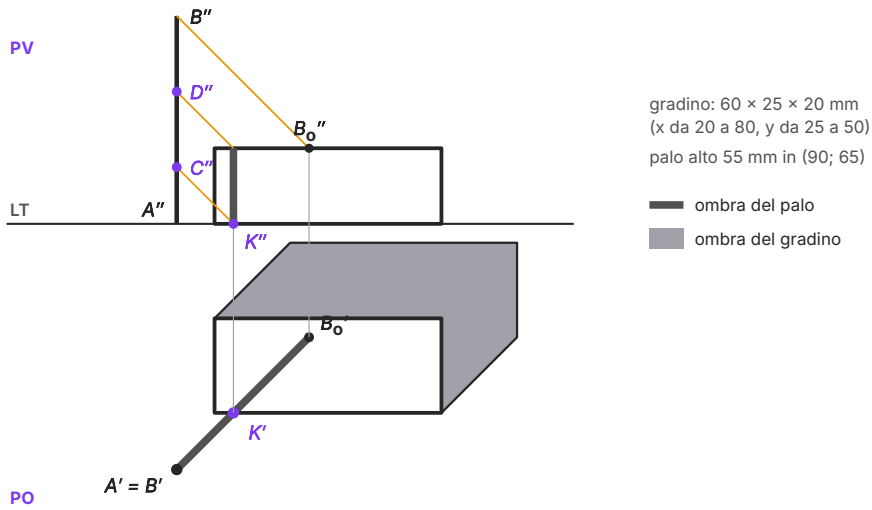


Figura 1.7 Ombra di un palo su un gradino, con il metodo dei raggi a ritroso. Gradino con le larghezze da 20 a 80 mm, gli aggetti da 25 a 50 mm, alto 20 mm; palo alto 55 mm con il piede in (90; 65). 1) Ombra sul PO fino a K = (75; 50). 2) A ritroso da K'' lungo r'': il punto C del palo (quota 15 mm). 3) Sulla faccia anteriore l'ombra sale verticale fino allo spigolo, ombra del punto D (quota 35 mm). 4) Sul piano del gradino l'ombra procede a 45° fino a B_o' = (55; 30). Il gradino getta anche la propria ombra sul PO.

I numeri si controllano con la regola del piano più vicino applicata ai piani del gradino. La faccia anteriore ha aggetto 50: il palo, all'aggetto 65, ne dista 15 mm, quindi i suoi punti tra le quote 15 e 15 + 20 = 35 hanno l'ombra su quella faccia. Il piano superiore ha quota 20: la cima, alla quota 55, ne dista 35 mm, e la sua ombra è spostata di 35 mm verso destra e verso il fondo, in (90 − 35; 65 − 35) = (55; 30), che cade davvero dentro il gradino.

1.5.2 Il metodo del piano luminoso

Quando la superficie che riceve l'ombra è **inclinata**, come la falda di un tetto o la faccia di una piramide, il metodo più sicuro è quello del piano luminoso. Il **metodo del piano luminoso** consiste nel tagliare il solido che riceve l'ombra con il piano luminoso dello spigolo che la produce: l'ombra dello spigolo sta tutta sulla linea di sezione, e il suo estremo è il punto in cui il raggio passante per l'estremo dello spigolo incontra quella linea. Per un palo verticale il piano luminoso è verticale e contiene r': in pianta è la retta a 45° per il piede, e la sezione si costruisce in prospetto come hai imparato in *Disegno e Storia dell'arte 2*, cap. 1, per le sezioni dei solidi.

ESEMPIO SVOLTO

Un palo davanti a una rampa. Una rampa larga quanto basta (larghezze da 30 a 110 mm) sale verso il PV: il suo piano inclinato parte dallo spigolo all'aggetto 60 mm, sul PO, e arriva allo spigolo all'aggetto 20 mm, alla quota 20 mm (sale di 1 mm ogni 2 mm). Davanti alla rampa c'è un palo alto 50 mm con il piede in (100; 80).

1. Sul PO l'ombra del palo va a 45° dal piede fino al piede della rampa, all'aggetto 60: si sposta di 20 mm, quindi arriva in K(80; 60). È l'ombra del punto del palo alla quota 20.
2. Il piano luminoso del palo, in pianta, è la retta a 45° per il piede. Taglia la rampa lungo un segmento che, in pianta, prosegue la stessa retta: l'ombra sulla rampa, in pianta, è ancora a 45°.
3. In prospetto la linea di sezione parte da K'' (80; 0). Lungo la sezione ogni millimetro verso il PV è anche un millimetro verso destra, e la rampa sale di 1 mm ogni 2 mm di aggetto: in prospetto la linea sale di 1 mm ogni 2 mm verso destra.
4. Il raggio per la cima del palo, (100; 80; 50), scende di 1 mm per ogni mm di spostamento. Incontra la linea di sezione dopo 40 mm: nel punto (60; 40; 10). Infatti la rampa all'aggetto 40 è alta $(60 - 40)/2 = 10$ mm, proprio la quota raggiunta dal raggio, $50 - 40 = 10$.

Risultato: l'ombra del palo è una spezzata, dal piede a K(80; 60) sul PO, poi da K al punto (60; 40; 10) sulla rampa. In pianta il secondo tratto è lungo $20 \cdot \sqrt{2} \approx 28{,}3$ mm; nello spazio è lungo 30 mm.

I due metodi si completano. I raggi a ritroso sono comodi quando l'ombra arriva sul secondo solido da terra e le sue facce sono parallele ai piani di proiezione; il piano luminoso è indispensabile per le superfici inclinate o curve, e funziona anche per l'ombra di un segmento non verticale, purché si costruisca il suo piano luminoso con due raggi.

COLLEGAMENTI

Leonardo e le ombre «primitive» e «derivative». Molto prima della geometria descrittiva, Leonardo da Vinci aveva studiato le ombre con l'occhio del pittore e il ragionamento del geometra. Nelle sue note sulla pittura, che dopo la sua morte l'allievo Francesco Melzi raccolse nel cosiddetto *Libro di pittura*, pubblicato in seguito come *Trattato della pittura* (di Leonardo parleremo nel cap. 11), distingue l'ombra «primitiva», attaccata al corpo, cioè la nostra ombra propria, dall'ombra «derivativa», cioè l'ombra portata:

«primitiva è quella che è congiunta nelle superficie del corpo ombroso; derivativa è quell'ombra che si parte dal predetto corpo, e discorre per l'aria, e se trova resistenza si ferma nel luogo dove percuote colla figura della sua propria base». E subito dopo: «Sempre l'ombra primitiva si fa base dell'ombra derivativa» (Leonardo da Vinci, *Trattato della pittura*, parte quinta, § 541; ed. Roma, Unione cooperativa editrice, 1890, p. 180).

La «base» dell'ombra derivativa è proprio ciò che noi chiamiamo separatrice: il contorno dell'ombra portata nasce dal contorno dell'ombra propria. E il «luogo dove percuote» è la superficie che riceve l'ombra, il PO, il PV o la faccia di un altro solido. Anche in matematica ritroverai queste costruzioni: l'ombra prodotta da raggi paralleli è una proiezione parallela, che conserva il parallelismo e i rapporti tra segmenti paralleli, e trasforma un cerchio in un'ellisse.

APPROFONDIMENTO

Quanto è inclinato davvero il raggio a 45°? Le due proiezioni del raggio convenzionale formano 45° con la LT, ma il raggio no. È la diagonale di un cubo, e la sua inclinazione sul PO si legge nel triangolo rettangolo che ha per cateti la diagonale della base, lunga $a\sqrt{2}$, e lo spigolo verticale, lungo a. Per vederlo in vera grandezza si ribalta sul PO il piano verticale che contiene il raggio, ruotandolo attorno a r' (Figura 1.8a): si disegna in pianta la diagonale del quadrato, nel suo estremo si alza la perpendicolare lunga a, e si unisce. Misurando con il goniometro si trova l'**inclinazione vera del raggio luminoso**: circa **35,3°** (35° ± 1° su un disegno accurato).

Il raggio, dunque, è meno inclinato di quanto sembri: per ogni millimetro di discesa percorre in orizzontale $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ mm. Il sole vero può avere un'inclinazione simile in molte ore dell'anno; ma la convenzione non pretende di imitare un'ora precisa: è scelta perché rende le ombre facili da costruire e da misurare.

APPROFONDIMENTO

L'ombra della sfera. Su una sfera i raggi tangenti formano un cilindro che avvolge la sfera lungo una circonferenza massima perpendicolare al raggio: è la separatrice. Nelle proiezioni ortogonali la separatrice appare come un'ellisse, inscritta nel contorno della sfera; il suo asse maggiore è perpendicolare a r' in pianta, e a r'' in prospetto, ed è uguale al diametro (Figura 1.8b). L'ombra portata sul PO è l'ombra della separatrice: un'ellisse con il centro nell'ombra del centro della sfera, l'asse minore uguale al diametro e l'asse maggiore diretto come r', lungo circa 1,73 volte il diametro. La costruzione esatta, per punti, richiede le proiezioni di una circonferenza inclinata, che non affronteremo; qui basta saper riconoscere la forma delle ombre della sfera e saperla rendere con il chiaroscuro.

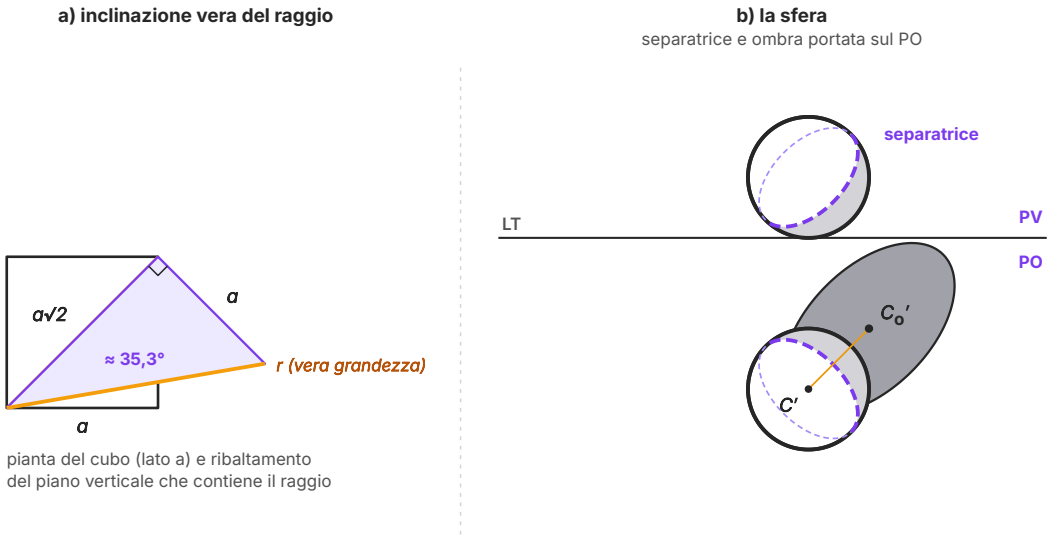


Figura 1.8 Due approfondimenti. a) Inclinazione vera del raggio convenzionale: ribaltando sul PO il piano verticale che contiene il raggio, si ottiene il triangolo rettangolo di cateti $a\sqrt{2}$ e a; l'angolo del raggio con il PO misura circa 35,3°. b) Una sfera di raggio 20 mm appoggiata sul PO, con il centro in (60; 50; 20): la separatrice (in viola, tratteggiata dove è nascosta) è una circonferenza massima che appare come un'ellisse; l'ombra portata è un'ellisse con il centro in C_0' = (40; 30), semiasse minore 20 mm e semiasse maggiore ≈ 34,6 mm.

SINTESI

- L'ombra di un punto è la traccia del suo raggio sul primo piano che il raggio incontra; con la convenzione a 45° cade sul piano a cui il punto è più vicino.
- La traccia del raggio sull'altro piano è l'ombra virtuale: non si vede, si disegna sottile e tratteggiata e serve a costruire le ombre spezzate.
- L'ombra di una retta è l'intersezione del suo piano luminoso con il piano che la riceve: una retta parallela a un piano vi getta un'ombra parallela e uguale; una retta che incontra un piano ha l'ombra che passa per il punto d'incontro.
- Il punto di rottura di un'ombra spezzata si trova sulla LT unendo l'ombra reale di un estremo con quella virtuale dell'altro; il controllo nell'altra vista deve dare lo stesso punto.
- Una lastra parallela al piano che riceve l'ombra vi getta una figura uguale e traslata; sull'altro piano l'ombra è deformata.
- L'ombra di un cerchio su un piano a cui non è parallelo è un'ellisse esatta, da costruire per 8 o 12 punti; le ombre di due diametri perpendicolari sono diametri coniugati.
- Per un solido: separatrice, ombra propria, ombra portata. Per prismi e cilindri verticali la separatrice si trova con le tangenti a 45°; per il cilindro coricato con le tangenti a 45° nel fianco.
- Per piramidi e coni si usa il metodo inverso: ombra del vertice, tangenti da essa alla base, separatrice letta sul solido; se l'ombra del vertice cade dentro la base, la superficie laterale è tutta in luce.
- Nei solidi cavi e forati le ombre dei bordi dell'apertura cadono sulle superfici interne con le stesse regole.
- L'ombra di un solido su un altro si trova con i raggi a ritroso, partendo dall'ombra sul terreno, o con il piano luminoso, sezionando il solido che riceve l'ombra.
- Il raggio convenzionale ha le proiezioni a 45°, ma forma con il PO un angolo di circa 35,3°.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Con la convenzione a 45°, l'ombra reale del punto $P(50; 30; 20)$ cade:
   - **A.** sul PV, nel punto (20; −10);
   - **B.** sul PO, nel punto (30; 10);
   - **C.** sul PO, nel punto (20; 10);
   - **D.** sulla LT.

2. ● L'ombra virtuale di un punto è:
   - **A.** l'ombra di un punto nascosto da un altro corpo;
   - **B.** l'ombra prodotta da una sorgente propria;
   - **C.** la parte più chiara dell'ombra portata;
   - **D.** la traccia del suo raggio sul piano che il raggio incontra dopo averne attraversato un altro.

3. ● Un segmento parallelo al PV, la cui ombra cade tutta sul PV, vi getta un'ombra:
   - **A.** parallela e uguale al segmento;
   - **B.** sempre inclinata di 45°;
   - **C.** più corta del segmento;
   - **D.** perpendicolare alla LT.

4. ● Il punto di rottura di un'ombra spezzata:
   - **A.** è il punto più alto dell'ombra sul PV;
   - **B.** è l'ombra del punto medio del segmento;
   - **C.** sta sulla LT e appartiene sia all'ombra sul PO sia a quella sul PV;
   - **D.** è l'ombra virtuale di un estremo.

5. ● Sul PV, l'ombra di un segmento perpendicolare al PV è:
   - **A.** un punto;
   - **B.** un segmento verticale;
   - **C.** un segmento parallelo alla LT;
   - **D.** un segmento inclinato di 45°, nella direzione di *r*''.

6. ●● L'ombra sul PV di un cerchio parallelo al PO, che cade tutta sul PV, è:
   - **A.** un cerchio uguale, con il centro nell'ombra del centro;
   - **B.** un'ellisse, da costruire per punti;
   - **C.** un ovale a quattro centri;
   - **D.** un segmento orizzontale.

7. ●● Per trovare la separatrice di un cono retto con la base sul PO si tracciano:
   - **A.** le tangenti alla base condotte dall'ombra del vertice;
   - **B.** le tangenti alla base parallele a *r*';
   - **C.** le generatrici di contorno del prospetto;
   - **D.** le tangenti alla base parallele a *r*''.

8. ●● Una piramide retta a base quadrata, di lato 60 mm, ha la base sul PO con i lati paralleli e perpendicolari alla LT. Le sue facce laterali sono tutte in luce se l'altezza è:
   - **A.** 40 mm;
   - **B.** 45 mm;
   - **C.** 25 mm;
   - **D.** 60 mm.

9. ●● Il raggio luminoso convenzionale forma con il PO un angolo:
   A. di 45°, come le sue proiezioni;
   B. di circa 35°, perché è la diagonale di un cubo;
   C. di 30°;
   D. di 60°.

Lessico e norme

10. ● Completa. L'ombra di un punto sul piano che il suo raggio incontra per primo si chiama ombra _____ ; la traccia sull'altro piano è l'ombra _____ e si disegna con un tratto _____ . L'insieme dei raggi che passano per una retta forma il piano _____ . Il punto della LT in cui si piega un'ombra spezzata si chiama punto di _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) L'ombra reale di un punto cade sul piano da cui il punto è più lontano. b) Una lastra orizzontale getta sul PO, se l'ombra vi cade tutta, una figura uguale a sé stessa. c) L'ombra sul PV di un cerchio orizzontale si può tracciare con il compasso. d) Nel metodo inverso si trova la separatrice prima dell'ombra portata. e) Il piede di un palo appartiene alla sua ombra. f) Le ombre virtuali si campiscono come quelle reali.

12. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. Termini: a) piano luminoso; b) punto di rottura; c) metodo inverso; d) diametri coniugati; e) metodo dei raggi a ritroso; f) lastra. Definizioni: 1) figura piana pensata come un cartoncino opaco con due facce; 2) partire dall'ombra sul terreno e risalire lungo i raggi fino al punto che la produce; 3) piano formato dai raggi che passano per una retta; 4) punto della LT comune all'ombra sul PO e a quella sul PV; 5) coppia di diametri di un'ellisse, ciascuno dei quali dimezza le corde parallele all'altro; 6) trovare prima l'ombra del vertice e poi la separatrice.

13. ● In una tavola di ombre trovi queste scritture. Spiega che cosa indica ciascuna: P_o' disegnato con un piccolo cerchio tratteggiato; R_1; V_o'; S_1'''; T_2'.

14. ●● Riordina le fasi della costruzione delle ombre di un cono con la base sul PO: a) campire l'ombra portata con il tono scuro; b) costruire l'ombra del vertice; c) segnare sul solido le generatrici separatrici; d) tracciare dall'ombra del vertice le tangenti alla base; e) campire l'ombra propria con il tono chiaro; f) se l'ombra del vertice è sul PV, trovare i punti di rottura sulla LT.

15. ●● Completa le regole, con la convenzione a 45°. Un palo verticale getta sul PO un'ombra _____ e sul PV un'ombra _____ . Una mensola sottile perpendicolare al PV getta sul PV un'ombra _____ che parte dal _____ . Un cerchio parallelo al PV getta sul PV un _____ e sul PO un'_____.

Costruire

Impaginazione delle tavole. Dove non è detto altro: foglio A4 verticale, squadratura di 190 × 277 mm; LT orizzontale a 140 mm dal bordo superiore della squadratura; origine *O* delle larghezze sulla LT, a 120 mm dal bordo sinistro della squadratura, con *x* crescente verso sinistra; il

piano laterale, quando serve, a destra di *O*. Convenzione del raggio a 45°; misure in mm. Linee di costruzione sottili, ombre virtuali tratteggiate, separatrici ripassate, ombra propria con un tono chiaro e ombra portata con un tono scuro.

16. ● Disegna pianta e prospetto dei punti *A*(90; 45; 20), *B*(70; 15; 40) e *C*(40; 30; 30). Per ciascuno trova l'ombra reale e quella virtuale e scrivine le coordinate.

17. ● Un palo verticale alto 50 mm ha il piede in *A*(80; 25; 0). Disegna la sua ombra spezzata, segna il punto di rottura *R* e calcola la lunghezza del tratto sul PO e di quello sul PV.

18. ●● Costruisci l'ombra del segmento da *A*(100; 40; 15) a *B*(60; 10; 45). Trova il punto di rottura in pianta, con l'ombra virtuale di *B* sul PO, e controllalo in prospetto, con l'ombra virtuale di *A* sul PV.

19. ●● Una mensola sottile, rappresentata dal segmento *CD*, è perpendicolare al PV e vi è attaccata: *C*(70; 50; 30), *D*(70; 0; 30). Disegna la sua ombra, indicando il punto di rottura, e verifica le regole delle rette perpendicolari al PV e delle rette che incontrano un piano.

20. ●● Una lastra quadrata di lato 40 mm è parallela al PV, all'aggetto 20 mm, con le larghezze da 30 a 70 mm e le quote da 10 a 50 mm. Disegna pianta e prospetto della lastra e della sua ombra; scrivi le coordinate dei vertici dell'ombra sul PO e sul PV.

21. ●● Un esagono regolare di lato 20 mm è parallelo al PO, alla quota 35 mm, con il centro in (75; 40) e due vertici sulla retta parallela alla LT che passa per il centro. Costruisci la sua ombra, indica quali vertici la gettano sul PO e quali sul PV, e trova i punti di rottura in pianta e in prospetto.

22. ●● Un cerchio di raggio 20 mm è parallelo al PV, all'aggetto 15 mm, con il centro alla larghezza 70 mm e alla quota 45 mm. a) Disegnane l'ombra (che forma ha? dove sta il centro?). b) Se l'aggetto fosse 30 mm, quali punti del cerchio getterebbero ombra sul PO? Trova i due punti di rottura.

23. ●● Un prisma retto a base quadrata, alto 50 mm, poggia sul PO con le larghezze da 50 a 80 mm e gli aggetti da 10 a 40 mm. Disegna separatrice, ombra propria e ombra portata; trova i punti di rottura e scrivi le coordinate dei vertici dell'ombra sul PV. Quale parte dell'ombra sul PV si vede in prospetto?

24. ●● Una piramide retta a base quadrata di lato 50 mm, con il centro della base in (70; 60) e i lati paralleli e perpendicolari alla LT, è alta 40 mm. a) Costruisci le ombre con il metodo inverso. b) Ripeti con l'altezza di 20 mm. c) Fino a quale altezza le facce laterali restano tutte in luce?

25. ●●● Un cono retto ha la base di raggio 20 mm sul PO, con il centro in (70; 30), ed è alto 60 mm. Costruisci le sue ombre: ombra del vertice reale e virtuale, tangenti, generatrici separatrici, punti di rottura, ombra sul PV.

26. ●●● Un cilindro di raggio 15 mm e lungo 50 mm è coricato sul PO con l'asse parallelo alla LT, all'aggetto 45 mm e alla quota 15 mm, tra le larghezze 40 e 90 mm. Disegna pianta, prospetto e fianco; trova nel fianco le generatrici separatrici e costruisci l'ombra portata. Quanto è larga l'ombra, misurata perpendicolarmente alla LT? Quanto è alta, in prospetto, la fascia d'ombra propria?

27. ●●● Un gradino occupa le larghezze da 30 a 90 mm e gli aggetti da 30 a 55 mm ed è alto 25 mm; davanti a esso un palo alto 60 mm ha il piede in (100; 70). Con il metodo dei raggi a ritroso costruisci l'ombra del palo sul PO e sul gradino, e quella del gradino. Indica quali punti del palo gettano ombra sullo spigolo inferiore e su quello superiore della faccia anteriore.

Leggere il disegno

28. ● Osserva la Figura 1.1c. Verifica con i numeri della didascalia che la retta dal piede del segmento all'ombra virtuale della cima incontra la LT a 40 mm. Perché il tratto d'ombra sul PV è verticale?

29. ●● In un prospetto il punto P'' ha quota 40 mm e la sua ombra P_o'' sta 12 mm più a destra e 12 mm più in basso. Qual è l'aggetto di P? Perché l'ombra non cade sul PO? Dove si trova, in pianta, l'ombra virtuale di P rispetto a P'?

30. ●● Osserva la Figura 1.5. Spiega perché nella piramide bassa non c'è separatrice, e verifica la conclusione con il confronto tra la faccia di destra e il raggio in prospetto. Che cosa succederebbe con un'altezza di 30 mm?

31. ●● Trova l'errore. Per la lastra frontale dell'esempio svolto (larghezze da 40 a 70, aggetto 25, quote da 20 a 50) uno studente ha disegnato sul PV un quadrato d'ombra di lato 30 mm, spostato di 25 mm verso destra e verso il basso, con il lato inferiore 5 mm sotto la LT, e non ha disegnato niente sul PO. Che cosa ha sbagliato? Come si corregge il disegno?

32. ●● Osserva la Figura 1.4. Verifica che l'ombra portata del cilindro, misurata perpendicolarmente alla LT, è larga $2 \cdot r \cdot \sqrt{2}$. Quanto è larga la parte che si vede in pianta dietro il cilindro?

Verso la verifica

33. ●●● Gruppo di solidi. Un cubo di spigolo 40 mm poggia sul PO con le larghezze da 40 a 80 mm e gli aggetti da 25 a 65 mm; davanti a esso un palo alto 70 mm ha il piede in (95; 85). a) Costruisci separatrice, ombra propria e ombra portata del cubo, che si spezza sulla LT. b) Costruisci l'ombra del palo, che sale sul cubo. c) Scrivi le coordinate dei punti di rottura e dell'ombra della cima del palo.

34. ●●● Una vaschetta aperta in alto, con le pareti sottili, ha l'interno di 50 × 40 mm (larghezze da 30 a 80, aggetti da 20 a 60) ed è profonda 25 mm. Disegna la pianta con le ombre sul fondo. Quanta parte del fondo resta in luce? Da quale profondità in su il fondo sarebbe tutto in ombra?

35. ●●● In 12–15 righe spiega a un compagno perché per un prisma la separatrice si trova con le tangenti a 45° e per una piramide con le tangenti dall'ombra del vertice. Usa l'idea di piano luminoso e aiutati con uno schizzo.

PER APPROFONDIRE

- [DOC] M. Docci, R. Migliari, *Scienza della rappresentazione*: le pagine sulla teoria delle ombre, per vedere le stesse costruzioni dal punto di vista della geometria descrittiva.
- [KEM] M. Kemp, *La scienza dell'arte*: le pagine su Leonardo, per capire come gli artisti del Rinascimento ragionavano su luce, ombra e visione.

Glossario del capitolo

Diametri coniugati
Coppia di diametri di un'ellisse, ciascuno dei quali dimezza le corde parallele all'altro; sono le ombre (o le proiezioni) di due diametri perpendicolari di un cerchio.

Inclinazione vera del raggio luminoso
Angolo tra il raggio convenzionale e il PO: circa 35,3°, anche se le sue proiezioni formano 45° con la LT.

Lastra
Figura piana pensata come un cartoncino sottile e opaco: ha una faccia in luce e una in ombra propria.

Metodo dei raggi a ritroso
Si costruisce l'ombra di un solido sul terreno e, dove essa incontra un altro solido, si risale lungo i raggi fino al punto che la produce.

Metodo del piano luminoso
Si seziona il solido che riceve l'ombra con il piano luminoso dello spigolo che la produce: l'ombra sta sulla linea di sezione.

Metodo inverso
Costruzione delle ombre di piramidi e coni: prima l'ombra del vertice e le tangenti condotte da essa alla base, poi la separatrice letta sul solido.

Ombra del vertice
Ombra del vertice di una piramide o di un cono, indicata con V_o; se cade dentro la base, la superficie laterale è tutta in luce.

Ombra di una retta
Intersezione del piano luminoso della retta con il piano che riceve l'ombra; con la sorgente impropria è ancora una retta.

Ombra reale
Traccia del raggio luminoso che passa per un punto sul primo piano che il raggio incontra; è l'ombra che si vede.

Ombra virtuale
Traccia dello stesso raggio sul piano che esso incontrerebbe dopo averne attraversato un altro; non si vede, si disegna sottile e tratteggiata e serve alla costruzione.

Piano luminoso
Piano formato dai raggi luminosi che passano per una retta; la sua intersezione con una superficie è l'ombra della retta su quella superficie.

Punto di rottura
Punto della LT in cui un'ombra spezzata passa dal PO al PV; appartiene a entrambe le ombre e si trova con un'ombra virtuale.

Regola delle figure parallele
Una figura parallela a un piano getta su di esso un'ombra uguale e traslata; per un segmento, un'ombra parallela e uguale.

Solido cavo
Solido con una cavità aperta all'esterno, come una scatola senza coperchio; la luce che entra dall'apertura porta ombre sulle superfici interne.

Soluzioni

1. B. L'aggetto (30) supera la quota (20): l'ombra è sul PO, spostata di 20 mm, in (50 − 20; 30 − 20) = (30; 10).

2. D. È la traccia «oltre» il primo piano incontrato, in una regione che non appartiene al primo diedro.

3. A. Regola delle figure parallele: i raggi traslano tutti i punti del segmento della stessa quantità.

4. C. È il punto in cui l'ombra passa da un piano all'altro: appartiene a entrambi.

5. D. Il piano luminoso della retta contiene la direzione del raggio, e sul PV la traccia ha la direzione di r''.

6. B. Il cerchio non è parallelo al PV: la sua ombra è deformata in un'ellisse esatta, non in un ovale.

7. A. Metodo inverso: le generatrici convergono nel vertice, e le tangenti utili partono dall'ombra del vertice.

8. C. Le facce sono in luce se l'ombra del vertice cade dentro la base, cioè se l'altezza è minore di metà del lato (30 mm): solo 25 mm.

9. B. È inclinato di circa 35,3°: il cateto verticale è a, quello orizzontale $a\sqrt{2}$.

10. reale; virtuale; sottile e tratteggiato; luminoso; rottura.

11. a) F: cade sul piano a cui il punto è più **vicino**. b) V (regola delle figure parallele). c) F: è un'ellisse, da costruire per punti. d) F: si trova prima l'ombra portata (ombra del vertice e tangenti), poi la separatrice. e) V: il piede sta sul PO ed è ombra di sé stesso. f) F: si disegnano soltanto con un tratto sottile tratteggiato, come aiuto alla costruzione.

12. a–3; b–4; c–6; d–5; e–2; f–1.

13. P_o' tratteggiato: ombra virtuale di P sul PO (il punto è più vicino al PV). R_1: un punto di rottura sulla LT. V_o': ombra del vertice di una piramide o di un cono sul PO, reale o virtuale. S_1''': proiezione nel fianco (sul piano laterale) di una generatrice separatrice. T_2': in pianta, punto di tangenza di una tangente condotta dall'ombra del vertice alla base, piede di una generatrice separatrice.

14. b, d, f, c, e, a (f e c si possono anche scambiare). Metodo inverso: prima l'ombra del vertice e le tangenti, poi la separatrice e le campiture.

15. inclinata di 45° (direzione di r'); verticale; inclinata di 45° (direzione di r''); punto di attacco (il punto in cui la mensola incontra il PV); cerchio uguale; ellisse.

16. A: aggetto 45 > quota 20, ombra reale sul PO in (70; 25), virtuale sul PV in (45; −25). B: quota 40 > aggetto 15, ombra reale sul PV in (55; 25), virtuale sul PO in (30; −25). C: aggetto e quota uguali (30): l'ombra cade sulla LT, alla larghezza 10; reale e virtuale coincidono.

17. Il palo è più alto (50) del suo aggetto (25): l'ombra si spezza. Sul PO va a 45° dal piede (80; 25) fino a R, sulla LT alla larghezza 80 − 25 = 55; il tratto è lungo $25 \cdot \sqrt{2} \approx 35{,}4$ mm. Sul PV sale verticale da R fino a B_o'' = (55; 50 − 25) = (55; 25): 25 mm.

18. A_o' = (85; 25) sul PO; B_o'' = (50; 35) sul PV. In pianta l'ombra virtuale di B è (15; −35): la retta da (85; 25) a (15; −35) incontra la LT a 85 − 25/60 · 70 ≈ 55,8 mm. In prospetto l'ombra virtuale di A è (60; −25): la retta da (60; −25) a (50; 35) incontra la LT a 60 − 25/60 · 10 ≈ 55,8 mm. Stesso punto R: l'ombra è $A_o' \to R$ sul PO, $R \to B_o''$ sul PV.

19. D sta sul PV ed è ombra di sé stesso. I punti di CD con aggetto minore della quota (30) hanno ombra sul PV: segmento a 45° (direzione di r'') da D'' = (70; 30) fino alla LT, in R = (40; 0), lungo $30 \cdot \sqrt{2} \approx 42{,}4$ mm. I punti con aggetto da 30 a 50 hanno ombra sul PO: segmento perpendicolare alla LT da R a C_o' = (40; 20), lungo 20 mm come il tratto di mensola che lo produce (è parallelo al PO).

20. I vertici superiori (quota 50 > 20) hanno ombra sul PV: (10; 30) e (50; 30). I vertici inferiori (quota 10

< 20) sul PO: (20; 10) e (60; 10). I lati verticali si spezzano alla quota 20, sulla LT, nei punti di larghezza 10 e 50. Sul PV: rettangolo da (10; 0) a (50; 30), largo 40 e alto 30. Sul PO: parallelogramma (10; 0), (50; 0), (60; 10), (20; 10). La faccia anteriore della lastra è in luce.

21. Vertici (95; 40), (85; 57,3), (65; 57,3), (55; 40) con aggetto maggiore di 35: ombre sul PO, traslate di 35 mm, in (60; 5), (50; 22,3), (30; 22,3), (20; 5). Vertici (65; 22,7) e (85; 22,7), con aggetto minore della quota: ombre sul PV in (42,3; 12,3) e (62,3; 12,3). Punti di rottura sulla LT a ≈ 22,9 mm e ≈ 57,1 mm, gli stessi in pianta e in prospetto.

22. a) Tutti i punti hanno quota almeno 25 > 15: l'ombra è sul PV, un cerchio uguale di raggio 20 mm con il centro in (55; 30) (regola delle figure parallele). b) Con aggetto 30 cadono sul PO i punti con quota minore di 30, cioè l'arco inferiore tra i due punti del cerchio alla quota 30, che stanno alle larghezze $70 \pm \sqrt{(20^2 - 15^2)} \approx 83{,}2$ e 56,8. Le loro ombre sono sulla LT: punti di rottura a 83,2 − 30 ≈ 53,2 mm e 56,8 − 30 ≈ 26,8 mm. Sul PO l'ombra dell'arco è un arco d'ellisse.

23. In luce le facce di sinistra (larghezza 80), anteriore (aggetto 40) e superiore. Separatrice: spigolo verticale in (80; 10), spigolo superiore posteriore, spigolo superiore destro, spigolo verticale in (50; 40). Ombre: dal piede (80; 10) a 45° fino a R_1 = (70; 0); sul PV (70; 0) → (70; 40) → (40; 40) → (10; 10) → R_2 = (10; 0); sul PO da R_2 al piede (50; 40). In prospetto il prisma copre le larghezze da 50 a 80: dell'ombra sul PV si vede solo la parte a destra del prisma, tra le larghezze 10 e 50.

24. a) V_o' = (70 − 40; 60 − 40) = (30; 20), fuori dalla base (larghezze da 45 a 95, aggetti da 35 a 85). Le tangenti toccano i vertici (95; 35) e (45; 85); separatrice: gli spigoli che li uniscono al vertice; in ombra propria le facce di destra e di dietro. b) V_o' = (50; 40), dentro la base: nessuna separatrice, facce laterali tutte in luce, ombra portata coincidente con la base. c) Finché l'altezza non supera metà del lato, 25 mm (a 25 mm le facce di destra e di dietro sono parallele al raggio e lo ricevono di striscio).

25. Vertice (70; 30; 60): quota maggiore dell'aggetto, ombra reale V_o'' = (40; 30), virtuale V_o' = (10; −30). Tangenti da (10; −30) al cerchio: punti di tangenza ≈ (52,9; 40,4), davanti a destra, e ≈ (80,4; 12,9), dietro a sinistra; sono i piedi delle generatrici separatrici. Le tangenti incontrano la LT a ≈ 28,3 mm e ≈ 59,2 mm: sono i punti di rottura, da cui l'ombra sale sul PV fino a (40; 30). In prospetto si vede una stretta fascia d'ombra propria tra la generatrice per (52,9; 40,4) e il contorno destro.

26. Nel fianco le tangenti a 45° toccano il cerchio in S_1 (aggetto ≈ 55,6; quota ≈ 4,4) e S_2 (aggetto ≈ 34,4; quota ≈ 25,6). L'ombra di S_1 sul PO è la retta parallela alla LT all'aggetto 55,6 − 4,4 ≈ 51,2; quella di S_2 all'aggetto 34,4 − 25,6 ≈ 8,8: l'ombra è larga $15 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 42{,}4$ mm, ed è tutta sul PO. In prospetto la fascia d'ombra propria va dal PO alla quota $15 - 15/\sqrt{2} \approx 4{,}4$ mm.

27. Ombra del palo sul PO dal piede (100; 70) a 45° fino allo spigolo anteriore della base del gradino, aggetto 55: K = (85; 55); a ritroso, è l'ombra del punto C del palo alla quota 15. Sulla faccia anteriore l'ombra sale verticale fino alla quota 25, ombra del punto D alla quota 15 + 25 = 40. Sul piano del gradino l'ombra prosegue a 45° fino all'ombra della cima, (100 − 35; 70 − 35) = (65; 35), dentro il gradino. Il gradino getta sul PO l'ombra del suo contorno superiore traslata di 25 mm: il rettangolo da (5; 5) a (65; 30), tolta la base.

28. Il piede è (60; 20), l'ombra virtuale della cima (15; −25): la retta scende di 45 mm in aggetto su 45 mm in larghezza, e per arrivare da aggetto 20 ad aggetto 0 si sposta di 20 mm: 60 − 20 = 40. Il tratto sul PV è verticale perché il segmento è parallelo al PV (regola delle figure parallele).

29. L'ombra si sposta in prospetto di una quantità uguale all'aggetto: aggetto 12 mm. Cade sul PV perché l'aggetto (12) è minore della quota (40). L'ombra virtuale sul PO è spostata della quota: 40 mm a destra di P', con aggetto 12 − 40 = −28, cioè 28 mm oltre la LT, nella parte del foglio sopra la LT.

30. L'ombra del vertice (95; 40) cade dentro la base: non ci sono tangenti, quindi nessuno spigolo fa da separatrice. In prospetto la faccia di destra sale di

15 mm su 20: è meno ripida del raggio a 45°, che la colpisce. Con un'altezza di 30 mm la faccia salirebbe di 30 su 20, più ripida del raggio: le facce di destra e di dietro sarebbero in ombra propria e l'ombra del vertice, (80; 25), cadrebbe fuori dalla base.

31. Ha ignorato che i punti con quota minore dell'aggetto (25) hanno l'ombra reale sul PO: la striscia del quadrato sotto la LT è un'ombra virtuale. Correzione: sul PV resta il rettangolo tra la LT e la quota 25 (larghezze da 15 a 45); il tratto sotto la LT si disegna tratteggiato o si cancella; sul PO si aggiunge il parallelogramma (15; 0), (45; 0), (50; 5), (20; 5).

32. Le ombre delle separatrici sono all'aggetto $55 + 20(\sqrt{2} - 1) \approx 63{,}3$ e $55 - 20(1 + \sqrt{2}) \approx 6{,}7$: differenza $20 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 56{,}6$ mm. In pianta il cilindro copre gli aggetti da 35 a 75: dietro di esso si vede la striscia da 35 a 6,7, larga $\approx 28{,}3$ mm, cioè $r\sqrt{2}$.

33. a) In luce le facce di sinistra, anteriore e superiore; separatrice: spigolo verticale in (80; 25), spigolo superiore posteriore, spigolo superiore destro, spigolo verticale in (40; 65). Lo spigolo in (80; 25) è più alto (40) del suo aggetto: ombra sul PO fino a $R_1 = (55; 0)$, poi sul PV fino a (55; 15). Lo spigolo superiore posteriore ha ombra sul PV da (55; 15) a (15; 15). Lo spigolo superiore destro ha ombra sul PV da (15; 15) a $R_2 = (0; 0)$ e sul PO da (0; 0) a (0; 25). Lo spigolo verticale in (40; 65) ha ombra sul PO da (40; 65) a (0; 25). b) Ombra del palo sul PO da (95; 85) a $K = (75; 65)$, sullo spigolo anteriore della base; sulla faccia anteriore sale verticale fino alla quota 40 (punti del palo da quota 20 a quota 60); sul piano superiore prosegue a 45° fino a (65; 55). c) $R_1 = (55; 0)$, $R_2 = (0; 0)$; ombra della cima del palo (65; 55; 40), sulla faccia superiore del cubo.

34. Il bordo della parete sinistra getta sul fondo una striscia d'ombra larga 25 mm, quello della parete anteriore una striscia profonda 25 mm. Resta in luce un rettangolo di $(50 - 25) \times (40 - 25) = 25 \times 15 = 375$ mm^2, su 2000 mm^2 di fondo. Il fondo sarebbe tutto in ombra con una profondità di almeno 40 mm (la minore delle due dimensioni interne).

35. *Traccia di risposta.* La separatrice è fatta dagli spigoli (o dalle generatrici) dove un piano luminoso tocca il solido senza entrarvi. Negli spigoli verticali di un prisma i piani luminosi sono tutti verticali e paralleli a r': in pianta sono rette a 45°, e quelle tangenti alla base individuano gli spigoli. Gli spigoli di una piramide passano tutti per il vertice: i piani luminosi utili contengono il raggio per il vertice e tagliano il PO lungo rette che passano per V_o'; per questo le tangenti partono dall'ombra del vertice. Il confronto mostra che l'ombra portata viene prima, nel caso della piramide, e che se V_o' cade dentro la base non c'è separatrice.