CAPITOLO

6

Primi elementi di teoria delle ombre

Un'ombra è un disegno che la luce fa da sé: per leggerla basta sapere da dove viene la luce.

OBIETTIVI

1. Distinguere la sorgente propria e la sorgente impropria e prevedere la forma e la lunghezza delle ombre.
2. Usare con precisione i termini ombra propria, ombra portata, ombra autoportata, linea separatrice, penombra.
3. Costruire nelle proiezioni ortogonali, con la convenzione a 45°, le ombre di punti, segmenti, figure piane, prismi e cilindri.
4. Costruire in assonometria le ombre di solidi e di semplici volumi architettonici, con il sole e con una lampada.
5. Rendere il volume di un corpo con il chiaroscuro e una scala tonale.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 La luce e le sue sorgenti 2
6.2 Il vocabolario delle ombre 4
6.3 Le ombre nelle proiezioni ortogonali 5
6.4 Le ombre in assonometria 11
6.5 Il chiaroscuro 14

Disegno e Storia dell'arte 2 · Parte II · L'assonometria e le ombre · versione 1.0
Capitolo 6: Primi elementi di teoria delle ombre · pagine 149–170 del volume completo · estratto per lo studio

Una mattina di sole, in piazza: il campanile proietta sul selciato una lunga striscia scura che, ora dopo ora, ruota e si accorcia; la facciata della chiesa ha un lato chiaro e uno in ombra; sotto il portico la luce entra di sbieco e disegna sul pavimento il ritmo delle colonne. Senza pensarci, da quelle ombre capiamo dove sta il sole, quanto sono alti gli edifici, quanto sporge una cornice. Le ombre non sono un dettaglio: sono informazioni sulla forma.

Nel volume 1 (cap. 7) hai incontrato la luce, l'ombra propria, l'ombra portata e il chiaroscuro come *categorie* per guardare un'opera d'arte. In questo capitolo diventano un **metodo di disegno**: impari a costruire con riga e squadra l'ombra di punti, segmenti e solidi, nelle proiezioni ortogonali e in assonometria, e a rendere il volume con i toni del chiaroscuro. Studieremo soltanto i **fondamenti**, come chiedono le Indicazioni nazionali per il primo biennio: la teoria delle ombre vera e propria, sistematica, e le ombre in prospettiva si affrontano nel secondo biennio.

6.1 La luce e le sue sorgenti

6.1.1 Raggi luminosi e sorgenti

Nel disegno delle ombre la luce si descrive con un modello semplice: una **sorgente luminosa** emette **raggi luminosi** rettilinei, e un corpo opaco ferma i raggi che lo colpiscono. Dietro il corpo resta una regione di spazio che i raggi non raggiungono: è l'ombra. Ogni costruzione di questo capitolo nasce da questa idea, ed è la stessa delle proiezioni: i raggi luminosi sono «raggi proiettanti», e un'ombra è una proiezione del contorno di un corpo sulla superficie che la riceve.

Si distinguono due tipi di sorgente, a seconda della distanza (Figura 6.1).

- La **sorgente propria** è una sorgente puntiforme a distanza finita: una lampadina, una candela, un lampione. I suoi raggi escono tutti da un punto, L, e sono **divergenti**. L'insieme dei raggi che sfiorano un corpo forma un cono (o una piramide) d'ombra con il vertice in L; per questo l'ombra di un oggetto è tanto più lunga quanto più l'oggetto è lontano dalla lampada, e un oggetto avvicinato alla lampada fa un'ombra più grande. Il piede della sorgente sul piano d'appoggio, cioè la sua proiezione verticale, si indica con L'.
- La **sorgente impropria** è una sorgente così lontana da poterla considerare all'infinito: è il caso del Sole, che dista dalla Terra circa 150 milioni di chilometri. I suoi raggi, nello spazio di un edificio o di un foglio da disegno, sono **paralleli**. L'ombra di un corpo è allora un cilindro (o un prisma) d'ombra, e due pali uguali fanno ombre uguali e parallele, ovunque si trovino.

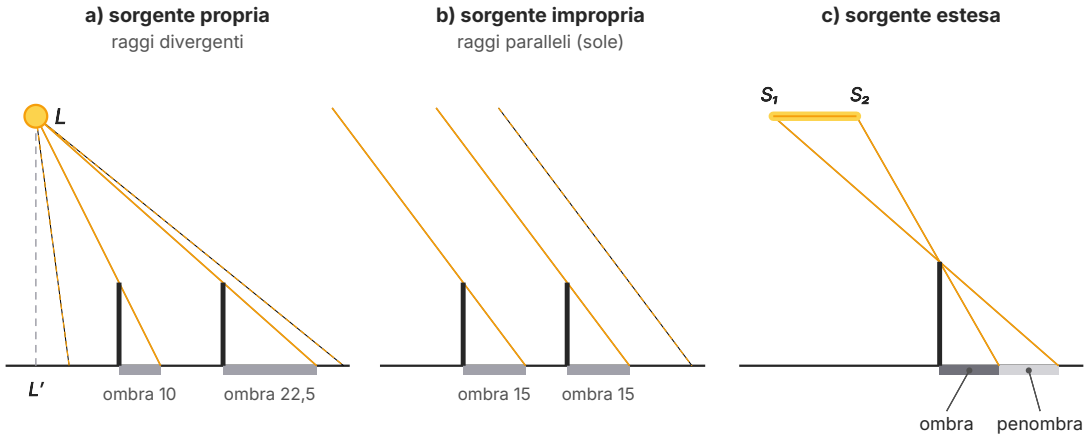


Figura 6.1 Sorgente propria, impropria ed estesa. a) Lampada L alta 60 unità sul suo piede L': due pali alti 20, a 20 e a 45 unità da L', fanno ombre di 10 e 22,5 (triangoli simili: 20 · 20/40 e 45 · 20/40). b) Sole: raggi paralleli, ombre uguali (15) per pali uguali. c) Sorgente estesa S_1S_2: dietro il palo una zona d'ombra, che non vede nessun punto della sorgente, e una zona di penombra, che ne vede una parte.

Con la sorgente propria la lunghezza delle ombre si calcola con i triangoli simili (il teorema di Talete che conosci dalla matematica). Nella figura il raggio che sfiora la cima di un palo alto h scende da L, alto H, fino a terra: il triangolo formato dalla lampada con il suo piede e quello formato dal palo con la sua ombra sono simili, e se d è la distanza del palo da L' l'ombra è lunga $d \cdot h : (H - h)$. Con $H = 60$ e $h = 20$, un palo a 20 unità fa un'ombra di 10, uno a 45 unità un'ombra di 22,5. Con il sole, invece, conta solo l'inclinazione dei raggi: pali uguali, ombre uguali.

6.1.2 Sorgenti estese e penombra

Le sorgenti vere non sono punti: un tubo al neon, una finestra illuminata, il disco del Sole hanno una certa estensione. Si parla allora di **sorgente estesa**. Dietro un corpo si formano due zone (Figura 6.1c): una zona che non riceve luce da nessun punto della sorgente, l'ombra piena, e intorno una zona che riceve luce solo da una parte della sorgente, la **penombra**. Il passaggio dalla luce all'ombra è così graduale, e il contorno dell'ombra appare sfumato; più il corpo è vicino alla superficie che riceve l'ombra, più la penombra è stretta e il contorno netto. Nel disegno tecnico delle ombre si trascura la penombra e si lavora con sorgenti puntiformi, che danno contorni netti; ne terremo conto, invece, quando parleremo di chiaroscuro.

DA RICORDARE

Due sorgenti, due geometrie. Sorgente propria: raggi divergenti da un punto L, ombre che si allungano allontanandosi da L', costruzione con i triangoli simili. Sorgente impropria: raggi paralleli, ombre parallele, costruzione con una direzione fissa. In entrambi i casi l'ombra di un punto si trova nello stesso modo: dove il raggio che passa per il punto incontra la superficie.

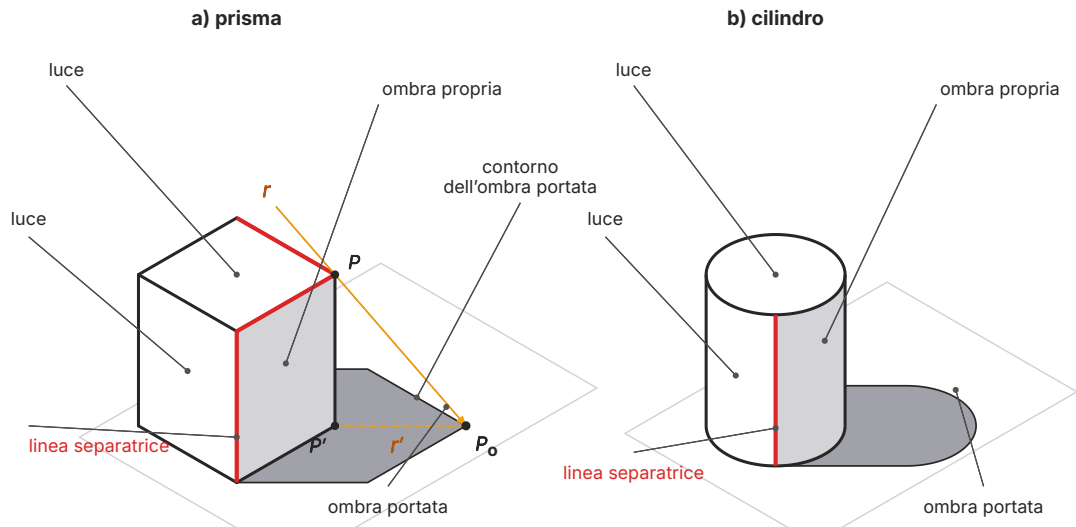


Figura 6.2 Il vocabolario delle ombre su un prisma (30 × 30 × 40) e su un cilindro (raggio 15, altezza 40), in isometria convenzionale, sotto il sole. La linea separatrice è in rosso; il contorno dell'ombra portata è l'ombra della separatrice. Il raggio r che passa per il vertice P incontra il terreno in P_0, sulla retta r' tracciata dal piede P'.

6.2 Il vocabolario delle ombre

6.2.1 Ombra propria, ombra portata, linea separatrice

Osserva un prisma e un cilindro illuminati dal sole (Figura 6.2). Sul corpo stesso alcune facce sono colpite dai raggi e altre no. Si chiama **ombra propria** la parte della superficie di un corpo che non è raggiunta dalla luce perché è rivolta dalla parte opposta alla sorgente. Si chiama invece **ombra portata** l'ombra che il corpo getta su un'altra superficie: il terreno, una parete, un altro oggetto. Se l'ombra portata cade su una parte dello stesso corpo, come l'ombra di una cornice sporgente sulla facciata che la regge, si parla di **ombra autoportata**.

Tra la parte illuminata e l'ombra propria corre una linea, la **linea separatrice** (o separatrice d'ombra propria). In un poliedro è una linea spezzata formata da spigoli: ciascuno di essi divide una faccia in luce da una faccia in ombra. In un cilindro sono due generatrici, quelle in cui i raggi sono tangenti alla superficie; in una sfera è una circonferenza massima. La separatrice è

la linea più importante di tutta la costruzione, perché l'**contorno dell'ombra portata** è l'ombra della linea separatrice: basta trovare l'ombra della separatrice, punto per punto, e il contorno è disegnato.

6.2.2 L'ombra di un punto

Tutto si riduce a un'operazione: l'**ombra di un punto** P su una superficie è il punto in cui il raggio luminoso che passa per P incontra quella superficie. La si indica con P_o (la «o» sta per ombra). Se la superficie è il terreno orizzontale, il modo più semplice di trovarla è usare il piede P' del punto: il raggio r per P e la sua proiezione orizzontale r' per P' stanno nello stesso piano verticale, e si incontrano proprio in P_o (Figura 6.2a). L'ombra di un segmento si trova unendo le ombre dei suoi estremi, se cade tutta su una stessa superficie piana; l'ombra di un poliedro, unendo le ombre dei vertici della separatrice.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Ombra propria o portata?** Una faccia scura del corpo non è un'«ombra portata sul corpo» solo perché è scura. È ombra propria se è rivolta dalla parte opposta alla luce (la separatrice la delimita); è ombra autoportata se sarebbe rivolta verso la luce ma un'altra parte del corpo le sta davanti. Un indizio sicuro: il contorno di un'ombra propria è sempre fatto di spigoli o di generatrici del corpo; il contorno di un'ombra portata, in generale, no.

6.3 Le ombre nelle proiezioni ortogonali

6.3.1 La convenzione del raggio a 45°

Nelle proiezioni ortogonali la direzione della luce si può scegliere liberamente, ma per i disegni tecnici e d'architettura si usa quasi sempre una scelta fissa, la **convenzione del raggio a 45°**: il raggio luminoso è parallelo alla diagonale di un cubo che ha le facce parallele ai piani di proiezione, e va dal vertice in alto, a sinistra e davanti al vertice opposto, in basso, a destra e dietro (Figura 6.3). La luce arriva quindi **dall'alto, da sinistra e dal davanti**, cioè da dietro le spalle di chi guarda il prospetto, verso il PV.

Le proiezioni del raggio sono le proiezioni della diagonale del cubo, cioè le diagonali delle sue facce: in prospetto r'' e in pianta r' sono **entrambe inclinate di 45° sulla LT**. r'' scende da sinistra verso destra; r' sale da sinistra verso destra, verso la LT, perché il raggio va verso il PV. Con una squadra a 45° si tracciano tutte le parallele necessarie, senza misurare angoli.

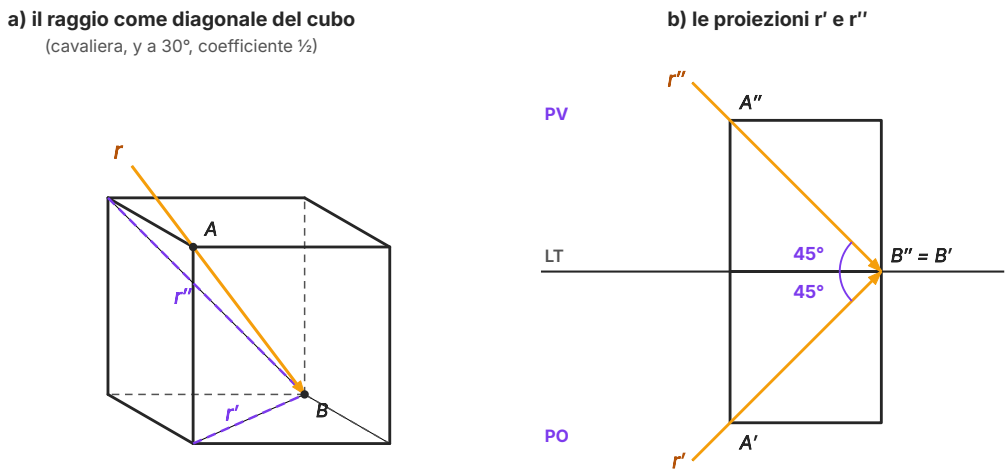


Figura 6.3 La convenzione del raggio a 45°. a) Il raggio *r* è parallelo alla diagonale *AB* di un cubo con le facce parallele ai piani di proiezione; le sue proiezioni sono le diagonali delle facce (*r'* sulla faccia di base, *r''* sulla faccia posteriore). Cavaliera con l'asse *y* a 30° e coefficiente ½: con l'asse a 45° il raggio e *r''* apparirebbero paralleli. b) In proiezioni ortogonali *r'* e *r''* formano angoli di 45° con la LT.

Attenzione: il raggio vero **non** è inclinato di 45° sul terreno. La diagonale del cubo è più inclinata sulla diagonale di base che sullo spigolo: se lo spigolo è lungo 50 mm, la diagonale di base è lunga $50 \cdot \sqrt{2} \approx 70{,}7$ mm, e il raggio sale di 50 mm su 70,7 mm di percorso orizzontale. Disegnando in vera grandezza questo triangolo rettangolo (con una rotazione o un ribaltamento, come nel volume 1) si misura un angolo di circa 35°. Sono le sue proiezioni, non il raggio, a formare 45° con la LT.

La convenzione ha un vantaggio prezioso. Poiché *r'* e *r''* sono a 45°, nel percorso del raggio gli spostamenti in larghezza, in profondità e in altezza sono uguali: per ogni millimetro di discesa il raggio si sposta di un millimetro verso destra e di un millimetro verso il PV. Ne segue una regola di controllo semplicissima, che useremo continuamente.

IN SINTESI

Con la convenzione a 45° l'ombra di un punto P, di larghezza x, aggetto y e quota z, cade sul piano che il raggio incontra per primo:

- se $z < y$ (il punto è più basso di quanto sia lontano dal PV) cade sul **PO**, spostata in pianta di z verso destra e di z verso la LT: $P_o' = (x - z; y - z)$;
- se $y < z$ cade sul **PV**, spostata in prospetto di y verso destra e di y verso il basso: $P_o'' = (x - y; z - y)$;
- se $y = z$ cade sulla LT.

Sul PV, quindi, l'ombra di un punto si sposta in basso e a destra di una quantità uguale alla sua distanza dalla parete: un buon controllo di ogni costruzione, e il motivo per cui nei disegni d'architettura le ombre «misurano» le sporgenze.

6.3.2 L'ombra di un punto

La costruzione è sempre la stessa: si tracciano per P'' la parallela a r'' e per P' la parallela a r', e si guarda quale delle due raggiunge per prima la LT (Figura 6.4a e b).

ESEMPIO SVOLTO

Ombra del punto P(30; 30; 18), in mm, con la convenzione a 45°.

1. Per P'' traccia la retta a 45° che scende verso destra (r''): incontra la LT nel punto di larghezza 30 − 18 = 12 mm, perché scende di 18 mm (la quota di P).
2. Per P' traccia la retta a 45° che sale verso destra (r'): per arrivare alla LT dovrebbe salire di 30 mm (l'aggetto). La retta r'' ha toccato la LT prima: il raggio incontra il PO prima del PV.
3. Dal punto della LT trovato al passo 1 scendi con una linea di richiamo fino a r': è l'ombra P_o', sul PO, di coordinate (12; 12).

Controllo: P_o' è spostata di 18 mm verso destra e di 18 mm verso la LT rispetto a P', cioè della quota di P. Per il punto Q(30; 12; 30) succede il contrario: l'aggetto 12 è minore della quota, r' raggiunge la LT per prima e l'ombra cade sul PV, in Q_o'' = (18; 18).

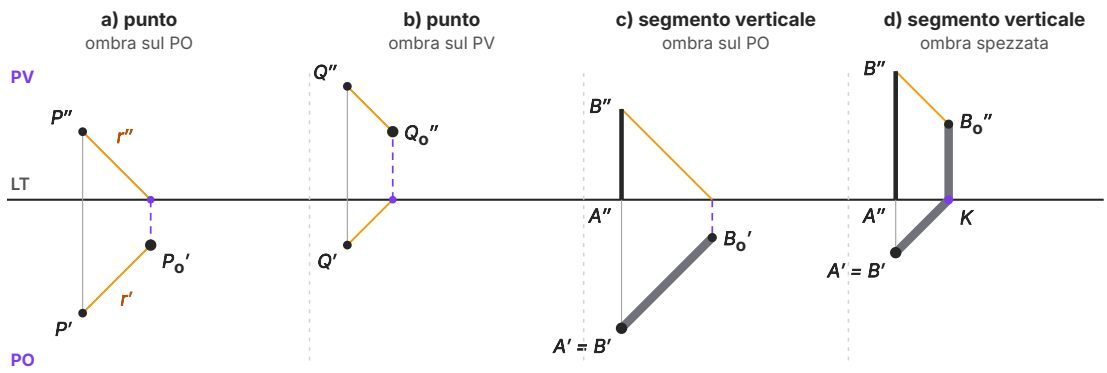


Figura 6.4 Ombre di punti e segmenti verticali con la convenzione a 45° (misure in mm). a) P(30; 30; 18): ombra sul PO in (12; 12). b) Q(30; 12; 30): ombra sul PV in (18; 18). c) Segmento verticale alto 24 in (30; 34): ombra sul PO, segmento a 45° da $A' = B'$ a B_0' = (6; 10). d) Segmento verticale alto 34 in (30; 14): l'ombra si spezza in K sulla LT e sale verticale sul PV fino a B_0'' = (16; 20).

6.3.3 Segmenti verticali e orizzontali

Un **segmento verticale** AB poggiato sul PO, come un palo, in pianta si riduce a un punto, $A' = B'$. La sua ombra parte dal piede A, che è ombra di sé stesso, e arriva all'ombra della cima B: sul PO è quindi un **segmento a 45°** che parte da A' nella direzione di r' (Figura 6.4c), lungo quanto la diagonale di un quadrato di lato uguale all'altezza del segmento: con h = 24 mm, $24 \cdot \sqrt{2} \approx 33{,}9$ mm. Se il palo è più alto della sua distanza dal PV, l'ombra raggiunge la LT in un punto K prima di finire: da lì continua sul PV, dove è **verticale**, parallela al palo (Figura 6.4d). Si parla di **ombra spezzata**: un'ombra che passa da una superficie a un'altra cambia direzione sullo spigolo che le separa.

Per un **segmento orizzontale** vale una regola che risparmia molto lavoro: se un segmento è parallelo a un piano, la sua ombra su quel piano è un segmento **parallelo e uguale** a esso, perché i raggi che passano per i suoi punti sono paralleli e lo traslano. Un segmento parallelo alla LT, sospeso a una certa quota, fa sul PO un'ombra parallela alla LT e lunga quanto il segmento; se cade sul PV, l'ombra è ancora parallela alla LT e lunga uguale. Un segmento perpendicolare al PV, invece, non è parallelo al PV: la sua ombra sul PV è un segmento a 45°, nella direzione di r''.

ESEMPIO SVOLTO

Una lastra quadrata parallela al PO. Una lastra sottile quadrata di lato 30 mm è sospesa orizzontalmente alla quota 20 mm, con i lati paralleli e perpendicolari alla LT, tra le larghezze 40 e 70 mm e gli aggetti 30 e 60 mm.

1. Tutti i vertici hanno aggetto maggiore della quota (30 > 20): l'ombra cade tutta sul PO.
2. Ogni vertice si sposta di 20 mm verso destra e di 20 mm verso la LT: l'ombra occupa le larghezze da 20 a 50 mm e gli aggetti da 10 a 40 mm.
3. Per la regola dei segmenti paralleli, l'ombra è un quadrato uguale alla lastra, traslato: basta trovare l'ombra di un vertice e ridisegnare il quadrato.

La faccia superiore della lastra è in luce, quella inferiore in ombra propria; in prospetto la lastra si vede di taglio, come un segmento orizzontale alla quota 20 mm.

6.3.4 L'ombra di un prisma e di un cilindro

Per un solido il procedimento ha tre passi, sempre nello stesso ordine:

1. **la separatrice**: si individuano le facce in luce e quelle in ombra propria; con la convenzione a 45° sono in luce le facce rivolte verso sinistra, verso il davanti e verso l'alto. Gli spigoli comuni a una faccia in luce e a una in ombra formano la separatrice;
2. **le ombre dei punti**: si trova l'ombra dei vertici della separatrice, ciascuno sul piano che il suo raggio incontra per primo;
3. **il contorno**: si uniscono le ombre nell'ordine della separatrice; dove il contorno passa dal PO al PV si spezza sulla LT.

Nella Figura 6.5a un prisma a base quadrata ha le facce inclinate di 30° e 60° sulla LT. Sono in luce la faccia superiore e le due facce laterali rivolte verso sinistra e verso il davanti; in ombra propria le due rivolte verso destra e verso il fondo. In prospetto si vede una faccia in luce e una in ombra, separate dallo spigolo verticale 1, che è un tratto della separatrice; in pianta la separatrice si legge sul contorno del quadrato. L'ombra portata parte dal piede del prisma sul PO, raggiunge la LT e sale sul PV, perché la cima degli spigoli è più alta della loro distanza dalla parete.

Per un **cilindro** verticale la separatrice è formata da due generatrici. In pianta si trovano tracciando le due rette a 45°, parallele a r', **tangenti** al cerchio di base: i punti di tangenza T_1' e T_2' sono le generatrici separatrici, agli estremi del diametro perpendicolare a r' (Figura 6.5b). Se l'ombra cade tutta sul PO, la si ottiene in modo elegante: l'ombra del cerchio superiore, parallelo al PO, è un cerchio uguale (regola delle figure parallele) con il centro spostato di h verso destra e verso la LT; il contorno dell'ombra è formato da questo cerchio, dal cerchio di base e dalle due tangenti a 45° comuni ai due cerchi. In prospetto è visibile solo la generatrice T_2, quella davanti: tra essa e il contorno destro del cilindro si vede una striscia d'ombra propria.

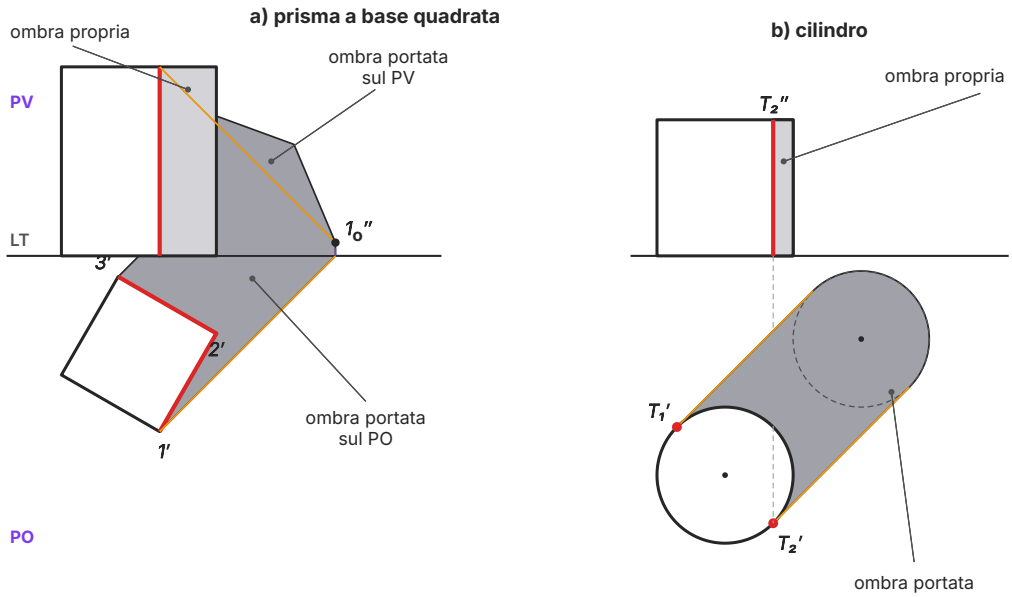


Figura 6.5 Ombre di solidi con la convenzione a 45°. a) Prisma a base quadrata (lato 30 mm, altezza 50 mm, lati inclinati di 30° e 60° sulla LT): separatrice in rosso; l'ombra portata cade sul PO e sul PV e si spezza sulla LT; il vertice superiore dello spigolo 1 ha l'ombra $1_o''$ sul PV. b) Cilindro (raggio 18 mm, altezza 36 mm): le tangenti a 45° al cerchio danno le generatrici separatrici T_1 e T_2; l'ombra sul PO è delimitata dal cerchio di base, dall'ombra del cerchio superiore (traslata di 36 mm) e dalle tangenti comuni.

ESEMPIO SVOLTO

Ombra di un prisma con i lati paralleli ai piani. Prisma retto a base rettangolare sul PO: larghezze da 60 a 100 mm, aggetti da 40 a 70 mm, altezza 30 mm.

1. Separatrice: in luce la faccia superiore, la faccia di sinistra (larghezza 100) e quella davanti (aggetto 70); in ombra propria la faccia di destra (larghezza 60) e quella posteriore (aggetto 40). La parte della separatrice che fa ombra è la spezzata: spigolo verticale in (100; 40), spigolo superiore posteriore, spigolo superiore destro, spigolo verticale in (60; 70).
2. Tutti i vertici superiori hanno aggetto maggiore della quota (40 > 30): l'ombra è tutta sul PO. Ogni vertice superiore si sposta di 30 mm verso destra e verso la LT: (100; 40) → (70; 10), (60; 40) → (30; 10), (60; 70) → (30; 40).
3. Contorno: da (100; 40) a (70; 10) a 45°, poi parallelo alla LT fino a (30; 10), poi perpendicolare alla LT fino a (30; 40), infine a 45° fino a (60; 70). Gli spigoli superiori, paralleli al PO, hanno ombre parallele e uguali a sé stessi (40 e 30 mm).

Controllo: in prospetto e in fianco si vedono solo facce in luce; le facce in ombra propria sono quelle nascoste. L'ombra portata visibile, esclusa la base, occupa 2100 mm².

ERRORE FREQUENTE

L'ombra che attraversa la parete. Un errore tipico è disegnare l'ombra di un punto sul PO anche quando il suo raggio incontra prima il PV: in pianta si ottiene un punto davanti alla LT... o dietro, cioè fuori dal primo diedro. Prima di unire le ombre, confronta per ogni punto aggetto e quota: se la quota è maggiore, l'ombra va sul PV. E dove il contorno passa da un piano all'altro, cerca il punto di rottura sulla LT.

6.4 Le ombre in assonometria

6.4.1 Il sole: il raggio r e la sua proiezione r′

In assonometria la convenzione a 45° non serve: la direzione del sole si sceglie in modo che le ombre si vedano bene, cioè che cadano sul terreno davanti o accanto all'oggetto, non nascoste dietro di esso. La direzione si assegna con due rette: il raggio r e la sua proiezione sul terreno r'. Un modo pratico, usato negli esercizi, è dare l'ombra di un'**asta di riferimento**: un'asta verticale di altezza nota con l'ombra nota; la retta che unisce la cima dell'asta all'estremo dell'ombra è r, quella che unisce il piede all'estremo è r'.

La costruzione dell'ombra di un punto è quella della Figura 6.2: per il piede P' si traccia la parallela a r', per il punto P la parallela a r; le due rette si incontrano nell'ombra P_o. Poiché in assonometria le rette parallele restano parallele, i raggi sono tutti paralleli anche sul foglio, e basta una squadra che scorre lungo la riga. Ne segue che l'ombra di un palo verticale è sempre parallela a r' e proporzionale alla sua altezza: un palo alto il doppio fa un'ombra lunga il doppio.

Il trilite (vol. 1, cap. 8) è un buon esercizio, perché ha ombre di tutti i tipi (Figura 6.6): i due piedritti gettano sul terreno due strisce parallele a r'; l'architrave getta una striscia che, per gli spigoli paralleli al terreno, è parallela all'architrave stesso; tra le ombre resta una zona chiara, dove la luce passa sotto l'architrave. Una parte dell'ombra dell'architrave cade inoltre sulla faccia in luce di un piedritto: è un'ombra autoportata, che si trova con lo stesso metodo, cercando dove i raggi che sfiorano lo spigolo inferiore dell'architrave incontrano il piano di quella faccia.

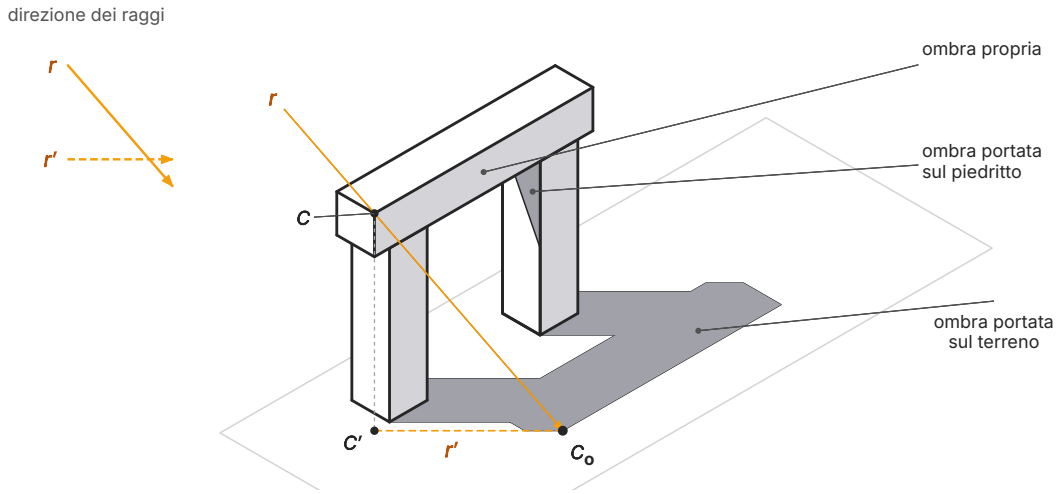


Figura 6.6 Ombre di un trilite in isometria convenzionale (piedritti 10 × 10 × 40, architrave 58 × 10 × 10, in unità del disegno). Il sole è dato dalle direzioni di r e r'. L'ombra del vertice $C(54; 10; 50)$ è l'intersezione del raggio per C con la parallela a r' per il piede C'. Sul piedritto di destra un'ombra autoportata triangolare: l'ombra dell'architrave.

ESEMPIO SVOLTO

Ombra di un parallelepipedo in isometria. Un blocco di 40 × 30 × 30 mm ($x \times y \times z$) ha un vertice in O. Il sole è dato da un'asta di riferimento alta 20 mm che fa un'ombra dal piede (60; 0; 0) fino al punto (50; 10; 0).

1. L'asta dice che, per ogni 20 mm di discesa, il raggio si sposta di 10 mm verso le x decrescenti e di 10 mm verso le y crescenti: un punto alto 30 mm ha l'ombra spostata di 15 mm in ciascuna delle due direzioni. Disegna r' e r dall'asta.
2. Separatrice: la luce viene dalle x crescenti e dalle y decrescenti, quindi sono in luce la faccia superiore, la faccia in $x = 40$ (in vista) e la faccia in $y = 0$ (nascosta); sono in ombra propria la faccia in $y = 30$, in vista, e quella in $x = 0$, nascosta. I vertici superiori che fanno ombra sono (0; 0; 30), (40; 30; 30) e (0; 30; 30), con gli spigoli verticali in (0; 0) e in (40; 30).
3. Ombre: (0; 0; 30) → (−15; 15; 0); (0; 30; 30) → (−15; 45; 0); (40; 30; 30) → (25; 45; 0). Si costruiscono per coordinate, oppure con le parallele a r' e a r.
4. Contorno sul terreno: da (0; 0) a (−15; 15), poi fino a (−15; 45), poi fino a (25; 45), poi fino a (40; 30). I tratti paralleli agli assi si misurano direttamente: 30 mm e 40 mm, come gli spigoli che li producono.

Controllo: l'ombra degli spigoli superiori, paralleli al terreno, è parallela e uguale a essi. Le ombre degli spigoli verticali sono parallele a r'.

6.4.2 La lampada: una sorgente propria

Con una sorgente propria L e il suo piede L' cambia una sola cosa: i raggi non sono più paralleli, ma escono tutti da L, e le loro proiezioni sul terreno escono tutte da L'. L'ombra di un palo verticale si trova unendo L' con il piede P' e prolungando, e unendo L con la cima P: le due rette si incontrano in P_o (Figura 6.7b). Le ombre di pali diversi sono **divergenti**, come raggi di una ruota con il mozzo in L', e si allungano allontanandosi dalla lampada; un cubo vicino alla lampada fa un'ombra molto più grande della sua base. Con la lampada alta 50 e un palo alto 25, l'ombra del palo è lunga quanto la distanza del palo da L', perché la cima sta a metà altezza (triangoli simili).

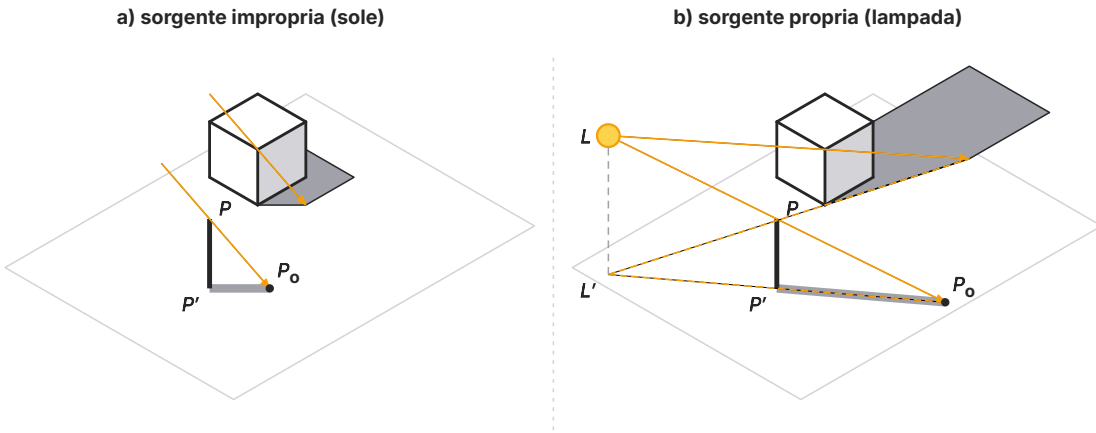


Figura 6.7 Sole e lampada sugli stessi oggetti, in isometria convenzionale: un cubo di spigolo 20 e un palo alto 25 con il piede in $P'(60; 40)$. a) Sorgente impropria: ombre parallele a r', proporzionali alle altezze. b) Sorgente propria $L(90; 0; 50)$: le ombre si irradiano da L'; l'ombra del palo è lunga quanto $L'P'$, cioè 50 unità.

Il confronto spiega un fatto che conosci dall'esperienza. Sotto il sole le ombre di una fila di alberi sono tutte parallele; di notte, sotto un lampione, le ombre di una persona si allungano mentre si allontana dalla luce e ruotano mentre le gira intorno. Dalle ombre si può persino risalire alla sorgente: prolungando le ombre di due pali, se si incontrano in un punto quel punto è il piede della lampada; se restano parallele, la luce viene dal sole.

ERRORE FREQUENTE

Misurare le ombre in assonometria. L'ombra di un palo, in generale, non è parallela a nessun asse: è una linea non isometrica (cap. 4) e la sua lunghezza sul disegno non è quella vera. Le ombre si costruiscono per punti, con le parallele a r e a r' o con le coordinate; si misurano soltanto i tratti paralleli agli assi.

6.5 Il chiaroscuro

6.5.1 Una scala di toni

Finora abbiamo diviso le superfici in due categorie, luce e ombra. Nella realtà una superficie è tanto più chiara quanto più i raggi la colpiscono di fronte, e tanto più scura quanto più la colpiscono di striscio; l'ombra propria, poi, non è mai nera, perché riceve la luce rimandata dall'ambiente. Il **chiaroscuro** è la resa del volume di un corpo mediante il passaggio graduale dai toni chiari ai toni scuri. Nel disegno lo si costruisce con una **scala tonale**: una serie di 5–7 grigi, dal bianco della carta al grigio più scuro, ottenuti a matita con pressioni diverse, con tratteggi più o meno fitti o con la sovrapposizione di tratteggi incrociati (Figura 6.8a). Ogni zona del disegno riceve uno dei toni della scala.

6.5.2 La sfera e il cilindro

Su una sfera illuminata da sinistra, dall'alto e dal davanti si riconoscono cinque zone (Figura 6.8b):

- la **luce**, la zona più chiara, dove i raggi colpiscono la superficie quasi perpendicolarmente;
- la **penombra** (nel senso del chiaroscuro: i mezzitoni), dove i raggi arrivano sempre più radenti e il tono si scurisce gradualmente fino alla separatrice;
- l'**ombra propria**, oltre la separatrice, la zona più scura del corpo;
- la **luce riflessa**, una fascia meno scura sul bordo dell'ombra propria, rischiarata dalla luce che il terreno o gli oggetti vicini rimandano sul corpo;
- l'**ombra portata** sul terreno, di solito più scura dell'ombra propria e più netta vicino al punto di contatto.

Sul cilindro le zone diventano fasce verticali parallele alle generatrici, perché lungo ogni generatrice l'inclinazione della superficie rispetto alla luce è la stessa (Figura 6.8c): da sinistra, luce, mezzitoni, la generatrice separatrice, l'ombra propria e, sul bordo destro, una sottile fascia di luce riflessa. In un prisma ogni faccia piana ha invece un tono uniforme: il chiaroscuro di un poliedro è una sequenza di facce con toni diversi, quello di un corpo curvo una sfumatura continua.

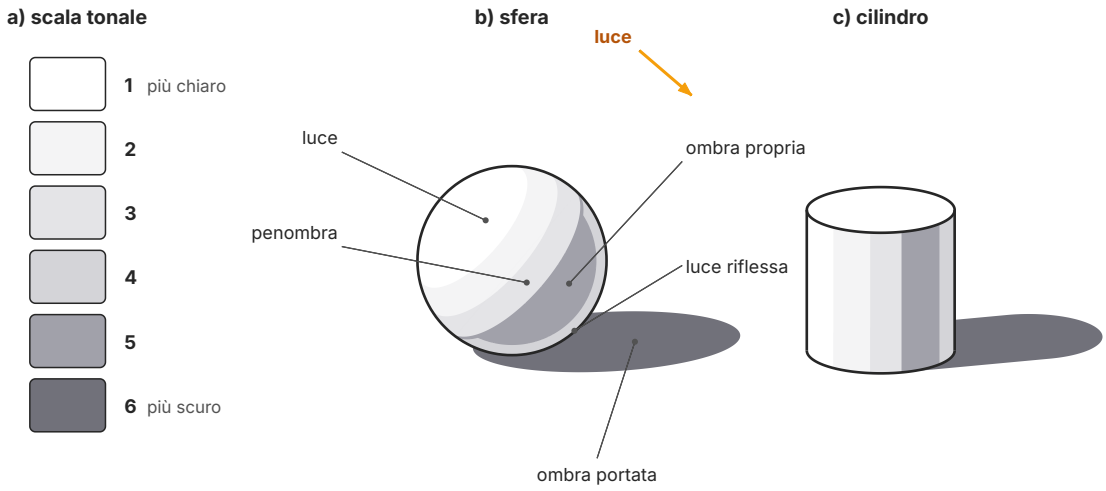


Figura 6.8 Il chiaroscuro. a) Una scala di sei toni, dal bianco della carta al grigio più scuro. b) Una sfera illuminata da sinistra, dall'alto e dal davanti: luce, penombra, ombra propria, luce riflessa e ombra portata, rese con fasce di tono uniforme. c) Un cilindro: le stesse zone diventano fasce verticali.

ESEMPIO SVOLTO

Chiaroscuro di un gruppo di solidi. Per rendere con tre toni un cubo, un cilindro e una sfera posati su un tavolo, con la luce da sinistra:

1. decidi la direzione della luce e segnala con una freccia a margine; trova le separatrici e le ombre portate con un contorno leggero;
2. stendi il tono medio su tutte le ombre proprie e il tono più scuro sulle ombre portate;
3. sul cubo lascia bianca la faccia più illuminata e dai un tono chiaro alla seconda; sui corpi curvi sfuma i mezzitoni verso la separatrice e alleggerisci il bordo dell'ombra propria, dove arriva la luce riflessa;
4. controlla che tutte le ombre portate vadano nella stessa direzione: con il sole devono essere parallele.

COLLEGAMENTI

Il chiaroscuro nella pittura. Le categorie che hai usato nel volume 1 (cap. 7) per leggere un'opera ora le sai costruire. I pittori del Medioevo conoscevano bene il problema: Cennino Cennini, nel *Libro dell'arte* (scritto intorno al 1400), dedica un capitolo (il IX) a come dare la luce e il chiaroscuro alle figure; consiglia a chi dipinge in una cappella di dare il rilievo e lo scuro seguendo le finestre da cui viene davvero la luce, e di seguire la luce più forte se le finestre sono più d'una. Nel capitolo 15 vedrai come Giotto usa il chiaroscuro per dare volume ai corpi e ai panneggi delle sue figure. L'uso sistematico delle ombre portate e la prospettiva delle ombre appartengono invece ai secoli successivi, e li studierai nel secondo biennio.

Il chiaroscuro serve anche in matematica e in fisica: le figure dei solidi di geometria si leggono meglio con un tono sulle facce in ombra, e la luce che si propaga in linea retta, con le ombre e la penombra delle eclissi, è un tema dell'ottica geometrica.

APPROFONDIMENTO

La meridiana: un'ombra che segna il tempo. Un'asta piantata nel terreno sotto il sole è un orologio: la sua ombra ruota durante il giorno, perché il sole si sposta da est a ovest, e cambia lunghezza, perché il sole sale e scende nel cielo. L'asta si chiama **gnomone**, dal greco γνώμων, «che fa conoscere», «indicatore». Al mattino l'ombra punta verso ovest, la sera verso est; a mezzogiorno, quando il sole è più alto, l'ombra è la più corta della giornata e in Italia punta verso nord. Durante l'anno, a mezzogiorno, l'ombra è più corta d'estate, quando il sole è alto, e più lunga d'inverno.

Su queste regolarità si basano gli orologi solari, o meridiane, che segnano su una superficie le linee delle ore. Ne parlava già Vitruvio, nel libro IX del *De architectura*, che descrive diversi tipi di orologi solari. La costruzione esatta delle linee orarie richiede l'astronomia e la geometria della sfera e non fa parte di questo corso; ma il principio è quello del capitolo: l'ombra della punta dello gnomone è il punto in cui il raggio che passa per la punta incontra la superficie.

SINTESI

- Nel disegno la luce è fatta di raggi rettilinei; l'ombra di un punto è l'intersezione del raggio che passa per il punto con la superficie che lo riceve.
- La sorgente propria (lampada, punto L con piede L') ha raggi divergenti: le ombre si allungano allontanandosi da L' e si calcolano con i triangoli simili. La sorgente impropria (il sole) ha raggi paralleli: ombre parallele e proporzionali alle altezze.
- Una sorgente estesa produce intorno all'ombra una penombra; nel disegno tecnico la si trascura.
- Ombra propria: parte del corpo rivolta dalla parte opposta alla luce. Ombra portata: ombra gettata su un'altra superficie; autoportata se cade sul corpo stesso.
- La linea separatrice divide la luce dall'ombra propria; il contorno dell'ombra portata è l'ombra della separatrice.
- Nelle proiezioni ortogonali si usa la convenzione a 45°: raggio parallelo alla diagonale del cubo, luce dall'alto, da sinistra e dal davanti, r' e r'' a 45° sulla LT; il raggio vero è inclinato di circa 35° sul terreno.
- Con la convenzione a 45° l'ombra di P(x; y; z) cade sul PO se $z < y$, sul PV se $y < z$; sul PV si sposta in basso e a destra di una quantità uguale all'aggetto.
- Un segmento parallelo a un piano ha su quel piano un'ombra parallela e uguale; un segmento verticale ha sul PO un'ombra a 45° e sul PV un'ombra verticale; l'ombra che passa da un piano all'altro si spezza sulla LT.
- Per un solido: separatrice, ombre dei suoi vertici, contorno. La separatrice di un cilindro verticale è data dalle generatrici nei punti di tangenza delle rette a 45° tangenti alla base.
- In assonometria il sole si assegna con r e r' (per esempio con un'asta di riferimento); l'ombra di P è l'intersezione della parallela a r per P con la parallela a r' per P'. Con una lampada, raggi da L e proiezioni da L'.
- Il chiaroscuro rende il volume con una scala di toni: luce, penombra, ombra propria, luce riflessa, ombra portata; sul cilindro le zone sono fasce parallele alle generatrici.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● I raggi di una sorgente impropria, come il sole, sono:
   - **A.** divergenti da un punto
   - **B.** paralleli tra loro
   - **C.** convergenti verso l'oggetto
   - **D.** sempre perpendicolari al terreno

2. ● L'ombra propria di un corpo è:
   - **A.** l'ombra che il corpo getta sul terreno
   - **B.** l'ombra di un altro corpo che cade su di esso
   - **C.** la zona di penombra intorno all'ombra portata
   - **D.** la parte della sua superficie rivolta dalla parte opposta alla luce

3. ● Il contorno dell'ombra portata di un solido è:
   - **A.** l'ombra della linea separatrice
   - **B.** l'ombra dei suoi spigoli nascosti
   - **C.** la proiezione della sua base
   - **D.** la linea che divide luce e penombra

4. ● Una lampada è alta 60 cm sul pavimento. Allontanando dalla lampada un barattolo alto 20 cm, la sua ombra:
   - **A.** si accorcia
   - **B.** resta uguale
   - **C.** si allunga
   - **D.** scompare

5. ● Con la convenzione del raggio a 45° la luce arriva:
   - **A.** dall'alto, da destra e dal fondo
   - **B.** dall'alto, da sinistra e dal davanti
   - **C.** dal basso, da sinistra e dal davanti
   - **D.** orizzontalmente, da sinistra

6. ● Con la convenzione a 45°, l'ombra del punto P(40; 15; 30) cade:
   - **A.** sul PO
   - **B.** sulla LT
   - **C.** sul PL
   - **D.** sul PV

7. ● Con la convenzione a 45°, l'ombra sul PO di un palo verticale, in pianta, è:
   - **A.** un segmento a 45° sulla LT
   - **B.** un punto
   - **C.** un segmento perpendicolare alla LT
   - **D.** un segmento parallelo alla LT

8. ● Il vero angolo che il raggio convenzionale forma con il terreno è di circa:
   - **A.** 45°
   - **B.** 60°
   - **C.** 35°
   - **D.** 30°

9. ● La luce riflessa, nel chiaroscuro, è:
   A. la zona più chiara della parte in luce
   B. una fascia meno scura sul bordo dell'ombra propria, rischiarata dalla luce rimandata dall'ambiente
   C. l'ombra portata vista in uno specchio
   D. il contorno sfumato dell'ombra portata

Lessico e norme

10. ● Completa: una sorgente a distanza finita si dice _____ e i suoi raggi sono _____; il Sole è una sorgente _____, con raggi _____. Una sorgente estesa produce intorno all'ombra una zona di _____.

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) L'ombra di un punto sul terreno si trova con il raggio per il punto e la sua proiezione per il piede. b) Con la convenzione a 45° il raggio vero forma 45° con il PO. c) Un segmento parallelo al PO fa sul PO un'ombra parallela e uguale a esso. d) La separatrice di un cilindro verticale è una circonferenza. e) Con una lampada le ombre di pali diversi sono parallele. f) Sul PV l'ombra di un punto si sposta in basso e a destra di una quantità uguale al suo aggetto.

12. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. Termini: a) ombra autoportata; b) linea separatrice; c) ombra spezzata; d) scala tonale; e) gnomone; f) penombra. Definizioni: 1) serie di grigi dal bianco al più scuro; 2) ombra che passa da una superficie a un'altra cambiando direzione sullo spigolo comune; 3) zona che riceve luce solo da una parte di una sorgente estesa; 4) ombra portata da una parte di un corpo su un'altra parte dello stesso corpo; 5) asta la cui ombra segna l'ora; 6) linea che divide la parte in luce dall'ombra propria.

13. ● Spiega che cosa indicano, in una tavola di ombre, le scritture: r', r'', P_o', P_o'', L, L'.

14. ● Perché, con la convenzione a 45°, in un prospetto d'architettura le ombre «misurano» le sporgenze? Spiega con l'esempio di una cornice che sporge 40 cm dalla facciata.

15. ● Descrivi con un esempio (un edificio, un oggetto di casa) un'ombra propria, un'ombra portata e un'ombra autoportata.

Costruire

Per le tavole usa un foglio A4 verticale squadrato. **Proiezioni ortogonali**: LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice, origine delle larghezze sulla verticale a 120 mm dal bordo sinistro, x verso sinistra; luce secondo la convenzione a 45°. **Assonometria**: O a 140 mm dal bordo sinistro e a 190 mm dal bordo superiore della cornice. Le coordinate sono (x; y; z) in mm. Distingui con toni diversi l'ombra propria (grigio chiaro) e l'ombra portata (grigio più scuro).

16. ● Disegna pianta e prospetto dei punti A(40; 30; 15), B(70; 10; 35) e C(45; 25; 25) e trova le loro ombre. Indica per ciascuno su quale piano cade l'ombra e scrivi le sue coordinate.

17. ● Due pali verticali poggiano sul PO: il primo, alto 30 mm, in (50; 40); il secondo, alto 40 mm, in (80; 15). Disegna le loro ombre. Quanto è lunga in pianta l'ombra del primo? Dove si spezza quella del secondo, e fino a che quota sale sul PV?

18. ● Disegna le ombre di due segmenti orizzontali: AB, parallelo alla LT, da (80; 30; 20) a (40; 30; 20); CD, perpendicolare al PV, da (60; 10; 30) a (60; 40; 30). Dove si spezza l'ombra di CD?

19. ● Una lastra quadrata di lato 30 mm è sospesa orizzontalmente alla quota 20 mm, con i lati paralleli e perpendicolari alla LT, tra le larghezze 40 e 70 mm e gli aggetti 30 e 60 mm. Disegna pianta e prospetto della lastra e della sua ombra.

20. ●● Prisma retto a base rettangolare sul PO, larghezze da 60 a 100 mm, aggetti da 40 a 70 mm, alto 30 mm. Disegna pianta e prospetto, individua la separatrice e costruisci l'ombra portata. Quanto misura l'area dell'ombra portata visibile in pianta, esclusa la base del prisma?

21. ●● Lo stesso prisma dell'esercizio precedente viene avvicinato al PV: aggetti da 15 a 45 mm. Costruisci l'ombra, che ora cade in parte sul PV. Scrivi le coordinate dei vertici dell'ombra sul PV e i punti di rottura sulla LT.

22. ●● Cilindro retto di raggio 20 mm e altezza 40 mm, con il centro della base in (70; 65). Trova in pianta le generatrici separatrici, disegna l'ombra portata sul PO e la striscia d'ombra propria in prospetto. Quanto è larga questa striscia?

23. ●● Il raggio convenzionale è la diagonale di un cubo di spigolo 50 mm. Disegna pianta e prospetto del cubo con la diagonale, poi costruisci in vera grandezza il triangolo rettangolo formato dalla diagonale, dalla diagonale della base e dallo spigolo verticale. Misura l'inclinazione del raggio sul terreno e la lunghezza della diagonale.

24. ●● In isometria convenzionale disegna un blocco di 40 × 30 × 30 mm con un vertice in O e l'asta di riferimento alta 20 mm con il piede in (60; 0; 0) e l'ombra fino a (50; 10; 0). Costruisci l'ombra portata del blocco e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

25. ●●● Un trilite in isometria convenzionale: due piedritti di 12 × 12 mm alti 48 mm, tra le larghezze 0–12 e 48–60 mm, con aggetti da 0 a 12 mm; architrave di 72 × 12 × 12 mm, da $x = -6$ a 66, sopra i piedritti (quote 48–60). Il sole è quello dell'esercizio precedente. Disegna le ombre portate sul terreno e l'ombra autoportata dell'architrave sulla faccia del piedritto di destra rivolta verso l'altro piedritto.

26. ●● In cavaliera (y a 45°, coefficiente ½) una lampada L(80; 0; 60) illumina due pali verticali: il primo alto 30 mm con il piede in (40; 20; 0), il secondo alto 20 mm con il piede in (60; 40; 0). Costruisci le ombre e calcola con i triangoli simili la lunghezza vera di ciascuna. Perché non si possono misurare sul disegno?

Leggere il disegno

27. ● Osserva la Figura 6.4d. Perché l'ombra del segmento si spezza in K? Perché il tratto sul PV è verticale? Verifica con le misure della didascalia la regola dello spostamento uguale all'aggetto.

28. ●● In un prospetto il punto P'' ha quota 40 mm e la sua ombra P_o'' sta 18 mm più a destra e 18 mm più in basso. Quanto vale l'aggetto di P? Dove si trova P' rispetto alla LT? Perché l'ombra non cade sul PO?

29. ●● Osserva la Figura 6.5a. Quali facce del prisma sono in ombra propria? Quale di esse si vede in prospetto e quale no? Quali spigoli producono il contorno dell'ombra sul PV?

30. ●● In un disegno le ombre di due pali, prolungate dalla parte dei piedi, si incontrano in un punto. Che cosa rappresenta quel punto? Che cosa concluderesti se fossero parallele? Rispondi guardando la Figura 6.7.

31. ● Osserva la Figura 6.8c. Elenca da sinistra a destra le fasce del cilindro, assegnando a ciascuna il numero del tono della scala (a) che le corrisponde, e spiega perché la fascia sul bordo destro è più chiara di quella che la precede.

Verso la verifica

32. ●●● Gruppo di solidi in proiezioni ortogonali: un prisma retto a base quadrata, larghezze da 80 a 110 mm, aggetti da 40 a 70 mm, alto 35 mm, e un cilindro di raggio 10 mm e altezza 30 mm con il centro della base in (35; 55). Disegna pianta e prospetto con le separatrici, le ombre proprie e le ombre portate. Le ombre dei due solidi si sovrappongono? Raggiungono il PV?

33. ●●● La casetta del capitolo 4 (pianta 40 × 30 mm da O, muri alti 30 mm, colmo alla quota 45 mm parallelo all'asse y, in $x = 20$) in isometria convenzionale, con il sole dell'asta di riferimento degli esercizi precedenti. Individua le falde e le facce in ombra propria, costruisci l'ombra portata sul terreno e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

34. ●●● In 10–12 righe spiega a un compagno come si disegna l'ombra di un oggetto con il sole e con una lampada, che cosa hanno in comune le due costruzioni e che cosa le distingue; aggiungi un esempio di come il chiaroscuro aiuta a leggere la forma di un corpo curvo.

PER APPROFONDIRE

- [CEN] Cennino Cennini, *Il libro dell'arte*: il capitolo IX spiega come dare la luce e il chiaroscuro alle figure seguendo le finestre del luogo in cui si dipinge.
- [GOM] E. H. Gombrich, *La storia dell'arte*: osserva come cambia, da un'epoca all'altra, il modo di rendere la luce e il volume.

Glossario del capitolo

Asta di riferimento
Asta verticale di altezza nota, con la sua ombra, usata per assegnare in assonometria la direzione del raggio r e della sua proiezione r'.

Chiaroscuro
Resa del volume di un corpo con il passaggio graduale dai toni chiari ai toni scuri.

Convenzione del raggio a 45°
Nelle proiezioni ortogonali, la luce parallela alla diagonale di un cubo, dall'alto, da sinistra e dal davanti: le proiezioni r' e r'' formano 45° con la LT.

Gnomone
Asta di una meridiana, la cui ombra indica l'ora.

Linea separatrice
Linea che divide sulla superficie di un corpo la parte in luce dall'ombra propria; la sua ombra è il contorno dell'ombra portata.

Luce riflessa
Fascia meno scura sul bordo dell'ombra propria, rischiarata dalla luce rimandata dall'ambiente.

Ombra autoportata
Ombra portata che una parte di un corpo getta su un'altra parte dello stesso corpo.

Ombra di un punto
Punto in cui il raggio luminoso che passa per il punto incontra la superficie che riceve l'ombra; si indica con P_o.

Ombra portata
Ombra che un corpo getta su un'altra superficie (terreno, parete, altro oggetto).

Ombra propria
Parte della superficie di un corpo rivolta dalla parte opposta alla sorgente, quindi non illuminata.

Ombra spezzata
Ombra che passa da una superficie a un'altra e cambia direzione sullo spigolo comune (per esempio sulla LT).

Penombra
Zona che riceve luce solo da una parte di una sorgente estesa; nel chiaroscuro, i mezzitoni tra la luce e l'ombra propria.

Scala tonale
Serie ordinata di toni di grigio, dal bianco al più scuro, usata per il chiaroscuro.

Sorgente estesa
Sorgente luminosa non puntiforme (una finestra, un tubo al neon): produce intorno all'ombra una penombra.

Sorgente impropria
Sorgente luminosa considerata all'infinito (il Sole): i raggi sono paralleli.

Sorgente propria
Sorgente luminosa puntiforme a distanza finita (una lampada): i raggi escono da un punto e sono divergenti.

Soluzioni

1. B. Il Sole è così lontano che, alla scala degli oggetti, i suoi raggi si considerano paralleli.

2. D. L'ombra gettata su un'altra superficie è l'ombra portata; quella di un altro corpo è un'ombra portata che cade sul corpo.

3. A. Ogni punto del contorno è l'ombra di un punto della separatrice.

4. C. L'ombra è lunga $d \cdot 20 : (60 - 20) = d/2$: cresce con la distanza d dalla lampada.

5. B. Il raggio va dal vertice in alto, a sinistra e davanti al vertice opposto del cubo.

6. D. L'aggetto (15) è minore della quota (30): il raggio incontra prima il PV, in (25; 15).

7. A. Ogni punto del palo si sposta in pianta di quanto è alto, verso destra e verso la LT: l'ombra segue la direzione di r'.

8. C. Il raggio sale di 1 su un percorso orizzontale di $\sqrt{2} \approx 1{,}41$: disegnato in vera grandezza, l'angolo misura circa 35° (35,3°); 45° è l'angolo delle sue proiezioni con la LT.

9. B. La luce rimandata dal terreno e dagli oggetti vicini rischiara il bordo dell'ombra propria.

10. propria; divergenti; impropria; paralleli; penombra.

11. a) V. b) F: sono le proiezioni r' e r'' a formare 45° con la LT; il raggio forma con il PO circa 35°. c) V. d) F: è formata da due generatrici, nei punti di tangenza delle rette a 45°. e) F: sono divergenti, si irradiano dal piede L'; sono parallele con il sole. f) V.

12. a-4; b-6; c-2; d-1; e-5; f-3.

13. r' e r'': le proiezioni del raggio luminoso sul PO e sul PV; P_o': l'ombra di P che cade sul PO (in pianta); P_o'': l'ombra di P che cade sul PV (in prospetto); L: la sorgente propria; L': il suo piede, la proiezione sul piano d'appoggio.

14. Traccia di risposta: l'ombra di un punto sul PV si sposta in basso e a destra di quanto il punto dista dal PV. L'ombra dello spigolo inferiore di una cornice che sporge 40 cm cade quindi 40 cm più in basso, e la fascia d'ombra sotto la cornice è alta quanto la sporgenza: misurando l'ombra si legge l'aggetto, che il prospetto da solo non mostra.

15. Traccia di risposta: una casa al sole ha una facciata in ombra propria (quella rivolta dalla parte opposta al sole) e getta un'ombra portata sulla strada; la gronda che sporge getta un'ombra autoportata sulla facciata in luce, una striscia scura sotto il tetto. Una tazza: l'interno in parte in ombra autoportata, l'esterno con un lato in ombra propria, l'ombra portata sul tavolo.

16. A(40; 30; 15): quota minore dell'aggetto, ombra sul PO in (25; 15). B(70; 10; 35): aggetto minore della quota, ombra sul PV in (60; 25). C(45; 25; 25): aggetto uguale alla quota, ombra sulla LT nel punto di larghezza 20. Controllo: ogni ombra è spostata di una quantità uguale alla quota (sul PO) o all'aggetto (sul PV).

17. Primo palo: 30 < 40, ombra tutta sul PO, da (50; 40) a (20; 10), segmento a 45° lungo $30 \cdot \sqrt{2} \approx 42{,}4$ mm. Secondo palo: 40 > 15, ombra spezzata: sul PO da (80; 15) a K(65; 0) sulla LT, poi sul PV verticale da (65; 0) fino alla quota 40 − 15 = 25 mm.

18. AB: aggetto 30 > quota 20, ombra sul PO da (60; 10) a (20; 10), parallela alla LT e lunga 40 mm come AB. CD: C (aggetto 10 < 30) ha l'ombra sul PV in (50; 20); D (aggetto 40 > 30) sul PO in (30; 10). L'ombra si spezza nel punto della LT di larghezza 30, ombra del punto di CD con aggetto 30: sul PV è un segmento a 45° da (50; 20) a (30; 0), sul PO un segmento perpendicolare alla LT da (30; 0) a (30; 10).

19. Ombra tutta sul PO (aggetti 30–60 > quota 20): quadrato di lato 30 mm, larghezze da 20 a 50 mm, aggetti da 10 a 40 mm. In prospetto la lastra è il seg-

mento da 40 a 70 mm alla quota 20; nessuna ombra sul PV.

20. Separatrice e ombre come nell'esempio svolto del paragrafo sul prisma: ombra sul PO con i vertici (100; 40), (70; 10), (30; 10), (30; 40), (60; 70), più i vertici della base. Area: l'esagono (30; 10), (70; 10), (100; 40), (100; 70), (60; 70), (30; 40) misura 3300 mm²; tolta la base (40 × 30 = 1200 mm²) restano 2100 mm². Nessuna ombra sul PV (aggetto minimo 40 > altezza 30).

21. Ora i vertici superiori posteriori (aggetto 15 < 30) mandano l'ombra sul PV. Sul PV: (100; 15; 30) → (85; 15) e (60; 15; 30) → (45; 15); il poligono d'ombra sul PV ha i vertici (85; 0), (85; 15), (45; 15), (30; 0) (larghezza; quota). Punti di rottura sulla LT: larghezze 85 (ombra dello spigolo verticale in (100; 15)) e 30 (ombra del punto dello spigolo superiore destro con aggetto 30). Sul PO: (85; 0), (100; 15), base, (60; 45), (30; 15), (30; 0).

22. Separatrici in pianta: punti di tangenza delle rette a 45° in T_1'(84,14; 50,86) e T_2'(55,86; 79,14) (20 : √2 ≈ 14,14 mm dal centro in larghezza e in aggetto). L'ombra del cerchio superiore è un cerchio di raggio 20 mm con centro in (30; 25), tutto sul PO (aggetto minimo 5 mm); il contorno è formato dai due cerchi e dalle due tangenti comuni a 45°. In prospetto la striscia d'ombra propria va da $x = 55{,}86$ a $x = 50$ (contorno destro): è larga 20 − 14,14 ≈ 5,9 mm.

23. Diagonale della base: 50 · √2 ≈ 70,7 mm; diagonale del cubo (ipotenusa del triangolo con cateti 70,7 e 50 mm): √(5000 + 2500) = 50 · √3 ≈ 86,6 mm. Inclinazione misurata sul disegno: ≈ 35° ± 1° (il valore preciso è 35,3°). In pianta e in prospetto la diagonale appare a 45° e lunga 70,7 mm.

24. L'asta dice che il raggio, scendendo di z, si sposta di $z/2$ verso le x decrescenti e di $z/2$ verso le y crescenti. In luce la faccia superiore e le facce in $x = 40$ e in $y = 0$; in ombra propria quelle in $y = 30$ (in vista) e in $x = 0$. Ombra sul terreno: vertici (0; 0), (−15; 15), (−15; 45), (25; 45), (40; 30), (40; 0), con la base. I lati (−15; 15)–(−15; 45) e (−15; 45)–(25; 45) sono paralleli agli assi e misurano 30 e 40 mm.

25. Con lo stesso sole un punto alto 60 si sposta di 30 in $-x$ e in $+y$, uno alto 48 di 24. Ombre dei vertici dell'architrave: (66; 12; 60) → (36; 42), (−6; 12; 60) → (−36; 42), (66; 0; 60) → (36; 30), (−6; 0; 60) → (−36; 30); la striscia d'ombra dell'architrave è il parallelogramma (36; 30), (36; 42), (−36; 42), (−36; 30), lungo 72 mm come l'architrave. I piedritti gettano strisce parallele a r' dal loro piede fino alla striscia dell'architrave. Ombra autoportata sulla faccia $x = 12$ del piedritto di destra: triangolo di vertici (12; 0; 48), (12; 12; 24), (12; 12; 48): lo spigolo inferiore posteriore dell'architrave raggiunge il piano $x = 12$ per $x \le 24$, scendendo fino alla quota 48 − 24 = 24.

26. $L' = (80; 0; 0)$. Primo palo: $L'P' = \sqrt{(40^2 + 20^2)} \approx 44{,}7$ mm; la cima è a metà altezza della lampada (30 su 60), quindi l'ombra è lunga quanto $L'P'$, ≈ 44,7 mm, e finisce in (0; 40; 0). Secondo palo: $L'Q' = \sqrt{(20^2 + 40^2)} \approx 44{,}7$ mm, ombra lunga $44{,}7 \cdot 20/(60 - 20) \approx 22{,}4$ mm, fino a (50; 60; 0). Stessa distanza dalla lampada, palo più basso, ombra più corta. Le ombre non sono parallele a nessun asse: in cavaliera sono linee non misurabili direttamente (le profondità sono dimezzate), per questo si costruiscono per punti con le coordinate o con le rette da L e da L'.

27. Il palo è alto 34 mm e dista 14 mm dal PV: il raggio per la cima raggiunge il PV dopo essere sceso di soli 14 mm, quindi l'ombra arriva alla LT in K (larghezza 30 − 14 = 16) e prosegue sulla parete. Sul PV il palo, parallelo al piano, ha un'ombra parallela a sé stesso, cioè verticale. Controllo: $B_o'' = (16; 20)$ è 14 mm a destra e 14 mm più in basso di $B'' = (30; 34)$, e 14 è l'aggetto.

28. L'aggetto di P è 18 mm (lo spostamento in basso e a destra sul PV è uguale all'aggetto); P' sta 18 mm sotto la LT, sulla verticale di P''. L'ombra cade sul PV perché l'aggetto (18) è minore della quota (40): il raggio incontra la parete prima del terreno.

29. In ombra propria sono le due facce rivolte verso destra e verso il fondo (verso il PV), quelle tra i vertici 1′, 2′ e 3′. In prospetto si vede la faccia tra 1 e 2, rivolta verso destra e verso il davanti; quella tra 2 e 3, rivolta verso il PV, è nascosta. Sul PV il contorno è l'ombra degli spigoli verticali in 1 e in 3 (verticali sul PV) e degli spigoli superiori 1–2 e 2–3.

30. Se le ombre prolungate si incontrano in un punto, la sorgente è propria e quel punto è il piede

L' della lampada (le ombre si irradiano da L', come nella figura b). Se sono parallele, i raggi sono paralleli: la sorgente è impropria, il sole (figura a).

31. Da sinistra: tono 1 (luce), tono 2 e tono 3 (mezzitoni), tono 5 (ombra propria, dopo la separatrice), tono 4 (luce riflessa) sul bordo destro; ombra portata in tono 6. La fascia sul bordo destro è più chiara perché, pur essendo in ombra propria, riceve la luce rimandata dal terreno e dall'ambiente.

32. Prisma: separatrice e ombra come nell'esercizio sul prisma; ombra sul PO con i vertici (110; 40), (75; 5), (45; 5), (45; 35), (80; 70) (spostamenti di 35 mm); tutta sul PO, perché l'aggetto minimo 40 supera l'altezza 35. Cilindro: separatrici in T_1'(42,07; 47,93) e T_2'(27,93; 62,07) (10 : √2 ≈ 7,07 mm); ombra del cerchio superiore con centro in (5; 25), raggio 10 mm, tutta sul PO (aggetto minimo 15); striscia d'ombra propria in prospetto larga 10 − 7,07 ≈ 2,9 mm. Le ombre non si sovrappongono: quella del prisma arriva a sinistra fino alla larghezza 45 e agli aggetti 5–35 mm, mentre il cilindro occupa le larghezze 25–45 e gli aggetti 45–65 mm. Nessuna ombra raggiunge il PV.

33. Sole: spostamento di $z/2$ in $-x$ e in $+y$. In luce la parete in $x = 40$, la testata in $y = 0$ e tutte e due le falde: i raggi scendono di 2 mm per ogni mm di spostamento in x, più ripidi delle falde (15 mm su 20), e le colpiscono entrambe. In ombra propria la facciata rivolta verso y, con il frontone, e la parete nascosta rivolta verso le x negative. Ombre: (0; 0; 30) → (−15; 15), (0; 30; 30) → (−15; 45), (20; 30; 45) → (−2,5; 52,5), (40; 30; 30) → (25; 45), (20; 0; 45) → (−2,5; 22,5), interno all'ombra. Contorno sul terreno: (0; 0), (−15; 15), (−15; 45), (−2,5; 52,5), (25; 45), (40; 30), più la base.

34. Traccia di risposta: in entrambi i casi l'ombra di un punto è l'intersezione del raggio per il punto con la superficie, e quella di un palo si trova unendo il raggio per la cima con la sua proiezione per il piede; si comincia dalla separatrice e si finisce con il contorno. Con il sole i raggi sono paralleli (si usano r e r', le ombre sono parallele e proporzionali alle altezze); con la lampada escono da L e le proiezioni da L' (ombre divergenti, più lunghe lontano dalla luce). Esempio: su un vaso, la sfumatura dalla luce all'ombra propria e la fascia di luce riflessa mostrano che la superficie è curva, cosa che il solo contorno non dice.