CAPITOLO

4

L'assonometria ortogonale

Guardare un oggetto senza preferire nessuna delle sue facce: è il punto di vista dell'isometria.

OBIETTIVI

1. Riconoscere le proprietà dell'assonometria ortogonale e il legame tra angoli e coefficienti di riduzione.
2. Disegnare in isometria teorica e convenzionale, costruire la scala isometrica e distinguere le linee isometriche da quelle non isometriche.
3. Tracciare gli assi della dimetria UNI EN ISO 5456-3 con le pendenze 1 : 8 e 7 : 8.
4. Disegnare in isometria prismi, piramidi, solidi tagliati e gruppi di solidi con il metodo delle coordinate e il metodo della scatola.
5. Costruire l'ellisse isometrica per punti e l'ovale isometrico, e disegnare cilindri, coni, fori e semicilindri.
6. Fare uno schizzo a mano libera su carta isometrica e scegliere l'assonometria adatta a un oggetto.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 L'assonometria ortogonale 2
4.2 L'isometria 3
4.3 La dimetria e la trimetria 7
4.4 Solidi in isometria 9
4.5 Il cerchio in isometria 12
4.6 A mano libera, e la scelta dell'assonometria 16

Disegno e Storia dell'arte 2 · Parte II · L'assonometria e le ombre · versione 1.0
Capitolo 4: L'assonometria ortogonale · pagine 101–124 del volume completo · estratto per lo studio

Un mobile da montare arriva con un foglio di istruzioni: nessuna pianta, nessun prospetto, ma un unico disegno in cui si vedono insieme il fianco, il piano e i ripiani, ciascuno al suo posto. Quel disegno non è una fotografia e non è una prospettiva: è quasi sempre un'**assonometria ortogonale**, il metodo che permette di mostrare un oggetto in modo naturale, senza privilegiare nessuna delle sue facce, e di misurarlo lungo tre direzioni.

Nel capitolo 3 hai conosciuto il principio dell'assonometria e le assonometrie oblique, la cavaliera e la planometrica, in cui una faccia dell'oggetto resta in vera forma. Qui il quadro si inclina rispetto a tutti e tre gli assi: nessuna faccia è più privilegiata, e in cambio l'immagine somiglia a quello che vedrebbe un occhio lontanissimo. Studierai l'**isometria**, che è l'assonometria più usata nel disegno tecnico, la **dimetria** della norma UNI EN ISO 5456-3, i solidi, i cerchi e i cilindri in isometria, e lo schizzo a mano libera. Nel capitolo 5 userai tutto questo per disegnare volumi architettonici ed edifici antichi.

4.1 L'assonometria ortogonale

4.1.1 Raggi perpendicolari al quadro

Ricordiamo il principio (cap. 3): l'oggetto, con la sua terna di riferimento x, y, z, viene proiettato con raggi paralleli su un piano, il quadro; le immagini degli assi sono gli assi assonometrici e, lungo ciascuno di essi, le lunghezze vengono moltiplicate per un coefficiente di riduzione. Nell'assonometria obliqua i raggi sono inclinati sul quadro, e il quadro è parallelo a una faccia dell'oggetto: quella faccia resta in vera forma.

Nell'**assonometria ortogonale** i raggi proiettanti sono **perpendicolari al quadro**, e il quadro è inclinato rispetto a tutti e tre gli assi. Le conseguenze sono tre:

- **tutti e tre gli assi appaiono scorciati**: ogni coefficiente di riduzione è minore di 1;
- **nessuna faccia** parallela ai piani coordinati è in vera forma: un quadrato diventa un parallelogramma, un cerchio un'ellisse, su qualunque faccia stia;
- l'immagine è quella che vedrebbe un osservatore lontanissimo che guarda perpendicolarmente al quadro: per questo l'assonometria ortogonale appare più «naturale» della cavaliera, che allunga gli oggetti in profondità.

È lo stesso metodo delle proiezioni ortogonali del primo volume, con una sola differenza: là il quadro (PV, PO o PL) era parallelo a due assi e perpendicolare al terzo, così una dimensione spariva; qui è inclinato su tutti e tre, e le tre dimensioni restano visibili in un solo disegno.

4.1.2 Angoli e coefficienti non si scelgono a caso

Nell'assonometria obliqua si possono scegliere liberamente l'angolo dell'asse y e il suo coefficiente (cap. 3). In quella ortogonale no: inclinando il quadro cambiano *insieme* gli angoli tra gli assi assonometrici e i tre coefficienti, e gli uni determinano gli altri. Non dimostreremo queste relazioni, che richiedono strumenti di geometria dello spazio che studierai più avanti; ci basta usarne una, molto semplice:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2$$

cioè: nell'assonometria ortogonale la **somma dei quadrati dei tre coefficienti di riduzione è sempre 2**. Secondo i valori dei coefficienti si distinguono, come sai, tre casi: l'**isometrica** (tre coefficienti uguali), la **dimetrica** (due uguali) e la **trimetrica** (tutti diversi).

> **DA RICORDARE**
> Nell'assonometria ortogonale: i raggi sono perpendicolari al quadro; tutti i coefficienti sono minori di 1 e la somma dei loro quadrati è 2; nessuna faccia è in vera forma; i tre angoli tra gli assi assonometrici sono tutti ottusi (maggiori di 90°) e la loro somma è 360°. Se in un disegno due assi formano un angolo retto o acuto, non si tratta di un'assonometria ortogonale.

4.2 L'isometria

4.2.1 Gli assi a 120°

Nell'**assonometria isometrica** il quadro è ugualmente inclinato sui tre assi: i tre coefficienti sono uguali e i tre assi assonometrici formano tra loro tre angoli uguali, di **120°**. Come in tutto il libro, l'asse z si disegna verticale; allora l'asse x scende verso sinistra e l'asse y verso destra, entrambi a **30° sull'orizzontale** (Figura 4.1): 90° + 30° = 120°, e i due assi in basso formano tra loro 180° − 30° − 30° = 120°.

Con questo orientamento vedi il triedro di riferimento «dall'interno»: il piano xz (il PV) è la parete in alto a sinistra, il piano yz (il PL) la parete in alto a destra, il piano xy (il PO) il pavimento. È la stessa disposizione delle proiezioni ortogonali, con il prospetto a sinistra e il fianco a destra: un oggetto posato nell'angolo del triedro mostra in basso a destra la faccia rivolta verso l'osservatore del prospetto (parallela al PV, che le sta dietro), in basso a sinistra quella rivolta verso l'osservatore del fianco (parallela al PL) e in alto la faccia superiore: è ciò che si vede nella casa della Figura 4.8, con la facciata in basso a destra.

Con gli strumenti tradizionali gli assi isometrici si tracciano con la riga e con la **squadra 30°/60°**: appoggiata la squadra sul lato lungo alla riga orizzontale, il suo lato inclinato dà le rette

a 30°, e capovolgendola quelle a 30° nell'altro verso; le verticali si ottengono con il cateto lungo. Tutte le linee parallele agli assi si disegnano facendo scorrere la squadra lungo la riga.

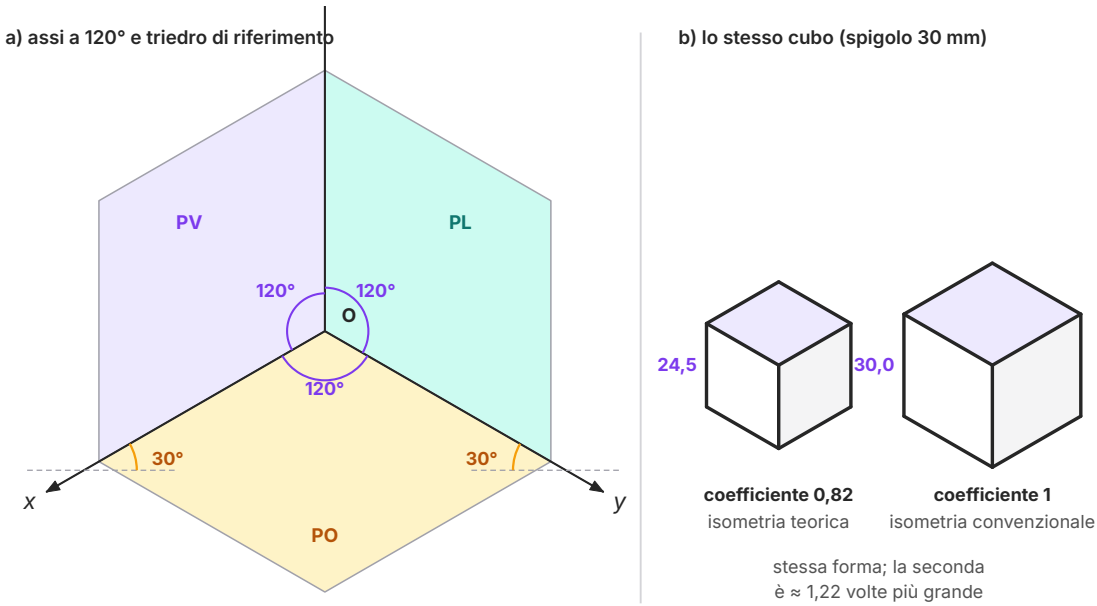


Figura 4.1 Gli assi dell'isometria. a) Gli assi assonometrici formano tre angoli di 120°; *z* è verticale, *x* e *y* scendono a 30° sull'orizzontale; il triedro è visto dall'interno, con il PV in alto a sinistra, il PL in alto a destra e il PO in basso. b) Un cubo di spigolo 30 mm in isometria teorica (coefficiente 0,82: spigoli disegnati di 24,5 mm) e convenzionale (coefficiente 1): la forma è la stessa.

4.2.2 Isometria teorica e isometria convenzionale

Dalla relazione tra i coefficienti si ricava subito il coefficiente isometrico: se i tre coefficienti sono uguali a k, allora $3k^2 = 2$, quindi $k^2 = 2/3$ e $k = \sqrt{(2/3)} \approx$ **0,816**, che si arrotonda a 0,82. Un segmento di 50 mm parallelo a un asse andrebbe quindi disegnato lungo $50 \cdot 0{,}816 \approx 40{,}8$ mm. Il disegno che si ottiene così è l'**isometria teorica** (o proiezione isometrica).

Moltiplicare ogni misura per 0,816 è scomodo e non aggiunge nulla: poiché i tre coefficienti sono uguali, riducendo tutte le misure nello stesso rapporto si ottiene soltanto un disegno più piccolo, con la stessa forma. Per questo nella pratica si adotta il coefficiente **1** su tutti e tre gli assi: è l'**isometria convenzionale** (o disegno isometrico), in cui le misure si riportano sugli assi senza alcun calcolo. L'immagine è simile a quella teorica e più grande nel rapporto 1 : 0,816, cioè circa **1,22 volte** (Figura 4.1, b). In questo libro, quando non si dice altro, «isometria» significa isometria convenzionale.

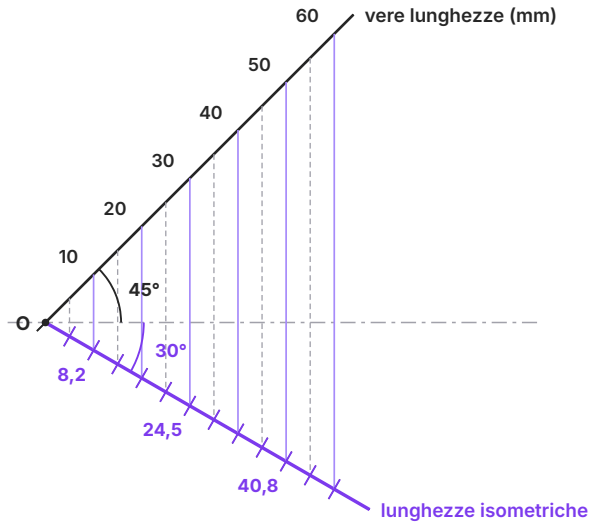
ERRORE FREQUENTE

Mescolare i due coefficienti. In uno stesso disegno si usa o il coefficiente 0,82 o il coefficiente 1, su tutti e tre gli assi. Disegnare le larghezze a grandezza vera e le altezze ridotte (o il contrario) non dà un'isometria più precisa: dà un oggetto deformato, schiacciato in una direzione.

4.2.3 La scala isometrica

Quando serve l'isometria teorica, per esempio per confrontarla con un'altra assonometria alla stessa scala, il coefficiente 0,816 si costruisce con un disegno, senza calcoli: è la **scala isometrica** (Figura 4.2). Si traccia una retta orizzontale e, da un suo punto O, una retta a 45° verso l'alto e una retta a 30° verso il basso. Sulla retta a 45° si riportano le lunghezze vere, per esempio un centimetro dopo l'altro; da ogni tacca si scende con la perpendicolare alla retta orizzontale fino alla retta a 30°. Le tacche ottenute sulla retta a 30° sono le lunghezze isometriche: quella che corrisponde a 50 mm misura circa 40,8 mm.

Perché funziona? Un punto della retta a 45° a distanza L da O è il vertice di un triangolo rettangolo isoscele con ipotenusa L: per il teorema di Pitagora la sua distanza orizzontale da O è $L/\sqrt{2}$. La perpendicolare conserva questa distanza orizzontale. Sulla retta a 30°, invece, il triangolo rettangolo è la metà di un triangolo equilatero: il cateto orizzontale è $\sqrt{3}/2$ dell'ipotenusa, e l'ipotenusa è quindi $(L/\sqrt{2}) \cdot 2/\sqrt{3} = L \cdot \sqrt{(2/3)} \approx 0{,}816 \cdot L$.



Costruzione

1. retta orizzontale e punto O
2. da O: retta a 45° in alto, retta a 30° in basso
3. vere lunghezze sulla retta a 45°
4. da ogni tacca, perpendicolare all'orizzontale fino alla retta a 30°

rapporto ottenuto: 0,816...

Figura 4.2 La scala isometrica. Le lunghezze vere sulla retta a 45°, riportate con perpendicolari all'orizzontale sulla retta a 30°, diventano lunghezze isometriche nel rapporto 0,816: 10 mm → 8,2 mm, 30 mm → 24,5 mm, 50 mm → 40,8 mm.

4.2.4 Un punto dalle sue coordinate

Come nella cavaliera, un punto $P(x; y; z)$ si costruisce percorrendo una spezzata di tre tratti paralleli agli assi: da O lungo l'asse x, poi parallelamente all'asse y, e si ottiene P', il piede del punto sul piano xy; da P' si sale in verticale della quota z.

ESEMPIO SVOLTO

Il punto $P(30; 20; 40)$ in isometria convenzionale.

1. Traccia gli assi: z verticale, x e y a 30° sull'orizzontale, con origine O.
2. Da O misura 30 mm lungo l'asse x (verso il basso a sinistra): è il punto P_x.
3. Da P_x traccia la parallela all'asse y e misura 20 mm verso il basso a destra: è P', il piede di P.
4. Da P' sali in verticale di 40 mm: è P.

Controllo: lo stesso punto si raggiunge in qualunque ordine si percorrano i tre tratti (prima 20 mm lungo y, poi 30 mm parallelamente a x, poi 40 mm in verticale). In isometria teorica i tre tratti misurerebbero 24,5, 16,3 e 32,7 mm.

4.2.5 Linee isometriche e non isometriche

Chiamiamo **linea isometrica** un segmento parallelo a uno dei tre assi: è l'unico tipo di segmento che si può misurare (e quindi disegnare) riportando la sua lunghezza vera. Ogni altro segmento è una **linea non isometrica**: una diagonale, uno spigolo inclinato di una piramide, il bordo di un taglio obliquo. La sua lunghezza sul disegno non è quella vera, e può risultare più corta o più lunga.

ERRORE FREQUENTE

Misurare lungo una linea non isometrica. Il punto $R(40; 30; 0)$ dista da O, nella realtà, $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = 50$ mm. In isometria convenzionale, però, il segmento OR misura sul disegno circa 36,1 mm, e lo spigolo inclinato di una piramide alta 70 mm, con base quadrata di lato 50 mm, può misurare 95 mm anche se è lungo 78,4 mm. Una linea non isometrica non si misura mai: si trovano i suoi due estremi con le coordinate e poi li si unisce.

APPROFONDIMENTO

Chi ha inventato l'isometria? Disegni di macchine e di fortificazioni con gli spigoli paralleli esistevano da secoli, ma il primo a dare regole precise per l'isometria è considerato **William Farish** (1759–1837), professore all'Università di Cambridge. Nelle sue lezioni usava modelli di macchine composti di pezzi da montare e cercava un modo chiaro per mostrare come andavano assemblati; espose il suo metodo nel saggio *On Isometrical Perspective*, pubblicato nel 1822 nel primo volume delle *Transactions* della Cambridge Philosophical Society. Il nome viene dal greco: ἴσος «uguale» e μέτρον «misura», perché le misure si riportano allo stesso modo sui tre assi. Nel corso dell'Ottocento l'isometria entrò nel disegno degli ingegneri e nelle scuole di architettura.

4.3 La dimetria e la trimetria

4.3.1 La dimetria della norma

L'isometria ha un difetto: poiché il quadro è ugualmente inclinato sui tre assi, molti oggetti appaiono troppo «regolari». In un cubo, per esempio, il vertice più vicino all'osservatore e quello opposto, più lontano, cadono nello stesso punto del disegno, e il contorno diventa un esagono regolare: l'occhio fatica a capire se il cubo è visto dall'alto o dal basso. Inclinando il quadro in modo diverso si ottiene un'immagine più varia.

La norma UNI EN ISO 5456-3 propone una **dimetria normalizzata** in cui i coefficienti stanno nel rapporto 1 : ½ : 1: l'asse z è verticale, l'asse x forma con l'orizzontale un angolo di circa **7°** (7° 10′) e l'asse y un angolo di circa **42°** (41° 25′), dalla parte opposta (Figura 4.3). Con la relazione

tra i coefficienti (la somma dei loro quadrati è 2) si trovano i coefficienti teorici: $k^2 \cdot (1 + ¼ + 1) = 2$, quindi $k^2 = 8/9$ e $k \approx 0{,}94$ sugli assi x e z, $\approx 0{,}47$ sull'asse y. In pratica si usano i coefficienti **1** su x e z e **½** su y: le larghezze e le altezze si riportano a grandezza vera, le profondità dimezzate, e il disegno risulta circa 1,06 volte più grande di quello teorico.

4.3.2 Gli angoli con le pendenze

Gli angoli di 7° e 42° si possono tracciare con il goniometro, oppure con due **pendenze**. La pendenza di una retta è il rapporto tra quanto essa scende (o sale) e quanto avanza in orizzontale: una pendenza **1 : 8** significa che la retta scende di 1 unità ogni 8 unità orizzontali, una pendenza **7 : 8** che scende di 7 ogni 8. Basta disegnare, sulla carta quadrettata o con la riga, un triangolo rettangolo con i cateti 8 e 1 per l'asse x, 8 e 7 per l'asse y: le ipotenuse danno le direzioni degli assi. Misurate con il goniometro, risultano circa 7,1° e 41,2°: un'**approssimazione** degli angoli della norma (7,2° e 41,4°), del tutto sufficiente per il disegno scolastico. Attenzione: la pendenza dà solo la *direzione*; le misure si riportano poi lungo l'asse inclinato, con i coefficienti 1 e ½.

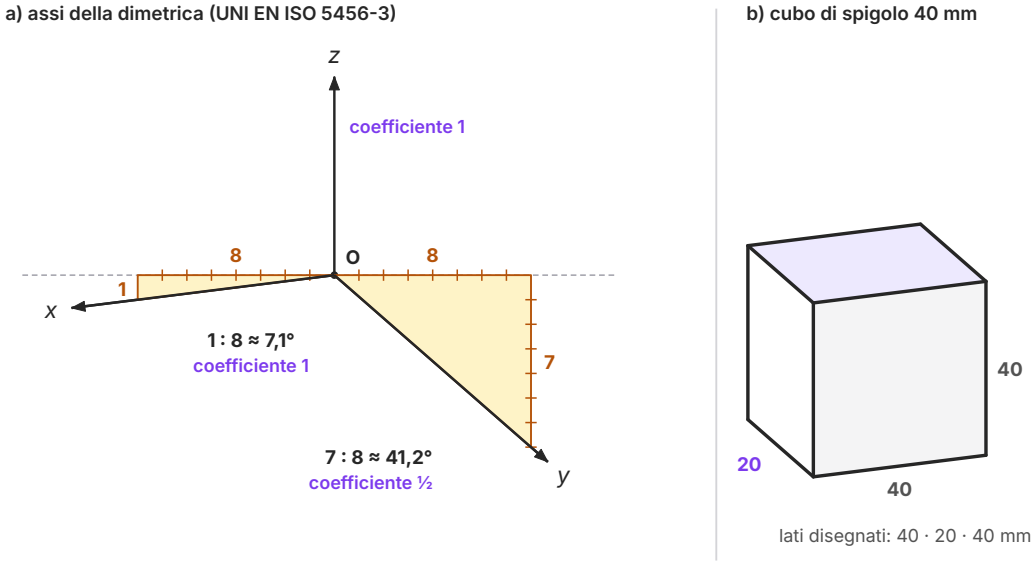


Figura 4.3 La dimetria UNI EN ISO 5456-3. a) Gli assi: x con pendenza 1 : 8 (circa 7°), y con pendenza 7 : 8 (circa 42°), z verticale; coefficienti 1 su x e z, ½ su y. b) Un cubo di spigolo 40 mm: la faccia parallela al piano xz appare quasi frontale, la profondità è disegnata lunga 20 mm.

Il risultato si vede nella Figura 4.3, b: la faccia parallela al piano xz è quasi frontale, poco deformata, e l'oggetto appare con una profondità moderata. La dimetria è adatta agli oggetti che hanno una faccia principale, come un mobile o la facciata di un edificio, che si vogliono mostrare con un accenno di profondità.

4.3.3 La trimetria

Nell'assonometria **trimetrica** i tre coefficienti e i tre angoli sono tutti diversi. Permette di scegliere il punto di vista più adatto a un oggetto particolare, ma richiede tre scale diverse e si costruisce di solito a partire dalle proiezioni ortogonali o con il computer. Nel disegno a mano non la useremo: basta saperla riconoscere.

4.4 Solidi in isometria

4.4.1 Il metodo delle coordinate

Un poliedro è determinato dai suoi vertici: per disegnarlo in isometria si leggono sulle proiezioni ortogonali le coordinate di ogni vertice, si costruiscono i punti come nell'esempio del punto $P(30; 20; 40)$ e si uniscono con gli spigoli. Per i **prismi retti** con la base sul piano orizzontale si disegna prima la base, poi si alzano gli spigoli verticali della lunghezza dell'altezza e si uniscono gli estremi superiori: la base superiore è uguale e parallela a quella inferiore. Per una **piramide** si disegna la base, poi il piede V' del vertice (il centro della base, se la piramide è retta) e da lì si sale in verticale fino a V; gli spigoli laterali sono linee non isometriche e si ottengono unendo V ai vertici della base.

Lo stesso metodo funziona per i solidi tagliati del capitolo 1: i punti di sezione si leggono sulle proiezioni ortogonali e si portano in isometria uno per uno.

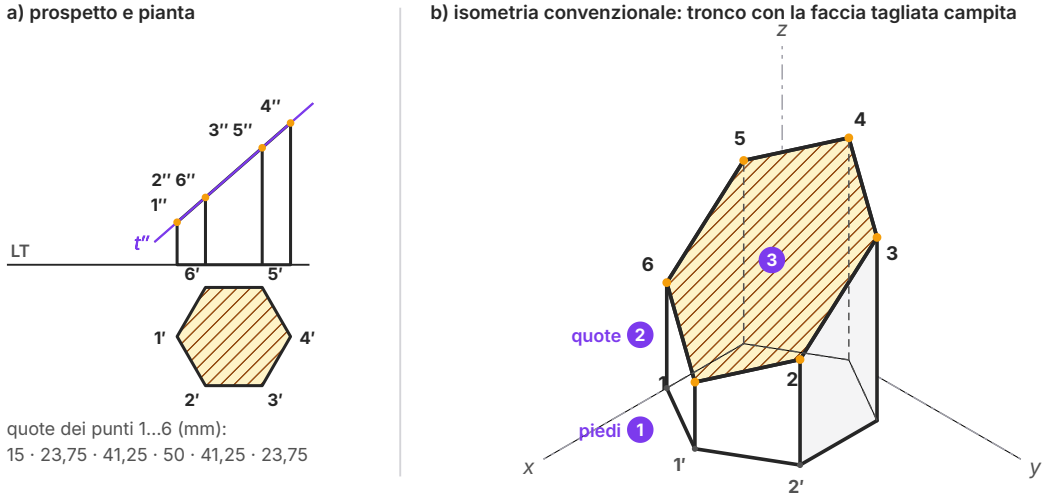


Figura 4.4 Un prisma tronco in isometria convenzionale. a) Il prisma esagonale della Figura 1.3 (lato 20 mm, altezza 60 mm) nel prospetto, con la traccia t'', e nella pianta. b) 1) I piedi 1′...6′ sul piano xy; 2) gli spigoli verticali alti quanto le quote; 3) la faccia tagliata, campita. La parte asportata è omessa.

Tabella 4.1 Le coordinate dei vertici della faccia tagliata del prisma esagonale (lato 20 mm, altezza 60 mm) tagliato dal piano α come nella Figura 1.3, con l'origine nel vertice della scatola circoscritta.

Punto	*x* (mm)	*y* (mm)	*z* (mm)
1	40	17,32	15
2	30	34,64	23,75
3	10	34,64	41,25
4	0	17,32	50
5	10	0	41,25
6	30	0	23,75

ESEMPIO SVOLTO

Il prisma tronco del capitolo 1 in isometria. Riprendiamo il prisma esagonale regolare della Figura 1.3 (lato 20 mm, altezza 60 mm), tagliato da un piano perpendicolare al PV che incontra lo spigolo di sinistra alla quota 15 mm e quello di destra alla quota 50 mm. Mettiamo l'origine in modo che la scatola che lo contiene occupi le coordinate da 0 a 40 mm in x e da 0 a 34,64 mm in y (34,64 = 20 · √3 è la distanza tra due lati paralleli dell'esagono). Le coordinate dei sei punti di sezione sono nella Tabella 4.1; le quote si leggono sul prospetto oppure si calcolano con una proporzione: la quota cresce di 35 mm su 40 mm di larghezza, cioè di 8,75 mm ogni 10 mm (Figura 4.4).

1. **Piedi.** Disegna in isometria la base esagonale sul piano xy con le coordinate dei vertici: 1′(40; 17,32), 2′(30; 34,64), 3′(10; 34,64), 4′(0; 17,32), 5′(10; 0), 6′(30; 0). È un esagono deformato: solo i due lati paralleli all'asse x (2′3′ e 5′6′) misurano 20 mm.
2. **Quote.** Da ogni piede sali in verticale della quota del punto: 15; 23,75; 41,25; 50; 41,25; 23,75 mm.
3. **Faccia tagliata.** Unisci i punti 1…6 nell'ordine; disegna in tratto grosso gli spigoli visibili, in tratteggio quelli nascosti dal tronco (qui gli spigoli verticali in 4 e 5 e i lati della base dietro), e campisci la faccia tagliata con linee fini parallele.

Controllo: gli spigoli verticali sono linee isometriche e misurano esattamente le quote; i lati della faccia tagliata sono linee non isometriche: il lato 1–2, lungo in realtà circa 21,8 mm (vedi la Tabella 2.1), misura sul disegno circa 24,2 mm. Come sempre la parte asportata non si disegna.

4.4.2 Il metodo della scatola

Molti oggetti, e quasi tutti gli edifici, si possono pensare come una composizione di solidi semplici. Il **metodo della scatola** parte dal più semplice di tutti: il parallelepipedo che contiene

l'oggetto, con gli spigoli paralleli agli assi e lungo quanto le tre dimensioni massime dell'oggetto, che si leggono sulle tre viste. Disegnata la scatola con un tratto leggerissimo, si lavora per **addizione e sottrazione** di volumi: si tolgono le parti vuote, si aggiungono quelle che sporgono, finché resta l'oggetto. Le misure si prendono sempre lungo gli spigoli della scatola o parallelamente a essi, cioè su linee isometriche.

ESEMPIO SVOLTO

Un gruppo di solidi dalle tre viste. Le viste della Figura 4.5, a mostrano un basamento di 60 × 40 × 10 mm; sopra di esso, contro il lato destro, un blocco di 20 × 40 × 30 mm; a sinistra del blocco una piramide retta a base quadrata di lato 20 mm, con la base sul basamento (da $x = 30$ a 50 mm, da $y = 10$ a 30 mm) e il vertice alla quota 40 mm.

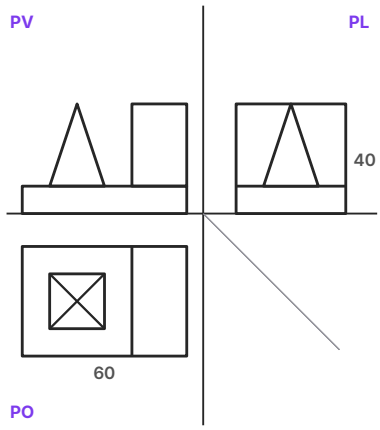
1. **Scatola.** Le dimensioni massime sono 60 mm in x, 40 mm in y e 40 mm in z: disegna in isometria la scatola 60 × 40 × 40 con linee sottili.
2. **Sottrazione.** Sopra la quota 10 mm togli dalla scatola tutto ciò che non è il blocco: resta il basamento, alto 10 mm, e il blocco, che occupa da $x = 0$ a $x = 20$ mm per tutta la profondità.
3. **Addizione.** Sulla faccia superiore del basamento disegna il quadrato di base della piramide con le coordinate dei vertici; dal suo centro $V'(40; 20; 10)$ sali in verticale di 30 mm fino a V; unisci V ai vertici della base.

Ripassa in tratto grosso gli spigoli visibili e cancella o lascia sottilissime le linee della scatola. Gli spigoli della piramide sono linee non isometriche: non si misurano, si ottengono unendo punti noti.

4.4.3 Solidi forati e parti nascoste

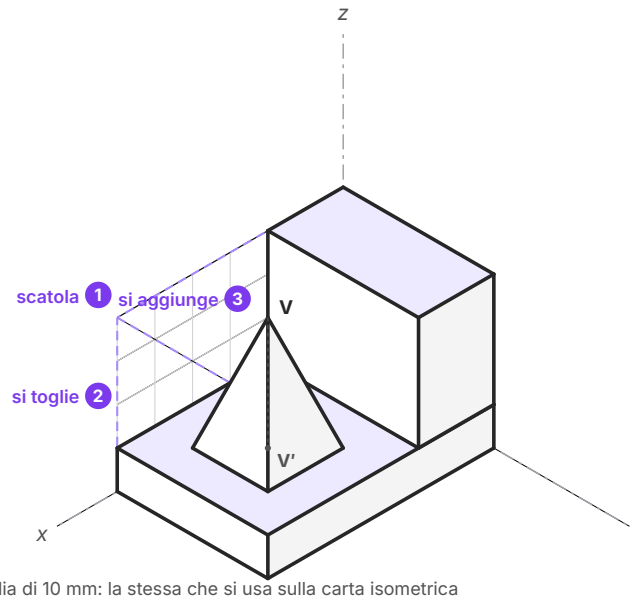
Un foro è una sottrazione: un prisma o un cilindro tolto dal solido. Si disegna prima il contorno del foro sulla faccia da cui entra, poi si cercano le parti della sua parete interna e del suo fondo che si vedono attraverso l'apertura; di solito, in isometria, se ne vede solo una piccola parte, o nessuna. Gli spigoli nascosti, tratteggiati, si disegnano solo quando aiutano a capire la forma: in un'assonometria, a differenza delle proiezioni ortogonali, spesso è più chiaro ometterli.

a) le tre viste (misure in mm)



basamento 60 × 40 × 10
blocco 20 × 40 × 30
piramide: base 20 × 20, vertice a quota 40
scatola circoscritta 60 × 40 × 40

b) isometria convenzionale con il metodo della scatola



griglia di 10 mm: la stessa che si usa sulla carta isometrica

Figura 4.5 Il metodo della scatola. a) Tre viste di un gruppo di solidi (basamento 60 × 40 × 10 mm, blocco 20 × 40 × 30 mm, piramide di base 20 × 20 mm alta 30 mm). b) Isometria convenzionale: 1) la scatola circoscritta 60 × 40 × 40 mm; 2) le parti vuote si tolgono; 3) la piramide si aggiunge dal piede *V′* del vertice. Sullo sfondo la griglia di 10 mm.

4.5 Il cerchio in isometria

4.5.1 Dal quadrato al rombo

Un cerchio di raggio r su una faccia parallela a un piano coordinato è inscritto in un quadrato di lato $2r$, con i lati paralleli agli assi. In isometria il quadrato diventa un **rombo isometrico**: i suoi lati sono linee isometriche lunghe $2r$, e i suoi angoli misurano 60° e 120°. Il cerchio diventa un'**ellisse isometrica** inscritta nel rombo, tangente ai lati nei loro **punti medi**, perché il cerchio toccava il quadrato nei punti medi dei lati e la proiezione parallela conserva i punti medi e le tangenze. L'asse maggiore dell'ellisse sta sulla diagonale lunga del rombo, l'asse minore su quella corta.

DA RICORDARE

In isometria l'asse maggiore dell'ellisse è sempre **perpendicolare all'asse coordinato perpendicolare alla faccia** (Figura 4.6, c). Per un cerchio orizzontale (piano xy) l'asse maggiore è orizzontale, perpendicolare a z; per un cerchio sul piano yz è perpendicolare all'asse x; per un cerchio sul piano xz è perpendicolare all'asse y. Lo stesso asse coordinato è l'asse del cilindro che ha quel cerchio per base.

4.5.2 L'ellisse esatta per punti

Il metodo più semplice per disegnare l'ellisse esatta usa **8 punti** (Figura 4.6, a), come per la cavaliera nel capitolo 3. Quattro punti sono i punti medi dei lati del rombo. Gli altri quattro stanno sulle diagonali del rombo, che sono le immagini delle diagonali del quadrato: nel quadrato, il cerchio taglia ogni diagonale nei punti che distano $0{,}707 \cdot r$ dai due assi di simmetria ($0{,}707 \approx 1/\sqrt{2}$). Il numero 0,707 si costruisce con un disegno:

1. su metà di un lato del rombo, dal punto medio M al vertice, costruisci con la squadra a 45° un triangolo rettangolo isoscele MHA esterno al rombo, che ha quella metà del lato per ipotenusa;
2. con centro in M e raggio MH riporta il cateto sul lato: ottieni il punto N, e $MN = MH = 0{,}707$ del semilato; fai lo stesso dall'altra parte di M;
3. dai due punti così trovati traccia le parallele al lato adiacente: tagliano le due diagonali del rombo nei quattro punti cercati;
4. unisci gli 8 punti con il curvilineo, o a mano libera con cura, seguendo la tangenza ai lati nei punti medi.

Con più punti l'ellisse è più precisa: si possono costruire 12 punti dividendo in 12 parti la circonferenza nella vista in vera forma e portandoli in isometria con le coordinate, come per le generatrici del cilindro nel capitolo 1.

4.5.3 L'ovale isometrico

Con il compasso si disegna più velocemente un **ovale isometrico**, una curva fatta di quattro archi di circonferenza che sostituisce l'ellisse (Figura 4.6, b). La costruzione si fa nel rombo:

1. i centri dei due archi grandi sono i **vertici ottusi** del rombo, O_1 e O_2;
2. da ciascun vertice ottuso traccia le rette che lo uniscono ai punti medi dei due lati opposti; poiché il rombo isometrico è formato da due triangoli equilateri, queste rette sono perpendicolari ai lati;
3. le rette si incontrano a due a due sulla diagonale lunga nei punti O_3 e O_4, centri dei due archi piccoli;

4. con centro in O_1 e in O_2 traccia gli archi grandi tra i punti medi dei lati opposti; con centro in O_3 e in O_4 chiudi con gli archi piccoli. Gli archi si raccordano nei punti medi, dove hanno la stessa tangente, cioè il lato del rombo.

Per un cerchio di raggio 30 mm il rombo ha il lato di 60 mm; i raggi degli archi sono circa 51,96 mm (= 30 · √3) e 17,32 mm (= 30/√3). L'ovale tocca l'ellisse esatta nei quattro punti medi, ma non coincide con essa: è largo circa 69,3 mm invece di 73,5 mm e alto circa 43,9 mm invece di 42,4 mm.

ERRORE FREQUENTE

L'ovale non è un'ellisse. Come hai visto nel primo volume (vol. 1, cap. 4), un ovale fatto di archi di circonferenza ha una curvatura che cambia a scatti, mentre quella dell'ellisse cambia con continuità. L'ovale isometrico è quindi una costruzione **approssimata**, comoda e accettata nel disegno a mano, ma da dichiarare come tale. Quando serve precisione, per esempio per misurare sul disegno, si costruisce l'ellisse per punti.

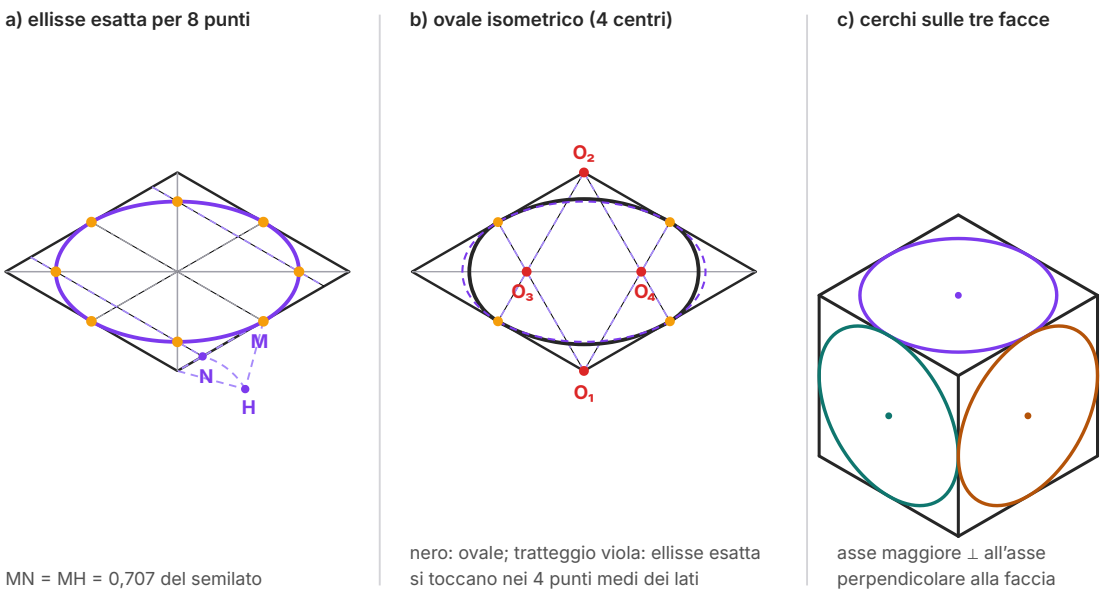


Figura 4.6 Il cerchio in isometria. a) Ellisse esatta per 8 punti in un rombo isometrico (cerchio di raggio 30 mm): i 4 punti medi dei lati e i 4 punti sulle diagonali, trovati con il triangolo *MHA*. b) L'ovale isometrico a quattro centri, approssimato, sovrapposto all'ellisse esatta (tratteggio). c) Cerchi sulle tre facce di un cubo: l'asse maggiore è perpendicolare all'asse coordinato perpendicolare alla faccia.

IN SINTESI

Isometria convenzionale, cerchio di diametro d su una faccia parallela a un piano coordinato:

- rombo circoscritto: lati di lunghezza d, angoli di 60° e 120°;
- ellisse: asse maggiore ≈ 1,22 · d (sulla diagonale lunga), asse minore ≈ 0,71 · d (sulla diagonale corta), tangente ai lati nei punti medi;
- ovale isometrico: centri nei vertici ottusi e sulle rette che li uniscono ai punti medi dei lati opposti; costruzione approssimata.

4.5.4 Cilindri, coni, fori e semicilindri

Un **cilindro** retto si disegna con le due ellissi delle basi, una per ogni estremo dell'asse, e con le due **generatrici di contorno** (cap. 3), le generatrici che delimitano la sua immagine (Figura 4.7, a). Se l'asse è verticale, le basi sono ellissi con l'asse maggiore orizzontale, e le generatrici di contorno sono le verticali tangenti alle due ellissi, che passano per gli estremi dei loro assi maggiori. Della base inferiore si vede solo la metà anteriore; quella posteriore, se si vuole, si tratteggia.

Per un **cono** si disegna l'ellisse di base e il vertice V, sull'asse; le generatrici di contorno sono le due **tangenti** condotte da V all'ellisse, che non passano per gli estremi dell'asse maggiore (Figura 4.7, b). Un **cilindro forato** (Figura 4.7, c) ha sulla faccia superiore due ellissi concentriche, quella esterna e quella del foro; attraverso il foro, se l'altezza non è piccola, non si vede il fondo. Un **semicilindro** con l'asse orizzontale (Figura 4.7, d) è la forma di una volta a botte: le sue due facce piane hanno per contorno mezze ellissi, unite da una generatrice di contorno tangente a entrambe. Lo ritroverai nel capitolo 5, nei volumi degli edifici.

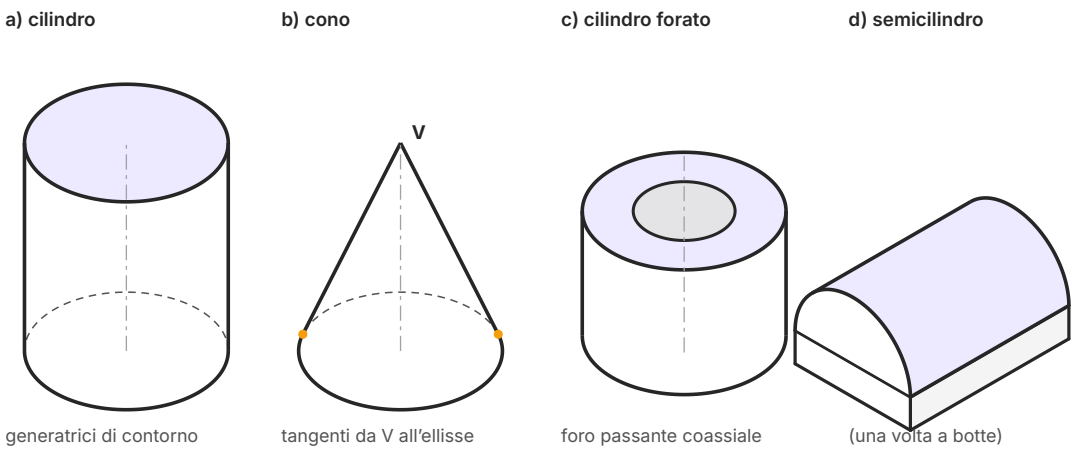


Figura 4.7 Solidi di rotazione in isometria convenzionale. a) Cilindro (raggio 20 mm, altezza 50 mm) con le generatrici di contorno. b) Cono (raggio 20 mm, altezza 50 mm): le generatrici di contorno sono tangenti da *V* all'ellisse. c) Cilindro (raggio 20 mm, altezza 30 mm) con foro passante di raggio 10 mm. d) Semicilindro di raggio 16 mm su un basamento: la forma di una volta a botte.

4.6 A mano libera, e la scelta dell'assonometria

4.6.1 Lo schizzo su carta isometrica

Prima di disegnare con gli strumenti conviene saper fare uno **schizzo assonometrico**: un disegno a mano libera, veloce, che rispetta il parallelismo degli spigoli e le proporzioni senza pretendere misure esatte. Serve a capire un oggetto, a provare un'idea, a comunicarla in pochi secondi, e prepara la tavola: un buono schizzo mostra subito se la vista scelta fa vedere le facce importanti.

Per esercitarsi si usa la **carta isometrica**, una carta stampata con tre famiglie di linee parallele: verticali, a 30° verso destra e a 30° verso sinistra, che formano una rete di triangoli equilateri (il lato è per esempio di 5 mm). Ogni linea della rete è una linea isometrica: basta contare i lati dei triangoli per riportare le misure, come nella griglia di 10 mm della Figura 4.5. Il metodo di lavoro è lo stesso della scatola:

1. osserva l'oggetto, o le sue tre viste, e stabilisci le tre dimensioni massime in quadretti;
2. disegna leggermente la scatola seguendo le linee della rete;
3. togli e aggiungi i volumi, seguendo sempre le linee della rete per gli spigoli paralleli agli assi;
4. per le linee non isometriche unisci i punti già trovati; per i cerchi disegna il rombo, segna i punti medi dei lati e traccia l'ellisse a mano libera, tangente in quei punti;
5. ripassa con un tratto deciso i contorni visibili.

Con un po' di pratica lo schizzo si fa anche sul foglio bianco: gli spigoli verticali restano verticali, gli altri si tengono a occhio a 30°. È l'esercizio inverso di quello delle proiezioni ortogonali: dal disegno in tre viste si ricostruisce l'oggetto, e dallo schizzo si capisce se le tre viste erano state lette bene.

4.6.2 Quale assonometria scegliere

Nessuna assonometria è la migliore in assoluto: ognuna privilegia qualcosa. La Figura 4.8 mostra la stessa piccola casa, con un oculo rotondo sulla facciata, in quattro assonometrie; la Tabella 4.2 riassume le differenze.

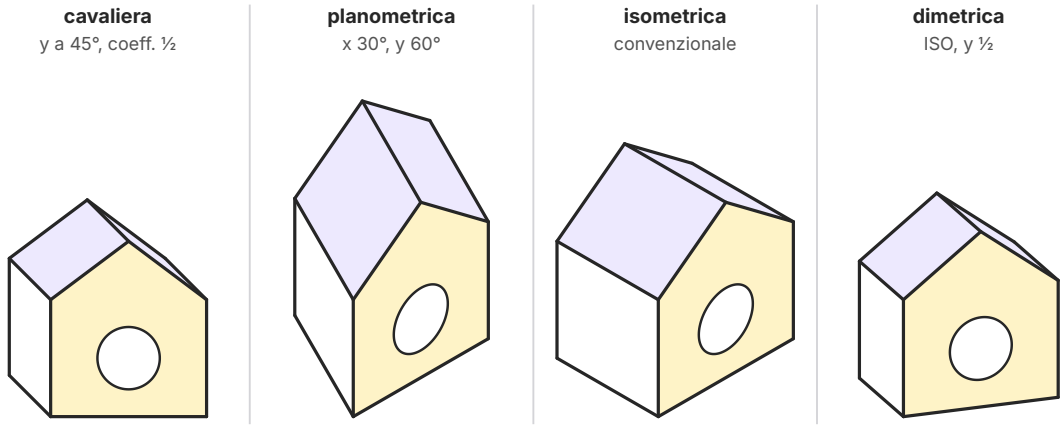


Figura 4.8 La stessa casa (40 × 30 mm in pianta, muri alti 30 mm, colmo a 45 mm, oculo di raggio 8 mm) in quattro assonometrie, alla stessa scala: cavaliera (*y* a 45°, coefficiente ½), planometrica (*x* a 30°, *y* a 60°), isometria convenzionale, dimetria UNI EN ISO (*y* coefficiente ½).

Tabella 4.2 Le assonometrie a confronto.

Tipo	Assi	Coefficienti	Facce in vera forma	Adatta per
Cavaliera (obliqua)	*x* orizzontale, *y* a 45° (30°, 60°), *z* verticale	1 : ½ : 1 (o 1 : 1 : 1)	le facce parallele al piano *xz*	oggetti con una faccia ricca di dettagli o di cerchi (facciate, pezzi meccanici)
Planometrica (obliqua)	*x* e *y* perpendicolari, a 30° e 60° o a 45°; *z* verticale	1 : 1 : 1 (a volte *z* ridotto)	la pianta	edifici, interni, città: si parte dalla pianta e si alzano le quote
Isometrica (ortogonale)	a 120°; *x* e *y* a 30°, *z* verticale	0,82 su tutti; in pratica 1 : 1 : 1	nessuna	oggetti con le tre facce ugualmente importanti; misure facili; schizzi su carta isometrica
Dimetrica UNI EN ISO (ortogonale)	*x* a c. 7°, *y* a c. 42°, *z* verticale	1 : ½ : 1	nessuna	oggetti con una faccia principale, visti in modo più naturale dell'isometria

Qualche criterio pratico. Se un oggetto ha molti cerchi su una sola faccia, la cavaliera con quella faccia frontale li lascia cerchi e risparmia molte ellissi. Se conta lo spazio in pianta, come in un edificio o in un giardino, la planometrica la riporta in vera forma. Se le tre facce sono ugualmente importanti, o si vuole un'immagine equilibrata e facile da misurare, l'isometria è la scelta più comune; la dimetria dà un'immagine più naturale, al prezzo di due scale diverse. Prima di scegliere, chiediti anche *da dove* guardare: una faccia importante va messa dove si vede, cioè rivolta verso le direzioni positive degli assi.

COLLEGAMENTI

L'assonometria fuori dall'aula. Le istruzioni di montaggio dei mobili e degli elettrodomestici, i cataloghi dei pezzi di ricambio e gli esplosi meccanici usano quasi sempre l'isometria o la dimetria, perché chi le legge deve riconoscere i pezzi senza saper leggere tre viste. I programmi di disegno al computer (CAD) offrono la «vista isometrica» con un clic. Molti videogiochi detti «isometrici» usano in realtà una dimetria: per comodità di disegno sullo schermo a pixel le linee salgono di 1 pixel ogni 2, con una pendenza 1 : 2 (circa 26,6°) invece dei 30° dell'isometria. In matematica, quando disegnerai i solidi per la geometria dello spazio, userai senza saperlo un'assonometria: ora sai quale scegliere e come misurare sul disegno.

SINTESI

- Nell'**assonometria ortogonale** i raggi sono perpendicolari al quadro, inclinato su tutti e tre gli assi: tutti gli assi sono scorciati, nessuna faccia è in vera forma, gli angoli tra gli assi assonometrici sono tutti ottusi.
- Angoli e coefficienti dipendono gli uni dagli altri; la somma dei quadrati dei tre coefficienti è sempre 2.
- Nell'**isometria** gli assi formano angoli di 120° (x e y a 30° sull'orizzontale, z verticale) e i coefficienti sono uguali: 0,816 nell'isometria teorica, 1 nell'**isometria convenzionale**, che dà la stessa forma circa 1,22 volte più grande. I due coefficienti non si mescolano.
- La **scala isometrica** si costruisce con una retta a 45° (vere lunghezze) e una a 30° (lunghezze isometriche), collegate da perpendicolari all'orizzontale.
- Si misurano solo le **linee isometriche**, parallele agli assi; le linee non isometriche si ottengono unendo punti costruiti con le coordinate.
- La **dimetria** UNI EN ISO 5456-3 ha gli assi x a circa 7° e y a circa 42° (pendenze 1 : 8 e 7 : 8, approssimate) e i coefficienti 1 : ½ : 1. La trimetria ha tre coefficienti diversi.
- I solidi si disegnano con il **metodo delle coordinate** e con il **metodo della scatola**, per addizione e sottrazione di volumi; i solidi tagliati del capitolo 1 si disegnano portando in isometria i punti di sezione.
- Un cerchio diventa un'**ellisse** inscritta nel rombo isometrico, tangente ai lati nei punti medi, con l'asse maggiore perpendicolare all'asse coordinato perpendicolare alla faccia; si costruisce esatta per 8 punti.
- L'**ovale isometrico** a quattro centri (vertici ottusi del rombo e intersezioni delle rette che li uniscono ai punti medi dei lati opposti) è un'approssimazione dell'ellisse.
- Cilindri e coni si completano con le **generatrici di contorno**: verticali tangenti alle ellissi per il cilindro, tangenti dal vertice all'ellisse per il cono.
- Lo **schizzo** a mano libera su **carta isometrica** segue lo stesso metodo della scatola; la scelta dell'assonometria dipende dalle facce che si vogliono mostrare e da che cosa si vuole misurare.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nell'assonometria ortogonale i raggi proiettanti sono:
   - **A.** perpendicolari al quadro
   - **B.** paralleli al quadro
   - **C.** inclinati di 45° sul quadro
   - **D.** paralleli all'asse z

2. ● Nell'isometria gli assi assonometrici formano tra loro:
   A. due angoli di 135° e uno di 90°
   B. tre angoli di 120°
   C. tre angoli di 90°
   D. un angolo di 97° e due di circa 131,5°

3. ● Il coefficiente di riduzione dell'isometria teorica vale circa:
   A. 0,5
   B. 0,71
   C. 0,82
   D. 1,22

4. ● Rispetto all'isometria teorica, l'isometria convenzionale dà:
   A. un disegno più deformato
   B. un disegno con gli assi a 135°
   C. un disegno con le facce in vera forma
   D. la stessa forma, circa 1,22 volte più grande

5. ● In isometria convenzionale si può misurare direttamente, a grandezza vera:
   A. solo un segmento parallelo a uno dei tre assi
   B. qualunque segmento del piano *xy*
   C. la diagonale di una faccia
   D. lo spigolo laterale di una piramide retta

6. ● Un cerchio orizzontale, disegnato in isometria, diventa:
   A. un cerchio
   B. un'ellisse con l'asse maggiore orizzontale
   C. un'ellisse con l'asse maggiore verticale
   D. un rombo

7. ● L'ovale isometrico a quattro centri è:
   A. un'ellisse esatta
   B. una curva che non tocca i lati del rombo
   C. un'approssimazione dell'ellisse fatta di quattro archi di circonferenza
   D. il contorno di un cono

8. ● Nella dimetria UNI EN ISO 5456-3 il coefficiente ½ si applica:
   A. all'asse *z*
   B. all'asse a circa 7°
   C. a tutti e tre gli assi
   D. all'asse a circa 42°

9. ● Il metodo della scatola comincia disegnando:
   A. la faccia più grande dell'oggetto
   B. il parallelepipedo circoscritto all'oggetto
   C. gli spigoli nascosti
   D. le ellissi dei fori

Lessico e norme

10. ● Completa: nell'assonometria ortogonale i raggi sono _____ al quadro; nell'isometria i tre coefficienti sono _____ e gli assi formano angoli di _____ ; l'asse z si disegna _____ e gli assi x e y formano con l'orizzontale angoli di _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Nell'isometria la faccia frontale di un cubo è in vera forma. b) Nell'isometria convenzionale un segmento parallelo all'asse x lungo 40 mm si disegna lungo 40 mm. c) Nell'assonometria ortogonale un angolo tra gli assi assonometrici può essere di 90°. d) L'ovale isometrico è un'ellisse costruita con il compasso. e) Il cerchio in isometria è tangente al rombo nei punti medi dei lati. f) Nella dimetria della norma le profondità si dimezzano.

12. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. Termini: a) scala isometrica; b) linea non isometrica; c) ovale isometrico; d) metodo della scatola; e) carta isometrica; f) generatrici di contorno. Definizioni: 1) segmento non parallelo a nessun asse, che non si misura sul disegno; 2) costruzione grafica che riduce le lunghezze vere nel rapporto 0,816; 3) generatrici che delimitano l'immagine di un cilindro o di un cono; 4) carta con una rete di triangoli equilateri; 5) curva di quattro archi che approssima l'ellisse; 6) procedimento che parte dal parallelepipedo circoscritto.

13. ● Spiega che cosa indicano, in una tavola di assonometria, le scritture: $P(30; 20; 40)$, P', $k = 0{,}82$, pendenza 1 : 8, coefficienti 1 : ½ : 1, O_1.

14. ● Completa la tabella: per l'isometria e per la dimetria UNI EN ISO scrivi gli angoli degli assi x e y sull'orizzontale, i coefficienti teorici e quelli usati in pratica.

15. ● Descrivi come si tracciano con riga e squadra 30°/60° le rette parallele ai tre assi isometrici.

Costruire

Per le tavole usa un foglio A4 squadrato (area utile 190 × 277 mm), in verticale se non si dice altro; le coordinate dei punti sono $(x; y; z)$ in mm, con l'origine O nel punto indicato. Se non si dice altro usa l'isometria convenzionale (coefficiente 1).

16. ● Costruisci la scala isometrica: retta orizzontale a 150 mm dal bordo superiore, O a 20 mm dal bordo sinistro; sulla retta a 45° segna le lunghezze vere da 10 a 80 mm, ogni 10 mm. Misura le lunghezze isometriche corrispondenti a 50 mm e a 80 mm.

17. ● Foglio orizzontale, O al centro. Traccia gli assi isometrici e costruisci i punti $A(40; 0; 0)$, $B(0; 30; 0)$, $R(40; 30; 0)$ e $S(40; 30; 50)$. Misura sul disegno il segmento OR e confrontalo con la sua lunghezza vera.

18. ● Disegna un cubo di spigolo 50 mm (*O* a 95 mm dal bordo sinistro e a 180 mm dal bordo superiore) prima in isometria convenzionale, poi, accanto, in isometria teorica con la scala isometrica. Misura in entrambi i casi la larghezza e l'altezza totali del disegno.

19. ●● Prisma esagonale regolare, lato 25 mm, altezza 60 mm, con la base sul piano *xy* e due vertici opposti della base su una parallela all'asse *x*. Scrivi le coordinate dei vertici della base, con l'origine nel vertice della scatola circoscritta, e disegna il prisma.

20. ●● Piramide retta a base quadrata, lato 50 mm, altezza 70 mm, base sul piano *xy* da (0; 0) a (50; 50). Disegnala con il piede del vertice. Misura sul disegno lo spigolo laterale che parte dal vertice della base (50; 50; 0) e confrontalo con la sua lunghezza vera.

21. ●● Prisma retto a base quadrata di lato 40 mm (da $x = 0$ a 40, da $y = 0$ a 40), alto 70 mm, tagliato da un piano perpendicolare al PV che incontra gli spigoli in $x = 40$ alla quota 30 mm e quelli in $x = 0$ alla quota 60 mm. Disegna le proiezioni ortogonali del tronco con la vera forma della sezione e poi il tronco in isometria, con la faccia tagliata campita.

22. ●● Una scala di tre gradini: larghezza 60 mm (lungo *x*), ogni gradino profondo 15 mm (lungo *y*) e alto 15 mm; il gradino più alto è quello verso il PV. Disegna le tre viste e poi l'isometria con il metodo della scatola, indicando le dimensioni della scatola.

23. ●● Cubo di spigolo 60 mm. Sulla faccia superiore costruisci l'ellisse di un cerchio di raggio 30 mm con il metodo degli 8 punti; sulla faccia rivolta verso l'asse *x* disegna l'ovale isometrico dello stesso cerchio. Misura gli assi dell'ellisse.

24. ●● Cilindro retto con l'asse verticale, raggio 25 mm, altezza 60 mm, con un foro passante coassiale di raggio 10 mm. Disegnalo con le generatrici di contorno. Quanto misurano gli assi delle ellissi della faccia superiore?

25. ●● Parallelepipedo di 60 × 40 × 30 mm ($x \times y \times z$) in dimetria UNI EN ISO: traccia gli assi con le pendenze 1 : 8 e 7 : 8 e riporta le misure con i coefficienti 1 : ½ : 1. Di quanto scende, rispetto a *O*, l'estremo dello spigolo di 60 mm sull'asse *x*?

26. ● A mano libera, su carta isometrica con triangoli di 5 mm: un blocco a forma di L, formato da un parallelepipedo di 8 × 4 × 2 lati di triangolo e da un secondo parallelepipedo di 2 × 4 × 4 lati posato sopra un'estremità. Poi rifallo sul foglio bianco, senza griglia.

Leggere il disegno

27. ● Riconosci l'assonometria dagli assi: a) tre angoli di 120°; b) *x* orizzontale, *y* a 45°, *z* verticale; c) *x* a circa 7° e *y* a circa 42° sull'orizzontale; d) *x* e *y* perpendicolari tra loro, a 30° e 60° sull'orizzontale.

28. ●● Uno studente disegna un cubo di spigolo 50 mm in isometria convenzionale e controlla il disegno misurando la diagonale della faccia superiore: si aspetta 70,7 mm ($50 \cdot \sqrt{2}$). Che cosa trova sul disegno, e perché?

29. ●● Osserva la Figura 4.4, b. Quali punti della faccia tagliata sono più alti e quali più bassi? Quali spigoli verticali sono nascosti? Perché il lato 2–3 della faccia tagliata non è parallelo all'asse x, anche se in pianta lo è?

30. ●● Un'ellisse disegnata in isometria ha l'asse maggiore inclinato di 60° sull'orizzontale e diretto verso l'alto a destra. Su quale piano coordinato sta il cerchio? Qual è l'asse del cilindro che ha quel cerchio per base?

31. ●●● Disegna le tre viste, in scala 1 : 1, della casa della Figura 4.8 (pianta 40 × 30 mm, muri alti 30 mm, colmo a 45 mm parallelo all'asse y, oculo di raggio 8 mm con centro a 15 mm da terra al centro della facciata).

Verso la verifica

32. ●●● Una colonna su un plinto: plinto di 50 × 50 × 15 mm, fusto cilindrico di raggio 15 mm e altezza 80 mm, centrato sul plinto, abaco di 44 × 44 × 8 mm centrato sul fusto. Disegnala in isometria convenzionale con il metodo della scatola e le ellissi per punti, e indica gli assi delle ellissi del fusto.

33. ●●● Un piccolo ambiente coperto a volta a botte: parallelepipedo di 60 × 40 × 30 mm ($x \times y \times z$) sormontato da un semicilindro di raggio 20 mm con l'asse parallelo a x, alla quota 30 mm. Disegnalo in isometria, costruendo le due mezze ellissi delle testate e la generatrice di contorno della volta. Nel capitolo 5 vedrai volumi simili negli edifici antichi.

34. ●●● Disegna il prisma tronco dell'esercizio sul prisma quadrato tagliato (lato 40 mm, alto 70 mm) anche in dimetria UNI EN ISO e confronta i due disegni: in quale si capisce meglio l'inclinazione del taglio? In quale è più facile misurare? Motiva in 5–6 righe.

PER APPROFONDIRE

- [ISO] UNI EN ISO 5456-3: la norma descrive le assonometrie raccomandate per il disegno tecnico, tra cui l'isometrica e la dimetrica di questo capitolo.
- [CHO] A. Choisy, *Histoire de l'architecture*: nel capitolo 5 vedrai come le sue assonometrie mostrano gli edifici in un solo disegno.

Glossario del capitolo

Addizione e sottrazione di volumi
Modo di comporre un oggetto aggiungendo solidi semplici o togliendoli (vuoti, fori, incavi) da un solido più grande.

Carta isometrica
Carta stampata con una rete di triangoli equilateri, cioè di linee verticali e a 30°, per gli schizzi isometrici.

Dimetria normalizzata
Assonometria ortogonale della norma UNI EN ISO 5456-3 con gli assi x a circa 7° e y a circa 42° sull'orizzontale e i coefficienti 1 : ½ : 1.

Ellisse isometrica
Immagine in isometria di un cerchio: ellisse inscritta nel rombo isometrico, tangente ai lati nei punti medi.

Isometria convenzionale
Isometria disegnata con il coefficiente 1 sui tre assi: stessa forma della teorica, circa 1,22 volte più grande; è quella d'uso comune.

Isometria teorica
Isometria disegnata con il coefficiente di riduzione $\sqrt{(2/3)} \approx 0{,}82$ sui tre assi.

Linea isometrica
Segmento parallelo a uno degli assi: è l'unico che si misura sul disegno a grandezza vera.

Linea non isometrica
Segmento non parallelo agli assi: la sua lunghezza sul disegno non è quella vera; si ottiene unendo due punti costruiti con le coordinate.

Metodo della scatola
Procedimento che parte dal parallelepipedo circoscritto all'oggetto e lo completa togliendo e aggiungendo volumi.

Ovale isometrico
Curva di quattro archi di circonferenza, con centri nei vertici ottusi del rombo e sulla diagonale lunga, che approssima l'ellisse isometrica.

Pendenza
Rapporto tra il dislivello e lo spostamento orizzontale di una retta (1 : 8 significa 1 unità in verticale ogni 8 in orizzontale).

Rombo isometrico
Immagine in isometria di un quadrato con i lati paralleli agli assi: rombo con angoli di 60° e 120°.

Scala isometrica
Costruzione grafica, con una retta a 45° e una a 30°, che trasforma le lunghezze vere in lunghezze isometriche (rapporto 0,816).

Schizzo assonometrico
Disegno assonometrico a mano libera, che rispetta parallelismi e proporzioni senza misure esatte.

Soluzioni

1. A. Per definizione; nell'assonometria obliqua i raggi sono inclinati sul quadro.

2. B. Il quadro è ugualmente inclinato sui tre assi: tre angoli uguali, 360° : 3 = 120°.

3. C. $3k^2 = 2$, $k = \sqrt{(2/3)} \approx 0{,}816$.

4. D. Tutte le misure sono moltiplicate per 1 invece che per 0,816: 1 : 0,816 ≈ 1,22.

5. A. Solo le linee isometriche si misurano; le diagonali e gli spigoli inclinati sono linee non isometriche.

6. B. L'asse maggiore è perpendicolare all'asse *z*, perpendicolare alla faccia.

7. C. Gli archi si raccordano nei punti medi dei lati del rombo, ma la curva non coincide con l'ellisse.

8. D. Il coefficiente ½ va sull'asse delle profondità *y*, quello a circa 42°; *x* e *z* hanno coefficiente 1.

9. B. Il parallelepipedo che contiene l'oggetto ha le tre dimensioni massime; poi si toglie e si aggiunge.

10. perpendicolari; uguali; 120°; verticale; 30°.

11. a) F: nell'assonometria ortogonale nessuna faccia è in vera forma; il quadrato diventa un rombo. b) V. c) F: i tre angoli sono sempre ottusi. d) F: è un'**approssimazione** dell'ellisse fatta di quattro archi di circonferenza. e) V. f) V: coefficiente ½ sull'asse *y*.

12. a-2; b-1; c-5; d-6; e-4; f-3.

13. *P*(30; 20; 40): il punto con larghezza 30 mm, aggetto 20 mm e quota 40 mm; *P'*: il suo piede sul piano *xy*; *k* = 0,82: il coefficiente dell'isometria teorica; pendenza 1 : 8: retta che scende di 1 ogni 8 in orizzontale, cioè l'asse *x* della dimetria; 1 : ½ : 1: i coefficienti della dimetria su *x*, *y*, *z*; O_1: un centro dell'ovale isometrico (un vertice ottuso del rombo).

14. Isometria: *x* e *y* a 30°; coefficienti teorici 0,82 : 0,82 : 0,82; in pratica 1 : 1 : 1. Dimetria: *x* a c. 7°, *y* a c. 42° (pendenze 1 : 8 e 7 : 8); coefficienti teorici c. 0,94 : 0,47 : 0,94; in pratica 1 : ½ : 1.

15. Si appoggia la riga orizzontale; la squadra, con un cateto sulla riga, dà le verticali (asse *z*); con l'ipotenusa inclinata di 30° sull'orizzontale dà le parallele a un asse, e girandola dall'altra parte le parallele all'altro. Facendo scorrere la squadra lungo la riga si tracciano tutte le parallele.

16. Le tacche sulla retta a 30° stanno a 8,2; 16,3; 24,5; 32,7; 40,8; 49,0; 57,2; 65,3 mm da *O*. Per 50 mm: ≈ 40,8 mm; per 80 mm: ≈ 65,3 mm (rapporto 0,816; tolleranza ± 0,5 mm).

17. *A* a 40 mm da *O* lungo *x*; *B* a 30 mm lungo *y*; *R* si ottiene da *A* con la parallela a *y* lunga 30 mm; *S* 50 mm sopra *R*. *OR* misura sul disegno ≈ 36,1 mm (± 0,5), mentre la lunghezza vera è $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = 50$ mm: *OR* è una linea non isometrica.

18. Convenzionale: il contorno è un esagono regolare, largo 50 · √3 ≈ 86,6 mm e alto 100 mm (50 mm di spigolo verticale più due volte 25 mm, l'abbassamento di uno spigolo a 30° lungo 50 mm, che è metà della sua lunghezza). Teorica: spigoli di 40,8 mm, larghezza ≈ 70,7 mm, altezza ≈ 81,6 mm. Il rapporto tra le due è ≈ 1,22.

19. Scatola 50 × 43,30 mm (43,30 = 25 · √3). Vertici della base: (50; 21,65), (37,5; 43,30), (12,5; 43,30), (0; 21,65), (12,5; 0), (37,5; 0); quelli superiori uguali con *z* = 60. Solo i lati paralleli all'asse *x* misurano 25 mm sul disegno.

20. Piede del vertice *V'*(25; 25; 0), vertice *V*(25; 25; 70). Lo spigolo da (50; 50; 0) a *V* misura sul disegno ≈ 95 mm (± 1), più della sua lunghezza vera $\sqrt{(25^2 + 25^2 + 70^2)} \approx 78{,}4$ mm: una linea non isometrica può apparire più lunga.

21. In prospetto la traccia *t''* va da quota 30 (in *x* = 40) a quota 60 (in *x* = 0). La sezione è un rettangolo: in vera forma 40 × 50 mm (50 = $\sqrt{(40^2 + 30^2)}$). In isometria: punti di sezione (40; 0; 30), (40; 40; 30), (0;

40; 60), (0; 0; 60); i lati paralleli a *y* misurano 40 mm, gli altri due, non isometrici, ≈ 60,8 mm sul disegno. Faccia tagliata campita, parte asportata omessa.

22. Scatola 60 × 45 × 45 mm. In fianco il profilo è una scaletta: gradini in *y* da 0 a 15 (alto 45), da 15 a 30 (alto 30), da 30 a 45 (alto 15). In isometria si tolgono dalla scatola i due prismi a gradino davanti al gradino più alto; tutti gli spigoli sono linee isometriche e si misurano direttamente.

23. Rombo di lato 60 mm, angoli di 60° e 120°. Ellisse: asse maggiore ≈ 73,5 mm (orizzontale), asse minore ≈ 42,4 mm (verticale), tolleranza ± 1 mm. L'ovale sulla faccia laterale ha l'asse maggiore inclinato di 60° sull'orizzontale, perpendicolare all'asse *x*; raggi degli archi ≈ 52,0 e 17,3 mm.

24. Ellisse esterna: assi ≈ 61,2 mm e ≈ 35,4 mm (1,22 · 50 e 0,71 · 50); ellisse del foro: ≈ 24,5 mm e ≈ 14,1 mm. Le generatrici di contorno sono verticali, tangenti alle ellissi esterne negli estremi degli assi maggiori, distanti ≈ 61,2 mm.

25. Spigoli disegnati: 60 mm lungo *x*, 20 mm lungo *y*, 30 mm in verticale. L'estremo dello spigolo di 60 mm scende di 60/√65 ≈ 7,4 mm (Pitagora: la retta con pendenza 1 : 8 è l'ipotenusa di un triangolo di cateti 8 e 1, lunga √65), e si sposta in orizzontale di ≈ 59,5 mm. Misurato sul disegno: ≈ 7,4 mm ± 0,5.

26. Traccia di risposta: scatola di 8 × 4 × 4 lati; si toglie il volume sopra il primo parallelepipedo tranne l'estremità di 2 lati. Controllo: tutti gli spigoli seguono le linee della rete; sul foglio bianco gli spigoli verticali restano verticali e gli altri paralleli tra loro.

27. a) isometrica; b) cavaliera (obliqua); c) dimetrica UNI EN ISO; d) planometrica (obliqua).

28. La diagonale della faccia superiore è il rombo: la diagonale lunga misura 50 · √3 ≈ 86,6 mm, quella corta 50 mm. Nessuna delle due è 70,7 mm, perché le diagonali sono linee non isometriche.

29. Il punto più alto è 4 (50 mm), il più basso 1 (15 mm); 3 e 5 sono a 41,25 mm, 2 e 6 a 23,75 mm. Sono nascosti gli spigoli verticali in 4 e 5. Il lato 2–3 congiunge punti di quote diverse (23,75 e 41,25 mm): sale mentre avanza in *x*, quindi non è parallelo all'asse *x*, che è orizzontale nello spazio; in pianta si vede solo la sua proiezione.

30. L'asse maggiore è perpendicolare all'asse che va verso il basso a destra, cioè all'asse *y*: il cerchio sta su un piano parallelo a *xz*, e il cilindro ha l'asse parallelo a *y*.

31. Prospetto (piano *xz*): pentagono largo 40 mm, alto 30 mm ai lati e 45 mm al colmo, con il cerchio di raggio 8 mm centrato in (20; 15). Pianta: rettangolo 40 × 30 mm diviso dalla linea di colmo in *x* = 20. Fianco: rettangolo 30 × 30 mm sormontato dal rettangolo della falda (fino a 45 mm), con la linea di gronda a 30 mm; l'oculo, sulla facciata, nel fianco è uno spigolo (si vede di taglio) e non compare.

32. Scatola 50 × 50 × 103 mm. Ellissi del fusto: asse maggiore ≈ 36,7 mm, asse minore ≈ 21,2 mm (cerchio di diametro 30 mm: 1,22 · 30 e 0,71 · 30), con l'asse maggiore orizzontale; la base inferiore del fusto a quota 15, quella superiore a quota 95; l'abaco da 95 a 103 mm. Generatrici di contorno verticali, distanti ≈ 36,7 mm.

33. Le testate sono sulle facce parallele al piano *yz*: le mezze ellissi, inscritte in metà del rombo di lato 40 mm, hanno l'asse maggiore perpendicolare all'asse *x* (≈ 49 mm per l'ellisse intera) e toccano la linea d'imposta (quota 30) agli estremi del diametro. La generatrice di contorno è parallela all'asse *x* e tangente alle due mezze ellissi; altezza totale del volume 50 mm.

34. Traccia di risposta: nella dimetria la faccia frontale (piano *xz*) è quasi in vera forma, quindi il taglio inclinato si legge quasi come nel prospetto; le profondità sono dimezzate. In isometria le tre facce hanno la stessa importanza e tutte le misure si riportano a grandezza vera, ma il taglio è meno evidente. Entrambi i disegni sono corretti se le misure sono prese solo lungo gli assi.