CAPITOLO

3

L'assonometria: principi e assonometrie oblique

Un solo disegno, tre dimensioni, nessuna misura perduta: è la promessa dell'assonometria, a patto di misurare nella direzione giusta.

OBIETTIVI

1. Spiegare il principio della proiezione assonometrica: terna di riferimento, quadro, raggi paralleli, assi assonometrici e coefficienti di riduzione.
2. Classificare le assonometrie secondo la norma UNI EN ISO 5456-3: ortogonali e oblique; isometriche, dimetriche e trimetriche.
3. Disegnare in cavaliera punti, figure piane, prismi, piramidi e gruppi di solidi dalle coordinate o dalle proiezioni ortogonali.
4. Costruire per otto punti l'ellisse che rappresenta un cerchio orizzontale o di profilo.
5. Disegnare in planometrica un edificio a partire dalla sua pianta.
6. Passare da un'assonometria alle proiezioni ortogonali e viceversa, scegliendo l'assonometria adatta.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Perché l'assonometria 2
3.2 Il principio della proiezione assonometrica 3
3.3 L'assonometria cavaliera 6
3.4 L'assonometria planometrica 13
3.5 Dalle proiezioni ortogonali all'assonometria, e ritorno 16

Disegno e Storia dell'arte 2 · Parte II · L'assonometria e le ombre · versione 1.0
Capitolo 3: L'assonometria: principi e assonometrie oblique · pagine 77–100 del volume completo · estratto per lo studio

Apri le istruzioni di montaggio di un mobile, il catalogo di un ferramenta o il progetto di una scala: quasi sempre trovi un disegno in cui l'oggetto si vede «in rilievo», con tre facce insieme, eppure le sue linee sono rigide, parallele, prive di quel restringersi verso il fondo che ha una fotografia. È un'**assonometria**: un metodo che produce un'immagine sola, leggibile anche da chi non ha mai studiato disegno tecnico, nella quale però le misure non vanno perdute.

Nel primo volume e nei capitoli 1 e 2 hai lavorato con le proiezioni ortogonali, che descrivono un oggetto con esattezza ma lo spezzano in tre viste separate. In questo capitolo impari il principio comune a tutte le assonometrie e le due **assonometrie oblique** più usate: la **cavaliera**, che conserva in vera forma la faccia frontale, e la **planometrica**, che conserva in vera forma la pianta. Il capitolo 4 sarà dedicato alle assonometrie ortogonali, il capitolo 5 agli edifici.

3.1 Perché l'assonometria

3.1.1 Tre viste o un'immagine sola?

Le proiezioni ortogonali hanno un grande pregio: ogni vista è una misura. In pianta leggi larghezze e profondità, in prospetto larghezze e altezze, e ciò che è parallelo a un piano di proiezione vi appare in vera grandezza. Il prezzo è che l'oggetto non si vede mai intero: chi guarda deve ricostruirlo nella mente mettendo insieme tre disegni, e per una forma complicata non è facile. Per questo chi progetta accompagna quasi sempre le viste con un disegno d'insieme.

L'**assonometria** (dal greco *áxon*, «asse», e *métron*, «misura»: misura lungo gli assi) rappresenta l'oggetto con una sola immagine in cui si vedono le tre dimensioni e in cui le tre dimensioni restano **misurabili**, purché si misuri nella direzione giusta. È un compromesso: si rinuncia a vedere ogni faccia in vera forma per ottenere un disegno che si capisce a colpo d'occhio e che si può ancora quotare e misurare.

Esiste un altro modo di rappresentare un oggetto con una sola immagine: la **prospettiva**, che riproduce ciò che vede un occhio fermo in un punto. In prospettiva i raggi proiettanti escono tutti da quel punto (si parla di proiezione centrale), le rette parallele che si allontanano convergono e le misure cambiano con la distanza: l'immagine è più naturale, ma non si misura direttamente. La prospettiva si studia nel secondo biennio; qui ci basta sapere che l'assonometria, al contrario, usa **raggi paralleli**, come le proiezioni ortogonali.

APPROFONDIMENTO

Cavalieri, militari e architetti. Disegni in cui gli oggetti sono visti dall'alto con le linee parallele che restano parallele si trovano da secoli nei trattati di fortificazione e di macchine. I nomi che usiamo ancora ne portano traccia. Secondo la spiegazione tradizionale, l'assonometria *cavaliera* deve il nome al *cavaliere* delle fortezze, un'opera rialzata di terra o di muratura da cui si dominava il terreno circostante; e l'assonometria planometrica è detta anche *militare* per il suo uso nei piani delle fortificazioni.

Alla fine dell'Ottocento l'ingegnere francese Auguste Choisy illustrò la sua *Histoire de l'architecture* (1899) con moltissime assonometrie, spesso viste dal basso, che mostrano in un disegno pianta, struttura e volumi degli edifici. Da allora l'assonometria è uno strumento abituale degli architetti: la ritroverai nel capitolo 5.

3.2 Il principio della proiezione assonometrica

3.2.1 Terna, quadro e raggi proiettanti

Immagina l'oggetto collocato nel triedro che conosci dal volume 1 (vol. 1, cap. 5) e fissa sull'oggetto una **terna di riferimento**: tre assi a due a due perpendicolari che escono dall'origine O. Come per le proiezioni ortogonali, l'asse x corre lungo la linea di terra e misura la **larghezza**, l'asse y misura l'**aggetto** (la profondità, verso l'osservatore) e l'asse z la **quota**. Un punto si indica con le sue coordinate in millimetri: $P(x; y; z)$.

L'oggetto e la sua terna si proiettano su un piano detto **quadro** con **raggi proiettanti** paralleli tra loro (Figura 3.1). Il quadro non è parallelo a nessuno dei tre assi, altrimenti avremmo di nuovo una delle viste ortogonali: è proprio l'inclinazione del quadro rispetto alla terna a far comparire nella stessa immagine larghezza, profondità e altezza. Ogni punto dell'oggetto ha come immagine il punto in cui il suo raggio incontra il quadro.

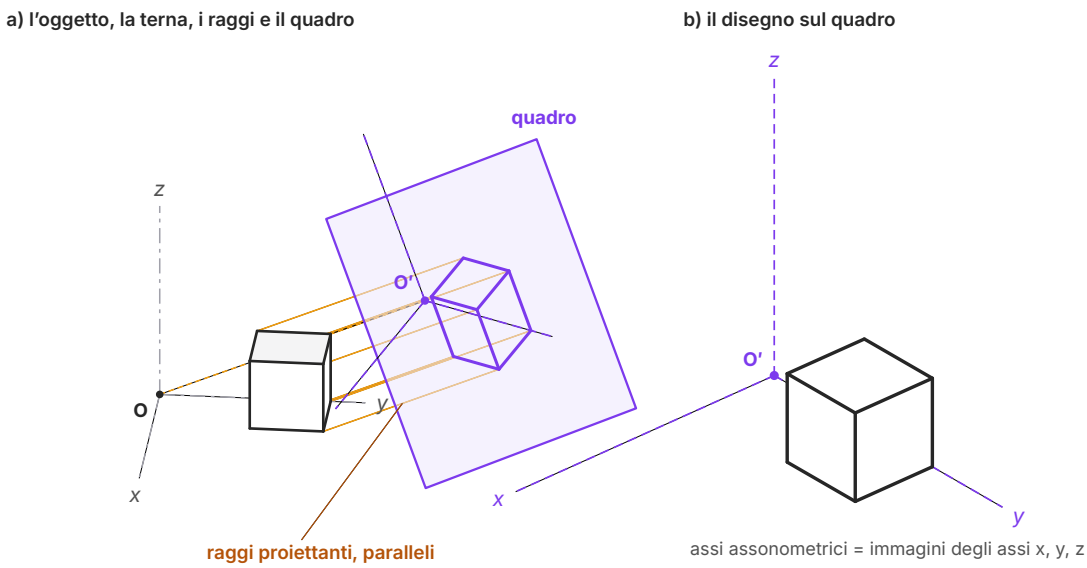


Figura 3.1 Il principio dell'assonometria. a) Un cubo con la sua terna di riferimento *x*, *y*, *z* è proiettato sul quadro con raggi paralleli (qui perpendicolari al quadro: un'assonometria ortogonale, in questo caso trimetrica). b) Il quadro visto di fronte: le immagini degli assi, uscenti da *O'*, sono gli assi assonometrici; il cubo vi appare con tre facce, nessuna in vera forma.

3.2.2 Assi assonometrici e coefficienti di riduzione

Le immagini dei tre assi sul quadro si chiamano **assi assonometrici**. Sono tre semirette che escono dall'immagine dell'origine e formano tra loro angoli che dipendono dalla posizione del quadro e dalla direzione dei raggi. Un segmento parallelo a un asse resta parallelo al corrispondente asse assonometrico, ma in generale appare più corto: si dice che è **scorciato**.

Il rapporto tra la lunghezza disegnata e la lunghezza reale di un segmento parallelo a un asse è il **coefficiente di riduzione** (o rapporto di scorcio) di quell'asse:

$$\text{coefficiente di riduzione} = \frac{\text{lunghezza disegnata}}{\text{lunghezza reale}}$$

Ogni asse ha il suo coefficiente, che vale lo stesso per tutti i segmenti paralleli a quell'asse, qualunque sia la loro posizione. Se il coefficiente dell'asse *y* è ½, uno spigolo profondo 60 mm si disegna lungo 30 mm, e uno profondo 18 mm si disegna lungo 9 mm. In pratica, quindi, un'assonometria è definita da **sei dati**: le direzioni dei tre assi assonometrici sul foglio e i loro tre coefficienti.

3.2.3 Tre regole che valgono sempre

La proiezione con raggi paralleli conserva alcune proprietà e ne distrugge altre. Quelle che restano sono le regole di lavoro di ogni assonometria:

1. **Le rette parallele restano parallele.** Due spigoli paralleli dell'oggetto si disegnano paralleli; un parallelogramma resta un parallelogramma (un quadrato, in generale, diventa un parallelogramma).
2. **Su una stessa retta, i rapporti tra le lunghezze si conservano.** Il punto medio di uno spigolo si disegna nel punto medio dello spigolo disegnato; se un punto divide un segmento in tre parti uguali, lo stesso accade nel disegno.
3. **Le misure si prendono solo lungo gli assi o parallelamente a essi**, applicando il coefficiente dell'asse. Un segmento non parallelo a nessun asse non si misura: si disegnano i suoi estremi, ciascuno dalle sue tre coordinate, e poi li si unisce.

> **ERRORE FREQUENTE**
> **Misurare in diagonale.** In un'assonometria gli angoli retti dell'oggetto non appaiono retti e le diagonali non mantengono la loro lunghezza. Nel cubo di spigolo 40 mm disegnato in cavaliera con coefficiente ½ (vedi più avanti), le due diagonali della faccia superiore, che nella realtà sono uguali (circa 56,6 mm), sul foglio misurano circa 29,5 mm e 56,0 mm. Chi riporta col righello una diagonale reale, o la misura sul disegno credendo di leggere la vera lunghezza, sbaglia sempre. La regola 3 non ha eccezioni.

3.2.4 Come si classificano le assonometrie

La norma **UNI EN ISO 5456-3**, che regola le rappresentazioni assonometriche nel disegno tecnico, distingue le assonometrie con due criteri (Tabella 3.1).

- **Secondo la direzione dei raggi.** Nell'**assonometria ortogonale** i raggi sono perpendicolari al quadro, come nella Figura 3.1; il quadro è inclinato su tutti e tre gli assi e quindi tutti e tre risultano scorciati. Nell'**assonometria obliqua** i raggi sono inclinati sul quadro; di solito il quadro è parallelo a uno dei piani coordinati, e allora le figure parallele a quel piano si vedono in vera forma.
- **Secondo i coefficienti di riduzione.** Un'assonometria è **isometrica** se i tre coefficienti sono uguali, **dimetrica** se due sono uguali e il terzo diverso, **trimetrica** se sono tutti diversi.

Tabella 3.1 Le assonometrie di questo volume secondo la direzione dei raggi e i coefficienti di riduzione ($x : y : z$).

Tipo	Raggi	Coefficienti	In vera forma	Cap.
Cavaliera	obliqui	1 : 1 : 1	facce parallele al piano *xz*	3
Cavaliera con coefficiente ½ (*cabinet*)	obliqui	1 : ½ : 1	facce parallele al piano *xz*	3
Planometrica	obliqui	1 : 1 : 1	facce parallele al piano *xy* (pianta)	3
Ortogonale isometrica	perpendicolari	tre uguali (circa 0,82)	nessuna	4
Ortogonale dimetrica	perpendicolari	due uguali	nessuna	4
Ortogonale trimetrica	perpendicolari	tutti diversi	nessuna	4

Attenzione al linguaggio comune: quando si dice semplicemente «isometria» si intende l'assonometria **ortogonale** isometrica, che studierai nel capitolo 4. Le assonometrie oblique hanno nomi propri: cavaliera e planometrica.

APPROFONDIMENTO

Il teorema di Pohlke. Nel 1853 il matematico tedesco Karl Pohlke enunciò un risultato sorprendente, che si chiama oggi **teorema di Pohlke**: tre segmenti qualsiasi, disegnati su un piano a partire da uno stesso punto e non tutti su una stessa retta, si possono sempre considerare come la proiezione parallela di tre segmenti uguali e a due a due perpendicolari, cioè di tre spigoli di un cubo.

In parole semplici: si possono scegliere liberamente le direzioni dei tre assi sul foglio e le lunghezze dei tre segmenti unitari, e il disegno che si ottiene è sempre una vera proiezione parallela dell'oggetto, vista da una certa direzione. È per questo che le assonometrie oblique lasciano tanta libertà: l'angolo e il coefficiente dell'asse y della cavaliera si scelgono per comodità, e il risultato è comunque corretto. La dimostrazione richiede strumenti che non fanno parte del primo biennio.

3.3 L'assonometria cavaliera

3.3.1 Gli assi

Nell'**assonometria cavaliera** il quadro è parallelo al piano verticale *xz*, cioè al PV: è come se proiettassimo l'oggetto sul piano del prospetto con raggi obliqui anziché perpendicolari. Ne se-

guono subito tre fatti.

- Gli assi *x* e *z* conservano la loro posizione e la loro misura: *x* è orizzontale, *z* è verticale, il coefficiente di entrambi è 1.
- Ogni figura parallela al piano *xz* (una facciata, la faccia frontale di un cubo, un arco su una parete) si disegna in **vera forma**, esattamente come nel prospetto.
- L'asse *y*, che nella vista ortogonale si ridurrebbe a un punto, diventa una semiretta obliqua. La sua direzione e il suo coefficiente dipendono dall'inclinazione dei raggi e si possono scegliere.

Nelle tavole si usa di solito l'asse *y* inclinato di **45°** sull'orizzontale; si incontrano anche 30° e 60° (Figura 3.2). In questo libro, coerentemente con le proiezioni ortogonali, l'asse *x* va verso sinistra a partire da *O* e l'asse *y* va verso il basso a destra: l'oggetto si vede dall'alto, da sinistra e dal davanti, e mostra la faccia frontale, quella superiore e quella di sinistra. Per il coefficiente dell'asse *y* la norma UNI EN ISO 5456-3 prevede due valori:

- **coefficiente 1**: è la cavaliera in senso stretto (*cavalier*, nella norma);
- **coefficiente ½**: la norma la chiama ***cabinet***; nella scuola italiana si parla spesso, più semplicemente, di cavaliera con coefficiente ½. È la più usata, perché, come vedrai, il disegno appare meno allungato.

Salvo indicazione diversa, in questo capitolo la cavaliera ha l'asse *y* a 45° e coefficiente ½. Le tavole si eseguono su foglio A4 verticale, *O* a 140 mm dal bordo sinistro e a 190 mm dal bordo superiore della cornice: c'è spazio per le larghezze verso sinistra e per le altezze verso l'alto.

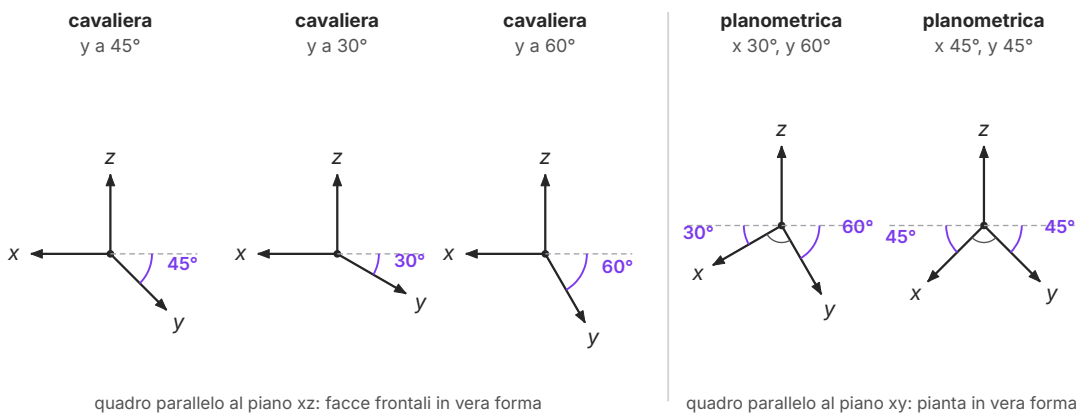


Figura 3.2 Gli assi delle assonometrie oblique. A sinistra la cavaliera, con l'asse *y* a 45°, 30° o 60° sull'orizzontale: il quadro è parallelo al piano *xz*. A destra la planometrica, con gli assi *x* e *y* perpendicolari tra loro, a 30° e 60° oppure a 45° e 45° sull'orizzontale, e l'asse *z* verticale: il quadro è parallelo al piano *xy*.

3.3.2 Un punto dalle sue coordinate

Per disegnare un punto basta percorrere le sue tre coordinate, una dopo l'altra, ciascuna parallela al proprio asse e moltiplicata per il proprio coefficiente. L'ordine più comodo è x, poi y, poi z: così si trova prima il **piede** del punto, cioè l'immagine P' della sua proiezione sul piano xy, e poi il punto stesso, sulla verticale del piede (Figura 3.3a).

ESEMPIO SVOLTO

Il punto $P(40; 30; 50)$ in cavaliera, asse y a 45°, coefficiente ½.

1. Da O misura 40 mm lungo l'asse x, verso sinistra (coefficiente 1).
2. Dal punto trovato traccia la parallela all'asse y, a 45° verso il basso a destra, e misura $30 \cdot ½ = 15$ mm: è il piede P'.
3. Da P' sali in verticale di 50 mm (coefficiente 1): è il punto P.

Controllo: rispetto a O, P si trova 40 mm a sinistra e 50 mm più in alto, spostato poi di 15 mm lungo la direzione a 45°. Lo spostamento a 45° equivale a circa 10,6 mm verso destra e 10,6 mm verso il basso ($15 \cdot 0{,}707$, perché il lato di un quadrato è la sua diagonale per 0,707, come dice il teorema di Pitagora). Quindi P sta 29,4 mm a sinistra e 39,4 mm sopra O. Non serve calcolarlo per disegnare: il controllo serve a scoprire gli errori.

Le linee tratteggiate della figura completano il parallelepipedo delle coordinate: sono utili quando il punto va collegato ai piani coordinati, per esempio per disegnarne le proiezioni.

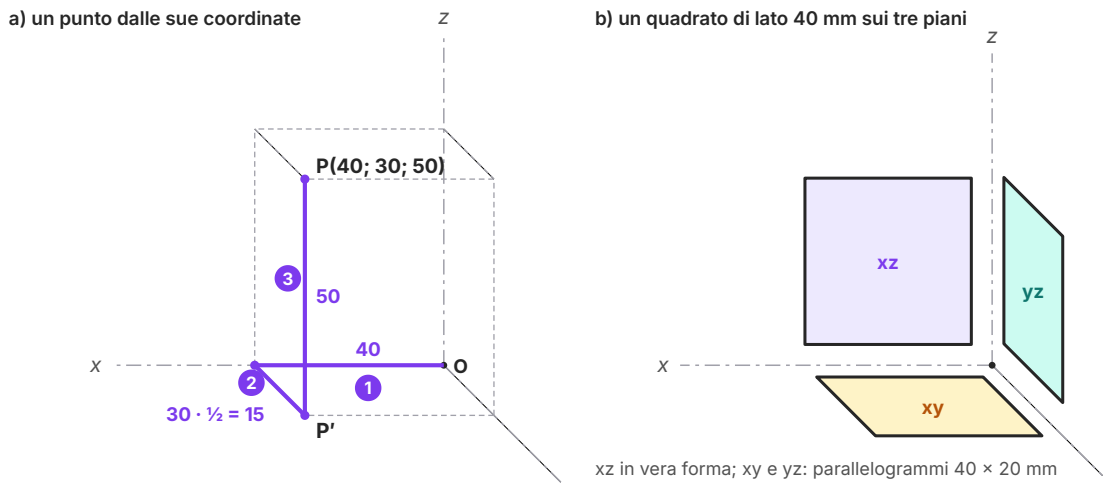


Figura 3.3 Cavaliera, asse y a 45°, coefficiente ½. a) Il punto $P(40; 30; 50)$ si trova percorrendo le coordinate: 1) 40 mm lungo x; 2) $30 \cdot ½ = 15$ mm parallelamente a y, fino al piede P'; 3) 50 mm in verticale. b) Un quadrato di lato 40 mm su ciascuno dei piani coordinati: sul piano xz resta un quadrato, sugli altri due diventa un parallelogramma con un lato di 40 mm e uno di 20 mm a 45°.

3.3.3 Segmenti e figure piane

Un segmento si disegna trovando i suoi due estremi. Se il segmento è parallelo a un asse, la sua immagine è parallela all'asse assonometrico corrispondente e la sua lunghezza si ottiene con il coefficiente; altrimenti si trovano gli estremi dalle coordinate e li si unisce, senza preoccuparsi della lunghezza disegnata, che non ha un rapporto semplice con quella reale.

Una figura piana si disegna per vertici. Nella Figura 3.3b lo stesso quadrato di lato 40 mm è disegnato sui tre piani coordinati. Sul piano xz appare in vera forma. Sul piano orizzontale xy e sul piano di profilo yz diventa un parallelogramma con due lati di 40 mm (paralleli a x o a z) e due di 20 mm a 45° (paralleli a y). Gli angoli retti del quadrato si vedono retti solo nella faccia frontale: anche questo è un modo per controllare il disegno.

3.3.4 Il cubo: coefficiente 1 o ½?

Disegniamo un cubo di spigolo 40 mm con un vertice in O e gli spigoli lungo gli assi, una volta con coefficiente 1 e una volta con coefficiente ½ (Figura 3.4). La faccia frontale è in entrambi i casi un quadrato di 40 mm. Con coefficiente 1 gli spigoli in profondità sono lunghi quanto gli altri, eppure il cubo sembra un parallelepipedo allungato verso il fondo; con coefficiente ½ appare molto più simile a un cubo.

Il motivo è che il nostro occhio è abituato alla visione prospettica, nella quale ciò che si allontana si accorcia: una profondità disegnata «a grandezza intera» ci sembra eccessiva. Il coefficiente ½ corregge l'impressione. La cavaliera con coefficiente 1 conserva invece un vantaggio pratico: tutte le misure lungo gli assi si riportano direttamente, senza dimezzarle.

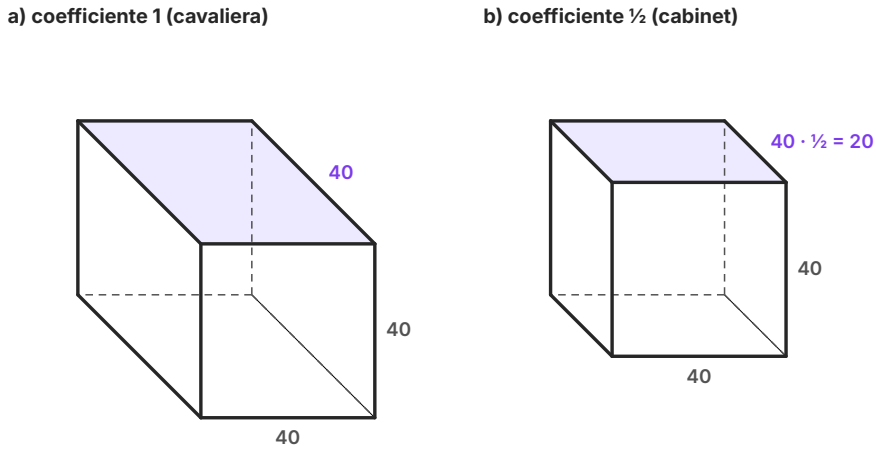


Figura 3.4 Lo stesso cubo di spigolo 40 mm in cavaliera, asse y a 45°. a) Coefficiente 1: gli spigoli in profondità sono di 40 mm e il cubo sembra allungato. b) Coefficiente ½: gli spigoli in profondità sono di 20 mm e il cubo appare più naturale. Gli spigoli nascosti sono tratteggiati.

3.3.5 Dalle proiezioni ortogonali alla cavaliera

Poiché il quadro è parallelo al PV, la cavaliera nasce dal **prospetto**: si ridisegna il prospetto così com'è e lo si «tira in avanti» spostando ogni punto, parallelamente all'asse y, della sua profondità moltiplicata per il coefficiente. Le profondità si leggono in **pianta** (o in fianco). Per un solido il lavoro procede così:

1. dalle proiezioni ortogonali ricava le coordinate dei vertici; se il solido poggia sul PO, conviene partire dalla base, cioè dalla pianta;
2. disegna la base in assonometria, vertice per vertice (per una base orizzontale: x verso sinistra e $y \cdot ½$ a 45°);
3. alza le verticali dai vertici della base con le loro altezze reali (prisma) oppure trova il vertice dal suo piede (piramide);
4. unisci i vertici e decidi quali spigoli sono in vista: quelli nascosti si tratteggiano o si omettono, come chiede la consegna.

ESEMPIO SVOLTO

Prisma e piramide esagonali (Figura 3.5). Base: esagono regolare di lato 20 mm con il centro in (30; 25; 0) e due vertici opposti su una parallela all'asse x. Prisma alto 50 mm; piramide alta 60 mm. Cavaliera con y a 45° e coefficiente ½.

1. **Coordinate della base.** I vertici opposti A e D distano 20 mm dal centro lungo x: $A(50; 25; 0)$, $D(10; 25; 0)$. Gli altri quattro distano 10 mm dal centro lungo x e $20 \cdot 0{,}866 \approx 17{,}3$ mm lungo y (metà dell'altezza di un triangolo equilatero di lato 20 mm, per il teorema di Pitagora: $\sqrt{(20^2 - 10^2)} = \sqrt{300} \approx 17{,}32$): $B(40; 42{,}3)$, $C(20; 42{,}3)$, $E(20; 7{,}7)$, $F(40; 7{,}7)$.
2. **Base in cavaliera.** Per ogni vertice misura x verso sinistra e poi $y \cdot ½$ a 45°: per esempio B si trova con 40 mm e poi 21,2 mm; E con 20 mm e poi 3,8 mm. L'esagono diventa un esagono schiacciato, con i lati opposti ancora paralleli (regola 1).
3. **Prisma.** Da ogni vertice alza una verticale di 50 mm e unisci gli estremi: la base superiore è uguale a quella inferiore, traslata di 50 mm verso l'alto.
4. **Piramide.** Il piede del vertice è il centro della base, (30; 25; 0); da lì sali di 60 mm e unisci il vertice V ai sei vertici della base.
5. **Visibilità.** Nel prisma sono in vista la base superiore e le tre facce laterali rivolte in avanti (AB, BC, CD); sono nascosti i due spigoli verticali posteriori, per E e F, e i tre lati posteriori della base inferiore (DE, EF, FA). Nella piramide sono nascosti gli stessi tre lati della base e gli spigoli laterali VE e VF.

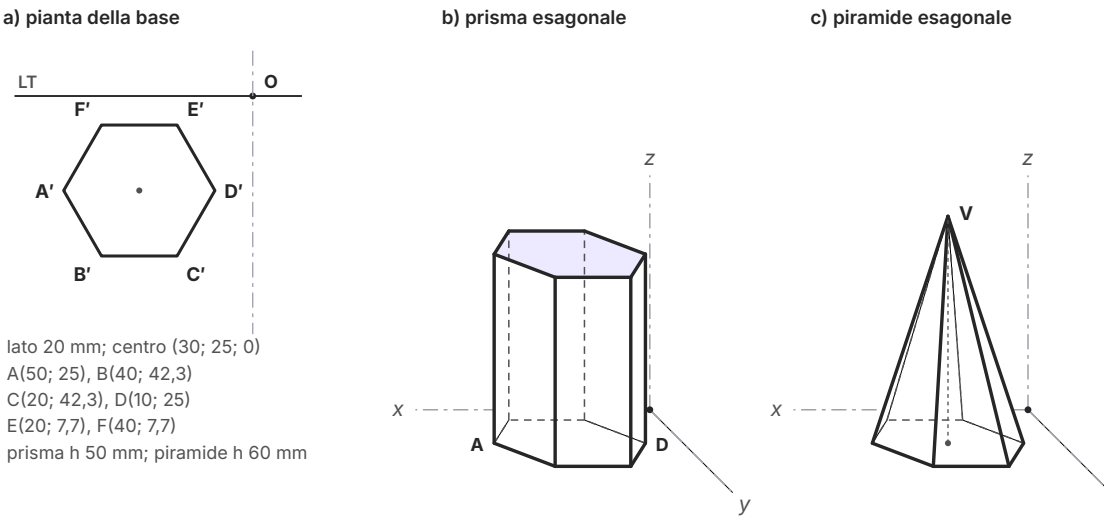


Figura 3.5 Dalle proiezioni alla cavaliera (asse *y* a 45°, coefficiente ½). a) La pianta della base esagonale e le coordinate dei vertici. b) Il prisma alto 50 mm. c) La piramide alta 60 mm, con il vertice *V* sulla verticale del centro della base. Gli spigoli nascosti sono tratteggiati.

3.3.6 Il cerchio in cavaliera

Un cerchio parallelo al piano *xz* resta un cerchio: si disegna con il compasso, con il centro e il raggio reali. È uno dei grandi vantaggi della cavaliera: archi, rosoni, ruote e fori sulla faccia frontale si disegnano esattamente e senza fatica.

Un cerchio orizzontale o di profilo, invece, si deforma in un'**ellisse** (cap. 1). Il metodo più sicuro per disegnarla parte dal **quadrato circoscritto** al cerchio, i cui lati sono paralleli agli assi: in assonometria il quadrato diventa un parallelogramma e l'ellisse è inscritta in esso, tangente ai punti medi dei lati. Il **metodo degli otto punti** trova otto punti dell'ellisse (Figura 3.6):

- **quattro punti di tangenza**: i punti medi dei lati del parallelogramma, sulle due mediane che passano per il centro *C*;
- **quattro punti sulle diagonali**: nel cerchio vero stanno sulle diagonali del quadrato, alla distanza *r* dal centro, e quindi hanno dalle mediane distanza $r \cdot 0{,}707$. Questo rapporto si costruisce con un triangolo rettangolo isoscele, senza calcoli.

IN SINTESI

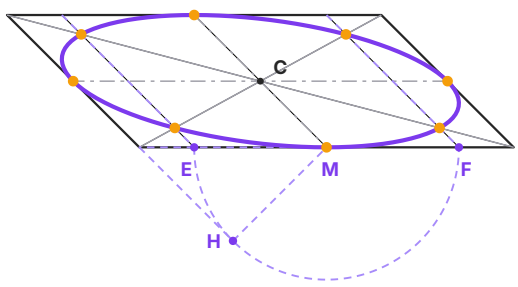
Ellisse di un cerchio orizzontale, per otto punti.

1. Disegna il parallelogramma che rappresenta il quadrato circoscritto (lato $2r$ lungo x, $2r \cdot ½$ lungo y), le sue diagonali e le due mediane per il centro C: i punti medi dei lati sono i primi quattro punti.
2. Su metà di un lato, per esempio dal vertice al punto medio M del lato anteriore, costruisci all'esterno il triangolo rettangolo isoscele che ha quella metà come ipotenusa; chiama H il vertice dell'angolo retto.
3. Con centro in M e raggio MH traccia un arco che taglia il lato in E e F: le loro distanze da M sono la metà del lato per 0,707.
4. Da E e F traccia le parallele all'asse y: tagliano le diagonali negli altri quattro punti.
5. Unisci gli otto punti con una curva continua, aiutandoti con il curvilineo, senza spigoli nei punti di tangenza.

La costruzione funziona anche su un lato scorciato, perché la proiezione conserva i rapporti lungo una retta (regola 2). Per un cerchio sul piano yz si procede allo stesso modo nel parallelogramma di profilo.

a) gli otto punti dell'ellisse

quadrato circoscritto 60 × 60 mm →
parallelogramma 60 × 30 mm, lati obliqui a 45°
triangolo rettangolo isoscele su metà lato:
il cateto MH = metà lato · 0,707 dà E e F



b) cerchi su un cubo

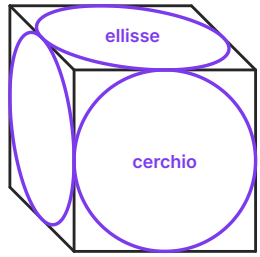


Figura 3.6 Il cerchio in cavaliera (asse y a 45°, coefficiente ½). a) Cerchio orizzontale di raggio 30 mm: il quadrato circoscritto diventa un parallelogramma 60 × 30 mm; i punti medi dei lati e i quattro punti sulle diagonali, trovati con il triangolo MH e le parallele all'asse y da E e F, determinano l'ellisse (disegnata qui esatta). b) Su un cubo il cerchio della faccia frontale resta un cerchio, quelli delle facce superiore e laterale diventano ellissi.

ERRORE FREQUENTE

Tre errori con i cerchi. Il primo è disegnare con il compasso anche il cerchio di una faccia orizzontale: solo i cerchi paralleli al piano xz restano cerchi. Il secondo è disegnare un ovale «a occhio» che non tocca il parallelogramma nei punti medi dei lati: l'ellisse deve essere tangente ai quattro lati proprio lì. Il terzo è credere che gli assi dell'ellisse stiano sulle mediane o sulle diagonali del parallelogramma: in generale non è così, e per disegnarla gli assi non servono.

ESEMPIO SVOLTO

Un gruppo di solidi. Un parallelepipedo 80 × 50 × 20 mm (larghezza, profondità, altezza) ha un vertice in O e gli spigoli lungo gli assi. Sulla sua faccia superiore poggia un cilindro di raggio 18 mm e altezza 40 mm, con l'asse verticale passante per il centro della faccia. Cavaliera, y a 45°, coefficiente ½.

1. Disegna il parallelepipedo: faccia frontale 80 × 20 mm in vera forma, profondità 50 · ½ = 25 mm a 45°.
2. Il centro della faccia superiore ha coordinate (40; 25; 20): trovalo con il percorso x, y, z oppure, più rapidamente, all'incrocio delle diagonali della faccia superiore (regola 2).
3. Attorno al centro disegna il parallelogramma del quadrato circoscritto alla base del cilindro (36 mm lungo x, 18 mm a 45°) e costruisci l'ellisse per otto punti.
4. Trasla l'ellisse di 40 mm verso l'alto: è la base superiore, interamente in vista.
5. Traccia le due **generatrici di contorno**: le verticali tangenti alle due ellissi a destra e a sinistra. Della base inferiore è in vista solo la metà anteriore; quella posteriore è nascosta dal cilindro.

Nota che il cilindro non tocca gli spigoli del parallelepipedo: il suo parallelogramma circoscritto, largo 36 mm, sta tutto dentro la faccia superiore, larga 80 mm e profonda 50 mm.

3.4 L'assonometria planometrica

3.4.1 La pianta in vera forma

Nell'**assonometria planometrica** il quadro è parallelo al piano orizzontale xy: la **pianta** si vede in vera forma, soltanto ruotata, e le altezze si alzano in verticale. Gli assi x e y formano tra loro un angolo retto, come nella realtà, e hanno coefficiente 1; di solito sono inclinati di 30° e 60° sull'orizzontale, oppure di 45° e 45° (Figura 3.2). In questo libro l'asse x scende verso sinistra e l'asse y verso destra. L'asse z è verticale.

Anche il coefficiente dell'asse z si può scegliere (teorema di Pohlke). Di norma vale 1; talvolta lo si riduce perché, con le altezze a grandezza intera, gli edifici alti sembrano più slanciati del

vero. La riduzione va sempre dichiarata accanto al disegno. Si usa anche il nome di assonometria *monometrica*, che allude ai tre coefficienti uguali, oltre al nome tradizionale di *militare*.

Le conseguenze sono speculari a quelle della cavaliera. Ogni figura orizzontale è in vera forma: un pavimento, un cortile, un tavolo, la base di un cilindro con l'asse verticale, che resta un **cerchio**. I cerchi verticali, invece, diventano ellissi. Per questo la planometrica è ideale per gli edifici e per gli interni, che si progettano partendo dalla pianta, mentre la cavaliera è più adatta agli oggetti che hanno una faccia principale, come una facciata con i suoi archi.

3.4.2 Dalla pianta all'edificio

Il procedimento è semplice, ed è il motivo per cui gli architetti amano questa assonometria. Nella Figura 3.7 un piccolo edificio è formato da tre volumi: un'aula di 12 × 8 m alta 6 m, una torre di 4 × 4 m alta 10 m addossata al lato posteriore, un vano basso di 4 × 4 m alto 3,5 m sul lato sinistro.

IN SINTESI

Dalla pianta alla planometrica, in quattro passi.

1. Ridisegna la pianta in scala, **ruotata** in modo che i suoi lati seguano gli assi x (30° verso sinistra) e y (60° verso destra). Con la squadra 30°/60° è immediato. Le misure si riportano senza riduzione.
2. Da ogni vertice della pianta alza una **verticale** lunga quanto l'altezza (in scala) del volume a cui appartiene.
3. Unisci gli estremi: la copertura piana di ogni volume è una copia della sua pianta, traslata verso l'alto.
4. Stabilisci la **visibilità** partendo dai volumi più vicini all'osservatore: un volume davanti nasconde in parte quelli dietro; cancella le linee nascoste o tratteggiale, se richiesto.

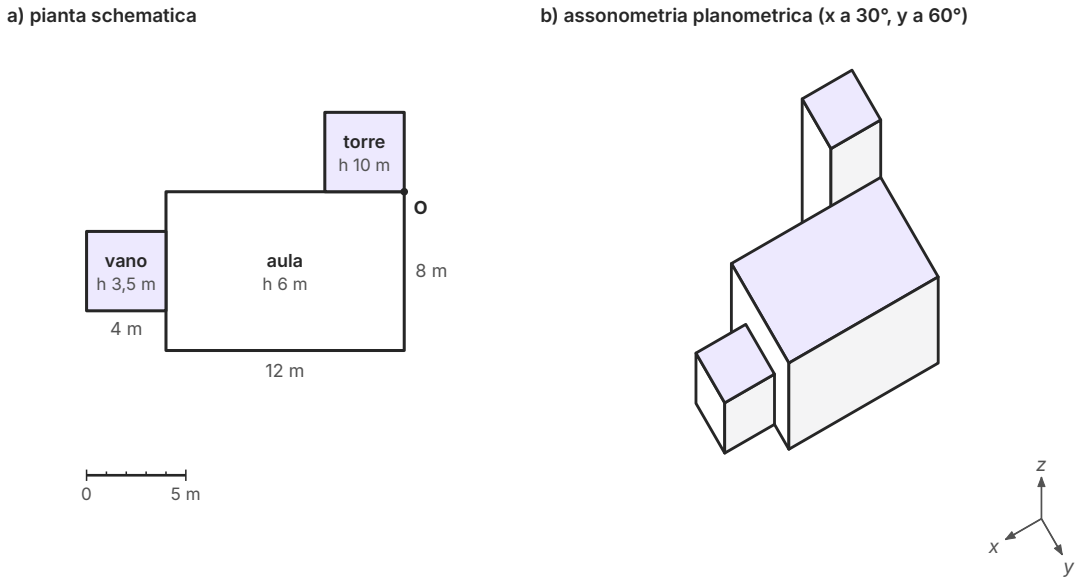


Figura 3.7 Un edificio schematico dalla pianta alla planometrica. a) Pianta: aula 12 × 8 m (h 6 m), torre 4 × 4 m (h 10 m), vano 4 × 4 m (h 3,5 m). b) Assonometria planometrica con *x* a 30° e *y* a 60°, coefficienti 1 : 1 : 1: la pianta, ruotata, è in vera forma; le altezze sono alzate in verticale, nella stessa scala.

Osserva nella figura che le facce superiori dei tre volumi sono rettangoli con gli angoli retti, identici alla pianta, mentre le pareti verticali appaiono come parallelogrammi. La torre, che sta dietro l'aula, ne è nascosta per la parte bassa: in planometrica i volumi alti posti dietro emergono sopra quelli bassi posti davanti, proprio come nella vista di un edificio dall'alto.

COLLEGAMENTI

Planometrica e architettura. Una pianta disegnata in planometrica conserva le sue misure e i suoi angoli: si può confrontare direttamente con il rilievo. Per questo la planometrica serve a mostrare l'organizzazione di una casa, di un chiostro o di un isolato urbano. Prova a immaginare la domus romana del volume 1 (vol. 1, cap. 16): dalla sua pianta, con l'atrio, l'impluvio e il peristilio, basterebbe alzare i muri per ottenere una vista d'insieme. Nel capitolo 5 userai la planometrica per la basilica paleocristiana e per la chiesa romanica.

3.5 Dalle proiezioni ortogonali all'assonometria, e ritorno

3.5.1 Leggere un'assonometria

Un'assonometria si legge come una pianta o un prospetto, se se ne conoscono le regole. Per ricavare le proiezioni ortogonali da un disegno assonometrico conviene procedere con ordine:

1. **riconosci il tipo**: quale faccia è in vera forma? Se lo è la faccia frontale, è una cavaliera; se lo è la pianta, è una planometrica; se nessuna, è un'assonometria ortogonale (cap. 4). Leggi il coefficiente dichiarato;
2. **individua le tre direzioni** degli spigoli: quasi tutti gli spigoli di un oggetto tecnico sono paralleli agli assi;
3. **misura lungo gli assi** e dividi per il coefficiente: in cavaliera con coefficiente ½ uno spigolo in profondità disegnato di 18 mm è lungo in realtà 36 mm;
4. **ricostruisci le viste** una per volta: il prospetto è la faccia frontale (in cavaliera, la trovi già disegnata); la pianta si ottiene «guardando dall'alto»; il fianco «guardando da sinistra».

Il percorso inverso, dalle viste all'assonometria, è quello che hai seguito per il prisma e la piramide: le coordinate dei vertici si leggono nelle viste e si riportano lungo gli assi. Le due operazioni insieme sono il miglior esercizio di visione spaziale: le troverai negli esercizi, con i solidi della Figura 3.8.

3.5.2 Quale assonometria scegliere

La scelta dipende da che cosa si vuole mostrare in vera forma:

- **cavaliera**, se l'oggetto ha una faccia principale da mostrare esatta, magari con archi, cerchi o fori: una facciata, un portale, un pezzo meccanico con un foro frontale. Il coefficiente ½ dà l'aspetto più naturale;
- **planometrica**, se conta la pianta: edifici, interni, giardini, piazze; cerchi orizzontali come le basi di colonne, cupole o vasche si disegnano con il compasso;
- **ortogonale** (cap. 4), se nessuna faccia è privilegiata e si vuole un'immagine equilibrata dell'oggetto.

> ■ ERRORE FREQUENTE
>
> **Mescolare le regole.** Un disegno assonometrico deve usare dall'inizio alla fine gli stessi assi e gli stessi coefficienti. Errori tipici: dimenticare il coefficiente ½ per alcuni spigoli e non per altri; riportare in planometrica un cerchio verticale con il compasso; disegnare in cavaliera un prisma con gli spigoli in profondità non paralleli tra loro. Prima di consegnare, controlla che tutti gli spigoli paralleli nella realtà siano paralleli anche sul foglio.

COLLEGAMENTI

Assonometria e matematica. Un punto individuato da tre coordinate, un percorso lungo tre direzioni, lunghezze moltiplicate per un fattore costante: l'assonometria è un modo di disegnare lo spazio cartesiano a tre dimensioni, che incontrerai in geometria analitica. Le sue proprietà (rette parallele che restano parallele, rapporti conservati su una retta, angoli e lunghezze che invece cambiano) sono quelle delle trasformazioni dette *affinità*. Il calcolo della sezione di un tronco di piramide con il teorema di Talete (cap. 1) e la costruzione del fattore 0,707 con il teorema di Pitagora mostrano quanto disegno e geometria lavorino insieme.

3.5.3 Ordine di lavoro sul foglio

- Squadra il foglio e fissa *O* in modo che il disegno stia nella cornice: in cavaliera le larghezze vanno verso sinistra e le profondità verso il basso a destra; in planometrica la pianta scende verso il basso.
- Traccia gli assi a matita, sottili, con le loro lettere e l'angolo; scrivi accanto il tipo di assonometria e i coefficienti (per esempio «cavaliera, *y* a 45°, coefficiente ½»).
- Costruisci prima le basi (o la pianta), poi le altezze, poi le facce superiori; i cerchi alla fine, per punti.
- Ripassa a inchiostro, con linea grossa, solo gli spigoli in vista; gli spigoli nascosti, se richiesti, con linea fine tratteggiata. Lascia sottili le linee di costruzione.

SINTESI

- L'assonometria rappresenta un oggetto con una sola immagine in cui le tre dimensioni restano misurabili lungo gli assi; la prospettiva, che usa raggi uscenti da un punto, si studia nel secondo biennio.
- L'oggetto, con la sua terna di riferimento x (larghezza), y (aggetto), z (quota), è proiettato su un quadro con raggi paralleli; le immagini degli assi sono gli assi assonometrici.
- Il coefficiente di riduzione di un asse è il rapporto tra lunghezza disegnata e lunghezza reale dei segmenti paralleli a quell'asse.
- In ogni assonometria le parallele restano parallele, i rapporti su una retta si conservano, e si misura solo lungo gli assi o parallelamente a essi.
- Secondo i raggi, le assonometrie sono ortogonali o oblique; secondo i coefficienti, isometriche, dimetriche o trimetriche (UNI EN ISO 5456-3).
- Nella cavaliera il quadro è parallelo al piano xz: la faccia frontale è in vera forma; l'asse y è a 45° (o 30°, 60°) con coefficiente 1 o ½ (*cabinet*).
- Un punto si disegna dalle coordinate, percorrendo x, poi y per il coefficiente fino al piede, poi z.
- Dalle proiezioni ortogonali alla cavaliera: si ridisegna il prospetto e lo si sposta in profondità; per un solido si parte dalla base e si alzano le altezze.
- In cavaliera i cerchi frontali restano cerchi; quelli orizzontali e di profilo diventano ellissi, costruite per otto punti nel parallelogramma circoscritto.
- Nella planometrica il quadro è parallelo al piano xy: la pianta è in vera forma, ruotata (assi a 30°/60° o 45°/45°), e le altezze si alzano in verticale.
- Il teorema di Pohlke spiega perché nelle assonometrie oblique angoli e coefficienti si possono scegliere liberamente.
- Si sceglie la cavaliera per oggetti con una faccia principale, la planometrica per edifici e interni, l'ortogonale per un'immagine equilibrata.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un'assonometria i raggi proiettanti sono:
   - **A.** sempre paralleli tra loro
   - **B.** sempre perpendicolari al quadro
   - **C.** uscenti da un punto, l'occhio dell'osservatore
   - **D.** paralleli a uno degli assi

2. ● Il coefficiente di riduzione di un asse è:
   A. l'angolo tra l'asse assonometrico e l'orizzontale
   B. il rapporto tra la lunghezza reale e quella disegnata
   C. il rapporto tra la lunghezza disegnata e quella reale di un segmento parallelo all'asse
   D. la scala del disegno

3. ● In assonometria cavaliera sono in vera forma:
   A. le facce orizzontali
   B. le facce parallele al piano *xz*
   C. le facce parallele al piano *yz*
   D. nessuna faccia

4. ● Nella cavaliera che la norma UNI EN ISO 5456-3 chiama *cabinet*, il coefficiente dell'asse *y* è:
   A. 1
   B. 0,82
   C. 2
   D. ½

5. ● Un segmento che non è parallelo a nessuno degli assi, in un'assonometria:
   A. si disegna con la sua lunghezza reale
   B. si disegna trovando i suoi estremi dalle coordinate
   C. si disegna con la sua lunghezza reale moltiplicata per ½
   D. non si può rappresentare

6. ● Nell'assonometria planometrica:
   A. la pianta è in vera forma, ruotata
   B. la faccia frontale è in vera forma
   C. tutti e tre gli assi hanno coefficiente minore di 1
   D. gli assi *x* e *y* formano tra loro un angolo di 120°

7. ●● Un cerchio disegnato su una faccia orizzontale di un solido in cavaliera appare come:
   A. un cerchio dello stesso raggio
   B. un cerchio di raggio dimezzato
   C. un ovale a quattro centri inscritto in un quadrato
   D. un'ellisse inscritta nel parallelogramma che rappresenta il quadrato circoscritto, tangente ai punti medi dei lati

8. ●● Un'assonometria in cui i tre coefficienti di riduzione sono uguali si dice:
   A. trimetrica
   B. dimetrica
   C. isometrica
   D. monoscorciata

9. ●● Che cosa distingue la prospettiva dall'assonometria?
   A. La prospettiva usa raggi paralleli
   B. Nella prospettiva i raggi escono tutti da un punto, il centro di proiezione
   C. La prospettiva non usa un quadro
   D. La prospettiva rappresenta solo oggetti piani

Lessico e norme

10. ● Completa: in un'assonometria l'oggetto, con la sua _____ di riferimento, è proiettato su un piano detto _____ mediante raggi _____ tra loro; le immagini degli assi si chiamano _____ ; il rapporto tra lunghezza disegnata e lunghezza reale lungo un asse è il _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) In cavaliera gli angoli retti della faccia frontale restano retti. b) In un'assonometria la diagonale di una faccia orizzontale si può misurare con il righello e dà la lunghezza reale. c) In planometrica un cerchio orizzontale resta un cerchio. d) Nell'assonometria ortogonale i raggi sono inclinati sul quadro. e) Il punto medio di uno spigolo si disegna nel punto medio dello spigolo disegnato. f) In cavaliera l'asse y può essere inclinato solo di 45°.

12. ● Abbina ogni tipo di assonometria alla sua caratteristica. Tipi: 1) cavaliera con coefficiente 1; 2) *cabinet*; 3) planometrica; 4) ortogonale; 5) trimetrica. Caratteristiche: a) raggi perpendicolari al quadro; b) coefficienti 1 : ½ : 1; c) pianta in vera forma; d) tre coefficienti diversi; e) coefficienti 1 : 1 : 1 con la faccia frontale in vera forma.

13. ● Spiega il significato di: $P(25; 40; 30)$; P'; «cavaliera, y a 30°, coefficiente ½»; «planometrica, x a 45°, y a 45°».

14. ●● Un parallelepipedo ha spigoli di 60 mm (lungo x), 35 mm (lungo y) e 48 mm (lungo z). Quanto sono lunghi i suoi spigoli disegnati a) in cavaliera con coefficiente 1; b) in cavaliera con coefficiente ½; c) in planometrica con coefficienti 1 : 1 : 1?

15. ●● Quale norma regola le rappresentazioni assonometriche nel disegno tecnico? Secondo quali due criteri vi si classificano le assonometrie, e in quali tipi?

Costruire

16. ● **Punti.** Su foglio A4 verticale, O a 140 mm dal bordo sinistro e a 190 mm dal bordo superiore della cornice, disegna in cavaliera (y a 45°, coefficiente ½) gli assi e i punti $A(30; 20; 0)$, $B(60; 40; 30)$, $C(0; 50; 40)$, $D(45; 0; 55)$, ciascuno con il suo piede. Indica su quale piano coordinato stanno A, C e D.

17. ● **Un segmento obliquo.** Unisci i punti A e B dell'esercizio precedente. Calcola la lunghezza reale di AB con il teorema di Pitagora e confrontala con quella misurata sul disegno: che cosa concludi?

18. ● **Rettangolo orizzontale.** Un rettangolo di 60 mm (lungo x) per 40 mm (lungo y) giace sul piano xy con un vertice in O. Disegnalo in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, e misura le sue due diagonali sul disegno. Sono uguali? Perché?

19. ● **Cubo, due coefficienti.** Disegna un cubo di spigolo 50 mm con un vertice in O, in cavaliera con l'asse y a 30°, una volta con coefficiente 1 e una volta con coefficiente ½. Di quanto si spostano, orizzontalmente e verticalmente, i vertici anteriori rispetto a quelli posteriori nei due casi?

20. ●● **Prisma triangolare.** Prisma retto a base triangolare equilatera, lato 50 mm, altezza 60 mm. La base giace sul piano xy con un lato sull'asse x (da O a (50; 0; 0)) e il terzo vertice verso l'osservatore. Disegnalo in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½.

21. ●● **Piramide quadrata.** Piramide retta a base quadrata, lato 50 mm, altezza 70 mm; la base ha i vertici in (10; 10; 0), (60; 10; 0), (60; 60; 0), (10; 60; 0). Disegnala in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, con gli spigoli nascosti tratteggiati. Dove si trova il vertice rispetto a O?

22. ●● **Prisma esagonale dalle viste.** Prisma retto a base esagonale regolare, lato 25 mm, altezza 60 mm, base sul PO con il centro in (40; 30; 0) e due vertici opposti su una parallela all'asse x. Disegna pianta e prospetto, ricava le coordinate dei vertici e disegna il prisma in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½.

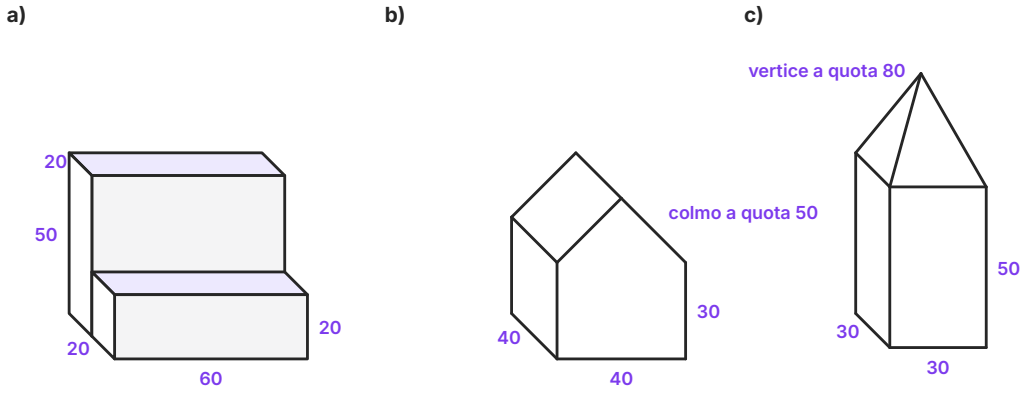
23. ●● **Cerchio orizzontale.** Un cerchio di raggio 35 mm giace sul piano xy con il centro in (50; 40; 0). Disegnalo in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, con il metodo degli otto punti. Indica le misure del parallelogramma circoscritto e la distanza di E e F dal punto medio M.

24. ●● **Cilindro in due assonometrie.** Cilindro di raggio 25 mm e altezza 60 mm, con l'asse verticale e la base sul piano xy. Disegnalo a) in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½; b) in planometrica, x a 30° e y a 60°. In quale dei due disegni le basi sono cerchi? Quali linee servono, oltre alle basi?

25. ●● **Gruppo di solidi.** Un parallelepipedo 80 × 50 × 20 mm ha un vertice in O e gli spigoli lungo gli assi; sopra di esso poggia un cubo di spigolo 30 mm con la base da (25; 10; 20) a (55; 40; 20). Disegna il gruppo in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, e calcola la posizione dei vertici superiori del cubo rispetto a O.

26. ●●● **Edificio in planometrica.** Un edificio è formato da due volumi: il corpo A, 14 × 8 m, alto 7 m, con un vertice in O e i lati lungo gli assi (x da 0 a 14 m, y da 0 a 8 m); il corpo B, 6 × 6 m, alto 4 m, accostato al primo (x da 14 a 20 m, y da 0 a 6 m). Disegna la pianta in scala 1:200 e l'assonometria planometrica con x a 30° e y a 60°, coefficienti 1 : 1 : 1, su un foglio A4 verticale con O a 120 mm dal bordo sinistro e a 150 mm dal bordo superiore della cornice.

Leggere il disegno



assonometria cavaliera, y a 45°, coefficiente ½; misure reali in mm

Figura 3.8 Tre solidi per gli esercizi, in cavaliera con *y* a 45° e coefficiente ½. Le misure scritte sono le misure reali in millimetri: a) un blocco a gradino; b) una casetta con il tetto a due falde; c) un prisma quadrato sormontato da una piramide.

27. ●● **Dalla cavaliera alle viste.** Riconosci i tre solidi della Figura 3.8 e disegnane le tre proiezioni ortogonali (prospetto, pianta, fianco) in scala 1:1, con le misure indicate.

28. ●● **Misurare su una cavaliera.** In una cavaliera con *y* a 45° e coefficiente ½ misuri: uno spigolo orizzontale parallelo a *x* di 42 mm; uno spigolo verticale di 27 mm; uno spigolo parallelo a *y* di 18 mm; la diagonale di una faccia orizzontale di 40 mm. Quali lunghezze reali puoi dedurre, e quali no?

29. ●● **Trova gli errori.** Un compagno ha disegnato in cavaliera con coefficiente ½ un cubo di spigolo 40 mm con un foro cilindrico verticale di raggio 10 mm. Ha commesso questi errori: a) ha disegnato con il compasso il cerchio del foro sulla faccia superiore; b) ha disegnato gli spigoli in profondità lunghi 40 mm; c) ha tracciato gli spigoli in profondità della faccia superiore a 45° e quelli della faccia inferiore a 30°. Spiega ogni errore e come si corregge.

30. ●● **Quale assonometria?** Un oggetto ha questa pianta: un quadrato di 40 mm con un cerchio inscritto; e questo prospetto: un rettangolo largo 40 mm e alto 20 mm, sormontato da un rettangolo largo 40 mm e alto 30 mm. Che oggetto è? Per disegnarlo, conviene la cavaliera o la planometrica? Perché?

31. ●● **Facce in vera forma.** Un parallelepipedo ha una faccia frontale con un rosone (un cerchio con disegni geometrici) e una faccia superiore con un piccolo giardino a pianta quadrata. Quale faccia è in vera forma in cavaliera? E in planometrica? Quale delle due assonometrie scegli se ti interessa soprattutto il giardino?

Verso la verifica

32. ●●● **La casetta in due assonometrie.** Disegna la casetta della Figura 3.8b (base 40 × 40 mm, pareti alte 30 mm, colmo a quota 50 mm, parallelo all'asse y) prima in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, poi in planometrica, x a 30°, y a 60°. Confronta: quali facce sono in vera forma nell'uno e nell'altro disegno?

33. ●●● **Un tronco di piramide.** Una piramide retta a base quadrata, lato 60 mm, altezza 80 mm, base con i vertici in (0; 0; 0), (60; 0; 0), (60; 60; 0), (0; 60; 0), è tagliata da un piano orizzontale a quota 40 mm (cap. 1). Trova con il teorema di Talete il lato della sezione e disegna il tronco di piramide in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½, con la faccia superiore campita.

34. ●●● **Un portale.** Un muro è un parallelepipedo largo 80 mm (lungo x), spesso 20 mm (lungo y) e alto 70 mm, con un vertice in O. Lo attraversa un'apertura con gli stipiti verticali alti 40 mm, distanti 40 mm, centrata nella larghezza e chiusa in alto da un arco a tutto sesto (vol. 1, cap. 4). Disegna il muro in cavaliera, y a 45°, coefficiente ½. Perché l'arco della faccia anteriore si disegna con il compasso? Di quanto è spostato l'arco della faccia posteriore?

PER APPROFONDIRE

- [ISO] UNI EN ISO 5456-3: la norma definisce gli assi e i coefficienti di tutte le assonometrie usate nel disegno tecnico; le sue figure riassumono gli assi e i coefficienti di questo capitolo e del capitolo 4.
- [CHO] A. Choisy, *Histoire de l'architecture*: sfoglia le tavole (se ne trovano riproduzioni nelle biblioteche digitali) e osserva come un'assonometria riunisca pianta, struttura e volumi.

Glossario del capitolo

Assi assonometrici
Le immagini sul quadro dei tre assi della terna di riferimento.

Assonometria
Metodo di rappresentazione che proietta l'oggetto e la sua terna di riferimento su un quadro con raggi paralleli, ottenendo una sola immagine misurabile lungo gli assi.

Assonometria cavaliera
Assonometria obliqua con il quadro parallelo al piano xz: faccia frontale in vera forma, asse y a 45° (o 30°, 60°) con coefficiente 1 o ½.

Assonometria obliqua
Assonometria con i raggi inclinati sul quadro; le figure parallele al quadro sono in vera forma.

Assonometria ortogonale
Assonometria con i raggi perpendicolari al quadro; tutti e tre gli assi sono scorciati.

Assonometria planometrica
Assonometria obliqua con il quadro parallelo al piano xy: la pianta è in vera forma, ruotata, e le altezze sono verticali; detta anche militare o monometrica.

Cabinet
Nella norma UNI EN ISO 5456-3, la cavaliera con coefficiente ½ sull'asse y.

Coefficiente di riduzione
Rapporto tra la lunghezza disegnata e la lunghezza reale dei segmenti paralleli a un asse; detto anche rapporto di scorcio.

Generatrici di contorno
Le generatrici di un cilindro o di un cono che ne formano il contorno apparente nel disegno.

Isometrica, dimetrica, trimetrica
Assonometria con tre, due o nessun coefficiente di riduzione uguale.

Metodo degli otto punti
Costruzione dell'ellisse che rappresenta un cerchio in assonometria: quattro punti medi dei lati del parallelogramma circoscritto e quattro punti sulle sue diagonali.

Piede
Immagine assonometrica della proiezione di un punto sul piano xy; il punto sta sulla sua verticale.

Prospettiva
Rappresentazione con raggi proiettanti uscenti da un punto (proiezione centrale); si studia nel secondo biennio.

Quadro
Il piano su cui si proietta l'oggetto in un'assonometria (e in una prospettiva).

Raggi proiettanti
Le rette che portano ogni punto dell'oggetto sul quadro; in assonometria sono parallele.

Teorema di Pohlke
Tre segmenti di un piano uscenti da un punto, non tutti su una retta, sono sempre la proiezione parallela di tre segmenti uguali e a due a due perpendicolari.

Terna di riferimento
I tre assi x (larghezza), y (aggetto) e z (quota), a due a due perpendicolari, a cui si riferiscono le coordinate dei punti dell'oggetto.

Soluzioni

1. A. La proiezione assonometrica è una proiezione parallela; i raggi sono perpendicolari al quadro solo nelle assonometrie ortogonali.

2. C. Per esempio, con coefficiente ½ uno spigolo di 60 mm si disegna di 30 mm.

3. B. Il quadro è parallelo al piano *xz*.

4. D. Con coefficiente 1 la norma parla di cavaliera (*cavalier*).

5. B. Si misura solo lungo gli assi o parallelamente a essi.

6. A. Il quadro è parallelo al piano *xy*; gli assi *x* e *y* formano un angolo retto.

7. D. Il quadrato circoscritto diventa un parallelogramma; l'ovale a quattro centri è un'approssimazione e qui non serve.

8. C. Isometrica: tre coefficienti uguali; dimetrica: due; trimetrica: nessuno.

9. B. La prospettiva è una proiezione centrale; si studia nel secondo biennio.

10. terna; quadro; paralleli; assi assonometrici; coefficiente di riduzione.

11. a) V. b) F: in un'assonometria si misura solo lungo gli assi; la diagonale di una faccia orizzontale è scorciata in modo diverso secondo la direzione. c) V: il quadro è parallelo al piano *xy*. d) F: nell'assonometria ortogonale i raggi sono perpendicolari al quadro. e) V: i rapporti su una retta si conservano. f) F: si usano anche 30° e 60°.

12. 1-e; 2-b; 3-c; 4-a; 5-d.

13. *P*(25; 40; 30): il punto con larghezza (distanza dal PL) 25 mm, aggetto 40 mm, quota 30 mm. *P'*: il piede, cioè l'immagine assonometrica della proiezione di *P* sul piano *xy*. «Cavaliera, *y* a 30°, coefficiente ½»: quadro parallelo al piano *xz*, asse *y* inclinato di 30° sull'orizzontale, profondità dimezzate. «Planometrica, *x* a 45°, *y* a 45°»: pianta in vera forma, ruotata di 45°, coefficienti 1.

14. a) 60, 35, 48 mm. b) 60, 17,5, 48 mm. c) 60, 35, 48 mm (in planometrica le misure non si riducono, ma la pianta è ruotata).

15. UNI EN ISO 5456-3. Secondo la direzione dei raggi: ortogonali (raggi perpendicolari al quadro) e oblique (raggi inclinati). Secondo i coefficienti di riduzione: isometriche, dimetriche, trimetriche.

16. Spostamenti rispetto a *O* (a destra/in alto positivi; lo spostamento a 45° di $y \cdot ½$ vale $y \cdot ½ \cdot 0{,}707$ in orizzontale e in verticale): *A* 22,9 mm a sinistra e 7,1 mm sotto; *B* 45,9 mm a sinistra e 15,9 mm sopra; *C* 17,7 mm a destra e 22,3 mm sopra; *D* 45,0 mm a sinistra e 55,0 mm sopra. *A* sta sul piano *xy* ($z = 0$, coincide con il suo piede); *C* sul piano *yz* ($x = 0$); *D* sul piano *xz* ($y = 0$).

17. Lunghezza reale: $\sqrt{(30^2 + 20^2 + 30^2)} = \sqrt{2200} \approx 46{,}9$ mm. Sul disegno *AB* misura ≈ 32,4 mm (± 0,5). Un segmento non parallelo agli assi non conserva la sua lunghezza, e il rapporto tra lunghezza disegnata e reale cambia con la direzione: lo si disegna dai suoi estremi.

18. Parallelogramma con lati di 60 mm (orizzontali) e 20 mm (a 45°). Le diagonali misurano ≈ 48,0 mm e ≈ 75,5 mm: non sono uguali, mentre nel rettangolo reale sono uguali ($\sqrt{(60^2 + 40^2)} \approx 72{,}1$ mm). Gli angoli retti non si conservano e si misura solo lungo gli assi.

19. Con l'asse *y* a 30° lo spostamento in profondità si scompone come nel triangolo che è metà di un triangolo equilatero: orizzontale = lunghezza · 0,866, verticale = lunghezza · ½. Coefficiente 1 (profondità disegnata 50 mm): 43,3 mm a destra e 25,0 mm in basso. Coefficiente ½ (25 mm): 21,7 mm a destra e 12,5 mm in basso.

20. Il terzo vertice della base ha $x = 25$ mm e $y = 25 \cdot \sqrt{3} \approx 43{,}3$ mm (altezza del triangolo equilatero, con

Pitagora: $\sqrt{(50^2 - 25^2)}$). In cavaliera la sua profondità disegnata è 21,65 mm a 45°, cioè 15,3 mm a destra e 15,3 mm in basso rispetto al punto (25; 0; 0). Si alzano le tre verticali di 60 mm e si uniscono. Sono in vista la base superiore e le due facce laterali inclinate, che convergono verso l'osservatore; la faccia posteriore, sul piano *xz*, è nascosta (sarebbe in vera forma, 50 × 60 mm): dei suoi spigoli è nascosto solo quello di base, da *O* a (50; 0; 0).

21. Il vertice ha coordinate (35; 35; 70); il suo piede è il centro della base. Rispetto a *O* il vertice sta 22,6 mm a sinistra e 57,6 mm sopra (35 a sinistra, poi 17,5 a 45°: 12,4 a destra e 12,4 in basso, poi 70 in alto). Sono nascosti lo spigolo laterale che parte dal vertice (10; 10; 0) e i due lati della base che vi concorrono.

22. Vertici (in mm, *x*; *y*): (65; 30), (52,5; 51,65), (27,5; 51,65), (15; 30), (27,5; 8,35), (52,5; 8,35); lo scarto in profondità è 25 · 0,866 ≈ 21,65 mm. In cavaliera le profondità si dimezzano: 15, 25,83, 4,18 mm. Il prospetto è un rettangolo largo 50 mm (da $x = 15$ a 65) e alto 60 mm, diviso dagli spigoli in $x = 27{,}5$ e 52,5 mm. Si procede come nell'esempio svolto della Figura 3.5.

23. Parallelogramma: lati di 70 mm paralleli a *x* e di 35 mm a 45° (70 · ½). Metà lato anteriore = 35 mm; il triangolo rettangolo isoscele che ha come ipotenusa 35 mm ha i cateti di ≈ 24,7 mm: *E* e *F* distano 24,7 mm da *M*. Controllo sul disegno: l'asse maggiore dell'ellisse misura ≈ 74,8 mm e il minore ≈ 23,2 mm (± 1).

24. a) Le basi sono ellissi inscritte in parallelogrammi 50 × 25 mm (asse maggiore ≈ 53,4 mm, minore ≈ 16,6 mm), la seconda traslata di 60 mm in alto. b) Le basi sono cerchi di raggio 25 mm, perché sono orizzontali: si disegnano con il compasso, la seconda 60 mm più in alto. In entrambi i casi servono le due generatrici di contorno, verticali e tangenti alle basi; della base inferiore si vede solo la metà anteriore.

25. Vertici superiori del cubo (quota 50): (25; 10; 50) → 21,5 mm a sinistra e 46,5 mm sopra *O*; (55; 10; 50) → 51,5 a sinistra, 46,5 sopra; (55; 40; 50) → 40,9 a sinistra, 35,9 sopra; (25; 40; 50) → 10,9 a sinistra, 35,9 sopra. Il cubo sta tutto dentro la faccia superiore del parallelepipedo (da 0 a 80 lungo *x*, da 0 a 50 lungo *y*).

26. In scala 1:200: corpo A 70 × 40 mm, alto 35 mm; corpo B 30 × 30 mm, alto 20 mm. In planometrica (*x* a 30° verso sinistra: per ogni mm, 0,866 a sinistra e 0,5 in basso; *y* a 60° verso destra: 0,5 a destra e 0,866 in basso) i vertici di base rispetto a *O* sono: (70; 0) → 60,6 a sinistra, 35,0 in basso; (70; 40) → 40,6 a sinistra, 69,6 in basso; (0; 40) → 20,0 a destra, 34,6 in basso; (100; 0) → 86,6 a sinistra, 50,0 in basso; (100; 30) → 71,6 a sinistra, 76,0 in basso; (70; 30) → 45,6 a sinistra, 61,0 in basso. Il punto più basso sta 226 mm sotto il bordo superiore e quello più a sinistra a 33 mm dal bordo sinistro: il disegno sta nella cornice. Si alzano le verticali (35 mm per A, 20 mm per B) e si uniscono le coperture.

27. a) Blocco a gradino. Prospetto: rettangolo 60 × 50 mm con una linea orizzontale a quota 20 mm (lo spigolo superiore del gradino). Pianta: rettangolo 60 × 40 mm diviso a metà da una linea parallela alla LT (a 20 mm). Fianco: una L, alta 50 mm per i primi 20 mm di profondità e 20 mm per gli altri 20. b) Casetta. Prospetto: pentagono largo 40 mm, con le pareti alte 30 mm e il colmo a 50 mm. Pianta: quadrato 40 × 40 mm con la linea di colmo al centro, perpendicolare alla LT. Fianco: rettangolo 40 × 50 mm con una linea orizzontale a 30 mm (la gronda). c) Prisma con piramide. Prospetto e fianco: rettangolo 30 × 50 mm sormontato da un triangolo isoscele con il vertice a quota 80 mm. Pianta: quadrato di 30 mm con le diagonali (gli spigoli della piramide).

28. Spigolo parallelo a *x*: 42 mm. Verticale: 27 mm. Parallelo a *y*: 18 · 2 = 36 mm. La diagonale non è parallela a nessun asse: la sua lunghezza reale non si deduce dalla misura; bisogna ricavare le lunghezze dei due lati della faccia lungo gli assi e applicare il teorema di Pitagora.

29. a) Il cerchio è su una faccia orizzontale: diventa un'ellisse, da costruire per otto punti nel parallelogramma 20 × 10 mm. b) Con coefficiente ½ gli spigoli in profondità vanno disegnati di 20 mm. c) Gli spigoli paralleli nella realtà devono restare paralleli: tutti a 45°.

30. Un parallelepipedo a base quadrata (40 × 40 × 20 mm) sormontato da un cilindro di diametro 40 mm e altezza 30 mm, inscritto nella base superiore. Conviene la planometrica: le basi del cilindro sono orizzontali e restano cerchi, disegnabili con il compasso; in cavaliera diventerebbero ellissi da costruire per punti.

31. In cavaliera è in vera forma la faccia frontale con il rosone (il cerchio si disegna con il compasso); in planometrica la faccia superiore con il giardino. Se interessa il giardino si sceglie la planometrica.

32. Cavaliera: la faccia frontale (il pentagono della testata, sul piano xz) è in vera forma; profondità 20 mm a 45°; il colmo è un segmento parallelo a y, lungo 20 mm sul disegno. Planometrica: in vera forma è la pianta (quadrato 40 × 40 mm, ruotato), con la linea di colmo; le pareti si alzano di 30 mm e il colmo si trova alzando di 50 mm i punti medi di due lati opposti della pianta (paralleli a x). In planometrica le testate pentagonali non sono in vera forma.

33. Lato della sezione: $60 \cdot (80 - 40) / 80 = 30$ mm; la faccia superiore ha i vertici in (15; 15; 40), (45; 15; 40), (45; 45; 40), (15; 45; 40). Rispetto a O, per esempio, (15; 15; 40) sta 9,7 mm a sinistra e 34,7 mm sopra; (45; 45; 40) sta 29,1 mm a sinistra e 24,1 mm sopra. Si uniscono i vertici della base con quelli della sezione (gli spigoli laterali del tronco) e si campisce la faccia superiore con linee a 45°.

34. L'arco anteriore sta sulla faccia frontale, parallela al piano xz: è in vera forma e si disegna con il compasso (centro a quota 40 mm, al centro della larghezza, cioè a $x = 40$ mm; raggio 20 mm). L'arco posteriore è identico, ma spostato all'indietro di $20 \cdot ½ = 10$ mm lungo la direzione a 45°, cioè 7,1 mm a sinistra e 7,1 mm in alto rispetto a quello anteriore: anch'esso si disegna con il compasso. Attraverso l'apertura se ne vede solo una parte; si vedono anche la faccia interna dello stipite di destra (rivolta verso sinistra) e, nella metà destra dell'arco, una parte dell'intradosso.