CAPITOLO

2

Sviluppi e sezioni nell'architettura

Una scatola, prima di essere una scatola, è un foglio piatto: lo sviluppo è il disegno di quel foglio.

OBIETTIVI

1. Riconoscere le superfici sviluppabili e disegnare uno sviluppo con contorno, pieghe e linguette.
2. Costruire gli sviluppi di prisma, piramide, cilindro e cono retti e dei loro tronchi, trovando la vera lunghezza degli spigoli e l'angolo del settore con una proporzione.
3. Sviluppare un solido tagliato da un piano inclinato e attaccarvi la vera forma della sezione.
4. Leggere e disegnare piante e sezioni architettoniche: linea di sezione, elementi tagliati e visti, quote altimetriche.
5. Riconoscere in pianta e in sezione la struttura di una basilica a tre navate e di una rotonda.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Lo sviluppo di una superficie 2
2.2 Gli sviluppi dei solidi retti 3
2.3 Lo sviluppo dei solidi tagliati 9
2.4 Le sezioni in architettura 12
2.5 Due edifici in pianta e in sezione 14

Disegno e Storia dell'arte 2 · Parte I · Sezioni e sviluppi · versione 1.0
Capitolo 2: Sviluppi e sezioni nell'architettura · pagine 47–70 del volume completo · estratto per lo studio

Ogni scatola di cartone, prima di diventare una scatola, è stata un foglio piatto, tagliato e piegato. Lo stesso vale per un tubo di lamiera, per l'imbuto di un lattoniere, per la cappa di una cucina: chi li costruisce parte da una figura piana che, piegata o arrotolata, chiude esattamente il volume voluto. Disegnare quella figura è il primo argomento di questo capitolo: lo **sviluppo** di una superficie.

Il secondo argomento porta le sezioni del cap. 1 dalla geometria all'architettura. Gli architetti descrivono un edificio con piante e sezioni, cioè con tagli orizzontali e verticali, e li disegnano con regole precise: dove passa il piano, da che parte si guarda, che cosa è tagliato e che cosa è soltanto visto. Imparerai a leggere e a disegnare queste tavole su due edifici che ritroverai nella storia dell'arte: una basilica a tre navate e una rotonda coperta da una cupola.

2.1 Lo sviluppo di una superficie

2.1.1 Distendere una superficie sul piano

Immagina di ricoprire un solido con un foglio sottilissimo, che si può piegare ma non tirare né strappare, e poi di aprire il foglio e stenderlo sul tavolo. La figura piana che ottieni è lo **sviluppo** (o sviluppo piano) della superficie del solido. Le due condizioni sono essenziali: senza **stiramenti** e senza **strappi**. Per questo lo sviluppo conserva tutte le lunghezze e tutte le aree: un segmento tracciato sulla superficie ha nello sviluppo la sua lunghezza vera, e l'area dello sviluppo è l'area della superficie.

Una superficie che si può distendere così si dice **superficie sviluppabile**. Lo sono:

- la superficie di ogni **poliedro** (prismi, piramidi, poliedri regolari): basta tagliarla lungo alcuni spigoli e aprire le facce, che sono già piane, ruotandole attorno agli spigoli rimasti;
- la superficie laterale del **cilindro** e del **cono**: si possono «srotolare» sul piano, come si fa con l'etichetta di una lattina o con un cappello di carta a cono, perché lungo ogni generatrice la superficie è dritta e si curva in una sola direzione.

Non è sviluppabile, invece, la **sfera**, che è curva in tutte le direzioni. Prova a stendere sul tavolo la buccia di un'arancia: per farla aderire al piano devi strapparla in spicchi oppure schiacciarla, e in entrambi i casi cambiano le distanze. Di una sfera, e di ogni superficie curva come lei (una cupola, un uovo, la carrozzeria di un'auto), si possono disegnare solo sviluppi **approssimati**, fatti di tante strisce strette.

DA RICORDARE

Nello sviluppo **ogni misura è vera**: ogni lato, ogni spigolo, ogni angolo di una faccia vi compare in vera grandezza. Prima di disegnare uno sviluppo bisogna quindi conoscere la vera lunghezza di tutti gli spigoli e la vera forma di tutte le facce: è qui che servono le rotazioni e i ribaltamenti del primo volume e la vera forma delle sezioni del cap. 1.

2.1.2 Pieghe, linguette e modelli

Uno sviluppo si può scegliere in molti modi, a seconda degli spigoli lungo i quali si decide di tagliare: un cubo, per esempio, ha undici sviluppi diversi, ma tutti formati da sei quadrati. Nel disegno distinguiamo due tipi di linee, con una convenzione che in questo libro useremo sempre:

- il **contorno**, cioè la linea lungo la quale si taglia il foglio, a linea continua grossa;
- le **pieghe**, cioè gli spigoli che restano uniti e lungo i quali si piega il foglio, a linea sottile tratteggiata.

Se lo sviluppo deve diventare un modello di carta o di cartoncino, si aggiungono le **linguette**: piccole alette trapezie, con i lati obliqui a 45°, che si incollano sotto la faccia vicina. Ogni coppia di bordi da unire ne vuole una sola, su uno dei due bordi. Gli stessi disegni, con altri nomi, servono a molti mestieri: l'industria degli imballaggi ritaglia le scatole da grandi fogli di cartone con una fustella, una lama sagomata secondo lo sviluppo; il lattoniere taglia nella lamiera gli sviluppi di tubi, gomiti, imbuti e cappe; chi costruisce plastici di architettura parte dagli sviluppi dei volumi degli edifici.

APPROFONDIMENTO

Le carte geografiche. Poiché la sfera non è sviluppabile, nessuna carta geografica può rappresentare la superficie terrestre senza deformarla: ogni *proiezione cartografica* sceglie che cosa conservare e che cosa sacrificare. La carta di Mercatore (Gerardo Mercatore, 1569) conserva gli angoli, e per questo era preziosa ai naviganti, ma ingrandisce sempre di più le terre vicine ai poli: sulla carta la Groenlandia sembra grande quanto l'Africa, che in realtà è circa quattordici volte più estesa. Chi costruisce un mappamondo, invece, stampa la superficie su **spicchi** stretti, detti fusi, che approssimano la sfera e la ricoprono quasi senza deformarsi: è lo stesso metodo che si usa per gli sviluppi approssimati delle cupole.

2.2 Gli sviluppi dei solidi retti

Cominciamo dai solidi retti in posizione fondamentale, con la base sul PO. Per ciascuno ci chiediamo che forma hanno le sue facce distese e quali misure servono per disegnarle in vera grandezza.

2.2.1 Il prisma

La superficie laterale di un prisma retto è formata da rettangoli, tutti alti quanto il prisma e larghi quanto i lati della base. Tagliandola lungo uno spigolo laterale e aprendola, i rettangoli si dispongono uno accanto all'altro: lo sviluppo laterale è un'unica **striscia rettangolare**, alta quanto il prisma e lunga quanto il **perimetro della base**. Le due basi si attaccano a uno dei lati della striscia, una sopra e una sotto (Figura 2.1).

ESEMPIO SVOLTO

Il prisma esagonale. Prisma retto a base esagonale regolare, lato 20 mm, altezza 50 mm. Disegna lo sviluppo completo.

1. Disegna una striscia lunga $6 \cdot 20 = 120$ mm e alta 50 mm e dividila con cinque verticali in sei rettangoli di 20×50 mm: sono le facce laterali. Le verticali interne sono pieghe; i lati verticali estremi, che corrispondono allo stesso spigolo, si dovranno unire.
2. Su un lato orizzontale superiore, per esempio quello della terza faccia, costruisci l'esagono regolare di lato 20 mm (con il compasso, come nel vol. 1, cap. 3); fai lo stesso sul lato inferiore della stessa faccia.
3. Aggiungi le linguette: una sul bordo di chiusura e una su ciascuno dei lati liberi della striscia che dovranno incollarsi ai lati delle basi.
4. Controllo: l'area laterale è $120 \cdot 50 = 6000$ mm^2; ogni esagono, scomposto in sei triangoli equilateri, è largo $20 \cdot \sqrt{3} \approx 34{,}64$ mm da un lato all'altro.

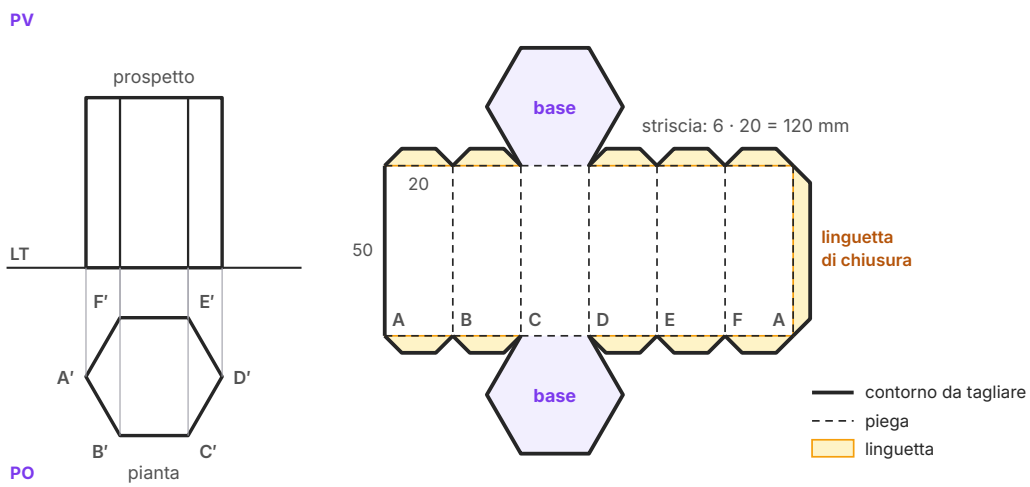

Figura 2.1 Lo sviluppo di un prisma esagonale (lato 20 mm, altezza 50 mm). A sinistra pianta e prospetto; a destra lo sviluppo: una striscia di sei facce, lunga quanto il perimetro della base (120 mm), con le due basi attaccate alla stessa faccia e le linguette per incollare il modello.

2.2.2 La piramide: la vera lunghezza degli spigoli

Le facce laterali di una piramide retta a base regolare sono triangoli isosceli uguali, con il vertice comune V. Aperte attorno a V, si dispongono a ventaglio: i loro lati obliqui sono gli **spigoli laterali**, tutti lunghi uguali, e quindi i vertici della base cadono su un arco di circonferenza con centro V e raggio uguale allo spigolo. Il problema è che, in una piramide in posizione fondamentale, gli spigoli laterali sono inclinati sui piani di proiezione e nessuna vista li mostra in vera lunghezza: in pianta appaiono più corti, e in prospetto, se un lato della base è parallelo alla LT, si sovrappongono all'apotema delle facce di sinistra e di destra (vol. 1, cap. 6).

La vera lunghezza si trova con la **rotazione** attorno all'asse della piramide, come nel primo volume (Figura 2.2):

1. in pianta, con centro V' e raggio $V'B'$, traccia un arco fino alla parallela alla LT condotta da V': trovi B_r', e lo spigolo ruotato è ora parallelo al PV;
2. sali con la linea di richiamo fino alla LT (la quota di B, zero, non cambia): trovi B_r'';
3. il segmento $V''B_r''$ è lo spigolo in **vera lunghezza**.

Lo sviluppo si costruisce poi con il solo compasso: con centro in un punto V e raggio uguale alla vera lunghezza traccia un arco; partendo da un suo punto A, riporta sull'arco quattro volte il lato della base (A, B, C, D, A) e unisci i punti con V e tra loro. La base si attacca a uno dei lati del ventaglio.

ESEMPIO SVOLTO

La piramide della Figura 2.2. Piramide retta a base quadrata, lato 40 mm, altezza 50 mm, lati della base paralleli e perpendicolari alla LT. Trova lo spigolo in vera lunghezza e disegna lo sviluppo.

1. La semidiagonale della base, cioè la distanza $V'B'$ in pianta, misura $20 \cdot \sqrt{2} \approx 28{,}28$ mm: è il raggio dell'arco di rotazione, e B_r'' sta 28,28 mm a destra dell'asse.
2. Lo spigolo in vera lunghezza misura, controllando con Pitagora, $\sqrt{(28{,}28^2 + 50^2)} = \sqrt{3300} \approx 57{,}45$ mm.
3. Sviluppo: arco di raggio 57,45 mm e quattro corde di 40 mm. Ogni triangolo ha i lati di 57,45; 57,45 e 40 mm.
4. Controllo: l'altezza di ogni triangolo, condotta da V, è l'apotema della faccia, che nel prospetto compare in vera lunghezza come lato del triangolo: $\sqrt{(20^2 + 50^2)} \approx 53{,}85$ mm. Infatti $\sqrt{(57{,}45^2 - 20^2)} \approx 53{,}85$ mm.

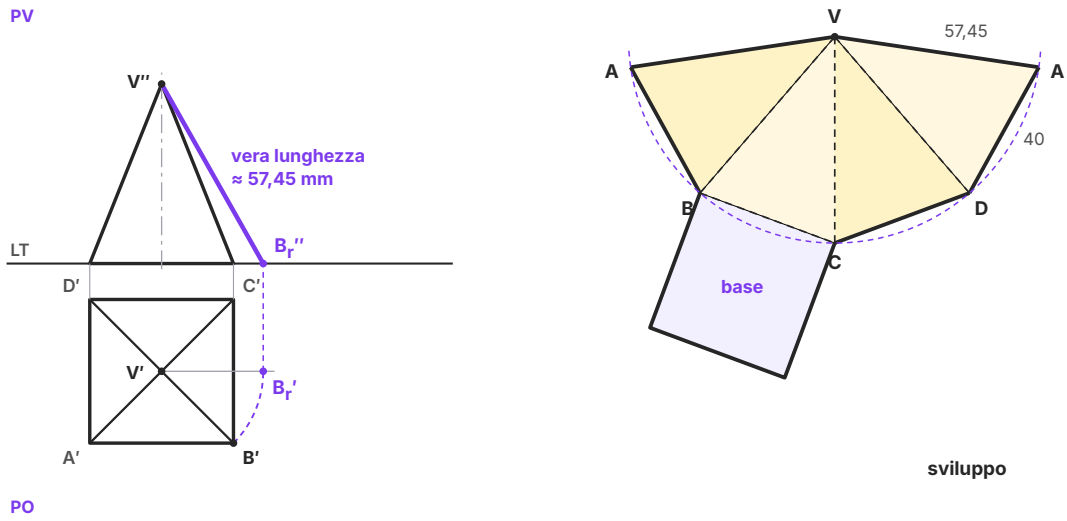

Figura 2.2 Lo sviluppo di una piramide quadrata (lato 40 mm, altezza 50 mm). 1) In pianta lo spigolo *VB* ruota attorno all'asse fino a diventare parallelo al PV; 2) il richiamo porta B_r'' sulla LT, e $V''B_r''$ è la vera lunghezza, ≈ 57,45 mm; 3) con questo raggio si traccia l'arco dello sviluppo e vi si riporta quattro volte il lato di 40 mm; 4) la base si attacca a uno dei triangoli.

ERRORE FREQUENTE

Lo spigolo non è l'apotema. Chi prende come lato dei triangoli il lato obliquo del prospetto usa l'apotema della faccia, che è più corto dello spigolo: i triangoli risultano bassi e la piramide di carta non si chiude. Nell'esempio l'errore è di quasi 4 mm su 57. Altrettanto sbagliato è misurare gli spigoli in pianta, dove sono fortemente scorciati. Controllo rapido: nello sviluppo l'**altezza** di ogni triangolo deve uguagliare l'apotema letto sul prospetto.

2.2.3 Il cilindro

La superficie laterale di un cilindro retto, tagliata lungo una generatrice e srotolata, è un **rettangolo**: un lato è alto quanto il cilindro, l'altro è lungo quanto la circonferenza di base, $2\pi r$. Trasformare la lunghezza di un arco o di una circonferenza in un segmento rettilineo si chiama **rettificazione**. Nel disegno si fa in due modi:

- **con il calcolo**: $2 \cdot 3{,}14 \cdot r$, e si riporta il segmento con il righello. Per $r = 20$ mm la lunghezza è $2\pi \cdot 20 \approx 125{,}66$ mm (con $\pi \approx 3{,}14$ si ottiene 125,6 mm, una differenza che sul foglio non si vede);
- **con il compasso**: si divide la base in 12 parti uguali e si riporta in fila, sul segmento, dodici volte la corda tra due punti consecutivi. Il metodo è **approssimato per difetto**, perché ogni corda è un po' più corta del suo arco: con $r = 20$ mm la corda misura circa 10,35 mm e le do-

dici corde danno circa 124,2 mm, l'1% in meno. Se il modello deve chiudersi bene, conviene il calcolo.

Le due basi, cerchi di raggio r, si attaccano ai lati lunghi del rettangolo, toccandoli in un punto. Le dodici divisioni della base servono anche a un altro scopo: segnano sul rettangolo dodici generatrici equidistanti, che useremo tra poco per sviluppare il cilindro tagliato.

2.2.4 Il cono

Un cono retto, tagliato lungo una generatrice e srotolato, diventa un **settore circolare**, la parte di cerchio compresa tra due raggi (Figura 2.3). Il suo centro è il vertice del cono, il suo **raggio** è la generatrice, che per il cono chiamiamo anche **apotema** e indichiamo con $g = \sqrt{(r^2 + h^2)}$; il suo **arco** è la circonferenza di base, che si è srotolata senza allungarsi né accorciarsi. Resta da trovare l'**angolo** α del settore, e basta una proporzione. L'intera circonferenza di raggio g, a cui corrisponde un angolo di 360°, è lunga $2\pi g$; l'arco del settore è lungo $2\pi r$. Archi e angoli sono proporzionali, quindi

$$\alpha : 360° = 2\pi r : 2\pi g \implies \alpha = 360° \cdot \frac{r}{g}$$

Il rapporto r/g è sempre minore di 1, perché la generatrice è più lunga del raggio: l'angolo è sempre minore di 360°. Un cono basso e largo, con r vicino a g, ha un settore quasi completo; un cono alto e stretto ha un settore sottile.

> **IN SINTESI**
>
> **Sviluppi dei solidi retti.**
>
> - Prisma: striscia rettangolare, perimetro di base × altezza, più le due basi.
> - Piramide: ventaglio di triangoli con i lati obliqui uguali allo **spigolo in vera lunghezza**, più la base.
> - Cilindro: rettangolo $2\pi r \times h$, più due cerchi di raggio r.
> - Cono: settore di raggio g e angolo $\alpha = 360° \cdot r/g$, più il cerchio di base.

Nella Figura 2.3 il cono ha raggio 30 mm e altezza 40 mm: la generatrice, che nel prospetto compare in vera lunghezza come lato del triangolo, misura $\sqrt{(30^2 + 40^2)} = 50$ mm, e l'angolo del settore è $360° \cdot 30/50 = \mathbf{216}°$. Per disegnarlo si traccia un arco di raggio 50 mm e si misura l'angolo con il goniometro; oppure, senza goniometro, si divide la base in 12 parti e si riportano sull'arco 12 corde uguali a quelle della base, con la stessa approssimazione vista per il cilindro. Il cerchio di base si attacca all'arco, toccandolo nel punto di mezzo.

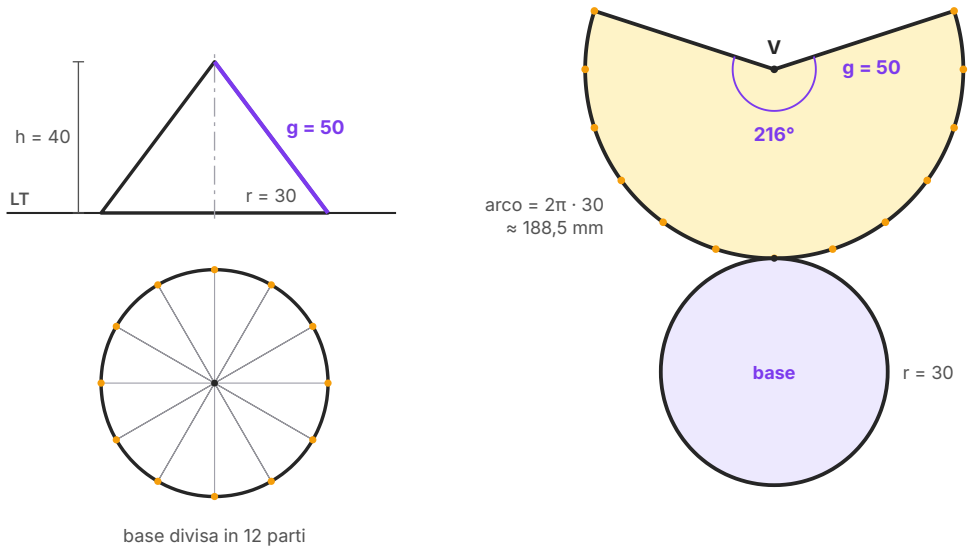

Figura 2.3 Lo sviluppo di un cono retto (raggio 30 mm, altezza 40 mm). La generatrice, in vera lunghezza nel prospetto, misura 50 mm ed è il raggio del settore; l'arco è lungo quanto la circonferenza di base, $2\pi \cdot 30 \approx 188{,}5$ mm, e l'angolo vale $360° \cdot 30/50 = 216°$. I 12 punti segnati sull'arco corrispondono alle 12 divisioni della base.

2.2.5 I tronchi

Tagliando una piramide con un piano parallelo alla base si ottiene, come sai dal cap. 1, una sezione simile alla base; la parte che contiene la base si chiama **tronco di piramide**. Le sue facce laterali sono **trapezi isosceli**. Il modo più semplice per svilupparle è partire dallo sviluppo della piramide intera e togliere quello della piccola piramide asportata, che ha lo stesso vertice: si tracciano due archi concentrici, con raggi uguali allo spigolo intero e allo spigolo della parte asportata (entrambi in vera lunghezza), e i trapezi restano compresi tra di essi.

Allo stesso modo il **tronco di cono** si sviluppa in un **settore di corona circolare**, la parte di un settore compresa tra due archi concentrici. L'angolo è quello del cono intero; i raggi sono la generatrice del cono intero e quella del cono asportato. Tagliamo il cono della Figura 2.3 con un piano orizzontale alla quota 20 mm, cioè a metà altezza: per Talete il cerchio di sezione ha raggio $30 \cdot 20/40 = 15$ mm, e la generatrice del piccolo cono asportato misura $50 \cdot 20/40 = 25$ mm. Lo sviluppo laterale del tronco è il settore di corona con i raggi di 50 e 25 mm e l'angolo di 216°; i due cerchi, di raggio 30 e 15 mm, si attaccano ai due archi. È, in piccolo, lo sviluppo di un **imbuto** o di un paralume.

2.3 Lo sviluppo dei solidi tagliati

Nel cap. 1 hai tagliato i solidi con piani inclinati e hai trovato la vera forma della sezione. Ora si tratta di sviluppare il **solido tronco** che resta: la sua superficie laterale, limitata in alto dalla linea di taglio, la base e la vera forma della sezione, che chiude il solido come un coperchio. Il metodo generale è sempre lo stesso:

1. disegna lo sviluppo del solido intero, a linea sottile;
2. su ogni spigolo (o generatrice) dello sviluppo riporta, a partire dalla base, la **vera lunghezza** del tratto che resta sotto il piano;
3. unisci i punti nell'ordine: con segmenti nel poliedro, con una curva continua nel solido di rotazione;
4. attacca la base e la vera forma della sezione, ciascuna lungo un lato che abbia in comune con la superficie laterale.

2.3.1 Il prisma tagliato

Negli spigoli verticali di un prisma retto la vera lunghezza si legge direttamente sul **prospetto**: è la quota del punto di sezione. Riprendiamo il prisma esagonale della Figura 1.3 (lato 20 mm, altezza 60 mm), tagliato dal piano α che incontra lo spigolo di sinistra alla quota 15 mm e quello di destra alla quota 50 mm.

Tabella 2.1 Il prisma esagonale della Figura 1.3 tagliato dal piano α: altezza di ogni spigolo del tronco, letta sul prospetto, e lunghezza del tratto della linea di taglio sulla faccia che segue.

Spigolo (punto di sezione)	Altezza del tronco (mm)	Tratto di taglio fino al punto successivo (mm)
1	15	1–2: $\sqrt{(20^2 + 8{,}75^2)} \approx 21{,}83$
2	23,75	2–3: $\sqrt{(20^2 + 17{,}5^2)} \approx 26{,}58$
3	41,25	3–4: ≈ 21,83
4	50	4–5: ≈ 21,83
5	41,25	5–6: ≈ 26,58
6	23,75	6–1: ≈ 21,83

ESEMPIO SVOLTO

Lo sviluppo del tronco di prisma. Disegna lo sviluppo del tronco della Figura 1.3, base e sezione comprese.

1. Traccia la striscia del prisma intero, lunga 6 · 20 = 120 mm, con sette verticali distanti 20 mm. Conviene aprire il prisma lungo lo spigolo più corto, il numero 1, che si troverà ai due estremi.
2. Su ciascuna verticale riporta l'altezza del tronco letta sul prospetto (Tabella 2.1): 15; 23,75; 41,25; 50; 41,25; 23,75; 15 mm.
3. Unisci i punti con una spezzata: è la linea di taglio, simmetrica rispetto allo spigolo 4. I suoi tratti hanno le lunghezze della tabella, e sono proprio i lati della vera forma trovata nel cap. 1.
4. Attacca la base esagonale sotto una delle facce e la vera forma sopra un tratto della linea di taglio, per esempio il tratto 3–4: il lato 3_r4_r della vera forma è lungo anch'esso ≈ 21,83 mm, e i due lati devono coincidere.

Controllo: la somma delle altezze opposte è costante (15 + 50 = 23,75 + 41,25 = 65 mm), perché il piano taglia gli spigoli opposti in punti simmetrici rispetto al centro della sezione, che sta alla quota 32,5 mm.

2.3.2 La piramide tagliata

Nella piramide gli spigoli sono inclinati, e i tratti da riportare nello sviluppo vanno anch'essi portati in vera lunghezza. Non serve una nuova rotazione per ogni punto: basta lo spigolo già raddrizzato. Nella Figura 2.2 un punto dello spigolo che si trova alla quota z, ruotando con lo spigolo, conserva la sua quota; quindi si trova sul segmento in vera lunghezza $V''B_r''$ conducendo dal prospetto una **orizzontale** alla quota z. La distanza misurata lungo $V''B_r''$ è la vera distanza del punto dalla base.

Tagliamo la piramide della Figura 2.2 con un piano perpendicolare al PV che incontra gli spigoli di sinistra (VA e VD) alla quota 10 mm e quelli di destra (VB e VC) alla quota 30 mm. Le due orizzontali tagliano lo spigolo vero, lungo 57,45 mm, a 57,45 · 10/50 ≈ 11,49 mm e a 57,45 · 30/50 ≈ 34,47 mm dalla base. Nello sviluppo si riportano queste distanze sugli spigoli, a partire dai vertici della base: 11,49 mm su VA e VD, 34,47 mm su VB e VC. La linea di taglio ha quattro tratti, uno per faccia: 16 mm sulla faccia di destra, 32 mm su quella di sinistra (entrambi paralleli alla base) e circa 32,25 mm sulle facce anteriore e posteriore. Sono i lati della vera forma, un trapezio isoscele con le basi di 32 e 16 mm e l'altezza di $\sqrt{(24^2 + 20^2)} \approx 31{,}24$ mm.

2.3.3 Il cilindro tagliato

Nel cilindro il ruolo degli spigoli passa alle **12 generatrici** (Figura 2.4). Dividi la base in 12 parti e numera i punti da 1 a 12 come nel cap. 1, partendo da quello di sinistra; sali in prospetto con

le generatrici e leggi dove le taglia la traccia *t*″: ottieni le altezze delle 12 generatrici del tronco, in vera lunghezza perché le generatrici sono verticali e parallele al PV. Poi disegna il rettangolo dello sviluppo, dividilo in 12 parti uguali con 13 verticali (la prima e l'ultima sono la stessa generatrice, quella lungo la quale si apre il cilindro), riporta su ciascuna l'altezza corrispondente e unisci i punti con una **curva continua**, tracciata con il curvilineo.

Nell'esempio della figura (raggio 20 mm, piano che taglia la generatrice di sinistra alla quota 20 mm e quella di destra alla quota 50 mm) le altezze sono 20; 22,01; 27,5; 35; 42,5; 47,99; 50 mm dalla generatrice 1 alla 7, e poi le stesse in ordine inverso fino alla 12. Le generatrici 4 e 10, che in pianta stanno davanti e dietro, sono tagliate esattamente a metà tra le quote estreme (35 mm). La vera forma, un'ellisse con l'asse maggiore di $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = 50$ mm e l'asse minore di 40 mm, uguale al diametro, si attacca nel punto 7, l'estremo più alto della curva; il cerchio di base si attacca in basso.

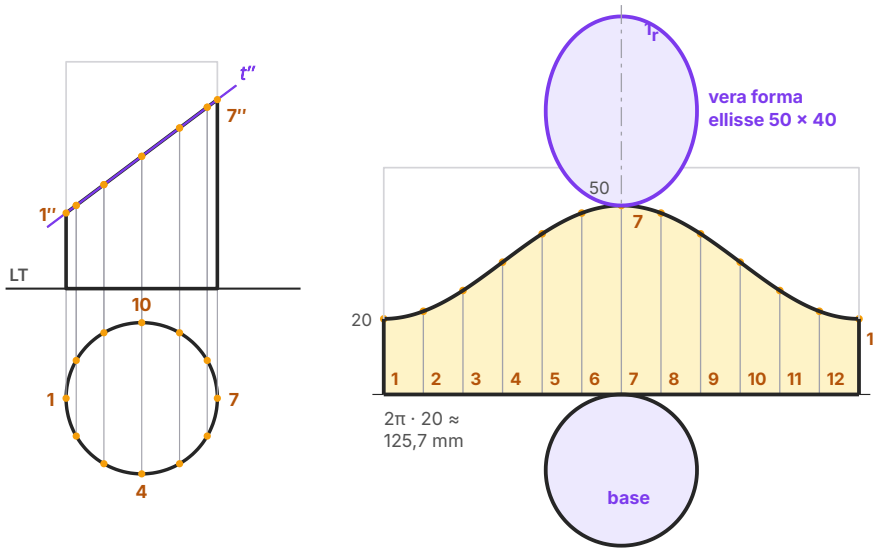

Figura 2.4 Lo sviluppo di un cilindro tagliato (raggio 20 mm, altezza 60 mm; il piano taglia la generatrice di sinistra alla quota 20 mm e quella di destra alla quota 50 mm). 1) Le 12 generatrici salgono dalla pianta al prospetto, dove *t*″ ne dà le altezze; 2) le altezze si riportano sulle 13 verticali del rettangolo lungo 2π · 20 ≈ 125,7 mm; 3) i punti si uniscono con una curva continua; 4) la vera forma (ellisse 50 × 40 mm) si attacca nel punto 7 e la base in basso. In grigio chiaro la parte asportata.

ERRORE FREQUENTE

Una curva, non una spezzata. La linea di taglio del cilindro si costruisce per punti, ma non si disegna unendo i punti con il righello: la superficie è curva e la linea è curva. Si ripassa con il curvilineo, senza spigoli, in modo che nei punti 1 e 7, il più basso e il più alto, la curva arrivi **orizzontale**. Al contrario, nel prisma tagliato la linea è davvero una spezzata, con un vertice su ogni spigolo.

Il cilindro tagliato ha un'applicazione quotidiana: il **tubo a gomito**, come quello della canna di una stufa. Due tronchi di cilindro uguali, tagliati da un piano inclinato di 45° sull'asse, si uniscono lungo l'ellisse di sezione e formano un angolo retto. Il lattoniere ricava i due pezzi dallo stesso sviluppo, con la linea di taglio costruita esattamente come nella Figura 2.4.

2.4 Le sezioni in architettura

Le sezioni dei solidi hanno un uso quotidiano nel disegno di architettura. Un edificio si descrive con pochi tagli ben scelti, e ciascuno si disegna con regole che chiunque sappia leggere una tavola riconosce.

2.4.1 La pianta è una sezione

Nel primo volume (vol. 1, cap. 6) hai visto che la pianta di un edificio non è una vista dall'alto, che mostrerebbe soltanto il tetto, ma una **sezione orizzontale**: un piano parallelo al pavimento taglia l'edificio a un'altezza convenzionale, di solito tra 1 e 1,5 m, e si disegna ciò che resta sotto, visto dall'alto. L'altezza è scelta in modo da tagliare i muri, i pilastri e le colonne e da passare attraverso le porte e le finestre: così la pianta mostra gli spessori dei muri e la posizione delle aperture. Nelle porte si disegna anche il verso di apertura, con l'anta e un arco sottile.

Gli elementi che stanno sopra il piano di sezione, e che sarebbe utile ricordare, come travi, archi o volte, si possono indicare a linea sottile tratteggiata; nella pianta della basilica della Figura 2.6 sono tratteggiati i muri che, sopra le colonne, sostengono la parte alta della navata.

2.4.2 Sezioni longitudinali e trasversali

Per descrivere le altezze servono sezioni con **piani verticali**. In un edificio allungato, come una chiesa, si chiama **sezione longitudinale** quella con un piano parallelo al lato lungo (di solito l'asse principale) e **sezione trasversale** quella con un piano perpendicolare. Il piano si sceglie dove la sezione dice di più: attraverso le aperture, le scale, le volte, i punti in cui l'edificio cambia altezza. In un progetto le sezioni sono di solito almeno due, una per ciascuna direzione.

2.4.3 La linea di sezione

La posizione di ogni sezione verticale si indica in pianta con la **linea di sezione**, che le norme UNI EN ISO della serie 128 disegnano così (Figura 2.5):

- una linea **mista fine punto-linea** lungo il percorso del piano;
- **grossa** alle due estremità e nei punti in cui il piano **cambia direzione**;
- con due **frecce**, perpendicolari alla linea, che indicano la **direzione in cui si guarda**: si disegna ciò che sta davanti alle frecce, e si immagina eliminata la parte alle spalle;
- con due **lettere maiuscole** uguali, una per estremità, che danno il nome alla sezione: la sezione **A–A**, la sezione **B–B**.

La linea di sezione può essere **spezzata**: con due o più tratti paralleli, raccordati da tratti perpendicolari, il piano passa per gli elementi più significativi anche se non sono allineati. Nella Figura 2.5 la sezione B–B attraversa la finestra della parete ovest nel vano 1 e poi scende per passare dalla porta tra i due vani. Nel disegno della sezione i diversi tratti si rappresentano uno di seguito all'altro, come se stessero su un unico piano.

2.4.4 Che cosa è tagliato e che cosa è visto

Una sezione architettonica contiene due tipi di elementi, che si devono distinguere a colpo d'occhio:

- gli elementi **tagliati** dal piano (muri, solai, tetti, volte, pilastri): si disegnano con **contorno grosso** e si riempiono, con la campitura del cap. 1 o, nelle tavole architettoniche, con un colore pieno;
- gli elementi **visti** al di là del piano, nella direzione delle frecce (pareti di fondo, porte e finestre lontane, colonne, capriate): si disegnano con **linea fine**, senza riempimento.

Nella sezione A–A della Figura 2.5 il piano passa per la finestra della parete sud del vano 2: la parete sud è tagliata due volte, sotto il davanzale e sopra la finestra, e tra i due pezzi si vede il vetro; la parete nord è tagliata per tutta l'altezza; sono tagliati anche il pavimento e il solaio di copertura. Guardando verso ovest, nella direzione delle frecce, si vede la parete divisoria con la sua porta, che è soltanto vista e si disegna a linea fine.

2.4.5 Le quote altimetriche

Le altezze si scrivono in una sezione con le **quote altimetriche**: numeri in metri, con due decimali, accompagnati da un piccolo triangolo che tocca il livello indicato. Tutte le quote si misurano a partire da un piano di riferimento, la quota **±0,00**, che di solito è il pavimento finito del piano d'ingresso; i livelli più alti hanno il segno +, quelli più bassi (un seminterrato, il terreno esterno) il segno −. Nella Figura 2.5 il davanzale della finestra è a +0,90, l'architrave a +2,20, l'intradosso del solaio a +3,00 e la copertura a +3,30. A differenza della quotatura del primo volume

(vol. 1, cap. 1), che misura distanze tra due punti, la quota altimetrica dà la posizione di un livello rispetto a un riferimento unico.

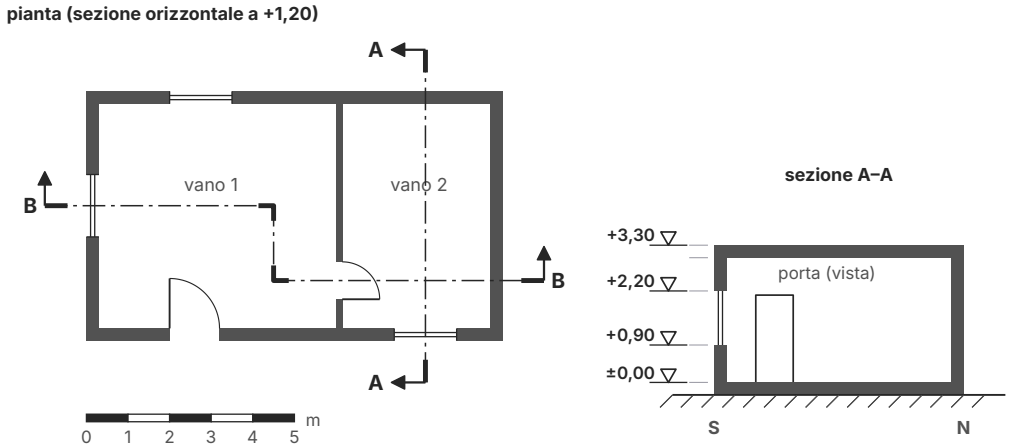

Figura 2.5 Pianta e sezione di un piccolo edificio di 10 × 6 m (muri esterni spessi 0,30 m). Nella pianta, sezione orizzontale a +1,20, le linee di sezione: A–A diritta, con le frecce verso ovest; B–B spezzata, con le frecce verso nord, grossa alle estremità e nei cambi di direzione. Nella sezione A–A gli elementi tagliati sono pieni, la porta della parete divisoria, soltanto vista, è a linea fine; a sinistra le quote altimetriche.

DA RICORDARE

Per leggere una sezione architettonica, tre domande nell'ordine. **Dove** passa il piano? Lo dice la linea di sezione in pianta. **Da che parte** si guarda? Lo dicono le frecce. **Che cosa** è tagliato e che cosa è visto? Lo dicono lo spessore delle linee e il riempimento. Solo dopo si leggono le misure, con la scala grafica e con le quote altimetriche.

2.5 Due edifici in pianta e in sezione

Mettiamo alla prova le regole su due schemi di edifici che incontrerai nella storia dell'arte: uno longitudinale, la basilica, e uno a pianta centrale, la rotonda.

2.5.1 La basilica a tre navate

La Figura 2.6 mostra lo schema di una **basilica a tre navate**, il tipo di chiesa che studierai nel cap. 7: i primi cristiani lo ricavarono dalla basilica civile romana (vol. 1, cap. 16). Le misure sono quelle di un edificio ideale di media grandezza, scelte per l'esercizio: lo spazio interno è diviso in senso longitudinale da due file di colonne in una **navata** centrale, larga 12 m tra gli assi delle colonne, e in due **navatelle** laterali, larghe 6 m dall'asse delle colonne al muro. Le co-

lonne distano 4 m l'una dall'altra; in fondo alla navata centrale si apre l'**abside** semicircolare, di 6 m di raggio. Sulla facciata si aprono tre porte, una per navata.

La pianta è una sezione a +1,50: i muri e le colonne sono tagliati e pieni; i tratteggi sopra le colonne ricordano i muri che corrono più in alto, sostenuti dagli archi. La linea A–A taglia l'edificio in senso trasversale a metà di una campata, cioè tra due colonne, e le frecce guardano verso l'abside.

La **sezione trasversale** rivela ciò che la pianta non può mostrare: la navata centrale è molto più alta delle navatelle. Il piano A–A, passando tra due colonne, non taglia nessuna colonna: taglia i muri esterni delle navatelle, alti 7 m, e, sopra gli archi, il muro alto della navata, tra +8,00 (la chiave dell'arco) e +14,00. Questo muro è forato da finestre, che si aprono sopra i tetti delle navatelle: è il **cleristorio**, la fascia di finestre che dà luce direttamente alla navata centrale. Le colonne e gli archi della campata successiva sono visti e si disegnano a linea fine.

Le coperture sono anch'esse tagliate: le navatelle hanno un tetto a uno spiovente, appoggiato al muro della navata; la navata centrale ha un **tetto a capanna**, a due spioventi, con il colmo a +18,00. Il tetto poggia su **capriate** di legno, travature triangolari disposte a intervalli regolari: due travi inclinate, i **puntoni**, sostengono il manto del tetto; una trave orizzontale, la **catena**, ne unisce i piedi e, lavorando a trazione, impedisce che si allarghino e spingano i muri verso l'esterno; un montante centrale, il **monaco**, sostiene la catena dal colmo. Nella sezione la capriata è vista, perché il piano passa tra due capriate.

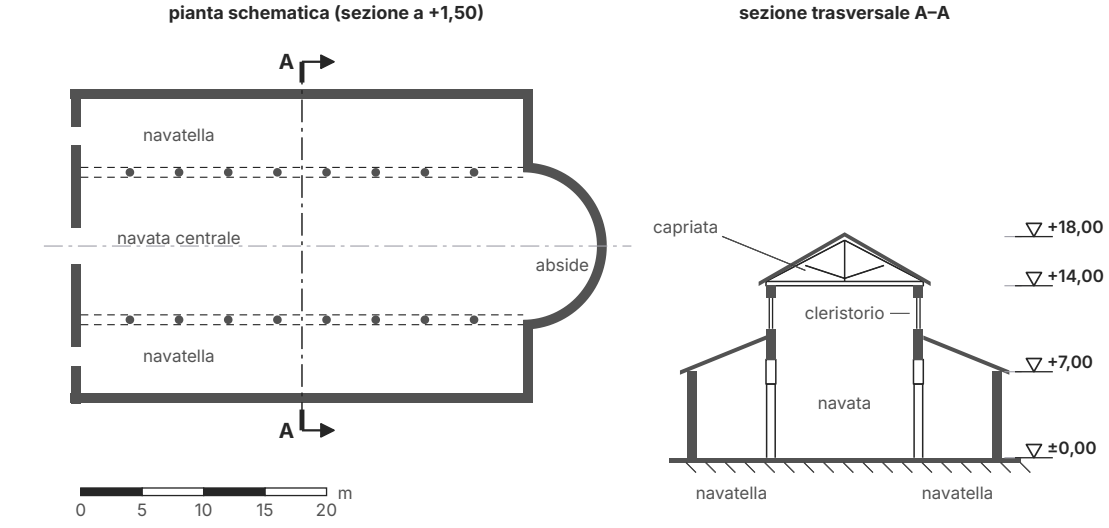

Figura 2.6 Pianta schematica e sezione trasversale di una basilica a tre navate (edificio ideale: navata 12 m tra gli assi delle colonne, navatelle 6 m, campate di 4 m, abside di 6 m di raggio, muri spessi 0,8 m). Nella sezione A–A, presa a metà di una campata e rivolta verso l'abside, sono tagliati i muri delle navatelle, il muro alto della navata con le finestre del cleristorio e i tetti; colonne, archi e capriata sono visti.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere la sezione della Figura 2.6. Quanto è larga, all'interno, la basilica? Quanto è più alta la navata centrale delle navatelle? Perché la navata riceve luce diretta?

1. Larghezza interna: 6 + 12 + 6 = 24 m tra i muri delle navatelle; con i muri, 24 + 2 · 0,8 = 25,6 m. Sulla scala grafica, che va da 0 a 20 m, la larghezza si misura facilmente e conferma il valore.
2. Altezze: il muro della navatella arriva a +7,00, quello della navata a +14,00. La navata è dunque alta il doppio delle navatelle, e poco più della sua larghezza tra le colonne.
3. Il tetto della navatella si appoggia al muro della navata a circa +9,60: tra quel livello e +14,00 il muro è libero e può aprirsi in finestre, quelle del cleristorio, che stanno tra +10,50 e +13,00.

È questa differenza di altezza, leggibile solo in sezione, a fare della basilica un edificio luminoso al centro e più raccolto ai lati.

ERRORE FREQUENTE

Colonne tagliate o viste? In una sezione trasversale le colonne si disegnano piene solo se il piano passa proprio per i loro assi. Se il piano passa tra due colonne, come nella Figura 2.6, le colonne non sono tagliate: si vedono quelle della campata successiva, a linea fine. Prima di riempire un elemento, controlla sulla pianta che la linea di sezione lo attraversi davvero.

2.5.2 La rotonda e la sfera inscritta

Il secondo edificio è una **rotonda**, un edificio a pianta circolare coperto da una cupola. Lo schema della Figura 2.7 riprende le proporzioni del Pantheon di Roma, che hai studiato nel primo volume (vol. 1, cap. 16): uno spazio cilindrico con il diametro interno di circa 43,3 m, chiuso da un muro spesso circa 6 m e coperto da una cupola emisferica, con al centro un'apertura circolare, l'**oculo**, larga circa 9 m. Il pronao e le nicchie del muro non sono disegnati.

In pianta il muro è una corona circolare piena, interrotta dall'ingresso; l'oculo, che sta in alto, è tratteggiato. La linea A–A passa per il centro: in una rotonda ogni piano verticale per il centro dà la stessa sezione, e conviene scegliere quello che non attraversa l'ingresso. Nella sezione sono tagliati il muro, ai due lati, e la cupola, il cui spessore diminuisce salendo verso l'oculo; è vista la linea in cui la cupola si imposta sul cilindro, a metà altezza.

La sezione mostra con chiarezza la geometria del Pantheon. Il cilindro è alto quanto il raggio, circa 21,65 m, e la cupola è una semisfera dello stesso raggio: l'altezza totale dello spazio interno, circa 43,3 m, è uguale al diametro. Una sfera di 43,3 m di diametro starebbe dunque esattamente all'interno, toccando il pavimento e l'apertura dell'oculo: nella sezione la si disegna

come un cerchio tratteggiato, tangente al pavimento e alle pareti del cilindro. Nel primo volume questa sfera era una descrizione a parole; qui diventa un disegno misurabile.

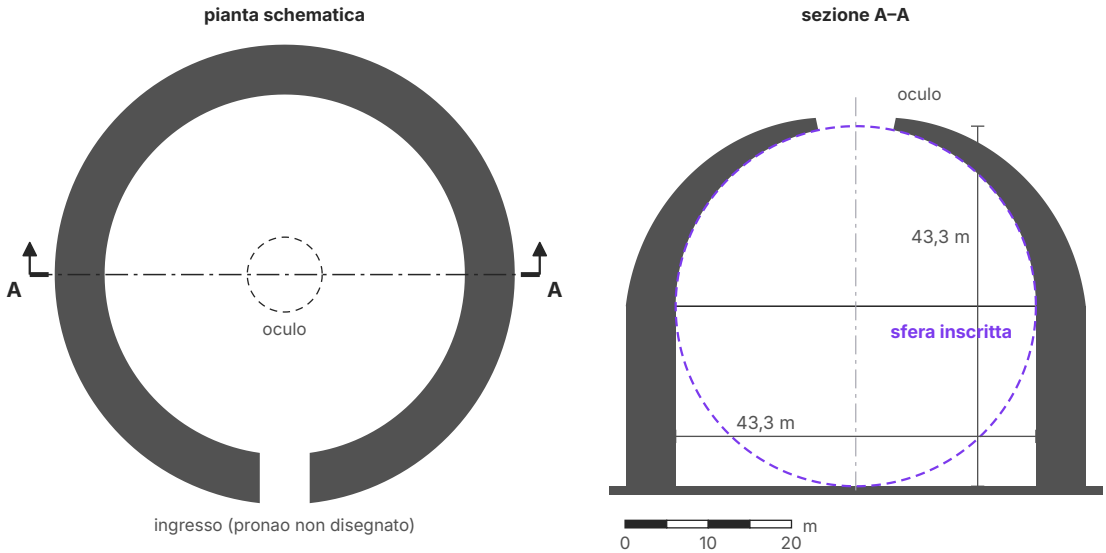

Figura 2.7 Pianta e sezione schematiche di una rotonda con le proporzioni del Pantheon (diametro interno circa 43,3 m, muro spesso circa 6 m, oculo largo circa 9 m; spessori indicativi, pronao e nicchie non disegnati). Nella sezione A–A, per il centro, l'altezza interna è uguale al diametro: vi si inscrive una sfera, tangente al pavimento.

COLLEGAMENTI

Matematica. Gli sviluppi danno le formule delle aree laterali che usi in geometria: per il prisma retto perimetro di base × altezza, per il cilindro $2\pi rh$. L'area del settore circolare è la stessa frazione r/g dell'area del cerchio di raggio g: $\pi g^2 \cdot r/g = \pi rg$, che è l'area laterale del cono.

Lavoro e vita quotidiana. Il sarto e lo stilista lavorano con il cartamodello, lo «sviluppo» di un abito, ma il corpo umano, come la sfera, non è sviluppabile: per far aderire la stoffa piana alle superfici curve servono pince e cuciture, proprio come gli spicchi di un mappamondo. In architettura, i plastici di studio si costruiscono ancora oggi a partire dagli sviluppi dei volumi.

SINTESI

- Lo **sviluppo** è la superficie di un solido distesa su un piano senza stiramenti né strappi: conserva le lunghezze e le aree, quindi ogni misura vi compare in vera grandezza.
- Poliedri, cilindri e coni hanno superfici **sviluppabili**; la sfera no: carte geografiche e mappamondi ne danno solo rappresentazioni approssimate.
- Nel disegno di uno sviluppo il contorno è a linea grossa, le pieghe a linea sottile tratteggiata; per i modelli si aggiungono le **linguette**, una per ogni coppia di bordi da unire.
- Prisma retto: striscia rettangolare lunga quanto il perimetro di base. Piramide: ventaglio di triangoli con i lati obliqui uguali allo **spigolo in vera lunghezza**, trovato per rotazione.
- Cilindro: rettangolo $2\pi r \times h$; la rettificazione con 12 corde è approssimata per difetto (circa l'1%).
- Cono: settore di raggio g e angolo $\alpha = 360° \cdot r/g$, ricavato dalla proporzione tra archi e angoli. Tronco di cono: settore di corona circolare con lo stesso angolo.
- Sviluppo di un solido tagliato: sugli spigoli o sulle generatrici si riportano le vere lunghezze dei tratti sotto il piano; nel prisma si leggono sul prospetto, nella piramide sullo spigolo raddrizzato con orizzontali, nel cilindro sulle 12 generatrici. La linea di taglio è una spezzata nel poliedro, una curva continua nel cilindro.
- La pianta di un edificio è una **sezione orizzontale** a circa 1–1,5 m; le sezioni verticali sono **longitudinali** o **trasversali**.
- La **linea di sezione** è mista fine punto-linea, grossa alle estremità e nei cambi di direzione, con le frecce per la direzione di vista e le lettere A–A, B–B.
- In sezione gli elementi **tagliati** hanno contorno grosso e riempimento; quelli **visti** oltre il piano sono a linea fine. Le altezze si danno con le **quote altimetriche**, riferite alla quota ±0,00.
- La sezione trasversale di una basilica mostra la navata più alta delle navatelle e il **cleristorio**; quella di una rotonda come il Pantheon mostra la sfera inscritta nello spazio interno.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Lo sviluppo di una superficie è:
   - **A.** la sua proiezione sul PO
   - **B.** la superficie distesa su un piano senza stiramenti né strappi
   - **C.** la sezione della superficie con un piano
   - **D.** la vera forma della base del solido

2. ● Quale di queste superfici **non** è sviluppabile?

   A. la superficie laterale di un cilindro

   B. la superficie laterale di un cono

   C. la superficie di un prisma

   D. la superficie di una sfera

3. ● Lo sviluppo della superficie laterale di un cilindro retto di raggio r e altezza h è:

   A. un rettangolo di $2\pi r \times h$

   B. un rettangolo di $r \times h$

   C. un settore circolare di raggio h

   D. un cerchio di raggio $r + h$

4. ● Lo sviluppo della superficie laterale di un cono retto è un settore circolare con il raggio uguale:

   A. al raggio di base r

   B. all'altezza h

   C. all'apotema (generatrice) g

   D. al diametro di base

5. ● Un cono ha raggio di base 20 mm e apotema 60 mm. L'angolo del settore dello sviluppo è:

   A. 60°

   B. 120°

   C. 180°

   D. 240°

6. ● Per disegnare lo sviluppo di una piramide retta servono gli spigoli laterali in vera lunghezza, che si trovano:

   A. misurandoli in pianta

   B. misurando i lati obliqui del prospetto

   C. con il teorema di Talete

   D. ruotandoli attorno all'asse finché diventano paralleli al PV

7. ● In una pianta architettonica il piano di sezione orizzontale passa, di solito:

   A. all'altezza del soffitto

   B. a circa 1–1,5 m dal pavimento

   C. esattamente sul pavimento

   D. sotto le fondazioni

8. ● La linea di sezione si disegna in pianta con una linea:

   A. mista fine punto-linea, grossa alle estremità e nei cambi di direzione, con frecce e lettere

   B. continua grossa per tutta la lunghezza

   C. tratteggiata fine, senza frecce

   D. continua fine, con le quote altimetriche

9. ●● In una sezione architettonica, un muro attraversato dal piano di sezione si disegna:
   A. a linea fine tratteggiata
   B. a linea fine, come gli elementi visti oltre il piano
   C. con contorno grosso e riempimento
   D. soltanto in pianta, non in sezione

Lessico e norme

10. ● Completa: la figura piana che si ottiene distendendo sul piano la superficie di un solido si chiama _____ ; le superfici che si possono distendere senza strappi né stiramenti si dicono _____ ; le alette che si aggiungono per incollare un modello si chiamano _____ ; trasformare una circonferenza in un segmento della stessa lunghezza si dice _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Lo sviluppo laterale di un prisma retto è un rettangolo lungo quanto il perimetro di base. b) Nello sviluppo di una piramide i lati obliqui dei triangoli si misurano in pianta. c) Il raggio del settore che sviluppa un cono è il raggio di base. d) Rettificare la circonferenza con 12 corde dà una lunghezza un po' minore di quella vera. e) In una sezione architettonica gli elementi visti oltre il piano si disegnano a linea fine. f) La quota ±0,00 indica di solito il pavimento finito del piano d'ingresso.

12. ● Abbina ogni termine alla sua definizione. a) Pianta; b) sezione longitudinale; c) sezione trasversale; d) linea di sezione; e) quota altimetrica; f) cleristorio. Definizioni: 1) sezione verticale con un piano perpendicolare al lato lungo dell'edificio; 2) fascia di finestre nella parte alta della navata centrale; 3) sezione orizzontale a circa 1–1,5 m dal pavimento; 4) altezza di un livello rispetto al piano di riferimento ±0,00; 5) linea che indica in pianta dove passa il piano di una sezione verticale e da che parte si guarda; 6) sezione verticale con un piano parallelo al lato lungo dell'edificio.

13. ● In una pianta trovi una linea mista con le estremità grosse, due frecce rivolte verso destra e due lettere C. Spiega che cosa indica ciascuno di questi elementi e come si chiamerà la sezione.

14. ●● Completa la proporzione che dà l'angolo α del settore di un cono di raggio r e apotema g: $\alpha : 360° =$ _____ : _____ , quindi $\alpha =$ _____ . Se l'apotema è il doppio del raggio, il settore è _____ .

15. ●● Spiega perché in una sezione architettonica si usano due spessori di linea e il riempimento, e come si disegnano una porta attraversata dal piano e una porta vista sulla parete di fondo.

Costruire

16. ● **Prisma quadrato.** Disegna lo sviluppo completo, con le linguette, di un prisma retto a base quadrata di lato 30 mm e altezza 50 mm (foglio A4 verticale). Calcola l'area totale della superficie.

17. ● **Prisma esagonale.** Disegna lo sviluppo completo di un prisma retto a base esagonale regolare di lato 20 mm e altezza 60 mm, con le due basi attaccate a facce diverse.

18. ●● **Piramide quadrata.** Piramide retta a base quadrata, lato 50 mm, altezza 60 mm, lati della base paralleli e perpendicolari alla LT. Disegna pianta e prospetto, trova per rotazione la vera lunghezza di uno spigolo laterale e disegna lo sviluppo completo. Controlla la costruzione con l'apotema delle facce.

19. ●● **Cilindro.** Disegna lo sviluppo completo di un cilindro retto di raggio 25 mm e altezza 50 mm (foglio A4 verticale). Rettifica la circonferenza in entrambi i modi e confronta le due lunghezze.

20. ●● **Cono.** Cono retto di raggio 30 mm e altezza 72 mm. Trova l'apotema sul prospetto, calcola l'angolo del settore e disegna lo sviluppo completo.

21. ●● **Imbuto.** Un cono retto di raggio 30 mm e altezza 40 mm è tagliato da un piano orizzontale alla quota 24 mm. Disegna lo sviluppo laterale del tronco di cono, con i due cerchi.

22. ●● **Prisma tagliato.** Prisma retto a base quadrata, lato 40 mm, altezza 70 mm, lati della base paralleli e perpendicolari alla LT. Il piano α, perpendicolare al PV, taglia gli spigoli di sinistra alla quota 20 mm e quelli di destra alla quota 50 mm. Disegna lo sviluppo del tronco inferiore con la base e la vera forma della sezione.

23. ●● **Piramide tagliata.** La piramide della Figura 2.2 (lato 40 mm, altezza 50 mm) è tagliata da un piano perpendicolare al PV che incontra gli spigoli di sinistra alla quota 10 mm e quelli di destra alla quota 30 mm. Disegna lo sviluppo del tronco, con la base e la vera forma della sezione; misura i quattro tratti della linea di taglio.

24. ●●● **Cilindro tagliato.** Cilindro retto di raggio 25 mm e altezza 70 mm. Il piano α, perpendicolare al PV, taglia la generatrice di contorno sinistra alla quota 20 mm e quella destra alla quota 50 mm. Disegna lo sviluppo del tronco per punti con 12 generatrici, con la base e la vera forma.

25. ●●● **Tubo a gomito.** Un gomito a 90° è formato da due tronchi uguali di un cilindro di raggio 25 mm, tagliati da un piano inclinato di 45° sull'asse; in ciascun tronco la generatrice più corta misura 40 mm. Disegna lo sviluppo di un tronco (foglio A4 orizzontale) e spiega perché i due pezzi formano un angolo retto.

26. ●●● **Pianta e sezione di una basilica.** Disegna in scala 1:200, su un foglio A4 verticale, la pianta schematica (in alto) e la sezione trasversale (in basso) di una basilica a tre navate con questi dati: navata centrale larga 10 m tra gli assi delle colonne, navatelle larghe 5 m dall'asse delle colonne al muro, lunghezza interna 30 m in sei campate di 5 m, abside semicircolare di raggio 5 m, muri spessi 0,6 m; colonne alte 5 m con archi a tutto sesto; muri delle navatelle alti 6 m, tetto delle navatelle appoggiato al muro della navata a +8,50; muro della navata alto 12 m, con finestre tra +9,50 e +11,50; colmo del tetto a +16,00. Indica la linea di sezione, le quote altimetriche e la scala grafica.

Leggere il disegno

27. ●● **Che solido è?** Riconosci il solido da ciascuno sviluppo e trovane le misure. a) Un rettangolo di 94,2 × 40 mm con due cerchi di raggio 15 mm. b) Un settore di raggio 50 mm e angolo 216° con un cerchio di raggio 30 mm. c) Quattro triangoli isosceli con i lati di 50, 50 e 40 mm disposti a ventaglio, con un quadrato di lato 40 mm. d) Un settore di corona circolare con i raggi di 60 e 36 mm e l'angolo di 120°, con due cerchi.

28. ●● **Trova gli errori.** Per sviluppare un cono di raggio 25 mm e altezza 60 mm un compagno ha: a) tracciato il settore con raggio 60 mm; b) calcolato l'angolo come 360° · 25/60 = 150°; c) attaccato all'arco un cerchio di raggio 25 mm. Quali passi sono sbagliati e perché? Quali sono i valori giusti?

29. ●● **Leggere la Figura 2.5.** a) In che direzione si guarda nella sezione A–A e in quella B–B? b) Nella sezione A–A quali elementi sono tagliati e quali visti? c) Quanto è alta la finestra della parete sud e a che altezza sta il suo davanzale? Quanto è alto il vano, dal pavimento all'intradosso del solaio? d) Perché la linea B–B è spezzata?

30. ●● **Leggere la Figura 2.6.** Usa la scala grafica e le quote. a) Quanto misura la navata centrale tra gli assi delle colonne? Quanto è lunga la basilica all'interno, dalla facciata all'inizio dell'abside? b) Perché nella sezione A–A le colonne non sono piene? c) Che cosa indicano, nella pianta, i tratteggi lungo le file di colonne? d) Di quanti metri il colmo del tetto supera il muro della navata?

31. ●● **Leggere lo sviluppo della Figura 2.4.** a) Quale generatrice del tronco è la più corta e quale la più lunga? b) Perché la curva è simmetrica rispetto alla generatrice 7? c) Quanto distano tra loro due verticali consecutive dello sviluppo? d) Perché la generatrice 4 è alta esattamente 35 mm?

Verso la verifica

32. ●●● **Piramide tagliata e sviluppo.** La piramide dell'esercizio 18 (lato 50 mm, altezza 60 mm) è tagliata da un piano perpendicolare al PV che incontra gli spigoli di sinistra alla quota 12 mm e quelli di destra alla quota 36 mm. Trova le distanze dei punti di sezione dalla base, misurate lungo gli spigoli, la vera forma della sezione e disegna lo sviluppo del tronco.

33. ●●● **Sezione B–B.** Disegna in scala 1:50 (foglio A4 orizzontale) la sezione B–B dell'edificio della Figura 2.5. Dati: muri esterni spessi 0,30 m, parete divisoria spessa 0,15 m a 6,00 m dal filo esterno della parete ovest; finestre con davanzale a +0,90 e architrave a +2,20; porta interna alta 2,10 m; solaio di copertura tra +3,00 e +3,30; pavimento ±0,00 su un solaio di 0,30 m. Distingui gli elementi tagliati da quelli visti e scrivi le quote.

34. ●●● **Rispondi in 10–15 righe.** Spiega perché la sfera non si può sviluppare, mentre il cono e il cilindro sì, e descrivi due modi in cui cartografi, costruttori di mappamondi o artigiani affrontano il problema di rappresentare o rivestire una superficie sferica con un materiale piano.

PER APPROFONDIRE

- [KRA] R. Krautheimer, *Architettura paleocristiana e bizantina*: per vedere come gli storici dell'architettura usano piante e sezioni per descrivere le prime basiliche cristiane, che studierai nel cap. 7.
- [CHO] A. Choisy, *Histoire de l'architecture*: le tavole riuniscono in un solo disegno pianta, sezione e volume degli edifici.

Glossario del capitolo

Apotema del cono
La generatrice $g = \sqrt{(r^2 + h^2)}$; è il raggio del settore che sviluppa il cono, il cui angolo vale $360° \cdot r/g$.

Capriata
Struttura triangolare di travi che sostiene un tetto a due spioventi: puntoni, catena e monaco.

Catena
Trave orizzontale della capriata che, lavorando a trazione, impedisce ai puntoni di allargarsi e di spingere i muri.

Cleristorio
Fascia di finestre nella parte alta dei muri della navata centrale, sopra i tetti delle navatelle.

Linea di sezione
Linea mista fine punto-linea, grossa alle estremità e nei cambi di direzione, con frecce e lettere, che indica in pianta dove passa una sezione e da che parte si guarda.

Linguetta
Aletta trapezia aggiunta a un bordo dello sviluppo per incollare il modello; una per ogni coppia di bordi da unire.

Navata
Ciascuno degli spazi longitudinali in cui file di colonne o pilastri dividono l'interno di una chiesa; la centrale è di solito la più larga e la più alta.

Navatella
Navata laterale, più bassa e più stretta di quella centrale.

Oculo
Apertura circolare alla sommità di una cupola, come quella del Pantheon.

Quota altimetrica
Altezza di un livello, in metri, rispetto al piano di riferimento ±0,00.

Rettificazione
Costruzione di un segmento lungo quanto un arco o una circonferenza; con 12 corde è approssimata per difetto.

Settore circolare
Parte di cerchio compresa tra due raggi; è lo sviluppo della superficie laterale del cono.

Sezione longitudinale
Sezione verticale di un edificio con un piano parallelo al suo lato lungo o all'asse principale.

Sezione trasversale
Sezione verticale di un edificio con un piano perpendicolare al suo lato lungo.

Superficie sviluppabile
Superficie che si può distendere su un piano senza deformarla: quelle dei poliedri, del cilindro e del cono. La sfera non lo è.

Sviluppo
Figura piana che si ottiene distendendo su un piano la superficie di un solido, senza stiramenti né strappi; conserva lunghezze e aree.

Tronco di cono
Parte di un cono compresa tra la base e una sezione parallela alla base; si sviluppa in un settore di corona circolare.

Tronco di piramide
Parte di una piramide compresa tra la base e una sezione parallela alla base; le facce laterali sono trapezi.

Soluzioni

1. B. Lo sviluppo distende la superficie senza deformarla: conserva lunghezze e aree.

2. D. La sfera è curva in tutte le direzioni; poliedri, cilindri e coni sono sviluppabili.

3. A. La generatrice dà l'altezza, la circonferenza di base rettificata dà la lunghezza $2\pi r$.

4. C. Il centro del settore è il vertice del cono e il raggio è la generatrice g.

5. B. $\alpha = 360° \cdot 20/60 = 120°$.

6. D. Gli spigoli sono inclinati su tutti i piani di proiezione; la rotazione attorno all'asse li rende paralleli al PV, dove compaiono in vera lunghezza.

7. B. Così il piano taglia muri, porte e finestre e la pianta ne mostra spessori e posizioni.

8. A. Norme UNI EN ISO della serie 128: linea mista fine, grossa alle estremità e nei cambi di direzione; le frecce danno la direzione di vista, le lettere il nome.

9. C. Gli elementi tagliati hanno contorno grosso e riempimento (campitura o colore pieno); quelli visti sono a linea fine.

10. Sviluppo (sviluppo piano); sviluppabili; linguette; rettificazione.

11. a) V. b) F: in pianta gli spigoli sono scorciati; si usano gli spigoli in **vera lunghezza**, trovati per rotazione. c) F: il raggio del settore è l'**apotema** g. d) V: ogni corda è più corta del suo arco (circa l'1% in meno con 12 corde). e) V. f) V.

12. a-3; b-6; c-1; d-5; e-4; f-2.

13. La linea mista indica dove passa il piano verticale; le estremità grosse ne segnano l'inizio e la fine (e, se ci fossero, i cambi di direzione); le frecce indicano che si guarda verso destra, cioè che si disegna la parte dell'edificio che sta a destra della linea; le lettere danno il nome: sezione C–C.

14. $\alpha : 360° = r : g$ (oppure $2\pi r : 2\pi g$); $\alpha = 360° \cdot r/g$. Con $g = 2r$ l'angolo è 180°: il settore è un semicerchio.

15. Traccia di risposta: lo spessore e il riempimento distinguono subito ciò che il piano attraversa (la materia tagliata, di cui si leggono gli spessori) da ciò che sta più lontano. Una porta attraversata dal piano appare come un'interruzione del muro tagliato: due tratti pieni, uno a ciascun lato del vano, e, se il piano passa più in alto dell'architrave, il muro pieno sopra di essa. Una porta vista sulla parete di fondo è un rettangolo a linea fine, senza riempimento, disegnato sopra la parete vista.

16. Striscia di $4 \cdot 30 = 120$ mm per 50 mm, divisa in quattro rettangoli di 30 × 50 mm, con due quadrati di 30 mm attaccati, per esempio, alla seconda faccia; linguette sul bordo di chiusura e su tre lati di ciascun quadrato (o sui corrispondenti lati della striscia). Area totale: $2 \cdot 30^2 + 120 \cdot 50 = 1800 + 6000 = 7800$ mm².

17. Striscia di $6 \cdot 20 = 120$ mm per 60 mm, divisa in sei rettangoli di 20 × 60 mm; due esagoni regolari di lato 20 mm (larghi $20 \cdot \sqrt{3} \approx 34{,}64$ mm tra i lati paralleli), uno sopra una faccia e uno sotto un'altra, per esempio sopra la seconda e sotto la quinta. Area laterale 7200 mm².

18. Semidiagonale della base $25 \cdot \sqrt{2} \approx 35{,}36$ mm: è il raggio della rotazione in pianta. Spigolo in vera lunghezza $\sqrt{(35{,}36^2 + 60^2)} = \sqrt{4850} \approx 69{,}64$ mm. Sviluppo: arco di raggio 69,64 mm, quattro corde di 50 mm, base quadrata attaccata a un triangolo. Controllo: apotema in prospetto $\sqrt{(25^2 + 60^2)} = 65$ mm, e infatti $\sqrt{(69{,}64^2 - 25^2)} \approx 65$ mm.

19. Rettangolo di $2\pi \cdot 25 \approx 157{,}08$ mm (con $\pi \approx 3{,}14$: 157 mm) per 50 mm, più due cerchi di raggio 25 mm. Con il compasso: corda della dodicesima parte ≈ 12,94 mm, dodici corde ≈ 155,29 mm, circa 1,8 mm in meno.

20. Apotema: $\sqrt{(30^2 + 72^2)} = 78$ mm (è il lato del triangolo del prospetto). Angolo: $360° \cdot 30/78 \approx 138{,}46°$ ($\approx 138{,}5°$). Settore di raggio 78 mm con l'arco lungo $2\pi \cdot 30 \approx 188{,}5$ mm, più il cerchio di base di raggio 30 mm, tangente all'arco nel punto di mezzo.

21. Cono intero: $g = \sqrt{(30^2 + 40^2)} = 50$ mm, angolo $360° \cdot 30/50 = 216°$. Il cono asportato è alto $40 - 24 = 16$ mm: raggio $30 \cdot 16/40 = 12$ mm, apotema $50 \cdot 16/40 = 20$ mm. Sviluppo: settore di corona con i raggi di 50 e 20 mm e l'angolo di 216° (il lato obliquo del tronco misura 30 mm); cerchi di raggio 30 e 12 mm attaccati ai due archi.

22. Striscia di $4 \cdot 40 = 160$ mm; altezze degli spigoli, aprendo lungo lo spigolo anteriore sinistro: 20, 50, 50, 20, 20 mm. Sulla faccia anteriore e su quella posteriore la linea di taglio è obliqua, lunga $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = 50$ mm; sulla faccia destra è orizzontale a 50 mm, su quella sinistra a 20 mm. Vera forma: rettangolo 40×50 mm, attaccato al lato superiore della faccia destra (lungo 40 mm); base quadrata di 40 mm sotto una faccia.

23. Spigolo in vera lunghezza 57,45 mm (Figura 2.2). Le orizzontali alle quote 10 e 30 mm lo tagliano a $57{,}45 \cdot 10/50 \approx 11{,}49$ mm e a $57{,}45 \cdot 30/50 \approx 34{,}47$ mm dalla base: queste distanze si riportano su *VA*, *VD* e su *VB*, *VC*. Tratti della linea di taglio: faccia anteriore e posteriore $\approx 32{,}25$ mm, faccia destra 16 mm, faccia sinistra 32 mm. Vera forma: trapezio isoscele con le basi di 32 e 16 mm, altezza $\sqrt{(24^2 + 20^2)} \approx 31{,}24$ mm, lati obliqui $\approx 32{,}25$ mm, attaccato per esempio al tratto della faccia sinistra.

24. Rettangolo lungo $2\pi \cdot 25 \approx 157{,}08$ mm, diviso in 12 parti di $\approx 13{,}09$ mm. Altezze dalla generatrice 1 alla 7 (e a ritroso fino alla 12): 20; 22,01; 27,5; 35; 42,5; 47,99; 50 mm. Curva continua con il curvilineo, orizzontale nei punti 1 e 7. Vera forma: ellisse con l'asse maggiore di $\sqrt{(50^2 + 30^2)} \approx 58{,}31$ mm e l'asse minore di 50 mm, attaccata nel punto 7; cerchio di base di raggio 25 mm sotto il rettangolo.

25. Piano a 45° sull'asse: tra la generatrice più corta e la più lunga la quota cresce quanto il diametro, 50 mm. Altezze dalla generatrice 1 alla 7: 40; 43,35; 52,5; 65; 77,5; 86,65; 90 mm, poi a ritroso. Lunghezza del rettangolo $2\pi \cdot 25 \approx 157{,}08$ mm. I due tronchi si uniscono lungo l'ellisse di sezione (assi $50 \cdot \sqrt{2} \approx 70{,}71$ mm e 50 mm), con il secondo pezzo girato di mezzo giro: ciascun asse forma 45° con il piano di giunzione, quindi i due assi formano $45° + 45° = 90°$.

26. In scala 1:200, 1 m = 5 mm. Pianta: navata 50 mm tra gli assi, navatelle 25 mm, lunghezza interna 150 mm (colonne ogni 25 mm, cinque per fila), abside di raggio 25 mm, muri spessi 3 mm. Sezione: larghezza interna 100 mm; colonne alte 25 mm, chiave degli archi a +7,50 (37,5 mm); muri delle navatelle 30 mm; tetto delle navatelle appoggiato a 42,5 mm; muro della navata 60 mm, con le finestre tra 47,5 e 57,5 mm; colmo 80 mm. Linea di sezione a metà di una campata, frecce verso l'abside; quote ±0,00, +6,00, +12,00, +16,00.

27. a) Cilindro: $2\pi r = 94{,}2$ mm, quindi $r \approx 15$ mm (lo confermano i cerchi), altezza 40 mm. b) Cono: $g = 50$ mm, $r = 30$ mm (infatti $360° \cdot 30/50 = 216°$), altezza $\sqrt{(50^2 - 30^2)} = 40$ mm. c) Piramide quadrata di lato 40 mm e spigolo 50 mm; semidiagonale $20 \cdot \sqrt{2} \approx 28{,}28$ mm, altezza $\sqrt{(50^2 - 28{,}28^2)} = \sqrt{1700} \approx 41{,}23$ mm. d) Tronco di cono: dall'angolo, $r/g = 120/360 = 1/3$; il cono intero ha $g = 60$ mm e $R = 20$ mm, quello asportato $g = 36$ mm e $r = 12$ mm; altezza del tronco $\sqrt{(24^2 - 8^2)} \approx 22{,}63$ mm.

28. a) Sbagliato: il raggio del settore è l'apotema $g = \sqrt{(25^2 + 60^2)} = 65$ mm, non l'altezza. b) Sbagliato, per lo stesso motivo: $\alpha = 360° \cdot 25/65 \approx 138{,}46°$. c) Giusto: il cerchio di base ha il raggio del cono, 25 mm.

29. a) Nella A–A le frecce puntano a ovest: si guarda verso ovest. Nella B–B puntano a nord. b) Tagliati: pavimento, parete sud (sotto e sopra la finestra), parete nord, solaio di copertura. Vista: la parete divisoria con la sua porta. c) La finestra è alta $2{,}20 - 0{,}90 = 1{,}30$ m, con il davanzale a 0,90 m; il vano è alto 3,00 m. d) Perché con una sola linea diritta non si potrebbero attraversare sia la finestra della parete ovest sia la porta tra i due vani, che non sono allineate.

30. a) 12 m tra gli assi; lunghezza interna $9 \cdot 4 = 36$ m. b) Perché il piano A–A passa tra due colonne: non ne taglia nessuna, e quelle della campata successiva sono viste, a linea fine. c) I muri sostenuti

dagli archi, che stanno sopra il piano della pianta (+1,50). d) 18,00 − 14,00 = 4 m.

31. a) La più corta è la 1, alta 20 mm (che compare ai due estremi); la più lunga è la 7, alta 50 mm. b) Perché le generatrici 6 e 8, 5 e 9, … stanno in pianta in posizioni simmetriche rispetto al diametro 1–7, parallelo alla LT, e quindi sono tagliate alla stessa quota. c) $2\pi \cdot 20/12 \approx 10{,}47$ mm. d) La generatrice 4 sta in pianta sul diametro perpendicolare alla LT, cioè, in prospetto, sull'asse del cilindro: la traccia la taglia a metà tra le quote 20 e 50 mm, a (20 + 50) : 2 = 35 mm.

32. Spigolo in vera lunghezza 69,64 mm (esercizio 18). Distanze dalla base lungo gli spigoli: $69{,}64 \cdot 12/60 \approx 13{,}93$ mm sugli spigoli di sinistra, $69{,}64 \cdot 36/60 \approx 41{,}78$ mm su quelli di destra. Con Talete, alla quota 12 mm i punti distano $25 \cdot 48/60 = 20$ mm dall'asse, alla quota 36 mm $25 \cdot 24/60 = 10$ mm. Vera forma: trapezio isoscele con le basi di 40 e 20 mm e l'altezza $\sqrt{(30^2 + 24^2)} \approx 38{,}42$ mm; lati obliqui $\sqrt{(38{,}42^2 + 10^2)} \approx 39{,}70$ mm, uguali ai tratti della linea di taglio sulle facce anteriore e posteriore; sulla faccia sinistra il tratto è di 40 mm, sulla destra di 20 mm.

33. In scala 1:50, 1 m = 20 mm: larghezza totale 200 mm, altezze fino a 66 mm (+3,30). Si guarda verso nord. Tagliati: pavimento e solaio di copertura per tutta la lunghezza; parete ovest (6 mm) interrotta dalla finestra tra 18 e 44 mm d'altezza, con il vetro; parete divisoria (3 mm) a 120 mm dal filo esterno ovest, interrotta dalla porta fino a 42 mm d'altezza e piena sopra fino al solaio; parete est piena. Visti, a linea fine: la parete nord di fondo del vano 1 con la sua finestra (da 2,00 a 3,50 m dal filo esterno ovest, tra +0,90 e +2,20); oltre la porta, la parete nord di fondo del vano 2, senza aperture. Il cambio di direzione della linea B–B non si disegna: i due tratti si rappresentano di seguito. Quote ±0,00, +0,90, +2,10, +2,20, +3,00, +3,30.

34. Traccia di risposta: la sfera è curva in tutte le direzioni, mentre il cilindro e il cono sono dritti lungo le generatrici e si curvano in una sola direzione: si possono srotolare, la sfera no, senza strappi o stiramenti che cambiano le distanze. Rimedi: le proiezioni cartografiche, che deformano in modo controllato (Mercatore conserva gli angoli e ingrandisce le terre vicine ai poli); gli spicchi o fusi dei mappamondi e delle cupole, strisce strette che approssimano la sfera; le pince e le cuciture dei sarti; la lamiera battuta o stampata, che invece si deforma.