CAPITOLO

1

Le sezioni dei solidi

Per conoscere l'interno di un oggetto bisogna avere il coraggio di tagliarlo: sul foglio, per fortuna, il taglio non costa nulla.

OBIETTIVI

1. Riconoscere piano sezionante, figura di sezione, solido tronco e parte asportata, e usare tracce e piani proiettanti.
2. Costruire le sezioni di prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere con piani paralleli ai piani di proiezione, controllandole con il teorema di Talete.
3. Costruire nelle tre viste la sezione prodotta da un piano perpendicolare al PV (o al PO) e trovarne la vera forma con il piano ausiliario.
4. Disegnare per punti l'ellisse di sezione di un cilindro e di un cono, e riconoscere le coniche.
5. Rappresentare il solido tronco secondo le convenzioni: parte asportata omessa, faccia tagliata campita.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Ripasso: il metodo delle proiezioni ortogonali 2
1.2 Che cos'è una sezione 3
1.3 Sezioni con piani paralleli ai piani di proiezione 5
1.4 Piani perpendicolari al PV e inclinati sul PO 7
1.5 Le sezioni dei solidi di rotazione 12
1.6 Disegnare la sezione: campiture e convenzioni 16

Disegno e Storia dell'arte 2 · Parte I · Sezioni e sviluppi · versione 1.0
Capitolo 1: Le sezioni dei solidi · pagine 23–46 del volume completo · estratto per lo studio

Per sapere com'è fatta una mela dentro, la tagliamo a metà; per capire come è costruito un muro, un tubo o una cupola, l'architetto e l'ingegnere fanno la stessa cosa, ma sulla carta. Tagliare un solido con un piano e disegnare con esattezza la figura che il taglio mette allo scoperto è l'ultimo passo del metodo delle proiezioni ortogonali che hai imparato nel primo volume: è anche il passo che lo rende davvero utile, perché permette di mostrare ciò che dall'esterno non si vede, come lo spessore delle pareti, i vuoti, le parti interne.

In questo capitolo impari a costruire le **sezioni** di prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere, prima con piani paralleli ai piani di proiezione, poi con piani inclinati, e a trovarne la **vera forma**. Incontrerai così, disegnandole, l'ellisse e le altre curve che nascono dal taglio di un cono: le studierai con le equazioni in matematica, nel secondo biennio. Il capitolo 2 userà tutto questo per stendere sul foglio le superfici dei solidi (gli sviluppi) e per leggere le piante e le sezioni degli edifici.

1.1 Ripasso: il metodo delle proiezioni ortogonali

Le sezioni si costruiscono con gli strumenti del primo volume (vol. 1, capp. 5–6). Riprendiamoli in breve, perché ogni costruzione di questo capitolo li dà per acquisiti.

- **Tre piani di proiezione**, a due a due perpendicolari: il piano verticale **PV**, il piano orizzontale **PO** e il piano laterale **PL**. PV e PO si incontrano nella **linea di terra** (LT). L'oggetto sta nel **primo diedro**, tra l'osservatore e i piani (metodo europeo).
- **Disposizione delle viste** dopo il ribaltamento dei piani sul foglio: il **prospetto** (vista sul PV) in alto a sinistra, la **pianta** (sul PO) sotto il prospetto, il **fianco** (sul PL) a destra del prospetto.
- **Notazione**: il punto $P(x; y; z)$ ha distanza x dal PL, aggetto y (distanza dal PV) e quota z (distanza dal PO); le sue proiezioni sono P' in pianta, P'' in prospetto, P''' in fianco.
- **Linee di richiamo**: P' e P'' stanno sulla stessa perpendicolare alla LT; P'' e P''' sulla stessa parallela alla LT; l'aggetto passa dalla pianta al fianco con la **retta a 45°**, tracciata da O nel quadrante in basso a destra.
- **Vera grandezza**: un segmento o una figura appare in vera grandezza (o vera forma) solo nella vista del piano a cui è parallelo; altrimenti appare scorciato. Per raddrizzarlo si usano la **rotazione** attorno a un asse perpendicolare a un piano di proiezione e il **ribaltamento** di un piano attorno a una retta.

Come nel primo volume, le tavole si eseguono su un foglio A4 squadrato in verticale, con la LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice e l'asse verticale a 120 mm dal bordo sinistro: le di-

stanze x dal PL devono restare entro 120 mm, gli aggetti entro 70 mm. Le misure sono in millimetri.

ESEMPIO SVOLTO

Il prisma esagonale nelle tre viste. Un prisma retto a base esagonale regolare, con lato 20 mm e altezza 50 mm, poggia con la base sul PO; il centro della base è in (60; 35; 0) e due vertici opposti della base stanno su una parallela alla LT. Disegna le tre viste.

1. **Pianta.** Con centro in (60; 35) traccia la circonferenza di raggio 20 mm (il lato dell'esagono regolare è uguale al raggio della circonferenza circoscritta) e dividila in sei parti a partire dal diametro parallelo alla LT. I vertici hanno x = 80, 70, 50, 40 mm. La base superiore coincide con quella inferiore.
2. **Prospetto.** Dai vertici sali con le linee di richiamo: ottieni un rettangolo largo 40 mm (da x = 40 a x = 80) e alto 50 mm, diviso da due spigoli verticali in x = 70 e x = 50 mm. Gli spigoli posteriori coincidono con quelli anteriori.
3. **Fianco.** Porta gli aggetti dalla pianta al fianco con la retta a 45°: il rettangolo è largo quanto la distanza tra i lati paralleli dell'esagono, $20 \cdot \sqrt{3} \approx 34{,}64$ mm (aggetti da 17,68 a 52,32 mm), ed è diviso a metà dallo spigolo che passa per il vertice di sinistra, all'aggetto 35 mm.

Questo prisma, con un'altra posizione e altre misure, è il primo solido che taglieremo.

1.2 Che cos'è una sezione

1.2.1 Piano sezionante, figura di sezione, solido tronco

Immagina di tagliare un solido con una lama perfettamente piana. Il piano della lama è il **piano sezionante** (o piano secante), che indichiamo con una lettera greca minuscola: α, β. L'operazione di tagliare un solido con un piano si chiama **sezione**, e lo stesso nome si dà spesso anche al risultato. Per essere precisi distinguiamo tre cose (Figura 1.1):

- la **figura di sezione**, cioè la figura piana comune al solido e al piano: è la «faccia nuova» che il taglio mette allo scoperto;
- il **solido tronco** (o tronco), la parte del solido che decidiamo di conservare;
- la **parte asportata**, quella che eliminiamo per vedere l'interno.

Nel disegno tecnico e in architettura si taglia un oggetto per mostrarne l'interno: lo spessore di una parete, un foro, una cavità, il modo in cui le parti sono montate l'una nell'altra. La pianta di un edificio, come sai dal primo volume, è proprio una sezione con un piano orizzontale; nel prossimo capitolo vedrai le sezioni verticali degli edifici. Qui partiamo dai solidi geometrici, dove ogni punto della sezione si può costruire con esattezza.

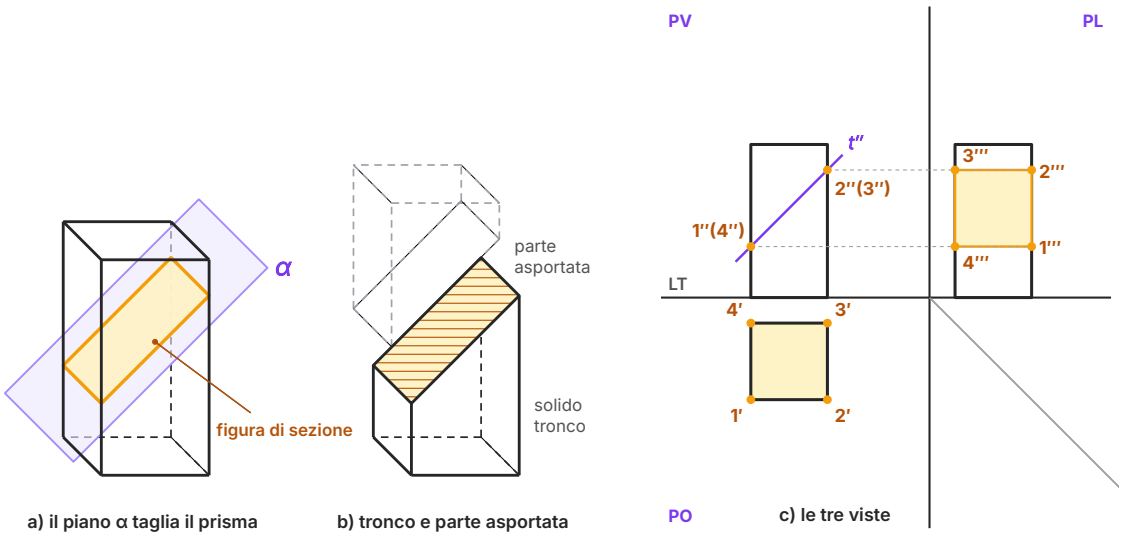


Figura 1.1 Un prisma tagliato da un piano. a) Il piano α, perpendicolare alla faccia anteriore, taglia i quattro spigoli laterali del prisma (base 30 × 30 mm, altezza 60 mm); la figura di sezione è il rettangolo evidenziato. b) Il solido tronco con la faccia tagliata campita e la parte asportata sollevata. Le immagini a) e b) sono solo illustrative. c) Le tre viste: il piano è perpendicolare al PV e si riduce in prospetto alla sua traccia *t''*; la sezione appare in pianta come il quadrato di base e in fianco come un quadrato di 30 mm, ma in realtà è un rettangolo di 30 × 42,43 mm.

1.2.2 Poligoni e curve

Se il solido è un **poliedro convesso** (prisma, piramide, poliedro regolare), il piano incontra ogni faccia che attraversa lungo un segmento: la figura di sezione è quindi un **poligono**. I suoi **vertici** sono i punti in cui il piano taglia gli **spigoli** del solido, e i suoi **lati** stanno sulle facce. Ne segue la regola che guida ogni costruzione: **per disegnare la sezione di un poliedro basta trovare le intersezioni del piano con gli spigoli e unirle nell'ordine delle facce**. Il numero dei lati non può superare quello delle facce tagliate: un cubo, per esempio, può dare un triangolo, un quadrilatero, un pentagono o un esagono, mai un ettagono.

Se il solido è un **solido di rotazione** (cilindro, cono, sfera), la sua superficie laterale è curva e la sezione è delimitata, in tutto o in parte, da una **curva**: una circonferenza, un'ellisse, oppure, nel cono, una parabola o un'iperbole. Al posto degli spigoli si usano le **generatrici** (le rette che, ruotando, descrivono la superficie) oppure le circonferenze parallele alla base: ogni loro intersezione con il piano è un punto della curva, e la curva si disegna per punti.

1.2.3 Tracce e piani proiettanti

Un piano che taglia un piano di proiezione lo incontra lungo una retta: è la **traccia** del piano su quel piano di proiezione. Come nel primo volume (vol. 1, cap. 5) le indichiamo con *t'* (sul PO), *t''*

(sul PV) e t''' (sul PL).

Le costruzioni di questo capitolo usano quasi sempre un tipo particolare di piano: il **piano proiettante**, cioè un piano **perpendicolare a un piano di proiezione**. Su quel piano di proiezione tutti i raggi proiettanti condotti dai suoi punti restano dentro il piano stesso: per questo il piano si proietta come una **retta**, che coincide con la sua traccia. Un piano perpendicolare al PV, per esempio, si vede in prospetto «di taglio», come una linea: è la sua traccia t''. Tutta la sezione, qualunque forma abbia, in prospetto sta sopra quella linea.

> **DA RICORDARE**
>
> Una sezione con un piano proiettante si costruisce sempre **a partire dalla vista in cui il piano si vede come una retta**: lì i punti della sezione si trovano subito, intersecando la traccia con gli spigoli o con le generatrici. Nelle altre due viste si ricavano con le linee di richiamo.
>
> La figura di sezione appare in **vera forma** solo nella vista del piano di proiezione a cui il piano sezionante è **parallelo**; se non è parallelo a nessuno dei tre, la vera forma si trova con una costruzione apposita.

1.3 Sezioni con piani paralleli ai piani di proiezione

Il caso più semplice è un piano parallelo a uno dei piani di proiezione, e quindi perpendicolare agli altri due. Si chiamano:

- **piano orizzontale**: parallelo al PO, alla quota h; in prospetto e in fianco si vede come una retta parallela alla LT, a distanza h;
- **piano frontale**: parallelo al PV; in pianta e in fianco si vede come una retta;
- **piano di profilo**: parallelo al PL; in prospetto e in pianta si vede come una retta perpendicolare alla LT.

La sezione appare in **vera forma** nella vista a cui il piano è parallelo (in pianta per il piano orizzontale, in prospetto per il frontale, in fianco per quello di profilo) e si riduce a un segmento nelle altre due.

1.3.1 Prisma e cilindro

Un piano parallelo alle basi di un prisma retto taglia tutti gli spigoli laterali alla stessa quota: la sezione è un poligono **uguale alla base**. Allo stesso modo un piano parallelo alle basi di un cilindro dà un cerchio uguale alla base. Con il prisma o il cilindro in posizione fondamentale (base sul PO) e un piano orizzontale, la sezione in pianta coincide con il contorno della base: per riconoscerla la si campisce.

Un piano parallelo all'asse di un cilindro, invece, lo taglia lungo due generatrici: la sezione è un **rettangolo** con l'altezza del cilindro e la larghezza uguale alla corda che il piano stacca sul

cerchio di base.

1.3.2 Piramide e cono: la similitudine

Un piano parallelo alla base di una piramide taglia gli spigoli laterali in punti che stanno tutti alla stessa frazione della loro lunghezza: la sezione è un poligono **simile alla base**, più piccolo (Figura 1.2). Il rapporto tra un lato della sezione e il lato corrispondente della base, il **rapporto di similitudine**, si ricava dalle altezze con il teorema di Talete: la sezione sta a distanza $H - h$ dal vertice, la base a distanza H, quindi

$$\frac{l}{L} = \frac{H - h}{H}$$

dove L è il lato della base, l il lato della sezione, H l'altezza della piramide e h la quota del piano. Lo stesso vale per il cono: la sezione è un cerchio il cui raggio sta al raggio di base come $H - h$ sta a H. Nel disegno il rapporto non serve calcolarlo: in prospetto la traccia orizzontale taglia gli spigoli (o le generatrici di contorno) e le linee di richiamo portano i punti in pianta. Il calcolo è però un ottimo controllo.

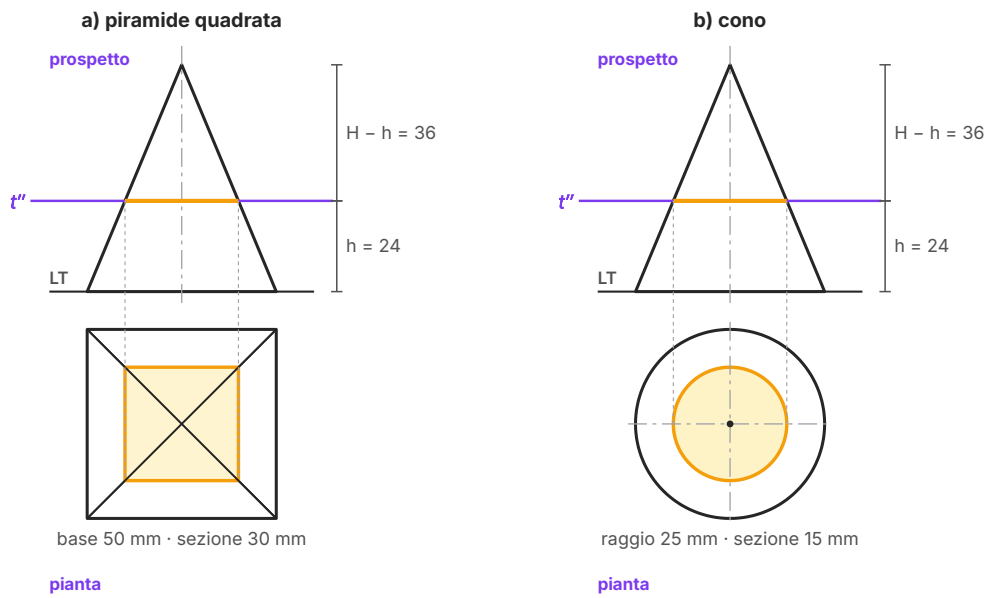


Figura 1.2 Sezioni orizzontali di piramide e cono. Il piano alla quota h = 24 mm taglia una piramide quadrata (lato 50 mm, altezza 60 mm) e un cono (raggio 25 mm, altezza 60 mm). In pianta la sezione è in vera forma: un quadrato di lato 30 mm e un cerchio di raggio 15 mm, perché 36 : 60 = 3 : 5 e 50 · 3/5 = 30, 25 · 3/5 = 15.

ESEMPIO SVOLTO

Una piramide tagliata a metà altezza? Una piramide retta a base quadrata, con lato 60 mm e altezza 80 mm, poggia sul PO. Un piano orizzontale la taglia alla quota 30 mm. Quanto misura il lato della sezione?

1. In prospetto traccia la retta orizzontale a quota 30 mm: incontra gli spigoli di contorno in due punti.
2. Scendi con le linee di richiamo fino alle diagonali della pianta (che sono gli spigoli laterali visti dall'alto): ottieni i quattro vertici della sezione, un quadrato con i lati paralleli a quelli della base.
3. Controllo con Talete: $l = 60 \cdot (80 - 30) : 80 = 60 \cdot 5/8 = 37{,}5$ mm.

Attenzione: il piano a metà altezza (quota 40 mm) non dà una sezione con metà area della base, ma con metà **lato**: 30 mm di lato, cioè un quarto dell'area.

1.3.3 La sfera

Qualunque piano tagli una sfera, la sezione è un **cerchio**. Il suo raggio dipende dalla distanza del piano dal centro: è massimo (uguale al raggio della sfera) se il piano passa per il centro, e diminuisce allontanandosi. Non serve una formula: in prospetto la sfera ha per contorno una circonferenza, e il tratto della traccia t'' compreso dentro di essa è proprio il **diametro** del cerchio di sezione. Lo si misura e lo si riporta in pianta, dove il cerchio appare in vera forma, concentrico al contorno della sfera. Per esempio, in una sfera di raggio 25 mm un piano orizzontale a 15 mm dal centro stacca in prospetto un segmento di 40 mm: la sezione è un cerchio di raggio 20 mm.

ERRORE FREQUENTE

Due errori tipici con la sfera. Il primo è disegnare in pianta il cerchio di sezione con il raggio della sfera, come se ogni piano la tagliasse a metà. Il secondo è prendere come raggio la distanza del piano dal centro. Il raggio giusto si legge sul prospetto: è **metà del segmento** di t'' interno al contorno. Il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il raggio della sfera e per cateti la distanza dal centro e il raggio della sezione permette, se vuoi, di controllarlo con il teorema di Pitagora: nell'esempio, $25^2 = 15^2 + 20^2$.

1.4 Piani perpendicolari al PV e inclinati sul PO

Passiamo al caso più importante: un piano α **perpendicolare al PV** e **inclinato sul PO**. In prospetto α si riduce alla traccia t'', una retta inclinata sulla LT; in pianta e in fianco la sezione appare deformata; la sua vera forma non si vede in nessuna delle tre viste. Il piano si assegna

dando due punti di t'', per esempio le quote a cui taglia due spigoli, oppure un punto e l'angolo con la LT.

1.4.1 Le tre viste della sezione

Seguiamo la costruzione sul prisma esagonale della Figura 1.3: lato 20 mm, altezza 60 mm, base sul PO con il centro in (55; 28; 0), due vertici opposti su una parallela alla LT. Il piano α taglia lo spigolo del vertice di sinistra alla quota 15 mm e quello del vertice di destra alla quota 50 mm. Chiamiamo i vertici della sezione con i numeri 1, 2, 3 … nell'ordine in cui si incontrano girando attorno al prisma: le lettere maiuscole restano ai vertici del solido.

1. **Le viste del solido intero**, con linea sottile, e in prospetto la traccia t'' che passa per le due quote assegnate.
2. **I punti in prospetto.** Segna dove t'' incontra gli spigoli laterali: 1″ e 4″ sugli spigoli di contorno, 2″ e 3″ sugli spigoli interni. Ogni spigolo interno del prospetto è in realtà una coppia di spigoli, uno davanti e uno dietro: il punto 2″ vale anche per 6″, il punto 3″ per 5″. Il punto nascosto si scrive tra parentesi. Le quote dei punti, misurate sul disegno, sono 15; 23,75; 41,25 e 50 mm.
3. **I punti in pianta e in fianco.** Dai punti del prospetto scendi con le linee di richiamo fino agli spigoli della pianta: poiché gli spigoli laterali di un prisma retto sono verticali, in pianta i punti cadono sui vertici dell'esagono. Dalla pianta porta gli aggetti in fianco con la retta a 45° e incrociali con le orizzontali condotte dal prospetto: trovi 1‴ … 6‴.
4. **La sezione nelle viste.** Unisci i punti nell'ordine delle facce: 1-2-3-4-5-6-1. In fianco la sezione è un esagono non regolare; in pianta coincide con l'esagono di base.

1.4.2 La vera forma: piano ausiliario o ribaltamento

In nessuna delle tre viste la sezione è in vera forma, perché α non è parallelo a nessun piano di proiezione. Per vederla davvero ci sono due metodi equivalenti.

Il primo è il **ribaltamento sul PO**: si fa ruotare α attorno alla sua traccia t' sul PO (una retta perpendicolare alla LT, che passa per il punto in cui t'' incontra la LT) finché si adagia sul PO. Ogni punto conserva il suo aggetto, mentre la sua distanza da t', misurata in prospetto lungo t'', si riporta in pianta parallelamente alla LT, con il compasso puntato nel piede di t'' sulla LT. Il metodo è semplice, ma la vera forma cade quasi sempre sopra la pianta del solido e la tavola diventa illeggibile.

Per questo in questo libro useremo sempre il secondo metodo, il **piano ausiliario**. Si immagina un piano parallelo ad α e perpendicolare al PV, lontano dal solido, e lo si ribalta sul PV: è lo stesso procedimento che il primo volume usava per la circonferenza inclinata (vol. 1, cap. 5), spostato di lato perché la figura non si sovrapponga al disegno. In pratica:

1. traccia, in una zona libera del foglio, una retta e parallela a t'': sarà l'asse di simmetria della vera forma;

2. da ogni punto della sezione in prospetto conduci la perpendicolare a *t*'' fino a oltrepassare *e*;
3. su ciascuna perpendicolare riporta, a partire da *e*, la distanza del punto dall'asse di simmetria della pianta (la parallela alla LT che passa per il centro della base): da una parte i punti anteriori, dall'altra quelli posteriori. I punti che stanno sull'asse, come 1 e 4, restano su *e*;
4. unisci i punti ribaltati 1_r, 2_r ... nello stesso ordine della sezione.

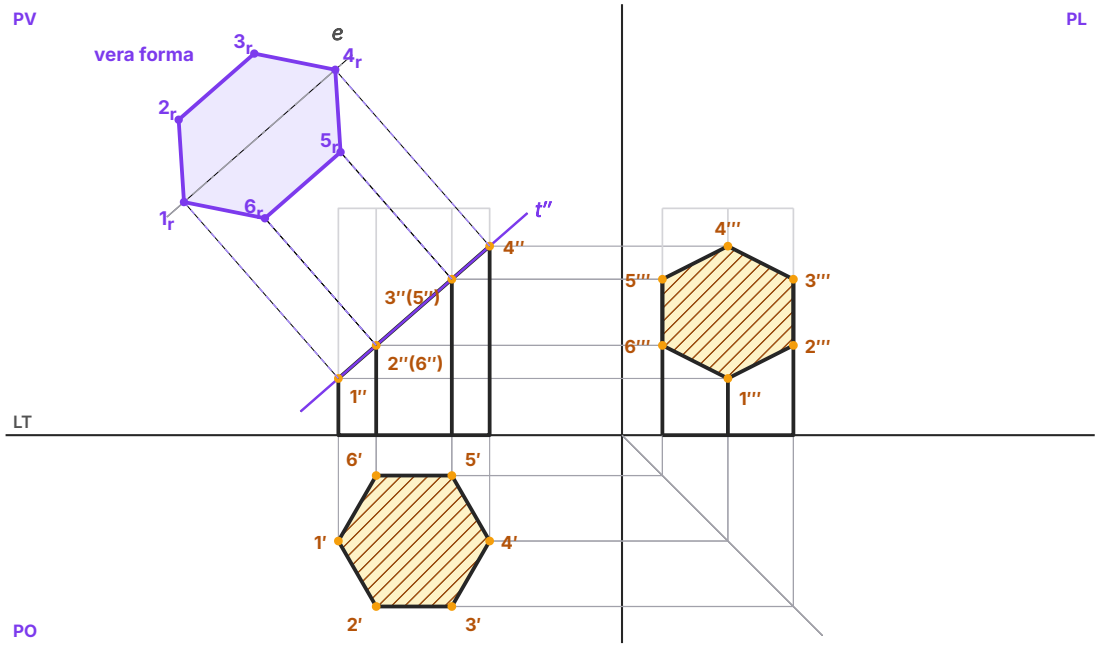


Figura 1.3 Prisma esagonale (lato 20 mm, altezza 60 mm) tagliato da un piano perpendicolare al PV. 1) La traccia *t*'' taglia gli spigoli in prospetto; 2) i punti scendono in pianta e passano in fianco con la retta a 45°; 3) dai punti di *t*'' si conducono le perpendicolari a *t*'' fino all'asse *e*, parallelo a *t*''; 4) su di esse si riportano le distanze dei punti dall'asse di simmetria della pianta, e si ottiene la vera forma, lunga 53,15 mm e larga 34,64 mm. In grigio chiaro la parte asportata.

Le distanze lungo *e* sono le distanze vere dei punti misurate su *t*'', perché *t*'' è il piano visto di taglio; le distanze perpendicolari a *e* sono gli aggetti, che non cambiano. Nella Figura 1.3 la vera forma è un esagono non regolare lungo 53,15 mm (la lunghezza del tratto di *t*'' interno al prisma: con Pitagora, $\sqrt{(40^2 + 35^2)} \approx 53{,}15$ mm) e largo 34,64 mm, quanto la distanza tra i lati paralleli della base. Se il solido non è simmetrico, al posto dell'asse di simmetria si sceglie come riferimento una qualunque parallela alla LT, per esempio quella del punto con l'aggetto minore.

IN SINTESI

Sezione con un piano perpendicolare al PV, in quattro passi.

1. in prospetto, intersezioni di t'' con gli spigoli (o con le generatrici);
2. linee di richiamo verso la pianta e, con la retta a 45°, verso il fianco;
3. unione dei punti nell'ordine delle facce, nelle tre viste;
4. vera forma con il piano ausiliario: perpendicolari a t'', asse e parallelo a t'', aggetti misurati dall'asse di simmetria.

1.4.3 Le piramidi

Con una piramide i passi sono gli stessi, ma gli spigoli laterali non sono verticali: in pianta i punti della sezione non cadono sui vertici della base, bensì **lungo gli spigoli**, cioè sui segmenti che uniscono i vertici di base con il vertice della piramide. La Figura 1.4 mostra una piramide quadrata con i lati di base paralleli e perpendicolari alla LT.

ESEMPIO SVOLTO

La piramide della Figura 1.4. Piramide retta a base quadrata, lato 50 mm, altezza 70 mm, centro della base in (50; 34; 0), lati di base paralleli e perpendicolari alla LT. Il piano α è perpendicolare al PV e taglia gli spigoli di sinistra a quota 14 mm e quelli di destra a quota 42 mm. Trova la sezione e la sua vera forma.

1. In prospetto gli spigoli di sinistra (anteriore e posteriore) coincidono, e così quelli di destra. t'' li taglia in 1″(4″), a quota 14 mm, e in 2″(3″), a quota 42 mm.
2. Scendi in pianta: la linea di richiamo da 1″ incontra i due spigoli di sinistra in 1′ e 4′; quella da 2″ incontra gli spigoli di destra in 2′ e 3′.
3. Controllo con Talete: a quota 14 mm ogni punto di uno spigolo dista dall'asse della piramide i 56/70 = 4/5 della distanza del vertice di base, quindi 1′ e 4′ distano 20 mm dall'asse in entrambe le direzioni; a quota 42 mm il rapporto è 28/70 = 2/5, e 2′, 3′ distano 10 mm. In pianta la sezione è un trapezio con i lati paralleli di 40 e 20 mm, distanti 30 mm.
4. In fianco i punti si trovano con la retta a 45° e le orizzontali dal prospetto: il trapezio ha la base minore (20 mm) a quota 42 e la maggiore (40 mm) a quota 14.
5. Vera forma con il piano ausiliario: un trapezio isoscele con le basi di 40 e 20 mm e l'altezza uguale al segmento 1″2″, cioè $\sqrt{(30^2 + 28^2)} \approx 41{,}04$ mm; i lati obliqui misurano $\sqrt{(41{,}04^2 + 10^2)} \approx 42{,}24$ mm.

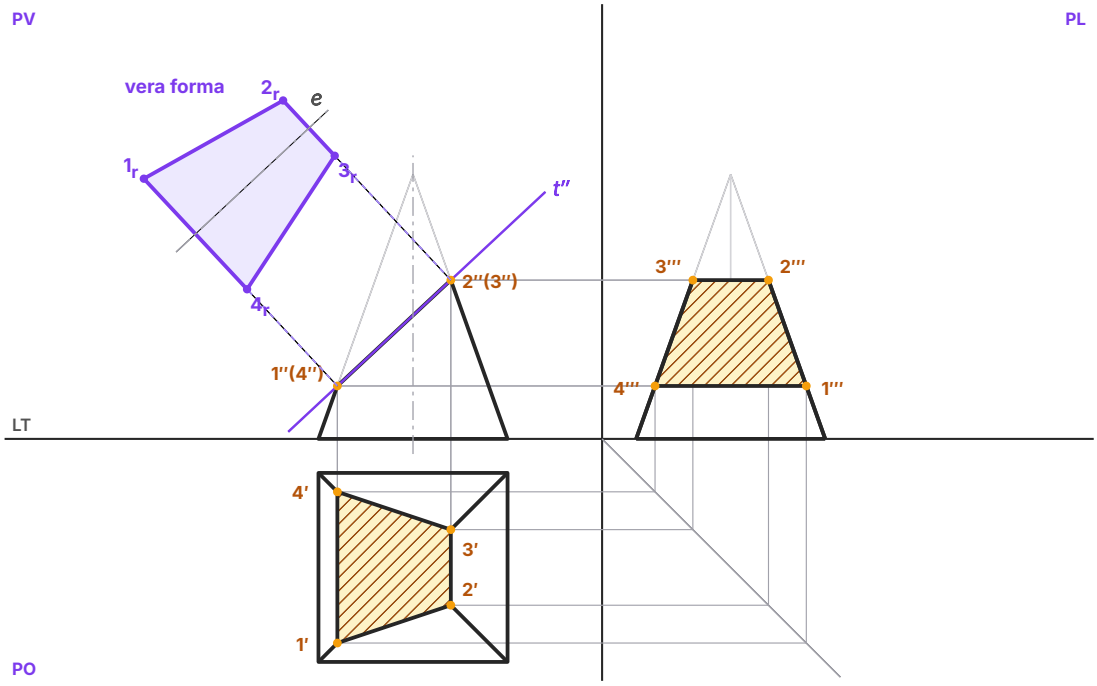


Figura 1.4 Piramide quadrata (lato 50 mm, altezza 70 mm) tagliata da un piano perpendicolare al PV che incontra gli spigoli di sinistra a quota 14 mm e quelli di destra a quota 42 mm. In pianta i punti cadono sugli spigoli laterali; la sezione è un trapezio isoscele, campito in pianta e in fianco perché la faccia tagliata è visibile da sopra e da sinistra. La vera forma ha le basi di 40 e 20 mm e l'altezza di 41,04 mm.

ERRORE FREQUENTE

Lo spigolo di profilo. Se una piramide ha uno spigolo laterale che in pianta è perpendicolare alla LT (per esempio quando una diagonale di base è perpendicolare alla LT), la linea di richiamo dal prospetto coincide con lo spigolo stesso e non lo «taglia» in nessun punto: il punto della sezione resta indeterminato. Non tirare a indovinare. Ci sono due rimedi: trovare il punto in fianco, dove lo spigolo non è più di profilo, e riportarlo in pianta con la retta a 45°; oppure tagliare la piramide con un piano orizzontale ausiliario passante per il punto (una sezione simile alla base, come nel paragrafo precedente) e prendere il punto sul suo contorno. Lo stesso problema, con lo stesso rimedio, si presenta nel cono con le generatrici anteriore e posteriore.

1.4.4 Il caso simmetrico: piano perpendicolare al PO

Tutto ciò che abbiamo detto vale, scambiando i ruoli delle viste, per un piano **perpendicolare al PO** e inclinato sul PV: in pianta il piano si riduce alla traccia t', i punti della sezione si trovano lì e salgono in prospetto con le linee di richiamo. Allo stesso modo si tratta un piano perpendicolare al PL, che si vede di taglio in fianco.

ESEMPIO SVOLTO

Un prisma tagliato da un piano verticale. Prisma retto a base quadrata, lato 40 mm, altezza 50 mm, centro della base in (60; 35; 0), lati paralleli e perpendicolari alla LT. Il piano α è perpendicolare al PO; la sua traccia t' passa per il punto del lato anteriore della base a 10 mm dallo spigolo di sinistra e per il punto del lato posteriore a 10 mm dallo spigolo di destra.

1. In pianta la base occupa x da 40 a 80 mm e aggetti da 15 a 55 mm. t' unisce (70; 55) e (50; 15).
2. α è verticale: taglia le due basi lungo segmenti e le facce anteriore e posteriore lungo segmenti verticali. La sezione è un rettangolo alto 50 mm.
3. In prospetto il rettangolo appare scorciato: largo 20 mm (da $x = 50$ a 70) e alto 50 mm; in fianco appare largo 40 mm, quanto la profondità del prisma.
4. Vera forma: un rettangolo di 50 mm per la lunghezza del tratto di t' interno al quadrato, $\sqrt{(20^2 + 40^2)} \approx 44{,}72$ mm. Con il piano ausiliario si traccia la retta e parallela a t', si conducono le perpendicolari a t' e si riportano su di esse le **quote**, che qui prendono il posto degli aggetti.

ERRORE FREQUENTE

Un piano inclinato su **tutti e tre** i piani di proiezione non si vede di taglio in nessuna vista: in questo caso nessuna vista basta da sola, né per trovare i punti né per la vera forma, e serve un primo cambio di piano che lo renda proiettante. Negli esercizi di questo volume il piano sezionante è sempre perpendicolare ad almeno uno dei tre piani di proiezione: controllalo prima di cominciare.

1.5 Le sezioni dei solidi di rotazione

1.5.1 Il cilindro: l'ellisse per punti

Un piano che taglia tutte le generatrici di un cilindro, inclinato sull'asse, dà una sezione ellittica. La costruzione per punti è quella dei poliedri, con le generatrici al posto degli spigoli (Figura 1.5):

1. dividi in pianta la circonferenza di base in **12 parti uguali** (con il compasso, riportando il raggio sei volte e poi dimezzando gli archi, oppure con le squadre a 30° e 60°) e numera i punti da 1 a 12 a partire da quello di sinistra;
2. da ogni punto sali in prospetto e disegna la generatrice corrispondente: le coppie simmetriche (2 e 12, 3 e 11 …) hanno la stessa generatrice in prospetto;
3. segna dove t'' incontra le generatrici: ottieni le quote dei 12 punti della sezione;

4. in pianta i punti cadono sulla circonferenza di base (le generatrici sono verticali); in fianco li trovi con la retta a 45° e le orizzontali dal prospetto, e li unisci con una curva continua, tracciata con il curvilineo;
5. la vera forma si costruisce con il piano ausiliario, riportando dall'asse *e* gli aggetti dei 12 punti misurati dall'asse di simmetria della pianta.

Il risultato è un'**ellisse**. Il suo **asse maggiore** è il tratto di *t″* interno al cilindro, che in prospetto si vede in vera lunghezza; il suo **asse minore** è sempre uguale al **diametro del cilindro**, perché è il segmento orizzontale, perpendicolare al PV, che attraversa l'asse del cilindro. Nell'esempio della figura (raggio 25 mm, *t″* che taglia la generatrice di sinistra a quota 15 mm e quella di destra a quota 55 mm) l'asse maggiore misura $\sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64{,}03$ mm e l'asse minore 50 mm. In fianco la sezione è ancora un'ellisse, con un asse di 50 mm (orizzontale) e uno di 40 mm (verticale, la differenza delle quote).

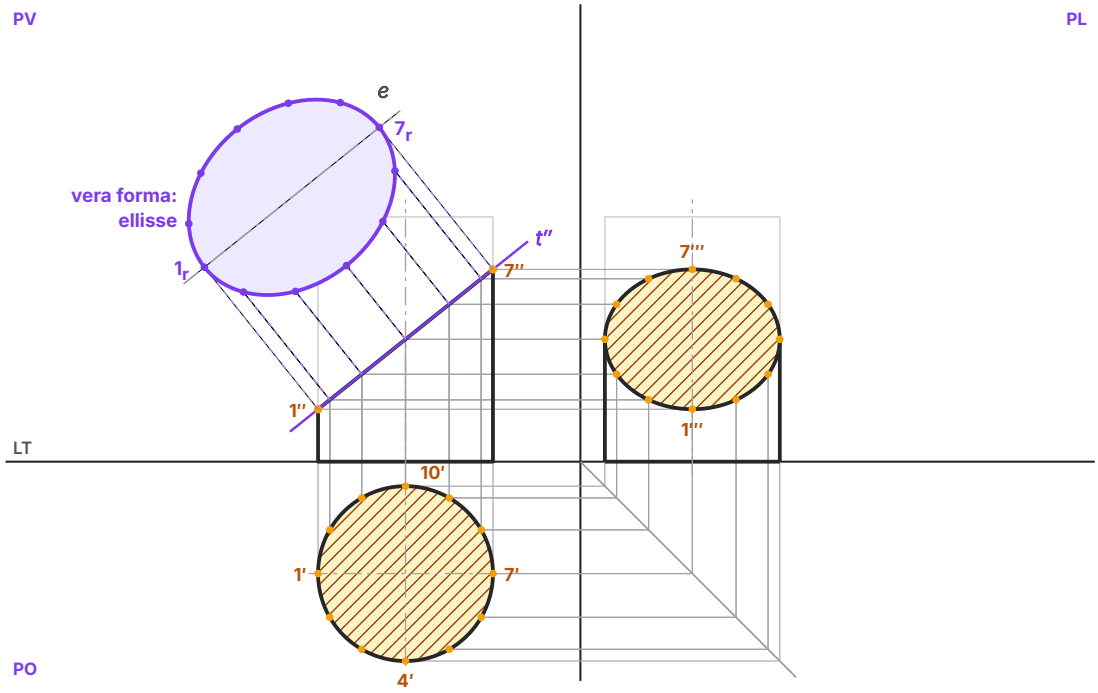


Figura 1.5 Cilindro (raggio 25 mm, altezza 70 mm) tagliato da un piano perpendicolare al PV. 1) In pianta la base è divisa in 12 parti; 2) le generatrici salgono in prospetto e *t″* ne dà le quote; 3) i punti passano in fianco con la retta a 45°; 4) con il piano ausiliario si ottiene la vera forma, un'ellisse con l'asse maggiore di 64,03 mm e l'asse minore di 50 mm, uguale al diametro.

ERRORE FREQUENTE

La sezione di un cilindro con un piano inclinato è un'**ellisse**, non un ovale: va disegnata per punti, almeno 12, e unita con una curva continua che non presenti spigoli né tratti rettilinei. L'ovale costruito con archi di circonferenza (vol. 1, cap. 4) le somiglia, ma non coincide con essa. Due controlli rapidi: l'asse minore della vera forma deve misurare quanto il diametro; i punti 1 e 7, sugli estremi dell'asse maggiore, devono stare sull'asse *e*.

1.5.2 Il cono e le coniche

Il cono è il solido che offre più sorprese. A seconda dell'inclinazione del piano sezionante, la curva di sezione cambia natura (Figura 1.6):

- piano **perpendicolare all'asse**: una **circonferenza**, come abbiamo visto;
- piano inclinato che taglia **tutte le generatrici**: un'**ellisse**, che non è centrata sull'asse del cono;
- piano **parallelo a una generatrice**: una curva aperta, la **parabola**;
- piano più ripido di una generatrice, per esempio **parallelo all'asse**: un'altra curva aperta, l'**iperbole**.

Queste quattro curve si chiamano **coniche**, proprio perché nascono dal taglio di un cono. Nel nostro cono, che ha una base, le due curve aperte sono chiuse in basso dal segmento in cui il piano taglia la base.

L'ellisse del cono si costruisce per punti, come quella del cilindro. Si dividono la base in 12 parti e si disegnano le 12 generatrici in pianta (raggi dal centro ai punti di divisione) e in prospetto (segmenti dai punti della base al vertice). In prospetto t'' taglia le generatrici; i punti scendono in pianta, dove si fermano sulla generatrice corrispondente. Per le due generatrici che in pianta sono perpendicolari alla LT vale l'avvertenza dello spigolo di profilo: i loro punti si trovano con una sezione orizzontale ausiliaria, cioè con il cerchio del cono alla quota del punto. Anzi, questo metodo dei **cerchi orizzontali** funziona per qualunque punto, ed è spesso il più preciso: per ogni quota si traccia in pianta il cerchio di sezione e lo si interseca con la linea di richiamo.

L'asse maggiore dell'ellisse del cono è il tratto di t'' compreso tra le generatrici di contorno; l'asse minore, a differenza del cilindro, non è uguale a una misura del solido: passa per il punto medio dell'asse maggiore e si trova con il cerchio orizzontale per quel punto.

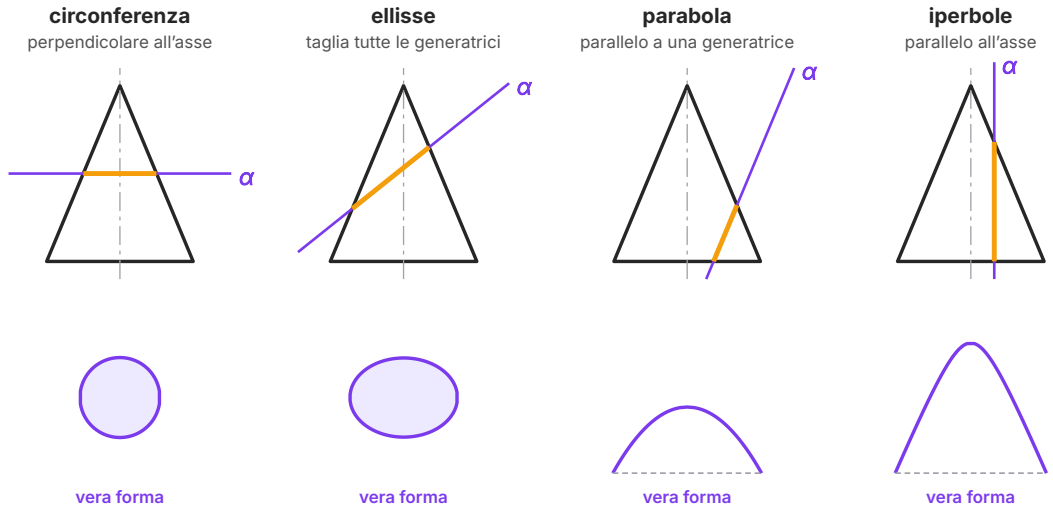


Figura 1.6 Le coniche: quattro piani perpendicolari al PV tagliano lo stesso cono (raggio 25 mm, altezza 60 mm), visto in prospetto. Sotto ogni prospetto, la vera forma della sezione, alla stessa scala per tutti e quattro i casi; nella parabola e nell'iperbole il tratteggio è il segmento staccato sulla base.

APPROFONDIMENTO

Parabola e iperbole. Se il piano è parallelo a una generatrice, la incontra solo «all'infinito»: la sezione non si chiude, e la curva, la parabola, si allarga senza fine se immaginiamo il cono prolungato oltre la base. Se il piano è ancora più ripido, taglia anche il cono opposto, quello che si ottiene prolungando le generatrici oltre il vertice: l'iperbole ha così **due rami**, uno per ciascun cono, e nella nostra figura se ne vede uno solo.

Le coniche furono studiate dai matematici greci: il trattato più famoso è quello di Apollonio di Perga (III–II sec. a.C.), a cui si devono i nomi di ellisse, parabola e iperbole. Le ritroverai in matematica nel secondo biennio, descritte da equazioni nel piano cartesiano, e in fisica: le orbite dei pianeti sono ellissi e un sasso lanciato in aria descrive, se si trascura l'aria, un arco di parabola.

1.5.3 La sfera tagliata da un piano inclinato

Anche con un piano inclinato la sezione di una sfera è un cerchio, ma in pianta si vede come un'ellisse. Con un piano perpendicolare al PV: in prospetto la sezione è il tratto di t'' interno al contorno, e la sua lunghezza è il diametro d del cerchio di sezione; in pianta l'ellisse ha l'**asse maggiore uguale a *d***, perpendicolare alla LT (è il diametro orizzontale perpendicolare al PV, che non si scorcia), e l'**asse minore uguale alla proiezione orizzontale** del tratto di t'', che si misura sul prospetto. Il centro dell'ellisse sta sulla linea di richiamo del punto medio del tratto di t''. La vera forma, con il piano ausiliario, è un cerchio di diametro d.

1.6 Disegnare la sezione: campiture e convenzioni

1.6.1 Che cosa si disegna e che cosa no

Una tavola di sezioni contiene molte linee: le viste del solido intero, la traccia, le linee di richiamo, le perpendicolari del piano ausiliario. Perché il risultato sia leggibile, in questo libro seguiamo una scelta precisa, che vale per tutte le figure e per tutte le tavole degli esercizi:

- si disegna il **solido tronco** con linea continua grossa, e la sua **faccia tagliata** si **campisce** in ogni vista in cui è visibile;
- la **parte asportata si omette**: durante la costruzione la si traccia con un tratto sottilissimo, che alla fine non si ripassa (nelle figure del capitolo è grigio chiaro);
- la traccia del piano, le linee di richiamo e le costruzioni della vera forma restano a linea sottile;
- gli spigoli nascosti del tronco si tratteggiano come nel primo volume, ma si omettono quelli che resterebbero dietro la faccia tagliata, per non confondere la campitura.

Una faccia tagliata è visibile in una vista se è rivolta verso l'osservatore di quella vista. Nelle Figura 1.3, Figura 1.4 e Figura 1.5 il piano scende verso sinistra e il tronco sta sotto il piano: la faccia tagliata guarda in alto e a sinistra, e quindi si vede (campita) in pianta e in fianco, perché il fianco rappresenta il solido visto da sinistra. In prospetto il piano è di taglio, e la sezione si riduce a un segmento: lì non c'è nulla da campire.

1.6.2 La campitura

La **campitura** (o tratteggio) è l'insieme di linee che riempie una superficie tagliata e la distingue a colpo d'occhio dalle superfici esterne. Le norme UNI EN ISO della serie 128 sul disegno tecnico ne fissano le regole essenziali (Figura 1.7):

- linee **continue fini**, parallele, a **passo costante**, scelto in proporzione alla grandezza della superficie;
- inclinate preferibilmente a **45°** rispetto al contorno principale o all'asse di simmetria della sezione;
- le diverse superfici tagliate di **uno stesso pezzo** hanno tutte la stessa campitura;
- **pezzi diversi a contatto** si distinguono cambiando il verso delle linee o, se i pezzi sono più di due, anche il passo;
- le sezioni **molto sottili** (lamiere, profilati) si possono annerire del tutto; le superfici molto grandi si possono campire solo lungo il contorno.

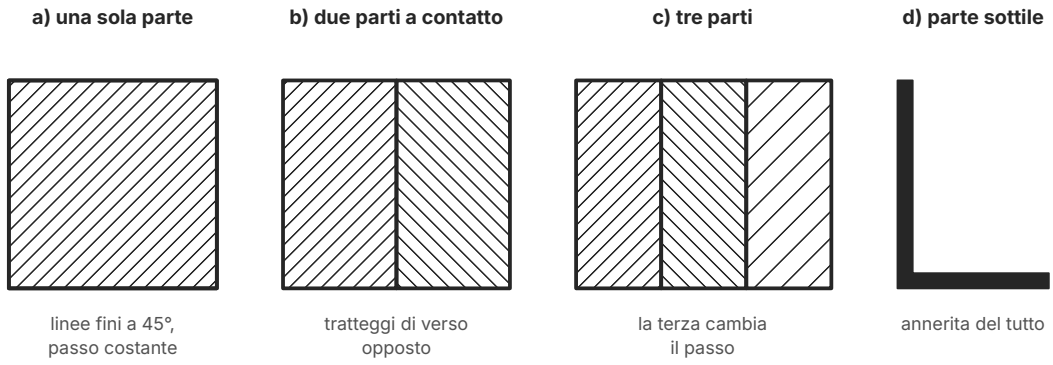


Figura 1.7 Le convenzioni della campitura. a) Una sola superficie tagliata: linee fini a 45°, a passo costante. b) Due pezzi a contatto: tratteggi di verso opposto. c) Tre pezzi: il terzo cambia anche il passo. d) Una sezione molto sottile si annerisce.

In architettura le stesse regole si applicano ai muri tagliati di piante e sezioni; spesso però si preferisce campire i muri con un colore pieno o con simboli che indicano il materiale. Ne parleremo nel prossimo capitolo, insieme alla linea di sezione che indica dove passa il piano.

COLLEGAMENTI

Sezioni ovunque. Una TAC (tomografia assiale computerizzata) produce una serie di immagini, ognuna delle quali è la sezione del corpo con un piano: il medico ricostruisce gli organi nello spazio mettendo in fila le sezioni, proprio come facciamo noi con le viste. Il geologo che estrae una carota cilindrica dal terreno legge gli strati di roccia sulla sua superficie e sulle sue sezioni. E quando tagli una torta a strati, la fetta mostra sulla faccia tagliata una sezione verticale, con gli strati in vera forma.

Matematica. Le sezioni orizzontali di piramidi e coni sono un'applicazione del teorema di Talete e della similitudine; la vera grandezza dei segmenti inclinati si controlla con il teorema di Pitagora. L'ellisse, la parabola e l'iperbole che qui hai disegnato per punti saranno studiate in geometria analitica nel secondo biennio.

1.6.3 Ordine di lavoro sul foglio

1. Imposta il foglio (LT, asse, retta a 45°) e disegna con tratto leggero le tre viste del solido intero.
2. Traccia il piano nella vista in cui è di taglio e numera i punti della sezione.
3. Trova i punti nelle altre due viste con le linee di richiamo e uniscili.

4. Scegli una zona libera per la vera forma, traccia l'asse e e costruiscila.
5. Ripassa con linea grossa il solido tronco e il contorno delle sezioni; campisci le facce tagliate visibili e la vera forma (o colorala tenuemente, se l'insegnante lo preferisce).
6. Scrivi le lettere e i numeri dei punti, piccoli e vicini ai punti, senza toccare le linee.

SINTESI

- Tagliare un solido con un **piano sezionante** mette allo scoperto la **figura di sezione**; il solido si divide nel **solido tronco**, che si conserva, e nella **parte asportata**, che nelle tavole si omette.
- La sezione di un poliedro convesso è un **poligono** i cui vertici sono le intersezioni del piano con gli spigoli; quella di un solido di rotazione è delimitata da una **curva**, costruita per punti con le generatrici.
- La **traccia** di un piano è la retta in cui incontra un piano di proiezione (t', t'', t'''). Un **piano proiettante** si vede di taglio, come una retta, nella vista a cui è perpendicolare: la costruzione parte sempre da lì.
- Un piano parallelo a un piano di proiezione dà la sezione in **vera forma** in quella vista: uguale alla base nel prisma e nel cilindro, simile alla base nella piramide e nel cono (rapporto $(H - h) : H$, teorema di Talete), un cerchio nella sfera.
- Il raggio della sezione di una sfera si legge sul prospetto: è metà del tratto della traccia interno al contorno.
- Con un piano perpendicolare al PV: punti su t'' in prospetto, linee di richiamo verso la pianta, retta a 45° verso il fianco, unione nell'ordine delle facce.
- La vera forma si trova con il **piano ausiliario**: asse e parallelo a t'', perpendicolari a t'', aggetti misurati dall'asse di simmetria. Il ribaltamento sul PO attorno a t' è equivalente ma sovrappone le figure.
- Nelle piramidi i punti cadono sugli spigoli laterali; uno spigolo di profilo si risolve con il fianco o con una sezione orizzontale ausiliaria.
- Il cilindro tagliato da un piano inclinato dà un'**ellisse** (non un ovale) con l'asse minore uguale al diametro; il cono dà, secondo l'inclinazione, circonferenza, ellisse, parabola o iperbole: le **coniche**.
- La faccia tagliata si **campisce** con linee continue fini a 45°, a passo costante; pezzi diversi a contatto hanno tratteggi di verso o passo diverso; le sezioni sottili si anneriscono.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La figura di sezione di un prisma tagliato da un piano è:
   - **A.** una curva chiusa
   - **B.** un poligono i cui vertici sono le intersezioni del piano con gli spigoli
   - **C.** sempre un triangolo
   - **D.** un poligono con tanti lati quante sono le facce del prisma

2. ● Un piano perpendicolare al PV si proietta sul PV come:
   - **A.** una retta, la sua traccia t''
   - **B.** una figura in vera forma
   - **C.** un punto
   - **D.** una retta parallela alla LT, sempre

3. ● Un piano parallelo alla base taglia una piramide. La sezione è:
   - **A.** uguale alla base
   - **B.** un triangolo
   - **C.** simile alla base e più piccola
   - **D.** un trapezio

4. ● Un piano inclinato che taglia tutte le generatrici di un cilindro dà un'ellisse il cui asse minore è:
   - **A.** uguale all'altezza del cilindro
   - **B.** uguale al raggio
   - **C.** il tratto della traccia interno al cilindro
   - **D.** uguale al diametro del cilindro

5. ● Un piano parallelo a una generatrice di un cono dà come sezione:
   - **A.** un'ellisse
   - **B.** un'iperbole
   - **C.** una parabola
   - **D.** un triangolo

6. ● Qualunque piano tagli una sfera, la figura di sezione è:
   - **A.** un cerchio
   - **B.** un'ellisse, se il piano è inclinato
   - **C.** un cerchio uguale al cerchio massimo
   - **D.** una parabola

7. ● In questo libro, la vera forma di una sezione con un piano perpendicolare al PV si costruisce:
   A. in pianta, dove è sempre in vera forma
   B. in fianco, con la retta a 45°
   C. misurando le quote in prospetto
   D. con un piano ausiliario parallelo al piano sezionante

8. ● La superficie tagliata di un pezzo si campisce con:
   A. linee grosse a tratto e punto
   B. linee continue fini, parallele, di solito a 45°
   C. linee tratteggiate perpendicolari al contorno
   D. un colore diverso per ogni vista

9. ●● Un piano frontale (parallelo al PV) taglia un solido. In quale vista la sezione è in vera forma?
   A. in prospetto
   B. in pianta
   C. in fianco
   D. in nessuna vista

Lessico e norme

10. ● Completa: il piano che taglia il solido si chiama _____ ; la figura comune al solido e al piano è la _____ ; la parte del solido che si conserva è il _____ ; quella che si elimina è la _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) La sezione di una piramide con un piano parallelo alla base è uguale alla base. b) Un piano perpendicolare al PV si vede in prospetto come una retta. c) Un cilindro tagliato da un piano inclinato dà un ovale. d) Una sezione con un piano orizzontale è in vera forma in pianta. e) Nelle tavole di questo libro la parte asportata si disegna con linea grossa tratteggiata. f) Ogni sezione piana di una sfera è un cerchio.

12. ● Abbina il solido e il piano alla figura di sezione. a) Cubo, piano parallelo a una faccia; b) cilindro, piano parallelo all'asse che taglia le due basi; c) cono, piano che passa per il vertice e taglia la base; d) cono, piano parallelo a una generatrice; e) cono, piano perpendicolare all'asse; f) prisma esagonale regolare, piano perpendicolare agli spigoli laterali. Figure: 1) triangolo isoscele; 2) rettangolo; 3) quadrato; 4) parabola; 5) cerchio; 6) esagono regolare.

13. ● Spiega che cosa indicano, in una tavola di sezioni, i simboli: t', t'', t''', α, 3′, 3″, 3‴, 3_r, e.

14. ● Completa: le superfici tagliate si campiscono con linee _____ e _____ , di solito inclinate a _____ rispetto al contorno principale, con passo _____ . Due pezzi diversi a contatto si distinguono con tratteggi di _____ diverso; le parti molto sottili si possono _____ .

15. ●● Spiega con parole tue perché la costruzione di una sezione con un piano perpendicolare al PV comincia sempre dal prospetto, e che cosa cambia se il piano è perpendicolare al PO.

Costruire

Per le tavole usa un foglio A4 squadrato in verticale, con la LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice e l'asse verticale a 120 mm dal bordo sinistro; le coordinate dei punti sono (x; y; z) in mm, come nel testo. In ogni tavola disegna le tre viste del solido tronco con la faccia tagliata campita e, se richiesta, la vera forma con il piano ausiliario.

16. ● **Prisma, sezione orizzontale.** Prisma retto a base quadrata, lato 40 mm, altezza 70 mm, base sul PO, centro della base in (70; 40; 0), lati paralleli e perpendicolari alla LT. Taglialo con il piano orizzontale alla quota 30 mm e disegna le tre viste del tronco inferiore.

17. ● **Piramide, sezione orizzontale.** Piramide retta a base quadrata, lato 60 mm, altezza 75 mm, centro della base in (65; 40; 0), lati paralleli e perpendicolari alla LT. Piano orizzontale alla quota 30 mm. Disegna pianta e prospetto del tronco di piramide e calcola il lato della sezione per controllo.

18. ● **Cono, sezione orizzontale.** Cono retto di raggio 30 mm e altezza 72 mm, centro della base in (70; 40; 0). Piano orizzontale alla quota 24 mm. Disegna pianta e prospetto del tronco di cono e controlla il raggio della sezione.

19. ●● **Sfera, sezione orizzontale.** Sfera di raggio 30 mm appoggiata sul PO, con il centro in (65; 40; 30). Piano orizzontale alla quota 48 mm. Trova graficamente il raggio del cerchio di sezione e disegnalo in pianta.

20. ●● **Prisma quadrato e piano inclinato.** Lo stesso prisma dell'esercizio 16. Il piano α è perpendicolare al PV e taglia gli spigoli di sinistra alla quota 20 mm e quelli di destra alla quota 50 mm. Trova la sezione nelle tre viste e la sua vera forma.

21. ●● **Prisma esagonale e piano inclinato.** Prisma retto a base esagonale regolare, lato 25 mm, altezza 70 mm, base sul PO, centro della base in (70; 40; 0), due vertici opposti su una parallela alla LT. α è perpendicolare al PV e taglia lo spigolo del vertice di sinistra alla quota 15 mm e quello del vertice di destra alla quota 55 mm. Trova la sezione nelle tre viste e la vera forma; misura i lati della vera forma.

22. ●● **Piramide quadrata e piano inclinato.** Piramide retta a base quadrata, lato 60 mm, altezza 90 mm, centro della base in (60; 40; 0), lati paralleli e perpendicolari alla LT. α è perpendicolare al PV e taglia gli spigoli di sinistra alla quota 18 mm e quelli di destra alla quota 54 mm. Trova la sezione e la vera forma.

23. ●● **Cilindro e piano inclinato.** Cilindro di raggio 25 mm e altezza 70 mm, centro della base in (70; 40; 0). α è perpendicolare al PV e taglia la generatrice di contorno sinistra alla quota 20 mm e quella destra alla quota 50 mm. Costruisci per punti (12 generatrici) la sezione in fianco e la vera forma.

24. ●●● **Il caso simmetrico.** Prisma retto a base quadrata, lato 40 mm, altezza 60 mm, centro della base in (70; 40; 0), lati paralleli e perpendicolari alla LT. Il piano α è perpendicolare al PO; la sua traccia *t'* passa per il punto del lato anteriore della base a 10 mm dallo spigolo di sinistra e per il punto del lato destro della base a 10 mm dallo spigolo posteriore. Trova la sezione nelle tre viste e la vera forma, conservando la parte del prisma che contiene lo spigolo anteriore destro.

25. ●●● **Cono e ellisse.** Cono retto di raggio 30 mm e altezza 80 mm, centro della base in (70; 40; 0). α è perpendicolare al PV e taglia la generatrice di contorno sinistra alla quota 16 mm e quella destra alla quota 48 mm. Costruisci la sezione per punti in pianta e in fianco e trova la vera forma; calcola gli assi dell'ellisse per controllo.

Leggere il disegno

26. ●● **Che solido? Che sezione?** Riconosci il solido e il piano dalle viste (pianta; prospetto; fianco). a) Cerchio campito; rettangolo il cui lato superiore è sostituito da un segmento inclinato; rettangolo la cui parte alta è occupata da un'ellisse campita. b) Quadrato con le diagonali e un quadrato più piccolo concentrico, campito; trapezio isoscele; trapezio isoscele. c) Due cerchi concentrici, l'interno campito; trapezio isoscele; trapezio isoscele. d) Cerchio con un cerchio concentrico campito; cerchio tagliato da una corda orizzontale, senza la parte superiore; lo stesso del prospetto.

27. ●● **Trova gli errori.** Un compagno ha costruito la sezione del cilindro della Figura 1.5 e ha commesso questi errori: a) ha campito la sezione anche in prospetto; b) in fianco ha disegnato un'ellisse con l'asse orizzontale di 40 mm; c) nella vera forma ha riportato sulle perpendicolari a *t''* le quote dei punti invece degli aggetti; d) ha disegnato la vera forma come un ovale a quattro centri. Spiega ogni errore.

28. ●● **Quanti lati?** Prisma esagonale regolare, lato 20 mm, altezza 60 mm, due vertici opposti su una parallela alla LT. α è perpendicolare al PV, taglia lo spigolo del vertice di sinistra alla quota 30 mm e sale verso destra di 1,5 mm per ogni millimetro. Quanti lati ha la sezione e dove stanno i suoi vertici?

29. ●● **Misurare sulla figura.** Nella Figura 1.5 il cilindro ha raggio 25 mm e *t''* taglia le generatrici di contorno alle quote 15 e 55 mm. a) Quanto misura l'asse maggiore della vera forma? b) Perché l'asse minore misura 50 mm? c) Che misure hanno gli assi dell'ellisse in fianco?

30. ●●● **Un quadrato che non è un quadrato.** Una sezione appare in pianta come un quadrato di lato 40 mm e in fianco come un quadrato di lato 40 mm; in prospetto è un segmento. Che forma ha nello spazio? Disegnala in vera forma.

Verso la verifica

31. ●●● **Piramide esagonale.** Piramide retta a base esagonale regolare, lato 25 mm, altezza 75 mm, centro della base in (70; 45; 0), due vertici opposti della base su una parallela alla LT. α è perpendicolare al PV, taglia lo spigolo del vertice di sinistra alla quota 15 mm e quello del vertice di destra alla quota 45 mm. Trova i sei punti della sezione nelle tre viste, la vera forma e le misure principali.

32. ●●● **Sfera e piano inclinato.** Sfera di raggio 30 mm con il centro in (65; 40; 30). α è perpendicolare al PV; la sua traccia t'' passa per il punto più alto della sfera e per il punto del contorno del prospetto a quota 21,6 mm, a sinistra del centro. Trova il diametro del cerchio di sezione, disegna la sua proiezione in pianta e la vera forma.

33. ●●● **Rispondi in 10–15 righe.** Spiega perché la vera forma di una sezione non compare in nessuna vista quando il piano è inclinato su due piani di proiezione, e confronta i due metodi per trovarla (ribaltamento sul PO e piano ausiliario). Aiutati con uno schizzo a mano libera.

PER APPROFONDIRE

- [CHO] A. Choisy, *Histoire de l'architecture*: le sue celebri tavole mostrano gli edifici con assonometrie «tagliate», che riuniscono in un solo disegno pianta, sezione e alzato. Le ritroverai nella parte sull'assonometria.

Glossario del capitolo

Asse maggiore, asse minore
I due assi di simmetria dell'ellisse, il più lungo e il più corto; nel cilindro l'asse minore è uguale al diametro.

Campitura
Insieme di linee continue fini e parallele, di solito a 45°, che riempie una superficie tagliata.

Coniche
Le curve che nascono dalle sezioni piane di un cono: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.

Ellisse
Curva chiusa che si ottiene tagliando un cilindro o un cono con un piano inclinato che ne taglia tutte le generatrici.

Figura di sezione
Figura piana comune al solido e al piano sezionante: la faccia che il taglio mette allo scoperto.

Generatrice
Ciascuna delle rette che, ruotando attorno all'asse, descrivono la superficie laterale di un cilindro o di un cono.

Iperbole
Curva aperta a due rami che si ottiene tagliando il doppio cono con un piano più ripido delle generatrici.

Parabola
Curva aperta che si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo a una sua generatrice.

Parte asportata
La parte del solido tagliato che si elimina; nelle tavole di questo libro si omette.

Piano ausiliario
Piano parallelo al piano sezionante, ribaltato sul piano di proiezione, su cui si costruisce la vera forma della sezione.

Piano orizzontale, frontale, di profilo
Piani paralleli rispettivamente al PO, al PV e al PL.

Piano proiettante
Piano perpendicolare a un piano di proiezione: su di esso si proietta come una retta, la sua traccia.

Piano sezionante
Il piano (detto anche secante) che taglia il solido; si indica con una lettera greca minuscola.

Rapporto di similitudine
Rapporto costante tra le misure corrispondenti di due figure simili; nella sezione di una piramide vale $(H - h) : H$.

Ribaltamento
Rotazione di un piano attorno a una sua retta fino a farlo coincidere con un piano di proiezione.

Sezione
Operazione con cui si taglia un solido con un piano; anche il risultato del taglio.

Solido tronco
La parte del solido tagliato che si conserva e si rappresenta.

Traccia di un piano
Retta in cui un piano incontra un piano di proiezione: t' sul PO, t'' sul PV, t''' sul PL.

Vera forma
La forma reale di una figura piana, visibile solo su un piano parallelo a essa.

Soluzioni

1. B. Il piano taglia le facce lungo segmenti, che sono i lati; i vertici sono le intersezioni con gli spigoli. Il numero dei lati non supera quello delle facce tagliate.

2. A. Il piano è proiettante rispetto al PV: tutti i suoi punti si proiettano sulla sua traccia. È parallela alla LT solo se il piano è orizzontale.

3. C. Per il teorema di Talete i lati si riducono tutti nello stesso rapporto $(H - h) : H$.

4. D. L'asse minore è il segmento orizzontale perpendicolare al PV che attraversa l'asse del cilindro: un diametro.

5. C. Piano parallelo a una generatrice: parabola; più ripido: iperbole; meno ripido: ellisse.

6. A. È sempre un cerchio; appare come ellisse solo nelle viste a cui il piano è inclinato, ed è uguale al cerchio massimo solo se il piano passa per il centro.

7. D. Il piano ausiliario, parallelo ad α e ribaltato sul PV, mostra la sezione in vera forma senza sovrapporla alla pianta.

8. B. Linee continue fini, parallele e a passo costante, preferibilmente a 45° rispetto al contorno principale.

9. A. Il piano frontale è parallelo al PV: la sezione si vede in vera forma in prospetto e come segmento nelle altre viste.

10. Piano sezionante (o secante); figura di sezione; solido tronco; parte asportata.

11. a) F: è **simile** alla base e più piccola, nel rapporto $(H - h) : H$. b) V: è la sua traccia t''. c) F: è un'**ellisse**, costruita per punti. d) V. e) F: la parte asportata si **omette**; si traccia solo, con tratto sottilissimo, durante la costruzione. f) V.

12. a-3; b-2; c-1; d-4; e-5; f-6.

13. t', t'', t''': tracce del piano sezionante sul PO, sul PV e sul PL; α: il piano sezionante; $3'$, $3''$, $3'''$: le proiezioni del punto 3 della sezione in pianta, in prospetto e in fianco; 3_r: il punto 3 ribaltato, cioè nella vera forma; e: l'asse, parallelo alla traccia, da cui si misurano le distanze nella costruzione della vera forma con il piano ausiliario.

14. Continue, fini; 45°; costante; verso (o passo); annerire.

15. Traccia di risposta: il piano è perpendicolare al PV, quindi in prospetto si vede di taglio come una retta, la traccia t'', e tutti i punti della sezione stanno su di essa: basta intersecarla con gli spigoli o le generatrici. Nelle altre viste la sezione è una superficie e i suoi punti si possono trovare solo per richiamo dal prospetto. Se il piano è perpendicolare al PO, si vede di taglio in pianta (t') e la costruzione comincia dalla pianta.

16. Pianta: quadrato di lato 40 mm (x da 50 a 90, aggetti da 20 a 60), interamente campito: la faccia tagliata, vista dall'alto, coincide con il contorno della base. Prospetto e fianco: rettangoli 40 × 30 mm; la sezione è il lato superiore, a quota 30.

17. Lato della sezione: $60 \cdot (75 - 30) : 75 = 60 \cdot 3/5 = 36$ mm. Pianta: quadrato di base 60 mm con le diagonali (spigoli laterali) e, concentrico, il quadrato di sezione di 36 mm (campito), con i vertici sulle diagonali. Prospetto: trapezio isoscele con le basi di 60 e 36 mm e l'altezza di 30 mm.

18. Raggio della sezione: $30 \cdot (72 - 24) : 72 = 30 \cdot 2/3 = 20$ mm. Pianta: cerchi concentrici di raggio 30 e 20 mm, il secondo campito. Prospetto: trapezio isoscele con le basi di 60 e 40 mm, alto 24 mm.

19. In prospetto la sfera è un cerchio di raggio 30 mm con il centro a quota 30; la traccia a quota 48 dista 18 mm dal centro e il tratto interno al contorno misura 48 mm: raggio della sezione 24 mm (controllo: $\sqrt{(30^2 - 18^2)} = \sqrt{576} = 24$). Pianta: cerchio di raggio 24 mm, concentrico al contorno della sfera (raggio 30), campito.

20. In prospetto t'' va dal punto di ascissa $x = 90$ a quota 20 al punto di ascissa $x = 50$ a quota 50: i punti 1″(4″) sugli spigoli di sinistra, 2″(3″) su quelli di destra. Pianta: il quadrato di base, campito. Fianco: il rettangolo 40 × 30 mm tra le quote 20 e 50, campito. Vera forma: rettangolo di $40 \times \sqrt{(40^2 + 30^2)} = 40 \times 50$ mm.

21. Quote dei punti: lo spigolo di sinistra 15 mm, quelli a 12,5 mm dal vertice di sinistra (in x) 25 mm, quelli a 37,5 mm 45 mm, lo spigolo di destra 55 mm (la quota sale di 40 mm su 50 mm, cioè di 0,8 mm per ogni mm). Asse maggiore della vera forma $\sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64{,}03$ mm; larghezza $25 \cdot \sqrt{3} \approx 43{,}30$ mm. Posizioni dei vertici lungo l'asse e: 0; 16,01; 48,02; 64,03 mm, con i vertici intermedi a ± 21,65 mm da e. Lati della vera forma: quattro di $\sqrt{(16{,}01^2 + 21{,}65^2)} \approx 26{,}93$ mm e due, paralleli a e, di 32,02 mm. In fianco la sezione è un esagono largo 43,30 mm tra le quote 15 e 55 mm.

22. A quota 18 mm gli spigoli sono ridotti nel rapporto 72/90 = 4/5: i punti 1 e 4 distano 24 mm dall'asse in entrambe le direzioni (base maggiore della sezione 48 mm); a quota 54 mm il rapporto è 36/90 = 2/5: i punti 2 e 3 distano 12 mm (base minore 24 mm). In pianta la sezione è un trapezio con le basi di 48 e 24 mm, distanti 36 mm. Vera forma: trapezio isoscele con le basi di 48 e 24 mm e l'altezza $\sqrt{(36^2 + 36^2)} \approx 50{,}91$ mm; lati obliqui ≈ 52,31 mm.

23. Asse maggiore della vera forma $\sqrt{(50^2 + 30^2)} \approx 58{,}31$ mm; asse minore 50 mm (il diametro). In fianco: ellisse con l'asse orizzontale di 50 mm e quello verticale di 30 mm (tra le quote 20 e 50), centro a quota 35. In pianta la sezione coincide con il cerchio di base, campito.

24. In pianta il quadrato va da $x = 50$ a 90 e dall'aggetto 20 al 60; t' passa per (80; 60) e (50; 30). Il tratto di t' interno al quadrato misura $\sqrt{(30^2 + 30^2)} \approx 42{,}43$ mm. Sezione: rettangolo verticale alto 60 mm. In prospetto appare largo 30 mm (da $x = 50$ a 80), in fianco largo 30 mm (dall'aggetto 30 al 60); vera forma 42,43 × 60 mm, costruita con l'asse e parallelo a t' e le quote riportate sulle perpendicolari. Il tronco conservato è il prisma triangolare con lo spigolo anteriore destro. La sua faccia tagliata è rivolta all'indietro e a sinistra: si vede campita in fianco (il fianco guarda il solido da sinistra), mentre in prospetto è nascosta dalla faccia anteriore e in pianta è di taglio.

25. Con il centro della base come origine: il punto sinistro di t'' sta a $30 \cdot (1 - 16/80) = 24$ mm a sinistra dell'asse, quello destro a $30 \cdot (1 - 48/80) = 12$ mm a destra. Asse maggiore $\sqrt{(36^2 + 32^2)} \approx 48{,}17$ mm. Il punto medio dell'asse maggiore è 6 mm a sinistra dell'asse del cono, a quota 32; il cerchio orizzontale a quella quota ha raggio $30 \cdot (1 - 32/80) = 18$ mm, e la corda a 6 mm dal centro misura $2 \cdot \sqrt{(18^2 - 6^2)} \approx 33{,}94$ mm: è l'asse minore. In pianta l'ellisse ha gli assi di 36 mm (parallelo alla LT) e 33,94 mm, ed è centrata 6 mm a sinistra del centro della base; in fianco gli assi sono 33,94 mm (orizzontale) e 32 mm (verticale).

26. a) Cilindro tagliato da un piano perpendicolare al PV e inclinato sul PO: la sezione è un'ellisse. b) Piramide quadrata tagliata da un piano orizzontale: tronco di piramide, sezione quadrata simile alla base. c) Cono tagliato da un piano orizzontale: tronco di cono, sezione circolare. d) Sfera tagliata da un piano orizzontale: si conserva la parte inferiore; la sezione è un cerchio, in vera forma in pianta.

27. a) In prospetto il piano è di taglio: la sezione è un segmento e non c'è superficie da campire. b) In fianco l'asse orizzontale è il diametro, 50 mm; è l'asse verticale a misurare 40 mm (55 − 15). c) Sulle perpendicolari a t'' vanno gli aggetti, misurati dall'asse di simmetria della pianta: le quote sono già contenute nella posizione dei punti lungo t''. d) La sezione è un'ellisse, da costruire per punti; l'ovale è un'approssimazione fatta di archi di circonferenza.

28. Con l'origine sul vertice di sinistra, gli spigoli stanno a 0, 10 (due spigoli), 30 (due) e 40 mm verso destra. La quota di α è 30 mm sul primo, 45 mm sui due a 10 mm, 75 mm sui due a 30 mm: questi ultimi non sono tagliati (il prisma è alto 60 mm). α esce dalla base superiore dove la sua quota vale 60, cioè a 20 mm dal vertice di sinistra, esattamente sopra il centro, e la taglia lungo un segmento che unisce i punti medi dei due lati paralleli alla LT. La sezione è un **pentagono**: tre vertici sugli spigoli laterali (uno

a quota 30, due a quota 45) e due sugli spigoli della base superiore.

29. a) $\sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64{,}03$ mm. b) L'asse minore è il segmento di α orizzontale e perpendicolare al PV che passa per l'asse del cilindro: è un diametro, 50 mm. c) 50 mm (orizzontale) e 40 mm (verticale).

30. La pianta dà le misure vere in x e in y, il fianco quelle in y e in z: la sezione si estende per 40 mm in larghezza, 40 mm in profondità e 40 mm in altezza. Il piano è perpendicolare al PV e inclinato di 45° (sale di 40 mm su 40 mm). Nello spazio è un **rettangolo** di $40 \times \sqrt{(40^2 + 40^2)} \approx 40 \times 56{,}57$ mm, non un quadrato: la sua vera forma si ottiene con il piano ausiliario.

31. Con l'origine sull'asse e x verso destra in prospetto, lo spigolo del vertice di sinistra è tagliato in $x = -20$ mm (quota 15) e quello di destra in $x = +10$ mm (quota 45): t'' sale di 1 mm per mm. Gli altri due spigoli visibili in prospetto (ciascuno è una coppia) sono tagliati a quota 27 mm in $x = -8$ mm e a quota $\approx$ 40,71 mm in $x \approx 5{,}71$ mm (si trovano sul disegno; il controllo con Talete richiede di risolvere una semplice equazione). In pianta i punti delle coppie distano dall'asse di simmetria ± 13,86 mm e ± 9,90 mm. Vera forma: esagono simmetrico rispetto all'asse e, con i vertici a 0; 16,97; 36,37; 42,43 mm lungo e (sono le distanze in x moltiplicate per $\sqrt{2}$) e larghezze 0; 27,71; 19,80; 0 mm.

32. In prospetto la sfera è un cerchio di raggio 30 mm, centro a quota 30. Il punto più alto è (65; 60) e il punto del contorno a quota 21,6 mm sta 28,8 mm a sinistra del centro ($30^2 - 8{,}4^2 = 28{,}8^2$): il tratto di t'' tra i due punti misura $\sqrt{(28{,}8^2 + 38{,}4^2)} = 48$ mm, ed è il diametro del cerchio di sezione (controllo: il piano dista 18 mm dal centro e $\sqrt{(30^2 - 18^2)} = 24$). Pianta: ellisse con l'asse maggiore di 48 mm perpendicolare alla LT e l'asse minore di 28,8 mm, centrata nel punto $x = 79{,}4$ mm, aggetto 40 mm. Vera forma: cerchio di diametro 48 mm.

33. Traccia di risposta: un piano perpendicolare al PV e inclinato sul PO non è parallelo a nessun piano di proiezione; in prospetto si vede di taglio, in pianta e in fianco la figura è scorciata nella direzione della pendenza. Il ribaltamento sul PO fa ruotare il piano attorno a t' fino a farlo coincidere con il PO: le misure lungo t'' diventano parallele alla LT, gli aggetti restano; il difetto è che la vera forma si sovrappone alla pianta. Il piano ausiliario usa le stesse due misure (distanze lungo t'' e aggetti), ma su un asse e parallelo a t'' in una zona libera del foglio. Se il piano fosse inclinato su tutti e tre i piani, servirebbe prima un cambio di piano per renderlo proiettante.