CAPITOLO

6

Proiezioni ortogonali dei solidi

Un solido non si vede mai tutto in una volta: tre viste ben ordinate lo descrivono meglio di mille fotografie.

OBIETTIVI

1. Riconoscere poliedri e solidi di rotazione e nominarne gli elementi: base, faccia, spigolo, vertice, altezza, apotema, generatrice, asse.
2. Disegnare le tre viste di prismi e piramidi con la base parallela al PO, al PV o al PL.
3. Rappresentare un solido inclinato sul PO con il metodo della rotazione, partendo dalla posizione fondamentale.
4. Proiettare cilindro, cono e sfera, anche con l'asse inclinato, costruendo per punti le ellissi delle basi.
5. Distinguere spigoli in vista e nascosti in solidi semplici, in gruppi di solidi e in solidi forati.
6. Leggere pianta, prospetto e fianco di semplici volumi architettonici.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 I solidi e i loro elementi 2
6.2 Prismi e piramidi in posizione fondamentale 4
6.3 Solidi inclinati: il metodo della rotazione 9
6.4 Cilindro, cono e sfera 11
6.5 Visibilità, gruppi di solidi e solidi forati 14
6.6 Dal solido all'architettura 17

Disegno e Storia dell'arte 1 · Parte II · Le proiezioni ortogonali · versione 1.0
Capitolo 6: Proiezioni ortogonali dei solidi · pagine 157–180 del volume completo · estratto per lo studio

Prendi in mano una matita esagonale, una scatola di scarpe, un cono da gelato, una pallina da ping-pong. Sono oggetti a tre dimensioni: puoi girarli, guardarli dall'alto e di lato, toccarne gli spigoli. Come si fa a descriverli su un foglio, che ha solo due dimensioni, in modo che chiunque possa ricostruirne forma e misure senza ambiguità? Nel cap. 5 hai imparato il metodo delle proiezioni ortogonali applicandolo a punti, segmenti e figure piane. In questo capitolo lo usi per il suo scopo vero: rappresentare i **solidi**.

Il passaggio è più naturale di quanto sembri. Un prisma è fatto di vertici, di spigoli (segmenti) e di facce (figure piane): se sai proiettare questi tre elementi, sai proiettare il prisma. Ci saranno però due novità importanti. La prima è la **visibilità**: in un solido alcune parti stanno davanti ad altre, e il disegno deve distinguere ciò che si vede da ciò che resta nascosto. La seconda è la **posizione**: lo stesso solido, appoggiato o inclinato in modi diversi, produce viste molto diverse, e conviene sapere come passare da una posizione all'altra. Alla fine del capitolo userai queste capacità per leggere le piante e gli alzati di edifici veri: piramidi, templi, costruzioni circolari, che incontrerai nella seconda parte del libro.

6.1 I solidi e i loro elementi

6.1.1 Poliedri

Un **solido** geometrico è una parte di spazio delimitata da una superficie chiusa. Se questa superficie è formata soltanto da poligoni, il solido si chiama **poliedro** (dal greco «molte facce»). I poligoni che lo racchiudono sono le **facce**; il segmento in cui si incontrano due facce è uno **spigolo**; il punto in cui si incontrano tre o più spigoli è un **vertice** (figura 6.1).

I due poliedri che userai di più sono il prisma e la piramide.

- Un **prisma** ha due **basi** uguali e parallele, collegate da facce laterali che sono parallelogrammi. Se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi, il prisma è **retto** e le facce laterali sono rettangoli; se in più la base è un poligono regolare, il prisma è **regolare**. Il nome dipende dalla base: prisma triangolare, quadrangolare, esagonale… Il cubo è un prisma quadrangolare regolare con l'altezza uguale al lato di base.
- Una **piramide** ha una sola base poligonale e facce laterali triangolari che convergono in un punto, il **vertice** della piramide. Se la base è un poligono regolare e il piede dell'altezza cade nel suo centro, la piramide è **retta regolare**: le facce laterali sono triangoli isosceli tutti uguali.

L'**altezza** di un prisma è la distanza tra i piani delle due basi; quella di una piramide è la distanza del vertice dal piano della base. In una piramide retta regolare si chiama **apotema** l'altezza di una faccia laterale, cioè il segmento che unisce il vertice al punto medio di un lato di base. At-

tenzione a non confonderlo con l'apotema del poligono di base (cap. 3), che sta nel piano della base: l'apotema della piramide è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti l'altezza della piramide e l'apotema della base.

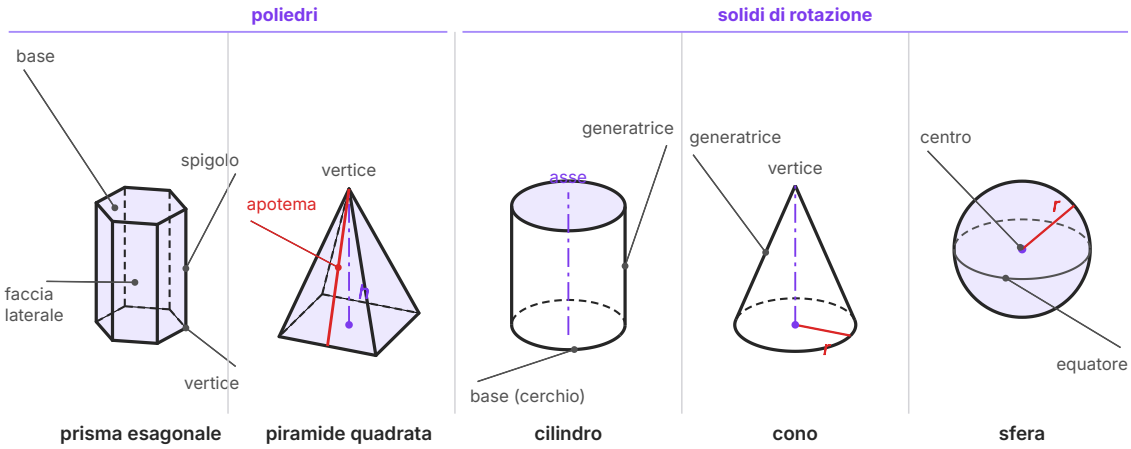

Figura 6.1 I solidi di questo capitolo e i loro elementi. Le linee tratteggiate sono gli spigoli e i contorni nascosti dietro il solido. Queste immagini sono soltanto illustrative: il metodo per disegnare i solidi «in rilievo» (l'assonometria) lo studierai il prossimo anno.

6.1.2 Solidi di rotazione

Un **solido di rotazione** si ottiene facendo ruotare di un giro completo una figura piana attorno a una retta del suo piano, l'**asse**. Ne studieremo tre.

- Il **cilindro** nasce dalla rotazione di un rettangolo attorno a un suo lato. Ha due basi circolari uguali e parallele e una superficie laterale curva. Il lato opposto all'asse, ruotando, descrive la superficie laterale: ogni sua posizione si chiama **generatrice**, ed è un segmento parallelo all'asse e lungo quanto l'altezza.
- Il **cono** nasce dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto. L'altro cateto descrive il cerchio di base; l'ipotenusa descrive la superficie laterale ed è la generatrice g del cono. Per il teorema di Pitagora $g = \sqrt{(r^2 + h^2)}$.
- La **sfera** nasce dalla rotazione di un semicerchio attorno al suo diametro. Tutti i suoi punti hanno la stessa distanza r dal centro. Il cerchio massimo perpendicolare all'asse si chiama **equatore**.

Nei solidi di rotazione non ci sono spigoli laterali: la superficie curva non ha «linee» proprie. Nel disegno ne tracciamo il **contorno apparente**, cioè la linea che separa, per chi guarda, la parte visibile della superficie da quella che gira dietro. Nel cilindro e nel cono il contorno apparente laterale è formato da due generatrici, dette **generatrici di contorno**. L'asse di un solido di rotazione si disegna sempre, con la linea mista fine punto-linea (cap. 1).

APPROFONDIMENTO

I cinque solidi regolari

Un poliedro si dice **regolare** quando ha per facce poligoni regolari tutti uguali e in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce. I poliedri regolari convessi sono soltanto cinque: **tetraedro** (4 triangoli equilateri), **cubo** o esaedro (6 quadrati), **ottaedro** (8 triangoli), **dodecaedro** (12 pentagoni) e **icosaedro** (20 triangoli). Platone, nel dialogo *Timeo*, li associò agli elementi della natura, e per questo si chiamano anche *solidi platonici*; Euclide dedicò alla loro costruzione l'ultimo libro degli *Elementi*, il XIII. Nel Quattrocento Piero della Francesca, pittore e matematico, scrisse un piccolo trattato sui «cinque corpi regolari».

Prova a contare, per ciascuno, vertici (V), spigoli (S) e facce (F): troverai sempre $V - S + F = 2$. È la **relazione di Eulero** (XVIII secolo), valida per ogni poliedro convesso: un ottimo controllo quando conti gli elementi di un disegno.

6.2 Prismi e piramidi in posizione fondamentale

6.2.1 Il principio: si proiettano i vertici

Per proiettare un poliedro non serve un metodo nuovo: si proiettano i suoi **vertici** come punti (cap. 5), poi si uniscono le proiezioni secondo gli spigoli. Se due vertici sono collegati da uno spigolo nello spazio, le loro proiezioni sono collegate in ogni vista. È questo il motivo per cui conviene dare un nome a ogni vertice: le lettere sono il filo che collega pianta, prospetto e fianco.

Useremo le convenzioni del cap. 5: primo diedro e metodo europeo; il punto $P(x; y; z)$ ha distanza x dal PL, aggetto y (distanza dal PV) e quota z (distanza dal PO); le sue proiezioni sono P' in pianta, P'' nel prospetto, P''' nel fianco. Il prospetto sta in alto a sinistra, la pianta sotto di esso, il fianco a destra del prospetto; l'aggetto passa dalla pianta al fianco attraverso la retta a 45°. Nei solidi indicheremo con le maiuscole A, B, C… i vertici della base inferiore e con le minuscole corrispondenti a, b, c… quelli della base superiore.

Un solido si dice in **posizione fondamentale** quando le sue basi sono parallele a uno dei tre piani di proiezione e, possibilmente, alcune facce o spigoli sono paralleli agli altri due. È la posizione più comoda, perché molti elementi compaiono in **vera grandezza** e le viste si costruiscono quasi soltanto con linee di richiamo.

6.2.2 Il prisma con la base sul PO

Consideriamo un prisma esagonale regolare retto, con il lato di base di 25 mm e l'altezza di 60 mm, appoggiato con una base sul PO e disposto con due lati di base paralleli alla LT (figura 6.2). Il ragionamento è sempre lo stesso.

- **Pianta.** La base è parallela al PO, quindi in pianta appare in **vera forma**: un esagono regolare che costruisci con il compasso (cap. 3). La base superiore ha la stessa pianta e la copre esattamente; gli spigoli laterali, perpendicolari al PO, si proiettano ciascuno in un punto (sono segmenti *verticali*, che in pianta si riducono a un punto: cap. 5). In pianta il prisma è dunque soltanto un esagono.
- **Prospetto.** Dai vertici della pianta si alzano le linee di richiamo fino alla LT, dove si trova la base inferiore (quota 0); la base superiore è una parallela alla LT a quota 60 mm. Gli spigoli laterali, verticali e paralleli al PV, compaiono in vera lunghezza. Si ottiene un rettangolo diviso in tre strisce: quella centrale è una faccia parallela al PV, in vera forma (larga 25 mm); le due laterali sono facce inclinate, viste **in scorcio** (larghe 12,5 mm).
- **Fianco.** Gli aggetti dei vertici passano dalla pianta al fianco con la retta a 45°; le quote si portano dal prospetto con orizzontali. Il fianco è un rettangolo largo quanto la distanza tra i due lati paralleli dell'esagono, cioè il doppio dell'apotema: $2 \cdot 21{,}65 \approx 43{,}3$ mm.

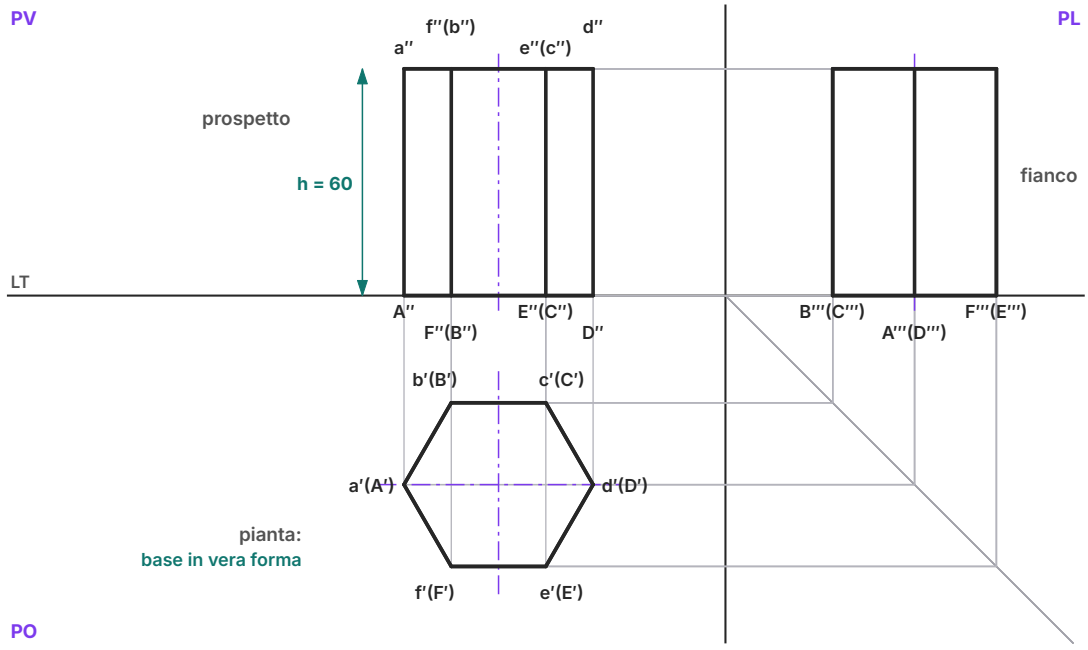

Figura 6.2 Prisma esagonale regolare (lato 25 mm, altezza 60 mm) con la base sul PO. In pianta la base appare in vera forma e la base superiore la copre; quando due vertici hanno la stessa proiezione, la lettera del vertice nascosto si scrive tra parentesi.

Osserva come sono scritte le lettere nella figura. Quando due vertici hanno la stessa proiezione, si scrive per prima la lettera del vertice **visibile** e tra parentesi quella del vertice **nascosto** dietro di esso: in pianta $a'(A')$ significa che il vertice superiore a copre il vertice inferiore A. Nel

prospetto il vertice visibile è quello con l'aggetto maggiore, più vicino all'osservatore; nel fianco è quello con la distanza dal PL maggiore, perché il fianco si guarda da sinistra.

ESEMPIO SVOLTO

Impostare la tavola del prisma esagonale

Dati. Prisma esagonale regolare retto, lato 30 mm, altezza 60 mm, base sul PO, centro della base in (70; 40; 0), due lati paralleli alla LT. Foglio A4 verticale con l'impostazione del cap. 5: LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice, asse verticale a 120 mm dal bordo sinistro.

1. Traccia LT, asse verticale e retta a 45° (linea continua fine). **2.** In pianta segna il centro O' a 70 mm a sinistra dell'asse verticale e a 40 mm sotto la LT; traccia gli assi di simmetria (tratto-punto) e la circonferenza di raggio 30 mm; inscrivi l'esagono con il compasso, con due vertici sull'orizzontale del centro. **3.** Alza le linee di richiamo dai vertici: i vertici sinistro e destro danno i contorni del prospetto, le altre quattro proiezioni coincidono a due a due e danno gli spigoli interni. **4.** Traccia la base superiore a quota 60 mm. **5.** Porta gli aggetti dei vertici sul fianco con la retta a 45°: in pianta i vertici hanno aggetti 40 − 25,98 = 14,02 mm, 40 mm e 40 + 25,98 = 65,98 mm, perché l'apotema dell'esagono è $30 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 25{,}98$ mm. **6.** Ripassa i contorni con linea continua grossa e controlla: prospetto 60 × 60 mm, fianco 51,96 × 60 mm.

Controllo di Eulero. Il prisma esagonale ha 12 vertici, 18 spigoli, 8 facce: 12 − 18 + 8 = 2. In pianta devi trovare 6 vertici visibili (ognuno copre un vertice della base inferiore).

6.2.3 La piramide con la base sul PO

Per la piramide si procede allo stesso modo, ma c'è un punto in più da proiettare: il **vertice** V. In una piramide retta, appoggiata con la base sul PO, V' coincide con il centro della base, e V'' e V''' stanno sulla verticale del centro a quota uguale all'altezza. In pianta gli spigoli laterali appaiono come i segmenti che uniscono il centro ai vertici della base: la pianta di una piramide quadrata è un quadrato con le diagonali (figura 6.3).

Questa volta la base è ruotata: le sue diagonali formano con la LT angoli di 30° e 60° (i lati, quindi, angoli di 15° e 75°). Il risultato è istruttivo: nel prospetto lo spigolo VC, che scende verso il vertice C più lontano dall'osservatore, è nascosto dietro la piramide e si disegna **tratteggiato**; nel fianco è nascosto lo spigolo VB, che va verso il vertice più vicino al PL. Nessuno spigolo laterale, poi, è parallelo al PV o al PL: nessuno compare in vera lunghezza.

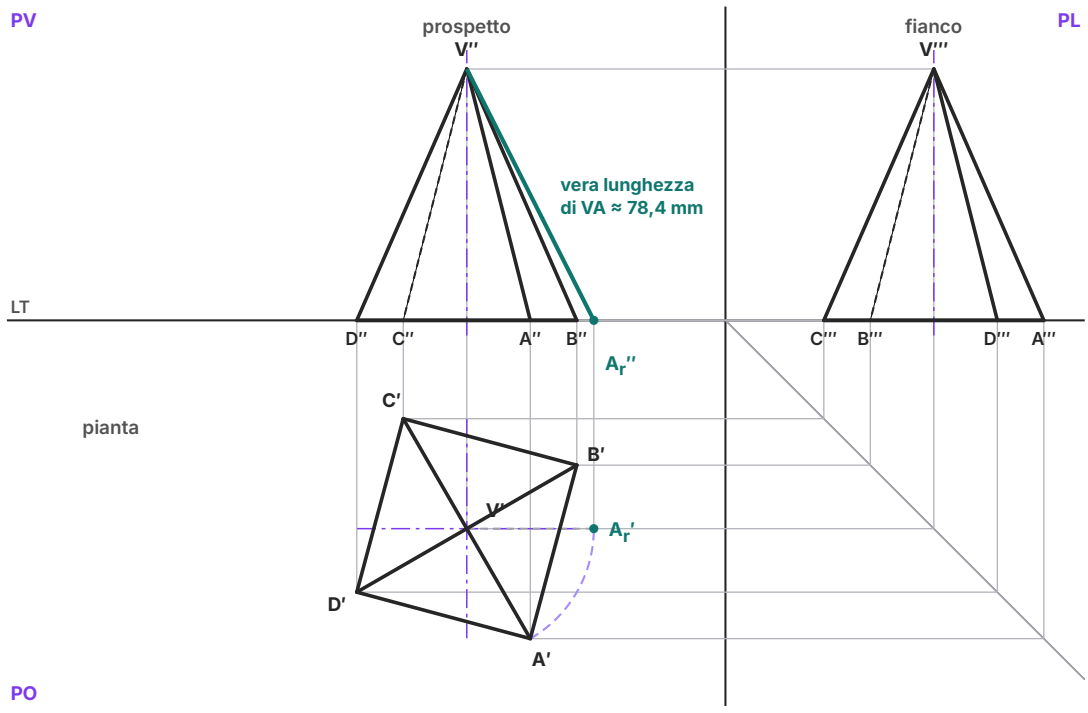

Figura 6.3 Piramide quadrata retta (lato 50 mm, altezza 70 mm) con la base sul PO, ruotata in modo che le diagonali di base formino 30° e 60° con la LT. La vera lunghezza dello spigolo *VA* si trova ruotando *A* attorno all'asse verticale della piramide fino alla posizione A_r, sulla parallela alla LT per *V*'.

ESEMPIO SVOLTO

La vera lunghezza di uno spigolo laterale

Nel cap. 5 hai trovato la vera lunghezza di un segmento ruotandolo fino a renderlo parallelo a un piano di proiezione. Nella piramide il metodo è particolarmente comodo, perché lo spigolo *VA* ha un estremo sull'asse: basta farlo ruotare attorno all'asse verticale della piramide.

1. In pianta, con centro *V*' e raggio *V*'*A*', traccia un arco fino a incontrare la parallela alla LT per *V*': trovi A_r'. Ora lo spigolo ruotato è parallelo al PV. **2.** Alza la linea di richiamo da A_r' fino alla LT: trovi A_r'' (la quota di *A* non cambia con la rotazione). **3.** Il segmento $V''A_r''$ è la vera lunghezza.

Verifica numerica. *V*'*A*' è metà della diagonale del quadrato: $50 : \sqrt{2} \approx 35{,}36$ mm. Lo spigolo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti 35,36 mm e 70 mm: $\sqrt{(35{,}36^2 + 70^2)} \approx 78{,}42$ mm. Nel prospetto, invece, *V*''*A*'' misura circa 72,2 mm: è uno scorcio, più corto del vero. L'apotema della piramide è $\sqrt{(25^2 + 70^2)} \approx 74{,}33$ mm.

6.2.4 Basi parallele al PV o al PL

Non tutti i solidi stanno «in piedi». Un prisma triangolare appoggiato su una faccia laterale, come una tenda o il tetto di una casa, ha le basi verticali. Se le basi sono parallele al **PV**, la vera forma della base compare nel prospetto, e il ragionamento si capovolge: si comincia dal prospetto (il triangolo costruito con il compasso), poi si ricavano pianta e fianco, in cui gli spigoli laterali, perpendicolari al PV, compaiono in vera lunghezza. Se le basi sono parallele al **PL**, la vera forma sta nel fianco: si comincia dal fianco e si riportano i suoi aggetti in pianta attraverso la retta a 45°, percorrendola al contrario (figura 6.4).

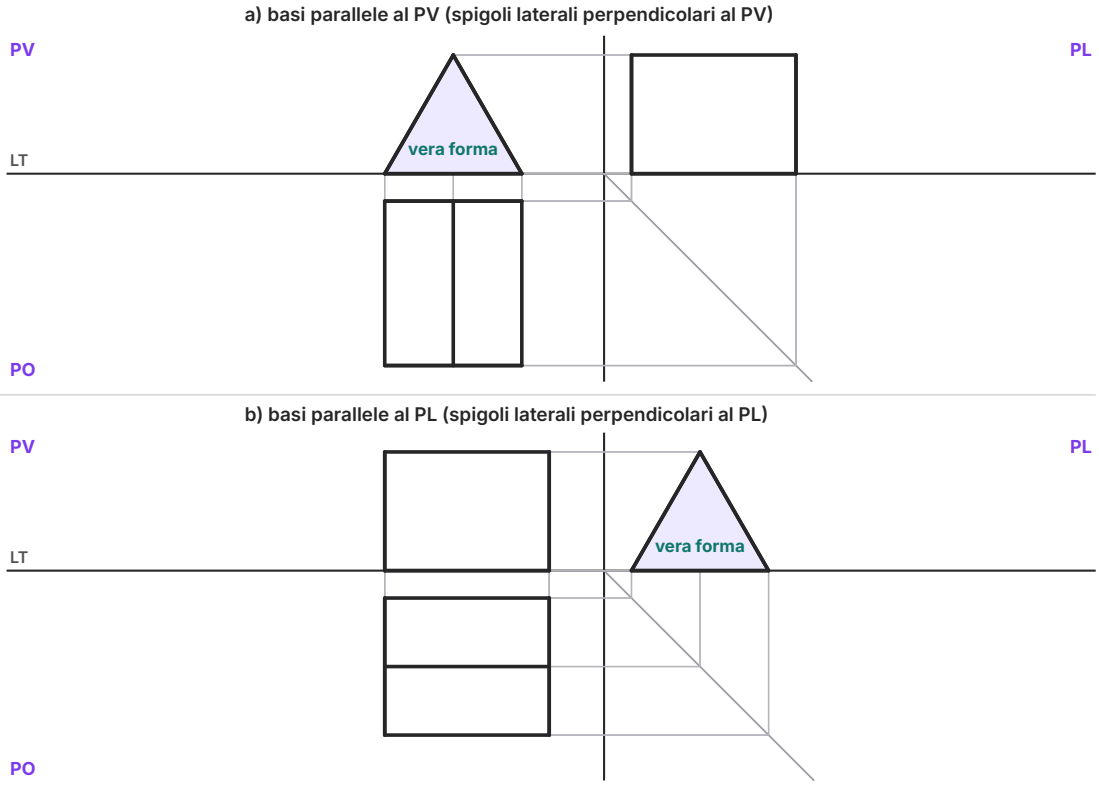

Figura 6.4 Lo stesso prisma triangolare (triangolo equilatero di lato 50 mm, lunghezza 60 mm) appoggiato su una faccia laterale. a) Basi parallele al PV: la vera forma è nel prospetto. b) Basi parallele al PL: la vera forma è nel fianco. In entrambi i casi la vista da cui si comincia è quella che contiene la vera forma.

DA RICORDARE

Da quale vista si comincia? Sempre da quella in cui la base compare in vera forma: la pianta se la base è parallela al PO, il prospetto se è parallela al PV, il fianco se è parallela al PL. Lì si costruisce il poligono con riga e compasso; nelle altre due viste la base si riduce a un segmento e le misure si trasportano con le linee di richiamo.

6.3 Solidi inclinati: il metodo della rotazione

6.3.1 Perché non si disegna subito il solido inclinato

Immagina il prisma esagonale della figura 6.2 che, invece di stare dritto, si appoggia su uno spigolo di base e si inclina di lato, come una colonna che sta per cadere. Disegnarlo direttamente sarebbe difficile: nessuna faccia è parallela al PO, quindi in pianta niente compare in vera forma da cui partire. La soluzione è un procedimento in due tempi, detto **metodo della rotazione**.

1. Si disegna il solido in **posizione fondamentale** (pianta e prospetto), scegliendo la posizione in modo che l'asse del solido e lo spigolo su cui ruoterà siano già nella giusta relazione con il PV: lo spigolo d'appoggio *di punta* (perpendicolare al PV), l'asse parallelo al PV.
2. Si fa **ruotare il prospetto**, come una figura rigida, attorno al punto in cui lo spigolo d'appoggio si proietta sulla LT (il *perno*), dell'angolo voluto. Siccome la rotazione avviene attorno a una retta perpendicolare al PV, il prospetto non si deforma: si ricopia ruotato, magari con l'aiuto di un lucido o, meglio, riportando con il compasso le distanze dal perno.
3. Si ricava la **nuova pianta**: da ogni vertice del prospetto ruotato si abbassa una linea di richiamo; sulla stessa linea il vertice ha lo stesso **aggetto** che aveva nella prima pianta, perché ruotando attorno a una retta perpendicolare al PV nessun punto si avvicina o si allontana dal PV. Gli aggetti si trasportano dalla prima pianta con orizzontali.

La figura 6.5 mostra il procedimento per un prisma esagonale con due lati di base perpendicolari alla LT, ruotato di 45° attorno allo spigolo di base di destra: l'asse forma un angolo di 45° con il PO.

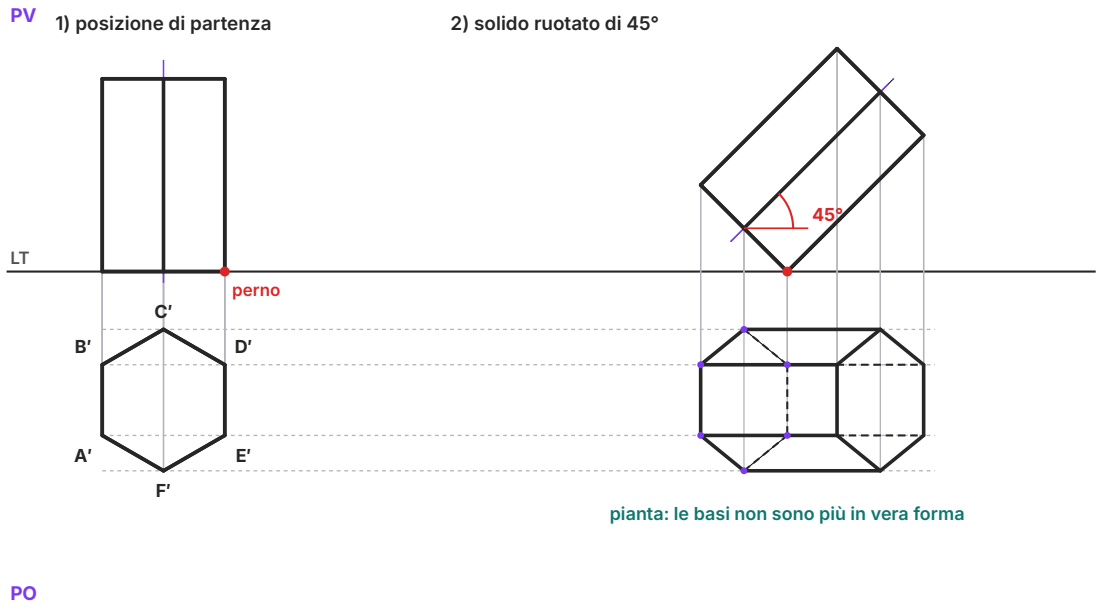

Figura 6.5 Prisma esagonale regolare (lato 22 mm, altezza 60 mm) inclinato con il metodo della rotazione. 1) Posizione fondamentale. 2) Il prospetto ruota di 45° attorno al perno; ogni vertice della nuova pianta sta sul richiamo del nuovo prospetto e sull'orizzontale del proprio aggetto, rimasto invariato. Gli spigoli della base inferiore che guardano verso il basso sono nascosti.

6.3.2 Leggere la nuova pianta

Nella nuova pianta le due basi esagonali non sono più in vera forma: appaiono come esagoni «schiacciati» nella direzione della LT, perché sono inclinate sul PO. Le larghezze nella direzione perpendicolare alla LT invece non cambiano: sono gli aggetti, che la rotazione ha conservato. La base superiore, che ora guarda in alto verso destra, è tutta in vista. La base inferiore guarda in basso a sinistra: di essa si vedono solo gli spigoli che fanno parte del contorno, mentre gli altri sono coperti dal solido e si tratteggiano. È nascosto anche lo spigolo d'appoggio, che sta sotto il prisma.

Con lo stesso metodo si inclina qualsiasi solido: una piramide che si appoggia su uno spigolo di base, un cilindro che poggia su un punto della circonferenza di base, un cono. Il prospetto ruotato si ottiene sempre per rotazione rigida; la pianta sempre incrociando richiami verticali e aggetti invariati. Se serve anche il fianco, lo si ricava alla fine, come al solito, da prospetto e pianta.

ERRORE FREQUENTE

Ruotare anche la pianta. Nella rotazione attorno a una retta perpendicolare al PV gira soltanto il prospetto. La pianta non si ruota: si *ricostruisce* punto per punto. Chi copia la prima pianta ruotata ottiene un disegno sbagliato, in cui le basi conservano la vera forma anche se sono inclinate sul PO. Controllo rapido: nella nuova pianta la distanza tra le due orizzontali estreme deve essere uguale a quella della prima pianta.

6.4 Cilindro, cono e sfera

6.4.1 In posizione fondamentale

Con l'asse perpendicolare al PO, i solidi di rotazione hanno viste molto semplici (figura 6.6).

- **Cilindro.** In pianta: un cerchio, in vera forma, che rappresenta entrambe le basi e tutta la superficie laterale (le generatrici sono di punta). Nel prospetto e nel fianco: un rettangolo largo quanto il diametro e alto quanto il cilindro, i cui lati verticali sono le generatrici di contorno.
- **Cono.** In pianta: un cerchio con il centro segnato, perché lì si proietta il vertice V'. Nel prospetto e nel fianco: un triangolo isoscele. I lati obliqui sono le generatrici di contorno, parallele al piano di proiezione: per questo appaiono in **vera lunghezza**, e da essi si può misurare g direttamente sul disegno.
- **Sfera.** In tutte le viste: un cerchio di raggio uguale a quello della sfera. Il contorno apparente della pianta è l'equatore; quello del prospetto è il cerchio massimo parallelo al PV; quello del fianco il cerchio massimo parallelo al PL. Tre cerchi diversi sulla sfera, ma tutti uguali nel disegno. Per questo la sfera si riconosce dalle tre viste: è l'unico solido che le ha tutte circolari.

Nelle viste dei solidi di rotazione gli assi sono essenziali: in pianta si tracciano le due rette di centro perpendicolari, nelle altre viste l'asse del solido, che sporge di qualche millimetro dal contorno.

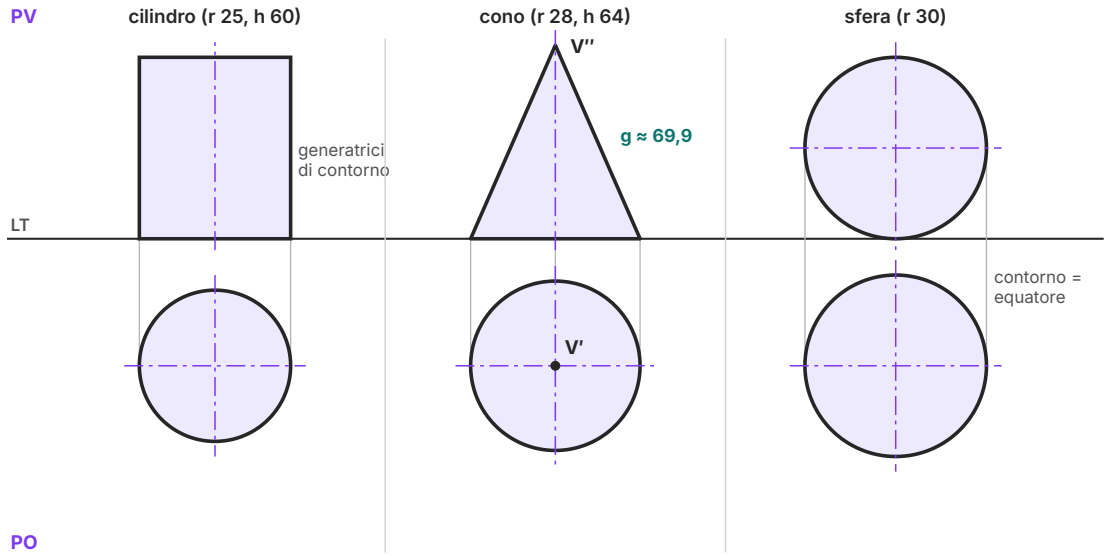

Figura 6.6 Cilindro, cono e sfera in posizione fondamentale (pianta e prospetto; il fianco è uguale al prospetto). Nel cono le generatrici di contorno compaiono in vera lunghezza: $g = \sqrt{(28^2 + 64^2)} \approx 69{,}9$ mm.

IN SINTESI

Tabella 6.1 Le viste dei solidi in posizione fondamentale (base sul PO, asse verticale).

Solido	Pianta	Prospetto e fianco
Prisma retto	poligono di base in vera forma	rettangoli affiancati (le facce)
Piramide retta	poligono di base con i segmenti dal centro ai vertici	triangoli affiancati con il vertice in comune
Cilindro	cerchio	rettangolo
Cono	cerchio con il centro (vertice)	triangolo isoscele
Sfera	cerchio	cerchio

Due viste uguali non bastano a riconoscere un solido: un rettangolo nel prospetto può appartenere a un prisma o a un cilindro. Serve sempre la terza vista, o almeno la pianta.

6.4.2 Con l'asse inclinato: le ellissi per punti

Se l'asse di un cilindro è parallelo al PV ma inclinato sul PO, le basi circolari diventano inclinate sul PO. Dal cap. 5 sai che cosa succede a una circonferenza inclinata: in pianta si proietta come un'**ellisse**. Il metodo della rotazione ci permette di costruirla per punti (figura 6.7).

1. Disegna il cilindro in posizione fondamentale. In pianta dividi la circonferenza di base in 12 parti uguali (con il compasso, aprendolo quanto il raggio, cap. 3) e numera i punti. Ogni punto individua una generatrice.
2. Riporta i punti nel prospetto con i richiami: cadono sulla LT (base inferiore) e sulla parallela a quota h (base superiore); i punti simmetrici rispetto all'asse orizzontale della pianta si sovrappongono.
3. Ruota il prospetto attorno al perno (il punto della base che resta sul PO) dell'angolo voluto: i 12 punti di ciascuna base ruotano con lui.
4. Abbassa i richiami dai punti ruotati e intersecali con le orizzontali condotte dai punti corrispondenti della prima pianta (aggetto invariato). Ottieni 12 punti per ciascuna ellisse.
5. Unisci i punti con il curvilineo, con un tratto continuo e senza spigoli. Traccia le generatrici di contorno: sono le due rette tangenti a entrambe le ellissi, alle estremità del loro asse maggiore.

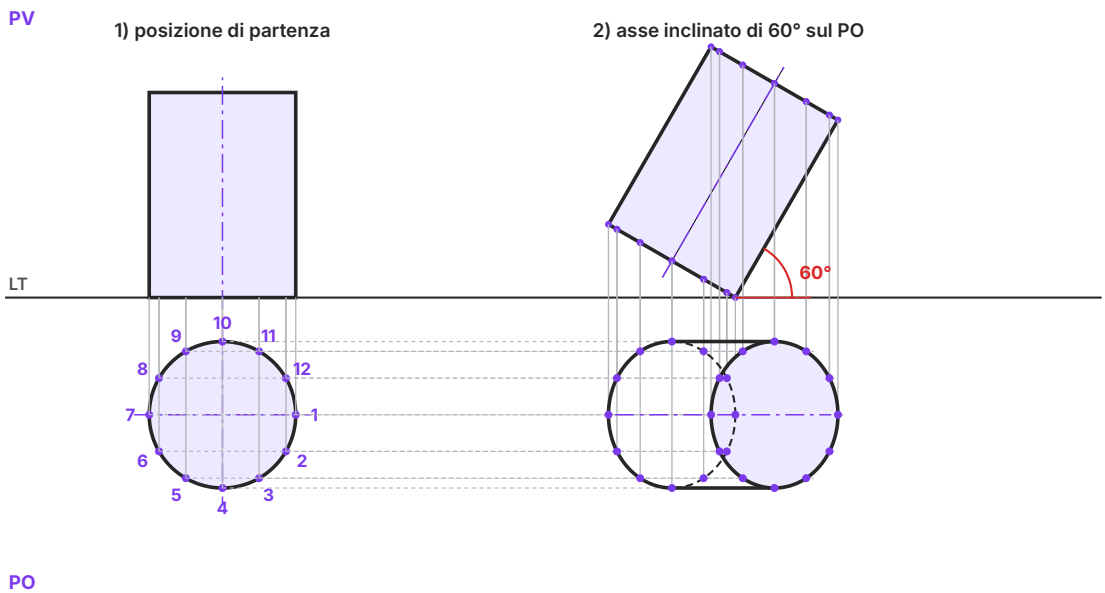

Figura 6.7 Cilindro (raggio 25 mm, altezza 70 mm) con l'asse parallelo al PV e inclinato di 60° sul PO. Le basi si proiettano in pianta come ellissi costruite per 12 punti: l'asse maggiore è uguale al diametro (50 mm), l'asse minore misura 50 · √3 : 2 ≈ 43,3 mm. Metà dell'ellisse inferiore è nascosta dal cilindro.

Due fatti ti aiutano a controllare il disegno. Primo: l'**asse maggiore** dell'ellisse è sempre uguale al **diametro** della base, perché il diametro perpendicolare al PV resta parallelo al PO in qualunque inclinazione. Secondo: l'asse minore si accorcia quanto più l'asse del cilindro si avvicina all'orizzontale: è la proiezione in pianta del diametro che nel prospetto compare inclinato, e si misura sul disegno. Detto β l'angolo tra l'asse del cilindro e il PO, i casi più comuni si ricavano

dai triangoli rettangoli del cap. 5: con β = 60° l'asse minore vale $D \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 0{,}866\ D$, con β = 45° vale $D : \sqrt{2} \approx 0{,}707\ D$, con β = 30° è la metà di D. Con β = 90° (cilindro verticale) l'ellisse torna cerchio; con β = 0° (cilindro sdraiato) si schiaccia in un segmento.

Per il **cono** con l'asse inclinato il procedimento è identico per la base; il vertice è un punto solo, che si ruota come gli altri. In pianta le generatrici di contorno sono le due tangenti condotte da V' all'ellisse di base. La **sfera**, invece, non ha bisogno di nulla: comunque la si giri, le sue viste restano cerchi.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Disegnare un ovale al posto dell'ellisse.** L'ovale del cap. 4 è una curva policentrica, fatta di quattro archi di circonferenza; la proiezione di una circonferenza inclinata è invece un'**ellisse**, una curva diversa, la cui curvatura cambia con continuità. Un ovale costruito sugli stessi assi le somiglia e talvolta, negli schizzi, la sostituisce; ma in una tavola di proiezioni l'ellisse va costruita per punti. Più punti usi (12, 16, 24), più il disegno è preciso.

6.5 Visibilità, gruppi di solidi e solidi forati

6.5.1 Spigoli in vista e spigoli nascosti

In ogni vista l'osservatore guarda il solido da una direzione precisa: dall'alto per la pianta, dal davanti per il prospetto, da sinistra per il fianco (metodo europeo, cap. 5). Uno spigolo è **in vista** quando almeno una delle due facce che lo formano è rivolta verso l'osservatore; è **nascosto** quando entrambe le facce gli voltano le spalle e il solido si interpone. Gli spigoli in vista si ripassano con la linea continua grossa; quelli nascosti con la linea **tratteggiata** (cap. 1).

> **DA RICORDARE**
>
> **Quattro regole per la visibilità.**
>
> 1. Il **contorno esterno** di ogni vista è sempre in vista. 2. In pianta, di due punti sovrapposti si vede quello con la **quota maggiore**; nel prospetto quello con l'**aggetto maggiore**; nel fianco quello con la **distanza dal PL maggiore**. 3. Se una linea in vista e una nascosta si sovrappongono, si disegna soltanto quella in vista. 4. Gli assi (tratto-punto) si disegnano sempre, anche dentro il solido.

Dopo aver disegnato le tre viste è utile un controllo: uno **schizzo di controllo** a mano libera del solido «in rilievo», come quelli della figura 6.1. Non deve essere esatto: serve solo a verificare che le tre viste descrivano lo stesso oggetto e che gli spigoli tratteggiati siano proprio quelli che, dal punto di vista di ciascuna vista, restano dietro. Il metodo esatto per questi disegni, l'assonometria, lo vedrai il prossimo anno.

6.5.2 Gruppi di solidi

Molti oggetti e quasi tutti gli edifici sono **gruppi di solidi**: solidi semplici appoggiati l'uno sull'altro o accostati. Una colonna è un cilindro (il fusto) sotto un prisma basso (l'abaco del capitello); un campanile può essere un prisma a base quadrata coronato da una piramide; una torre circolare, un cilindro coronato da un cono. Si disegnano così:

1. si scompone il gruppo nei solidi semplici e si fissa un asse comune (o la posizione di ciascun asse);
2. si disegnano i solidi uno alla volta, a partire da quello appoggiato sul PO, ognuno con la sua base alla quota in cui si trova;
3. si controlla la visibilità tra un solido e l'altro: ciò che un solido copre, in quella vista, diventa tratteggiato;
4. si eliminano le linee che non esistono più. Quando due solidi si toccano e le loro superfici si continuano senza piegarsi, tra di essi non c'è uno spigolo e non si traccia alcuna linea: succede, per esempio, tra due prismi della stessa sezione sovrapposti (le facce sono complanari) o tra un cilindro e una semisfera dello stesso raggio. Tra un cilindro e un cono con la stessa base, invece, le superfici si piegano: la circonferenza comune è uno spigolo e si disegna.

Nella figura 6.8b il tetto conico ha un raggio maggiore del tamburo cilindrico su cui poggia, come la falda di un tetto che sporge dal muro: in pianta il contorno del tamburo è coperto dal tetto e si disegna tratteggiato.

6.5.3 Solidi forati

Un **solido forato** è un solido da cui è stato tolto un altro solido: un dado con un foro, un tubo, un blocco di pietra con l'incavo per un perno. Il foro si disegna come un solido «vuoto»: nella vista in cui si vede la sua bocca compare in vista (un cerchio, se il foro è cilindrico); nelle altre viste le sue generatrici di contorno stanno dentro il materiale e si disegnano **tratteggiate**, sempre con il loro asse. Nella figura 6.8a un prisma quadrato è attraversato da un foro cilindrico verticale: in pianta il foro è un cerchio in vista; nel prospetto e nel fianco è indicato da due tratteggiate e dall'asse.

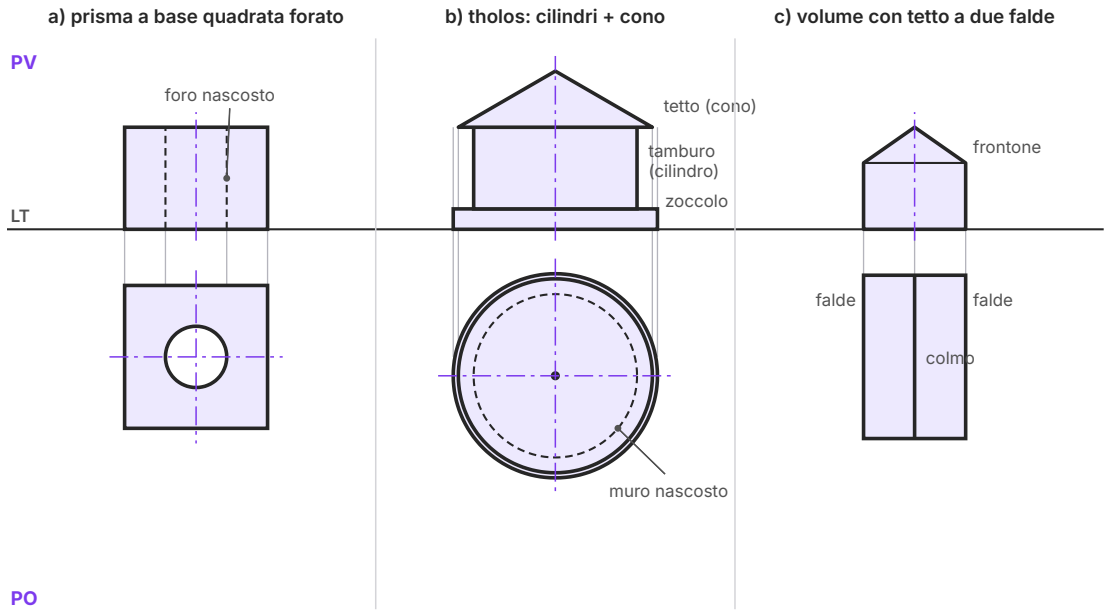

Figura 6.8 Pianta e prospetto di tre gruppi di solidi. a) Prisma forato: il foro cilindrico è nascosto nel prospetto. b) Schema di una costruzione circolare (zoccolo, tamburo, tetto conico): in pianta il muro del tamburo è nascosto dal tetto che sporge. c) Volume con tetto a due falde e colmo perpendicolare al PV: il prospetto mostra il frontone, la pianta le due falde divise dalla linea di colmo.

ESEMPIO SVOLTO

Un gruppo di tre solidi

Dati. Su un basamento a forma di prisma quadrato (lato 60 mm, altezza 20 mm) poggia un cilindro di raggio 20 mm e altezza 45 mm; sul cilindro poggia un cono di raggio 25 mm e altezza 30 mm. Gli assi coincidono; il centro della base del basamento è in (70; 40; 0).

Prospetto. Dal basso: rettangolo 60 × 20 mm; sopra, rettangolo 40 × 45 mm (quote da 20 a 65 mm); sopra ancora, triangolo isoscele di base 50 mm, con il vertice a quota 65 + 30 = 95 mm. **Pianta.** Quadrato di lato 60 mm; cerchio di raggio 25 mm (il cono, in vista); cerchio di raggio 20 mm *tratteggiato*, perché il cilindro è coperto dal cono che sporge di 5 mm; punto centrale = vertice del cono. **Fianco.** Uguale al prospetto, perché il gruppo è simmetrico rispetto all'asse.

Controllo. L'altezza totale è 20 + 45 + 30 = 95 mm; il fianco occupa gli aggetti da 10 a 70 mm.

6.6 Dal solido all'architettura

6.6.1 Pianta, prospetto e fianco di un edificio

Gli architetti usano le proiezioni ortogonali da secoli, anche se con nomi propri. La **pianta** di un edificio è, a rigore, una sezione orizzontale presa a un'altezza convenzionale (di solito tra 1 e 1,5 m dal pavimento), così da tagliare muri, porte e finestre (le sezioni le studierai il prossimo anno); il **prospetto** è la vista di una facciata; il **fianco** o prospetto laterale è la vista di un lato. Vitruvio, nel I secolo a.C., chiamava già *ichnographia* la pianta e *orthographia* l'alzato (cap. 1). Molti edifici antichi, guardati con gli occhi del disegnatore, sono gruppi di solidi semplici: imparare a riconoscerli è il primo passo per leggerne le piante e gli alzati che troverai nella seconda parte del libro.

- **La piramide.** Le grandi piramidi egizie sono piramidi rette a base quadrata (cap. 10). La pianta è un quadrato con le diagonali, che rappresentano gli spigoli; il prospetto è un triangolo isoscele. Attenzione: se un lato di base è parallelo al PV, i lati obliqui del triangolo del prospetto mostrano in vera lunghezza gli **apotemi** delle facce; se invece è la diagonale della base a essere parallela al PV, mostrano in vera lunghezza due **spigoli**.
- **La costruzione circolare.** Una *tholos* greca (cap. 12) è, in schema, un cilindro (la cella circolare, con l'eventuale colonnato) su un basso cilindro (il basamento a gradini), coperto da un tetto conico. Nel cap. 11 incontrerai anche la *tholos* micenea, una tomba coperta da una falsa cupola, e nel cap. 16 il Pantheon, la cui rotonda è un cilindro coperto da una cupola emisferica.
- **Il volume con il tetto a due falde.** Il tempio greco, l'etrusco e quello romano (capp. 12, 15, 16), ma anche una casa di campagna, sono in schema un prisma rettangolare sormontato da un prisma triangolare sdraiato: il tetto. Le facciate brevi mostrano il triangolo del **frontone**; la pianta, vista dall'alto, mostra le due **falde** divise dalla linea di **colmo**.

COLLEGAMENTI

Il Pantheon: un cilindro e una sfera

Il Pantheon di Roma, ricostruito sotto Adriano (c. 118–125 d.C.), è l'esempio più celebre di architettura pensata con i solidi (cap. 16). La rotonda è un cilindro coperto da una cupola emisferica; il diametro interno della cupola, circa 43,3 m, è uguale all'altezza dal pavimento all'oculo. Ne segue che nello spazio interno potrebbe stare una sfera intera, tangente al pavimento: in uno schema dell'interno tagliato a metà con un piano verticale (le sezioni le studierai il prossimo anno) la vedresti come un cerchio che tocca il pavimento e la sommità della cupola. È un caso in cui la geometria dei solidi non è un'interpretazione moderna, ma è leggibile nelle misure stesse dell'edificio.

6.6.2 Leggere una tavola: dalle viste al volume

Nella storia dell'arte capiterà spesso il percorso inverso: hai davanti pianta e prospetto di un edificio e devi immaginarne il volume. Procedi così. **1.** Cerca nella pianta le figure chiuse principali (quadrati, rettangoli, cerchi) e chiediti a quale solido appartengono. **2.** Con i richiami, cerca nel prospetto la stessa figura: la sua altezza ti dice quanto si alza quel solido. **3.** Controlla le linee tratteggiate: indicano parti coperte, come un muro sotto un tetto sporgente o un ambiente interno. **4.** Leggi la scala grafica (cap. 1) per ricavare le misure reali.

Facciamo una prova con la piramide di Cheope (Giza, IV dinastia, c. 2560 a.C., cap. 10), che aveva in origine un lato di base di circa 230 m e un'altezza di circa 146 m. In scala 1:2000 la pianta è un quadrato di 115 mm con le diagonali; il prospetto, con un lato parallelo al PV, è un triangolo isoscele di base 115 mm e altezza 73 mm. Dal disegno si legge subito l'inclinazione delle facce: nel triangolo rettangolo di cateti 57,5 mm (metà base) e 73 mm l'angolo alla base misura circa 51,8°. L'apotema della faccia, che nel prospetto compare in vera lunghezza come lato del triangolo, è di circa 93 mm sul foglio, cioè circa 186 m in realtà.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Confondere lo spigolo con l'apotema.** Nel prospetto di una piramide con un lato di base parallelo al PV, i lati obliqui del triangolo non sono gli spigoli della piramide: rappresentano le due facce di destra e di sinistra, che sono perpendicolari al PV e si vedono «di taglio». Su ciascuna di quelle linee si sovrappongono tre segmenti: l'apotema della faccia, che è parallelo al PV e compare in vera lunghezza, e i due spigoli della faccia, che sono inclinati sul PV e compaiono in scorcio, accorciati fino a coincidere con l'apotema. Per misurare uno spigolo bisogna ruotarlo (paragrafo 6.2.3). Lo spigolo è sempre più lungo dell'apotema: in una piramide quadrata di lato 50 mm e altezza 70 mm, 78,42 mm contro 74,33 mm.

Disegnare un edificio come gruppo di solidi è ovviamente una semplificazione: un tempio vero ha colonne, gradini, cornici, e i suoi muri hanno porte e finestre. Ma è la semplificazione giusta per cominciare. Quando nel cap. 12 incontrerai la pianta di un tempio periptero, saprai che dietro quel rettangolo punteggiato di cerchi (le colonne, cilindri visti in pianta) c'è un volume che sai già proiettare.

SINTESI

- I **poliedri** (prismi, piramidi, poliedri regolari) sono limitati da poligoni; i **solidi di rotazione** (cilindro, cono, sfera) nascono dalla rotazione di una figura piana attorno a un asse.
- Elementi: base, faccia, spigolo, vertice, altezza, apotema (della piramide), generatrice, asse. Per ogni poliedro convesso vale $V - S + F = 2$.
- Un poliedro si proietta proiettando i **vertici** e unendoli secondo gli spigoli; le lettere collegano le viste.
- Si comincia dalla vista in cui la base è in **vera forma**: pianta, prospetto o fianco secondo il piano a cui la base è parallela.
- Uno spigolo appare in vera lunghezza solo se è parallelo al piano di proiezione; gli spigoli laterali di una piramide si raddrizzano per **rotazione** attorno all'asse.
- Per un solido inclinato si usa il **metodo della rotazione**: posizione fondamentale, rotazione rigida del prospetto attorno al perno, nuova pianta da richiami verticali e aggetti invariati.
- Cilindro e cono verticali: cerchio in pianta, rettangolo o triangolo nelle altre viste; la sfera è un cerchio in tutte le viste.
- Una base circolare inclinata sul PO si proietta in pianta come un'**ellisse**, costruita per punti, con asse maggiore uguale al diametro e asse minore tanto più corto quanto più l'asse del cilindro si avvicina all'orizzontale ($\approx 0{,}866\ D$, $\approx 0{,}707\ D$ e $D : 2$ con l'asse inclinato di 60°, 45° e 30° sul PO).
- Spigoli e contorni **in vista**: linea continua grossa; **nascosti**: tratteggiati; assi: tratto-punto.
- Gruppi di solidi e solidi forati si disegnano solido per solido, controllando che cosa copre che cosa in ogni vista.
- Molti edifici antichi sono, in schema, gruppi di solidi: piramidi, cilindri con tetto conico, prismi con tetto a due falde.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un prisma esagonale ha:
   - **A.** 6 vertici, 12 spigoli, 8 facce
   - **B.** 12 vertici, 12 spigoli, 6 facce
   - **C.** 12 vertici, 18 spigoli, 8 facce
   - **D.** 12 vertici, 18 spigoli, 6 facce

2. ● Il cono è generato dalla rotazione di:
   - **A.** un triangolo rettangolo attorno a un cateto
   - **B.** un rettangolo attorno a un lato
   - **C.** un semicerchio attorno al diametro
   - **D.** un triangolo isoscele attorno alla base

3. ● Un prisma retto ha la base sul PO. In quale vista la base compare in vera forma?
   - **A.** nel prospetto
   - **B.** in pianta
   - **C.** nel fianco
   - **D.** in nessuna

4. ● Le viste di un cono con la base sul PO sono:
   - **A.** cerchio, cerchio, cerchio
   - **B.** cerchio, rettangolo, rettangolo
   - **C.** quadrato, triangolo, triangolo
   - **D.** cerchio con il centro, triangolo, triangolo

5. ●● Nel prospetto, di due vertici che hanno la stessa proiezione è in vista quello che ha:
   - **A.** la quota maggiore
   - **B.** la distanza dal PL maggiore
   - **C.** l'aggetto maggiore
   - **D.** l'aggetto minore

6. ●● Una piramide quadrata retta di lato 50 mm e altezza 70 mm ha la base sul PO. Lo spigolo laterale misura circa:
   - **A.** 74,3 mm
   - **B.** 70,0 mm
   - **C.** 86,0 mm
   - **D.** 78,4 mm

7. ●● Nel metodo della rotazione, per ottenere la nuova pianta di un solido ruotato attorno a una retta perpendicolare al PV:
   - **A.** si combinano i richiami del prospetto ruotato con gli aggetti della prima pianta
   - **B.** si ruota la prima pianta dello stesso angolo
   - **C.** si ribalta il fianco sul PO
   - **D.** si usa la retta a 45° per trasportare le quote

8. ●● Un cilindro di diametro 60 mm ha l'asse parallelo al PV e inclinato di 30° sul PO. In pianta le basi sono ellissi con assi:
   A. 60 mm e 52 mm
   B. 60 mm e 30 mm
   C. 30 mm e 15 mm
   D. 52 mm e 30 mm

9. ●●● Una linea in vista e una nascosta si sovrappongono nella stessa vista. Come si disegna?
   A. si disegnano entrambe, una accanto all'altra
   B. si disegna solo la tratteggiata
   C. si disegna solo la linea in vista
   D. si disegna una linea mista punto-linea

Lessico e norme

10. ● Completa: in un prisma retto gli spigoli laterali sono _____ alle basi e le facce laterali sono _____ ; il prisma si dice regolare se, in più, la base è un _____ .

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Le generatrici di un cilindro sono parallele all'asse. b) La sfera ha generatrici di contorno. c) La generatrice di un cono è più lunga della sua altezza. d) L'apotema di una piramide coincide con l'apotema del poligono di base.

12. ● Abbina ciascun tipo di linea all'uso: 1) continua grossa; 2) tratteggiata; 3) mista fine punto-linea; 4) continua fine. a) assi dei solidi di rotazione; b) linee di richiamo; c) spigoli in vista; d) spigoli nascosti.

13. ●● Definisci con parole tue: *posizione fondamentale*, *generatrice di contorno*, *gruppo di solidi*, *solido forato*.

14. ●● Completa la regola di scrittura: in pianta il vertice superiore *b* di un prisma copre il vertice inferiore *B*; l'etichetta corretta è _____ . Nel prospetto *F* ha aggetto 60 mm e *B* aggetto 20 mm, con la stessa proiezione: si scrive _____ .

15. ●● Nomina i cinque poliedri regolari e, per ciascuno, il poligono delle facce e il numero di facce.

Costruire

Salvo diversa indicazione, imposta l'epura su un A4 squadrato verticale con la LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice e l'asse verticale a 120 mm dal bordo sinistro (cap. 5). Le coordinate sono (*x*; *y*; *z*) = (distanza dal PL; aggetto; quota), in mm. Lascia visibili le linee di costruzione e scrivi le lettere dei vertici.

16. ● **Prisma quadrangolare.** Prisma retto a base quadrata, lato 40 mm, altezza 70 mm, base sul PO, centro della base in (70; 45; 0), facce laterali parallele al PV e al PL. Disegna le tre viste.

17. ● **Prisma esagonale.** Prisma esagonale regolare retto, lato 30 mm, altezza 60 mm, base sul PO, centro in (70; 40; 0), due lati di base paralleli alla LT. Disegna le tre viste e misura la larghezza del prospetto e del fianco.

18. ●● **Prisma triangolare sdraiato.** Un prisma retto ha per basi due triangoli equilateri di lato 50 mm, paralleli al PV con aggetti 65 mm (base anteriore) e 5 mm (base posteriore); il prisma poggia sul PO con una faccia laterale, e il lato orizzontale della base anteriore va da $x = 90$ mm a $x = 40$ mm. Disegna le tre viste. Quanto è alto il prospetto? Quali spigoli compaiono in vera lunghezza in pianta?

19. ●● **Piramide ruotata e vera lunghezza.** Piramide quadrata retta, lato di base 50 mm, altezza 70 mm, base sul PO, centro in (70; 50; 0), diagonali di base inclinate di 30° e 60° sulla LT, come nella figura 6.3. Disegna pianta e prospetto, indica lo spigolo nascosto nel prospetto e trova per rotazione la vera lunghezza di uno spigolo laterale.

20. ●● **Piramide esagonale.** Piramide esagonale regolare retta, lato 30 mm, altezza 75 mm, base sul PO, centro in (65; 38; 0), due lati di base perpendicolari alla LT. Disegna le tre viste. In quale vista e quali spigoli laterali compaiono in vera lunghezza? Quanto misurano?

21. ●● **Cilindro e cono affiancati.** Un cilindro (raggio 25 mm, altezza 60 mm, centro della base in (90; 40; 0)) e un cono (raggio 25 mm, altezza 72 mm, centro della base in (35; 40; 0)) poggiano sul PO. Disegna pianta e prospetto e misura sul prospetto la generatrice del cono; poi verificala con il calcolo.

22. ● **Sfera.** Una sfera di raggio 30 mm è appoggiata sul PO con il centro in (70; 40; 30). Disegna le tre viste con i loro assi e indica le proiezioni T', T'', T''' del punto in cui la sfera tocca il PO.

23. ●●● **Prisma esagonale inclinato.** Senza PL: LT a 150 mm dal bordo superiore della cornice. Prisma esagonale regolare, lato 25 mm, altezza 70 mm, in posizione fondamentale con due lati di base perpendicolari alla LT, centro della base a 45 mm dal bordo sinistro della cornice e aggetto 40 mm. Ruotalo di 30° attorno allo spigolo di base di destra (l'asse forma 60° con il PO) e disegna, 50 mm più a destra, prospetto e pianta del prisma inclinato. Calcola la quota del punto più alto e l'ingombro orizzontale del nuovo prospetto.

24. ●●● **Cilindro inclinato per punti.** Cilindro di raggio 25 mm e altezza 60 mm, asse parallelo al PV e inclinato di 45° sul PO, appoggiato sul PO con un punto della base inferiore. Con il metodo della rotazione e 12 punti per base, costruisci in pianta le ellissi delle basi. Quanto misurano i loro assi?

25. ●●● **Cono inclinato.** Cono di raggio 25 mm e altezza 70 mm, asse parallelo al PV e inclinato di 60° sul PO, appoggiato sul PO con un punto della circonferenza di base. Disegna prospetto e pianta. Calcola la quota del centro della base e quella del vertice, gli assi dell'ellisse di base e la distanza in pianta tra V' e il centro dell'ellisse.

26. ●● **Gruppo di solidi.** Riproduci in tre viste il gruppo dell'esempio svolto del paragrafo 6.5.2 (basamento 60 × 60 × 20 mm, cilindro r 20 mm h 45 mm, cono r 25 mm h 30 mm, centro (70; 40; 0)), con le linee nascoste.

27. ●● **Prisma forato.** Prisma retto a base quadrata, lato 60 mm, altezza 40 mm, base sul PO, centro in (70; 40; 0), facce parallele al PV e al PL, attraversato da un foro cilindrico verticale coassiale di raggio 15 mm. Disegna le tre viste. Come cambierebbero se il foro fosse invece perpendicolare al PV, con l'asse a quota 20 mm?

Leggere il disegno

28. ● **Che solido è?** Riconosci il solido dalle viste (pianta; prospetto; fianco): a) cerchio con il centro segnato; triangolo isoscele; triangolo isoscele. b) quadrato con le diagonali; triangolo; triangolo. c) cerchio; rettangolo; rettangolo. d) cerchio; cerchio; cerchio. e) esagono regolare; rettangolo diviso in tre strisce; rettangolo diviso in due strisce.

29. ●● Osserva la figura 6.3. Quale spigolo è tratteggiato nel prospetto e quale nel fianco? Perché? Lo spigolo *VA* nel prospetto è più corto o più lungo del vero? Calcola la sua lunghezza apparente sapendo che *A* dista 17,68 mm dall'asse della piramide in direzione parallela alla LT.

30. ● Conta vertici, spigoli e facce di una piramide esagonale, di una piramide quadrata e di un prisma triangolare, e verifica per ciascuno la relazione di Eulero.

31. ●● **Trova gli errori.** Un compagno ha disegnato un prisma esagonale con la base sul PO. Ha messo la pianta sopra il prospetto; in pianta ha disegnato un esagono e, con linee tratteggiate, un secondo esagono uguale e sovrapposto; nel prospetto ha tratteggiato le generatrici di contorno; nel fianco non ha disegnato l'asse. Indica e correggi gli errori.

32. ●● Osserva la figura 6.7. Perché l'asse maggiore delle ellissi è 50 mm per qualunque inclinazione? Calcola l'asse minore per un'inclinazione dell'asse del cilindro sul PO di 30°, 45°, 60° e 90°.

Verso la verifica

33. ●● **La piramide di Cheope.** Disegna in scala 1:2000 pianta e prospetto di una piramide retta a base quadrata con lato di 230 m e altezza di 146 m, con un lato di base parallelo alla LT. Sul prospetto misura con il goniometro l'angolo delle facce con il suolo; misura poi l'apotema e ricavane la lunghezza reale, controllandola con il teorema di Pitagora.

34. ●●● **Un volume con tetto a due falde.** Un edificio rettangolare misura 40 × 20 m in pianta; i muri sono alti 10 m e il colmo del tetto a due falde è a 15 m. Disegnalo in scala 1:400 nelle tre viste, con il lato lungo parallelo alla LT, il colmo parallelo alla LT e il centro della pianta a 60 mm dal PL e 35 mm dal PV. Nel fianco misura con il goniometro la pendenza delle falde e ricava la loro larghezza reale dalla gronda al colmo (misurala e controllala con il teorema di Pitagora).

35. ●●● **Piramide inclinata.** Piramide quadrata retta, lato 40 mm, altezza 70 mm, con un lato di base perpendicolare al PV; ruotala di 30° attorno allo spigolo di base di destra (che resta sul PO, a 60 mm dal PL, con aggetti da 20 a 60 mm) e disegna prospetto e pianta nella nuova posizione. Calcola la quota del vertice e quella dello spigolo di base sollevato, e indica quali spigoli sono nascosti in pianta.

PER APPROFONDIRE

- [MON] G. Monge, *Géométrie descriptive*: il trattato in cui il metodo delle proiezioni su due piani viene presentato per la prima volta in forma sistematica, con molti esempi di solidi.
- [EUC] Euclide, *Elementi*: il libro XIII costruisce i cinque poliedri regolari e dimostra che non ce ne sono altri.
- [VIT] Vitruvio, *De architectura*, libro I, cap. 2: *ichnographia* e *orthographia*, cioè pianta e alzato, tra gli strumenti dell'architetto.

Glossario del capitolo

Apotema della piramide
In una piramide retta regolare, altezza di una faccia laterale: segmento dal vertice al punto medio di un lato di base.

Cilindro
Solido di rotazione generato da un rettangolo che ruota attorno a un suo lato; ha due basi circolari uguali e parallele.

Cono
Solido di rotazione generato da un triangolo rettangolo che ruota attorno a un cateto; la generatrice vale $\sqrt{(r^2 + h^2)}$.

Generatrice
Segmento che, ruotando attorno all'asse, descrive la superficie laterale di un cilindro o di un cono.

Generatrici di contorno
Le due generatrici di un cilindro o di un cono che, in una vista, formano il contorno apparente laterale.

Gruppo di solidi
Oggetto composto da più solidi semplici accostati o sovrapposti, da disegnare uno alla volta controllando la visibilità reciproca.

Metodo della rotazione
Procedimento per rappresentare un solido inclinato: si ruota il prospetto della posizione fondamentale attorno a un perno e si ricava la nuova pianta da richiami e aggetti invariati.

Piramide
Poliedro con una base poligonale e facce laterali triangolari che convergono nel vertice.

Poliedri regolari
I cinque poliedri convessi con facce poligonali regolari uguali e lo stesso numero di facce in ogni vertice: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

Poliedro
Solido limitato soltanto da poligoni, detti facce.

Posizione fondamentale
Posizione di un solido con le basi parallele a un piano di proiezione, in cui molti elementi compaiono in vera grandezza.

Prisma
Poliedro con due basi poligonali uguali e parallele e facce laterali a forma di parallelogramma; è retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi.

Relazione di Eulero
In ogni poliedro convesso vertici − spigoli + facce = 2.

Sfera
Solido formato dai punti che distano dal centro non più del raggio; in proiezione ortogonale appare come un cerchio in ogni vista.

Solido di rotazione
Solido generato dalla rotazione completa di una figura piana attorno a una retta del suo piano, l'asse.

Solido forato
Solido da cui è stato asportato un altro solido; il foro è in vista dove se ne vede la bocca, tratteggiato nelle altre viste.

Spigolo
Segmento in cui si incontrano due facce di un poliedro.

Spigolo nascosto
Spigolo coperto dal solido nella direzione di vista; si disegna con linea tratteggiata.

Soluzioni

1. C. 12 vertici (6 per base), 18 spigoli (6 + 6 di base e 6 laterali), 8 facce (2 basi e 6 facce laterali); 12 − 18 + 8 = 2.

2. A. Il triangolo rettangolo ruota attorno a un cateto, che diventa l'altezza; l'ipotenusa descrive la superficie laterale.

3. B. La base è parallela al PO, quindi è in vera forma in pianta; nelle altre viste si riduce a un segmento sulla LT.

4. D. In pianta un cerchio con il centro, dove si proietta il vertice; nel prospetto e nel fianco un triangolo isoscele.

5. C. Il prospetto si guarda dal davanti: è in vista il punto più vicino all'osservatore, cioè quello con l'aggetto maggiore.

6. D. Semidiagonale $50 : \sqrt{2} \approx 35{,}36$ mm; spigolo $\sqrt{(35{,}36^2 + 70^2)} \approx 78{,}42$ mm. (74,3 mm è l'apotema.)

7. A. La rotazione attorno a una retta perpendicolare al PV non cambia gli aggetti: ogni vertice sta sul richiamo del prospetto ruotato e sull'orizzontale del suo aggetto.

8. B. Asse maggiore = diametro = 60 mm; asse minore = 60 : 2 = 30 mm (con l'asse inclinato di 30° sul PO è metà del diametro, come nel triangolo di 30° e 60°).

9. C. Prevale la linea in vista; la tratteggiata coperta non si disegna.

10. perpendicolari; rettangoli; poligono regolare.

11. a) Vero. b) Falso: la sfera non ha generatrici; il suo contorno apparente è un cerchio massimo. c) Vero: $g = \sqrt{(r^2 + h^2)}$ è maggiore di h. d) Falso: l'apotema della piramide è l'altezza di una faccia laterale; l'apotema della base sta nel piano della base ed è più corto.

12. 1–c; 2–d; 3–a; 4–b.

13. Traccia: *posizione fondamentale*: basi parallele a un piano di proiezione e, se possibile, facce o spigoli paralleli agli altri; *generatrice di contorno*: generatrice di cilindro o cono che forma il contorno apparente in una vista; *gruppo di solidi*: oggetto formato da più solidi semplici accostati o sovrapposti; *solido forato*: solido da cui è stato asportato un altro solido (per esempio un cilindro).

14. $b'(B')$; $F''(B'')$, perché F ha l'aggetto maggiore ed è in vista.

15. Tetraedro: 4 triangoli equilateri; cubo: 6 quadrati; ottaedro: 8 triangoli equilateri; dodecaedro: 12 pentagoni regolari; icosaedro: 20 triangoli equilateri.

16. Pianta: quadrato di lato 40 mm con x da 50 a 90 mm e aggetti da 25 a 65 mm. Prospetto: rettangolo 40 × 70 mm (x da 50 a 90). Fianco: rettangolo 40 × 70 mm tra gli aggetti 25 e 65 mm, a destra dell'asse verticale. Nessuna linea nascosta visibile: gli spigoli posteriori coincidono con quelli anteriori.

17. Apotema dell'esagono $30 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 25{,}98$ mm. Pianta: esagono con vertici a sinistra e a destra in x = 100 e 40 mm. Prospetto: rettangolo 60 × 60 mm (x da 40 a 100) con due spigoli interni in x = 85 e 55 mm. Fianco: rettangolo 51,96 × 60 mm, tra gli aggetti 14,02 e 65,98 mm, con lo spigolo centrale all'aggetto 40 mm.

18. Prospetto: triangolo equilatero in vera forma, base sulla LT da x = 40 a 90 mm, vertice in x = 65 mm a quota $50 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 43{,}30$ mm. Pianta: rettangolo 50 × 60 mm (aggetti da 5 a 65) diviso dalla linea dello spigolo superiore in x = 65 mm. Fianco: rettangolo 60 × 43,30 mm. In pianta sono in vera lunghezza i tre spigoli laterali (60 mm, paralleli al PO) e i lati orizzontali delle basi (50 mm).

19. Vertici della base a 35,36 mm dal centro; rispetto al centro le loro proiezioni distano 17,68 mm e 30,62 mm in direzione della LT e in direzione perpendico-

lare. Nel prospetto è tratteggiato lo spigolo che scende al vertice con l'aggetto minore (19,38 mm), quello posteriore. Vera lunghezza: arco di centro V' fino alla parallela alla LT, richiamo, $V''A_r''$ ≈ 78,42 mm.

20. Prospetto: triangoli affiancati di base complessiva 51,96 mm (x da 39,02 a 90,98) e altezza 75 mm; fianco: base 60 mm (aggetti da 8 a 68). Sono in vera lunghezza nel **fianco** i due spigoli laterali che vanno ai vertici posti sulla perpendicolare alla LT per il centro (aggetti 8 e 68 mm): sono paralleli al PL e misurano $\sqrt{(30^2 + 75^2)} \approx 80{,}78$ mm. Gli spigoli nascosti coincidono con quelli in vista: nessuna tratteggiata.

21. Pianta: due cerchi di raggio 25 mm con centri in $x = 90$ e 35 mm, aggetto 40 mm. Prospetto: rettangolo 50 × 60 mm (x da 65 a 115) e triangolo isoscele di base 50 mm (x da 10 a 60) e altezza 72 mm. Generatrice: $\sqrt{(25^2 + 72^2)} \approx 76{,}22$ mm, da misurare sul lato obliquo del triangolo (in vera lunghezza).

22. Tre cerchi di raggio 30 mm: prospetto con centro in $x = 70$, quota 30 (tangente alla LT); pianta con centro in $x = 70$, aggetto 40; fianco con centro ad aggetto 40, quota 30. T' coincide con il centro della pianta; T'' è sulla LT in $x = 70$; T''' è sulla LT all'aggetto 40.

23. Profilo nel prospetto: rettangolo 43,30 × 70 mm (distanza tra i lati paralleli dell'esagono × altezza). Ruotando di 30° in senso orario attorno al perno, i vertici del profilo, rispetto al perno, vanno in (−37,50; 21,65), (35,00; 60,62) e (−2,50; 82,27) [ascissa verso destra; quota]. Punto più alto: quota ≈ 82,27 mm; ingombro orizzontale 37,50 + 35,00 = 72,50 mm. Gli aggetti restano tra 15 e 65 mm. In pianta sono nascosti lo spigolo d'appoggio e gli spigoli della base inferiore non di contorno.

24. Asse maggiore = diametro = 50 mm (perpendicolare alla LT); asse minore = 50 : √2 ≈ 35,36 mm (cateto del triangolo rettangolo isoscele con ipotenusa 50 mm). Le due ellissi sono uguali e collegate dalle generatrici di contorno tangenti alle estremità degli assi maggiori; metà dell'ellisse inferiore è tratteggiata.

25. La base è inclinata di 30° sul PO: centro a quota 25 : 2 = 12,50 mm (nel triangolo di 30° e 60° il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa); vertice a quota $12{,}50 + 70 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 12{,}50 + 60{,}62 \approx 73{,}12$ mm. Ellisse di base: assi 50 mm e $50 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 43{,}30$ mm. In pianta V' dista dal centro dell'ellisse 70 : 2 = 35 mm, lungo la parallela alla LT; le generatrici di contorno sono le tangenti da V' all'ellisse.

26. Vedi l'esempio svolto del paragrafo 6.5.2: prospetto e fianco uguali (rettangolo 60 × 20, rettangolo 40 × 45, triangolo di base 50 e vertice a quota 95 mm); in pianta quadrato di 60 mm, cerchio di raggio 25 mm in vista, cerchio di raggio 20 mm tratteggiato, punto centrale.

27. Pianta: quadrato di 60 mm con il cerchio del foro (raggio 15 mm) in vista e gli assi. Prospetto: rettangolo 60 × 40 mm con due tratteggiate verticali in $x = 85$ e 55 mm e l'asse; fianco analogo, con le tratteggiate agli aggetti 25 e 55 mm. Con il foro perpendicolare al PV ad asse a quota 20: nel prospetto un cerchio in vista di raggio 15 mm centrato in ($x = 70$; quota 20); in pianta due tratteggiate parallele agli aggetti, in $x = 85$ e 55 mm, più l'asse; nel fianco due tratteggiate orizzontali a quota 5 e 35 mm, più l'asse.

28. a) cono; b) piramide quadrata (con un lato di base parallelo alla LT, o ruotata); c) cilindro; d) sfera; e) prisma esagonale con due lati di base paralleli alla LT.

29. Nel prospetto è tratteggiato VC, perché C è il vertice con l'aggetto minore (il più lontano dall'osservatore); nel fianco VB, perché B è il vertice più vicino al PL, cioè il più lontano da chi guarda da sinistra. $V''A''$ è più corto del vero: $\sqrt{(17{,}68^2 + 70^2)} \approx 72{,}20$ mm contro 78,42 mm.

30. Piramide esagonale: 7 − 12 + 7 = 2; piramide quadrata: 5 − 8 + 5 = 2; prisma triangolare: 6 − 9 + 5 = 2.

31. 1) La pianta va *sotto* il prospetto (primo diedro). 2) In pianta la base inferiore coincide con quella superiore: si disegna una sola volta, in vista, senza tratteggiate. 3) Un prisma non ha generatrici: i contorni del prospetto sono spigoli in vista, da ripassare con linea continua grossa. 4) L'asse del prisma re-

golare va tracciato con la linea mista punto-linea in tutte le viste in cui compare.

32. Il diametro della base perpendicolare al PV resta parallelo al PO in ogni inclinazione, quindi si proietta in vera lunghezza: 50 mm. L'asse minore si ricava dai triangoli rettangoli di 30° e 60° e di 45°: 50 : 2 = 25 mm (30°), 50 : $\sqrt{2}$ ≈ 35,36 mm (45°), 50 · $\sqrt{3}$: 2 ≈ 43,30 mm (60°), 50 mm (90°, cerchio).

33. Pianta: quadrato di 115 mm con le diagonali; prospetto: triangolo isoscele di base 115 mm e altezza 73 mm. Con il goniometro l'angolo tra il lato obliquo del prospetto e la base misura circa 52° (il valore esatto è 51,8°). Apotema: sul disegno circa 93 mm; controllo $\sqrt{(57{,}5^2 + 73^2)} \approx 92{,}9$ mm, cioè in realtà ≈ 185,9 m (circa 186 m).

34. In scala 1:400: pianta 100 × 50 mm (x da 10 a 110, aggetti da 10 a 60) con la linea di colmo all'aggetto 35 mm; prospetto: rettangolo 100 × 37,5 mm con la linea di gronda a quota 25 mm; fianco: pentagono (rettangolo 50 × 25 mm e triangolo con il vertice a quota 37,5 mm) tra gli aggetti 10 e 60. Pendenza: nel fianco ogni falda sale di 12,5 mm su 25 mm in orizzontale; il goniometro dà circa 26,5° (valore esatto 26,57°). Larghezza della falda: sul disegno circa 28 mm; controllo $\sqrt{(25^2 + 12{,}5^2)} \approx 27{,}95$ mm, cioè $\sqrt{(10^2 + 5^2)} \approx 11{,}18$ m.

35. Profilo nel prospetto, rispetto al perno (ascissa verso destra; quota): vertice in (17,68; 70,62); spigolo di base sollevato in (−34,64; 20,00); con il perno a 60 mm dal PL, il vertice sta a $x \approx 42{,}32$ mm (aggetto 40 mm) e lo spigolo sollevato a $x \approx 94{,}64$ mm (aggetti da 20 a 60 mm). Quota del vertice ≈ 70,62 mm; quota dello spigolo sollevato 20 mm. In pianta l'unico spigolo nascosto è lo spigolo d'appoggio (sul PO), coperto dalla piramide che sporge verso destra; tutti gli altri sono in vista.