CAPITOLO

5

Il metodo delle proiezioni ortogonali

Un oggetto ha tre dimensioni, il foglio due: le proiezioni ortogonali sono il patto che ci permette di non perdere per strada nemmeno un millimetro.

OBIETTIVI

1. Distinguere proiezione centrale, parallela obliqua e parallela ortogonale e riconoscerne le proprietà.
2. Descrivere il sistema dei tre piani di Monge, il primo diedro e il ribaltamento che porta tutto su un solo foglio.
3. Rappresentare un punto, date le sue distanze dai tre piani, e leggerne la posizione da un'epura.
4. Riconoscere le posizioni notevoli di un segmento e stabilire in quale vista appare in vera grandezza.
5. Determinare la vera grandezza di un segmento obliquo con la rotazione e con il teorema di Pitagora.
6. Proiettare figure piane parallele o inclinate rispetto ai piani, costruendo per punti l'ellisse in cui si trasforma una circonferenza inclinata.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Proiettare una figura su un piano 2
5.2 Il metodo di Monge: tre piani e un foglio 5
5.3 Il punto 9
5.4 Il segmento 11
5.5 Le figure piane 15
5.6 Leggere e impostare una tavola di proiezioni 19

Disegno e Storia dell'arte 1 · Parte II · Le proiezioni ortogonali · versione 1.0
Capitolo 5: Il metodo delle proiezioni ortogonali · pagine 131–156 del volume completo · estratto per lo studio

Prova a descrivere a un amico, solo con un disegno, la forma esatta di un oggetto: un portapenne, una scatola di scarpe, la cupola di una chiesa. Una fotografia non basta. Mostra l'oggetto da un solo punto di vista, deforma le misure (gli spigoli lontani sembrano più corti di quelli vicini) e nasconde tutto quello che sta dietro. Un cerchio visto dall'alto potrebbe essere un disco, una sfera, un cilindro, un cono: da una sola immagine non si capisce. Chi deve *costruire* l'oggetto, un falegname, un ingegnere, un muratore, ha bisogno di un disegno da cui ricavare ogni misura con il righello, senza ambiguità.

La soluzione è antica nell'idea e moderna nella forma. Già Vitruvio distingueva la pianta dall'alzato (cap. 1); alla fine del Settecento il matematico francese Gaspard Monge trasformò questa pratica in un metodo rigoroso, la **geometria descrittiva**. Il segreto è guardare l'oggetto da più direzioni scelte con cura, sempre perpendicolari a piani tra loro perpendicolari, e poi disporre le immagini sul foglio secondo regole fisse. In questo capitolo impari quelle regole partendo dagli elementi più semplici: il punto, il segmento, le figure piane. Nel cap. 6 le userai per disegnare i solidi e, da lì, le piante e gli alzati degli edifici che incontrerai nella storia dell'arte.

5.1 Proiettare una figura su un piano

5.1.1 Gli elementi di una proiezione

Accendi una lampada e metti una mano tra la lampada e il muro: sul muro compare un'ombra. Questa esperienza quotidiana contiene tutti gli elementi di una proiezione. Ci sono un **oggetto** (la mano), una superficie che riceve l'immagine (il muro) e delle linee rette che collegano ogni punto dell'oggetto alla sua immagine (i raggi di luce).

In geometria si chiama **proiezione** l'operazione che associa a ogni punto P di una figura un punto di un piano, ottenuto intersecando quel piano con una retta passante per P. Il piano su cui si forma l'immagine si chiama **quadro** o piano di proiezione e si indica spesso con la lettera greca π. Le rette che portano i punti sul quadro sono i **raggi proiettanti**. Il punto da cui escono, quando esiste, è il **centro di proiezione**. L'immagine che si ottiene, cioè l'insieme dei punti del quadro corrispondenti ai punti della figura, si chiama anch'essa proiezione della figura.

Per proiettare un poligono basta proiettare i suoi vertici e unirli nello stesso ordine: la proiezione di un segmento, infatti, è ancora un segmento (o, in un caso particolare che vedremo, un solo punto). È la regola che userai in tutto il capitolo.

5.1.2 Proiezione centrale e proiezione parallela

Le proiezioni si dividono in due grandi famiglie, a seconda di come sono disposti i raggi proiettanti (figura 5.1).

- Nella **proiezione centrale**, detta anche **conica**, tutti i raggi escono da un unico punto S a distanza finita, come i raggi di una lampadina o le linee di vista che convergono nel nostro occhio. I raggi formano un fascio a forma di cono, da cui il nome.
- Nella **proiezione parallela**, detta anche **cilindrica**, i raggi sono tutti paralleli tra loro, come se il centro si fosse allontanato all'infinito. È il caso, con ottima approssimazione, dei raggi del Sole: la nostra stella è così lontana che i raggi che arrivano su un cortile sono praticamente paralleli.

Le due famiglie si comportano in modo molto diverso. Nella proiezione centrale l'immagine di una figura cambia dimensione a seconda della distanza: una figura parallela al quadro dà un'immagine **simile** ma ingrandita o rimpicciolita. Se la lampada dista 2 m dal muro e un cartoncino largo 10 cm, parallelo al muro, sta a 50 cm dalla lampada, l'ombra è larga $10 \times 200 : 50 = 40$ cm; avvicinando il cartoncino al muro l'ombra si restringe. Nella proiezione centrale, inoltre, rette parallele possono diventare rette convergenti: è il principio della **prospettiva**, che riproduce il modo in cui vediamo e che studierai nel secondo biennio.

Nella proiezione parallela, invece, due segmenti paralleli restano paralleli, il punto medio di un segmento si proietta nel punto medio della proiezione e, soprattutto, una figura parallela al quadro si proietta in una figura **congruente**, con le stesse misure. Le proiezioni parallele, quindi, conservano le misure in modo controllabile: per questo sono lo strumento del disegno tecnico.

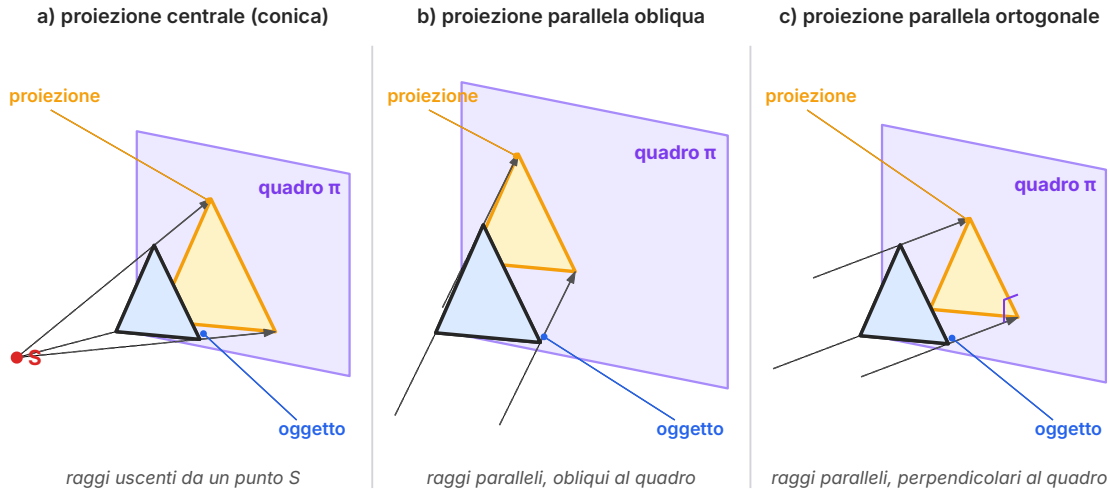

Figura 5.1 Tre modi di proiettare lo stesso triangolo, parallelo al quadro π. Nella proiezione centrale (a) i raggi escono da *S* e l'immagine è ingrandita; nelle proiezioni parallele (b, c) i raggi sono paralleli e l'immagine è congruente all'oggetto; solo in (c) sono anche perpendicolari al quadro.

5.1.3 La proiezione ortogonale

Tra le proiezioni parallele ce n'è una privilegiata. Quando i raggi proiettanti, oltre a essere paralleli tra loro, sono anche **perpendicolari al quadro**, si parla di **proiezione ortogonale** (dal greco *orthós*, «diritto», e *gonía*, «angolo»). Se i raggi sono paralleli ma inclinati sul quadro, la proiezione si dice parallela **obliqua**.

La proiezione ortogonale ha tre proprietà che userai di continuo:

1. una figura **parallela** al quadro si proietta in **vera grandezza**, cioè con la sua forma e le sue misure reali;
2. un segmento **inclinato** rispetto al quadro si proietta più corto di quanto è in realtà (si dice che appare **in scorcio**); non può mai apparire più lungo;
3. un segmento **perpendicolare** al quadro si proietta in un punto, e una figura piana perpendicolare al quadro si proietta in un segmento.

Una sola proiezione ortogonale, però, non basta a individuare un oggetto. Tutti i punti che stanno su uno stesso raggio proiettante hanno la stessa immagine: guardando un punto dall'alto non sappiamo a che altezza si trovi. È come la pianta di un palazzo, che mostra la forma delle stanze ma non dice quanto sono alte. Per togliere l'ambiguità servono almeno **due** proiezioni su piani diversi, e nella pratica se ne usano spesso **tre**.

COLLEGAMENTI

Il Sole a mezzogiorno. L'ombra che un oggetto proietta a terra in una giornata di sole è una proiezione parallela, perché i raggi solari sono praticamente paralleli. Di solito è obliqua: le ombre si allungano al mattino e alla sera. Sarebbe ortogonale soltanto con il Sole esattamente allo zenit, cosa che accade solo tra i due tropici; in Italia, anche a mezzogiorno d'estate, il Sole resta più basso e l'ombra di un palo non scompare mai del tutto.

Matematica. Proiettare ortogonalmente un punto su un piano significa «dimenticare» una delle sue coordinate. Nel piano cartesiano, il punto (3; 5) ha come proiezione sull'asse x il punto (3; 0). Il metodo di Monge fa lo stesso nello spazio, con tre coordinate e tre piani.

5.2 Il metodo di Monge: tre piani e un foglio

5.2.1 Piano orizzontale, verticale e laterale

Immagina l'angolo di una stanza: il pavimento, la parete di fondo e la parete di destra si incontrano a due a due lungo tre spigoli e tutti insieme in un punto. I tre piani di riferimento del metodo delle proiezioni ortogonali sono disposti esattamente così, a due a due perpendicolari (figura 5.2b):

- il **piano orizzontale** **PO**, il «pavimento», su cui si forma la proiezione vista dall'alto, la **pianta**;
- il **piano verticale** **PV**, la «parete di fondo» davanti alla quale stiamo, su cui si forma la vista frontale, il **prospetto**;
- il **piano laterale** **PL**, la «parete di destra», perpendicolare agli altri due, su cui si forma la vista di lato, il **fianco** o vista laterale.

La retta in cui si incontrano PO e PV ha un nome speciale: è la **linea di terra**, abbreviata **LT**. I tre piani, considerati insieme, formano un **triedro** trirettangolo, con il vertice O nel punto comune ai tre piani.

Ogni punto P dello spazio viene proiettato ortogonalmente su ciascuno dei tre piani, e ogni proiezione ha il suo simbolo. In questo libro useremo sempre la notazione seguente:

Tabella 5.1 Le tre proiezioni di un punto e ciò che vi si legge.

Piano	Proiezione di P	Nome della vista	Si legge
orizzontale PO	P' («P primo»)	pianta	distanza dal PL e distanza dal PV
verticale PV	P'' («P secondo»)	prospetto	distanza dal PL e distanza dal PO
laterale PL	P''' («P terzo»)	fianco	distanza dal PV e distanza dal PO

Le distanze di P dai tre piani sono le sue «coordinate». La distanza dal PO, cioè l'altezza del punto, si chiama **quota** e la indicheremo con z. La distanza dal PV, cioè quanto il punto sporge in avanti verso di noi, si chiama **aggetto** e la indicheremo con y. La distanza dal PL la indicheremo con x. Scriveremo, per esempio, $P(62; 52; 48)$ per dire: 62 mm dal PL, 52 mm dal PV, 48 mm dal PO. Ricorda l'ordine: **$(x; y; z)$ = (distanza dal PL; aggetto; quota)**.

5.2.2 I quattro diedri e il metodo europeo

Prolunghiamo PO e PV oltre la linea di terra: i due piani dividono lo spazio in quattro regioni, ciascuna delimitata da due semipiani, che si chiamano **diedri**. Si numerano come mostra la sezione della figura 5.2a, vista di lato: il **primo diedro** sta sopra il PO e davanti al PV, dalla parte dell'osservatore; il secondo sopra il PO e dietro il PV; il terzo sotto e dietro; il quarto sotto e davanti.

In questo libro, come nella scuola italiana e nella normativa europea, l'oggetto si colloca sempre nel **primo diedro**: l'osservatore guarda, l'oggetto sta in mezzo, i piani di proiezione stanno dietro, come uno schermo su cui l'oggetto getta la sua «ombra ortogonale». È il **metodo europeo**, indicato nelle norme ISO con la lettera E (o *first angle*, «primo angolo»). Nei paesi anglosassoni si usa spesso il **metodo americano**, ISO A, che colloca l'oggetto nel terzo diedro, con il piano di proiezione tra l'osservatore e l'oggetto: le viste sono le stesse, ma disposte sul foglio in posizioni scambiate. Per evitare equivoci, nei disegni tecnici un piccolo simbolo convenzionale nel cartiglio, un tronco di cono rappresentato in due viste, dichiara quale dei due metodi è stato usato.

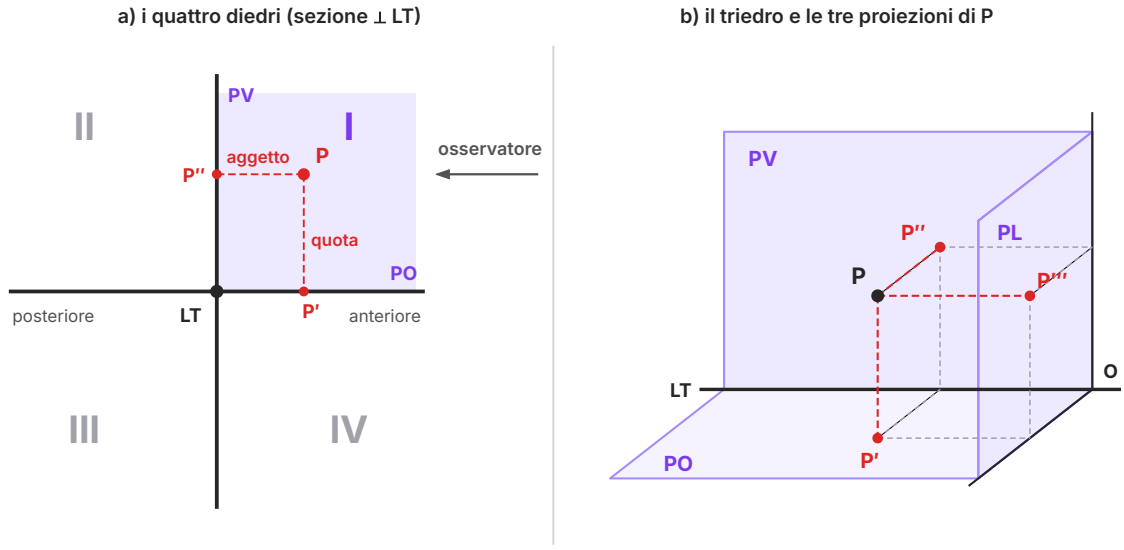

Figura 5.2 I piani di proiezione. (a) Sezione perpendicolare alla linea di terra: PO e PV dividono lo spazio in quattro diedri; il punto *P* sta nel primo, e le sue distanze dal PO e dal PV sono la quota e l'aggetto. (b) Il triedro PO, PV, PL: le proiezioni *P'*, *P''*, *P'''* sono i piedi delle perpendicolari condotte da *P* ai tre piani.

5.2.3 Il ribaltamento: dallo spazio al foglio

Le tre proiezioni stanno su tre piani diversi, ma noi disegniamo su un foglio solo. Il passo decisivo del metodo di Monge è il **ribaltamento**: si «aprono» i piani come le pagine di un libro finché giacciono tutti sul piano del PV (figura 5.3a).

- Il **PO** ruota di 90° verso il basso attorno alla linea di terra: la parte di pavimento che stava davanti a noi va a finire **sotto** la LT.
- Il **PL** ruota di 90° attorno alla retta in cui incontra il PV (la verticale per *O*) e si apre verso destra: va a finire **a destra** del PV.

Il risultato è il disegno piano che si chiama **epura** (dal francese *épure*, «disegno definitivo»). In questo libro adottiamo sempre la stessa disposizione, che è quella del metodo europeo: **il prospetto in alto a sinistra, la pianta sotto il prospetto, il fianco a destra del prospetto**. La linea di terra è la retta orizzontale che separa prospetto e pianta; la verticale per *O* separa prospetto e fianco. Il quarto quadrante, in basso a destra, non contiene nessun piano: lo useremo come «stanza di servizio» per trasportare le misure.

Nota un dettaglio importante. Dopo il ribaltamento, la LT compare due volte nel disegno con due significati: a sinistra dell'asse verticale è lo spigolo PO–PV; a destra è lo spigolo PO–PL, che nel ribaltamento si è disteso sulla stessa retta orizzontale. Lo stesso vale per la verticale per *O*: sopra la LT è lo spigolo PV–PL, sotto la LT è lo spigolo PO–PL. Per questo, quando un punto sta sul PO, la sua proiezione sul fianco cade sulla LT, a destra dell'asse (lo vedrai nel paragrafo 5.3).

APPROFONDIMENTO

Gaspard Monge e la geometria descrittiva

Gaspard Monge (Beaune 1746 – Parigi 1818) insegnava alla scuola militare del genio di Mézières, dove si formavano gli ingegneri delle fortificazioni. Per progettare un bastione bisognava calcolare altezze, pendenze e linee di tiro: compiti lunghi, che si risolvevano con calcoli aritmetici complessi. Monge mise a punto un procedimento grafico che risolveva gli stessi problemi con riga e compasso, rappresentando gli oggetti dello spazio con due proiezioni ortogonali coordinate. Secondo la tradizione, per alcuni anni il metodo fu tenuto riservato come segreto militare.

Durante la Rivoluzione francese Monge fu tra i fondatori dell'École polytechnique (1794) e tenne lezioni pubbliche di geometria descrittiva all'École normale; il testo di quelle lezioni fu pubblicato nel 1799 con il titolo *Géométrie descriptive*. Da allora il metodo è la base del disegno tecnico in tutto il mondo. Anche i programmi di disegno al computer (CAD) che usano architetti e ingegneri producono, partendo da un modello tridimensionale, le stesse viste ortogonali che stai imparando a tracciare a mano.

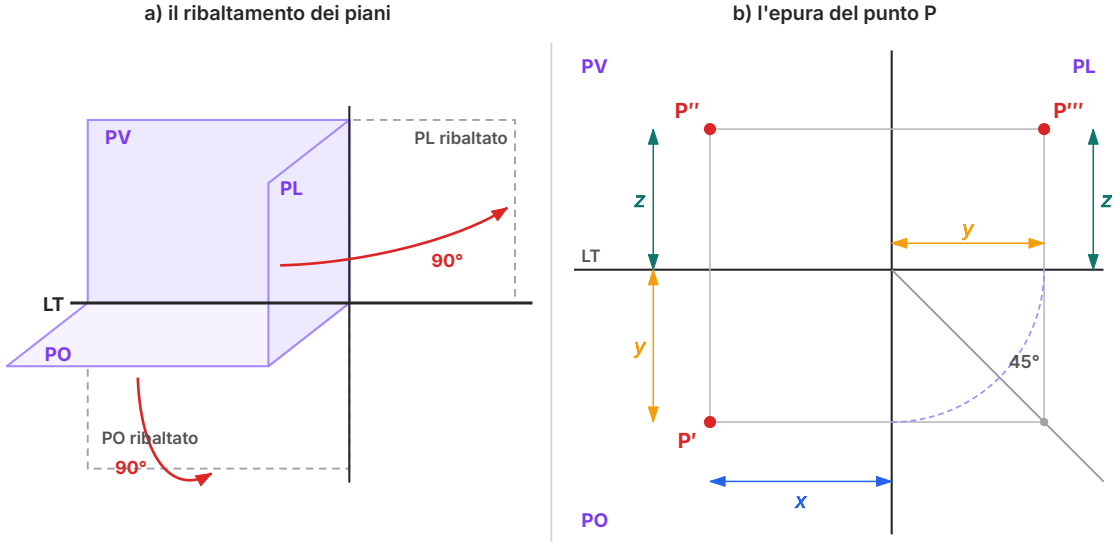

Figura 5.3 Dal triedro all'epura. (a) Il PO ruota di 90° attorno alla LT verso il basso, il PL ruota di 90° attorno alla verticale per *O* verso destra. (b) L'epura del punto *P*(62; 52; 48): la distanza *x* dal PL si legge in prospetto e in pianta, la quota *z* in prospetto e in fianco, l'aggetto *y* in pianta e in fianco, trasportato dalla retta a 45° (o dall'arco di centro *O*).

5.2.4 Linee di richiamo e retta a 45°

Le tre proiezioni di uno stesso punto non stanno sul foglio in posizioni qualsiasi: sono legate da linee sottili, le **linee di richiamo** (o di riporto), tracciate con linea continua fine. Guarda la figura 5.3b.

- P' e P'' stanno sulla **stessa perpendicolare alla LT**, perché entrambe distano x dal PL. Sopra la LT si legge la quota z (distanza di P'' dalla LT), sotto la LT l'aggetto y (distanza di P' dalla LT).
- P'' e P''' stanno sulla **stessa parallela alla LT**, perché hanno la stessa quota z.
- P''' dista dall'asse verticale quanto P' dista dalla LT: entrambe le distanze sono l'aggetto y.

L'ultima regola richiede un trasporto di misura dalla pianta al fianco. Lo si fa con la **retta a 45°**, tracciata con la squadra nel quadrante in basso a destra, a partire da O: da P' si conduce l'orizzontale fino alla retta a 45°, poi da lì la verticale fino all'altezza di P''. Il triangolo che si forma è rettangolo isoscele, quindi la distanza orizzontale ottenuta è uguale a quella verticale di partenza. In alternativa si punta il compasso in O e si traccia un quarto di circonferenza di raggio y, che porta la misura dalla verticale all'orizzontale; oppure si riporta y direttamente con il compasso o con il righello.

> **DA RICORDARE**
>
> **Le tre regole dell'allineamento.** 1. Pianta e prospetto sono allineati in verticale: hanno la stessa larghezza. 2. Prospetto e fianco sono allineati in orizzontale: hanno la stessa altezza. 3. Pianta e fianco hanno la stessa profondità, che si trasporta con la retta a 45°. Ogni vista mostra due delle tre dimensioni dell'oggetto, e ogni dimensione compare in due viste: se due viste non «tornano», c'è un errore.

5.3 Il punto

5.3.1 Un punto nello spazio

Il punto è l'elemento più semplice e anche il più importante: ogni figura, per quanto complessa, si disegna proiettando uno per uno i suoi vertici. Per rappresentare un punto di cui conosci le tre distanze dai piani si procede sempre nello stesso ordine.

ESEMPIO SVOLTO

Disegnare l'epura del punto $A(36; 26; 34)$, cioè a 36 mm dal PL, 26 mm dal PV e 34 mm dal PO.

1. Traccia la LT e l'asse verticale, che si incontrano in O, e la retta a 45° nel quadrante in basso a destra. 2. A sinistra dell'asse, a 36 mm, traccia una linea di richiamo perpendicolare alla LT. 3. Su di essa segna A'' a 34 mm **sopra** la LT (la quota) e A' a 26 mm **sotto** la LT (l'aggetto). 4. Da A'' conduci l'orizzontale verso destra. 5. Da A' conduci l'orizzontale fino alla retta a 45°, poi sali in verticale fino a incontrare l'orizzontale di A'': l'incrocio è A''', a 26 mm a destra dell'asse e a 34 mm sopra la LT.

Controllo: A' e A''' devono avere la stessa distanza (26 mm) rispettivamente dalla LT e dall'asse verticale; A'' e A''' la stessa quota. Il risultato è la figura 5.4a.

Il procedimento si può anche invertire, ed è questo che fa chi *legge* un disegno: dalle proiezioni si ricavano le distanze del punto dai piani e quindi la sua posizione nello spazio. Due proiezioni bastano a individuare il punto; la terza serve da controllo e, quando si disegnano solidi, a rendere più chiara la forma.

5.3.2 Punti in posizioni particolari

Quando una delle tre distanze è zero, il punto sta su uno dei piani di proiezione, e alcune delle sue proiezioni cadono sulle linee di riferimento (figura 5.4).

- **Punto sul PO** (quota zero): B'' sta sulla LT, e anche B''' sta sulla LT, a destra dell'asse. La pianta B' coincide con il punto stesso, che sta sul pavimento.
- **Punto sul PV** (aggetto zero): C' sta sulla LT, C''' sta sull'asse verticale. Il prospetto C'' coincide con il punto stesso.
- **Punto sul PL** (distanza zero dal PL): P' e P'' stanno sull'asse verticale, rispettivamente sotto e sopra la LT.
- **Punto sulla LT** (quota e aggetto zero): D' e D'' coincidono sulla LT, e D''' cade in O.

La regola generale è semplice: **un punto che giace su un piano di proiezione coincide con la propria proiezione su quel piano**, e le sue proiezioni sugli altri due piani cadono sulle rette in cui quel piano li incontra.

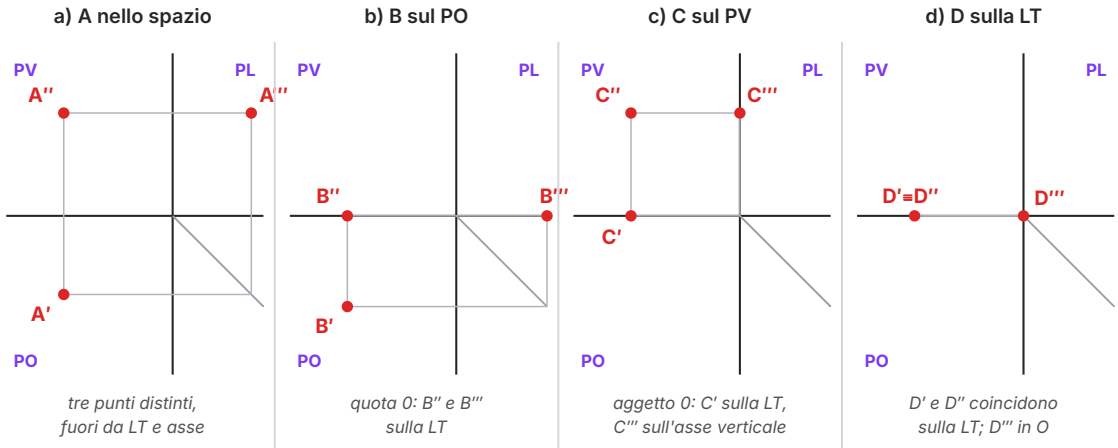

Figura 5.4 Il punto in quattro posizioni. In ogni riquadro la retta orizzontale è la LT, quella verticale l'asse PV–PL, la diagonale la retta a 45°. Quando una distanza è zero, alcune proiezioni cadono sulla LT o sull'asse.

ERRORE FREQUENTE

Tre sbagli tipici nell'epura del punto. 1. Disegnare P''' a sinistra dell'asse o misurare la sua distanza dall'asse come quella di P'': in fianco la distanza orizzontale dall'asse è l'**aggetto**, non la distanza dal PL. 2. Tracciare la retta a 45° nel quadrante sbagliato: va in basso a destra, l'unico che non contiene viste. 3. Disegnare P' e P'' su verticali leggermente diverse: le linee di richiamo vanno sempre tracciate con la squadra appoggiata alla riga, perpendicolari alla LT, mai «a occhio».

5.4 Il segmento

5.4.1 Le posizioni notevoli

Per proiettare un segmento AB si proiettano i due estremi e si uniscono le proiezioni omonime: A' con B', A'' con B'', A''' con B'''. Che cosa si ottiene dipende dalla posizione del segmento rispetto ai tre piani. Le posizioni notevoli sono sei e hanno nomi precisi, che vale la pena imparare perché ricorrono nel disegno dei solidi e dell'architettura (figura 5.5 e tabella 5.2).

Tre posizioni sono **perpendicolari** a un piano, e quindi parallele agli altri due:

- il segmento **verticale**, perpendicolare al PO, come lo spigolo di una parete o un palo: in pianta è un punto, in prospetto e in fianco è in vera grandezza;
- il segmento **di punta**, perpendicolare al PV, cioè diretto verso l'osservatore, come una trave che sporge dalla facciata: in prospetto è un punto, in pianta e in fianco è in vera grandezza;

- il segmento **fronto-orizzontale**, perpendicolare al PL e quindi parallelo alla LT, come il bordo di un gradino: in fianco è un punto, in pianta e in prospetto è in vera grandezza.

Due posizioni sono **parallele a un solo piano** e inclinate sugli altri due:

- il segmento **frontale**, parallelo al PV e inclinato sul PO, come la falda di un tetto vista di fronte: in prospetto è in vera grandezza e vi si legge anche il suo vero angolo con il PO; in pianta è parallelo alla LT e in fianco è verticale, entrambi in scorcio;
- il segmento **orizzontale**, parallelo al PO e inclinato sul PV: in pianta è in vera grandezza, in prospetto e in fianco è orizzontale e in scorcio.

Esiste anche il segmento **di profilo**, parallelo al PL e inclinato sugli altri due: in vera grandezza nel fianco, perpendicolare alla LT in pianta e in prospetto. Infine c'è il caso più comune, il segmento **generico** (od obliquo), inclinato su tutti e tre i piani: nessuna delle tre proiezioni è in vera grandezza.

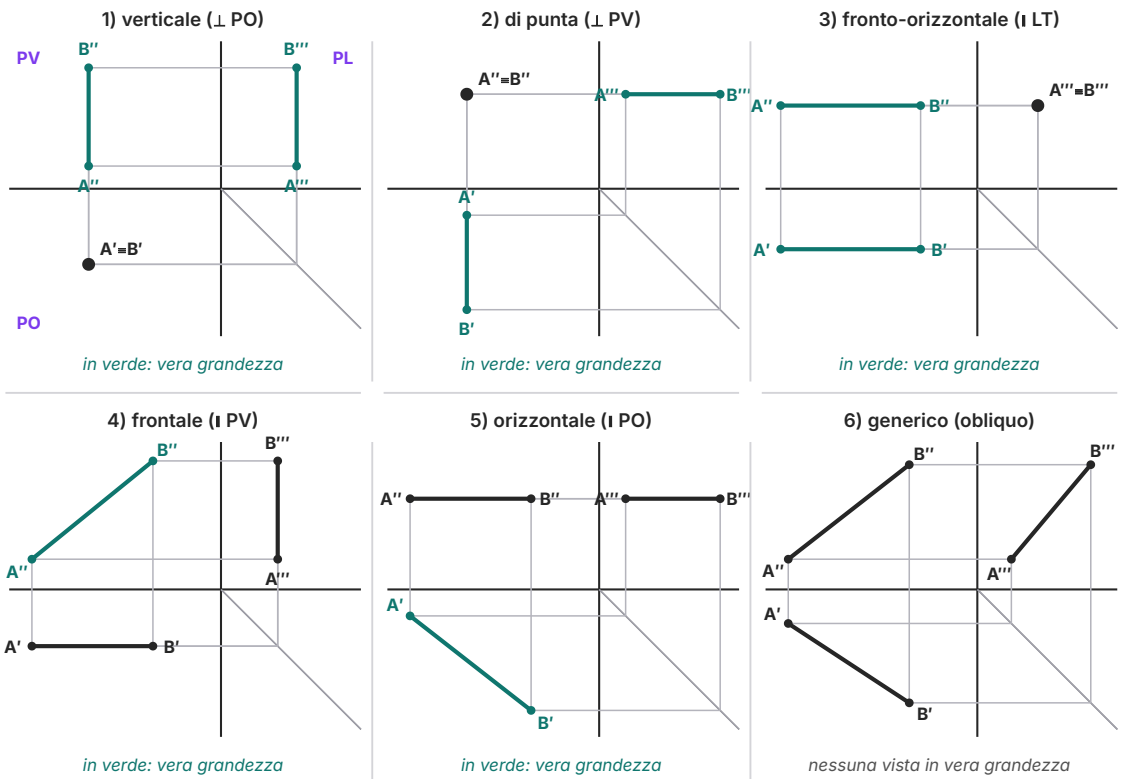

Figura 5.5 Le posizioni notevoli del segmento *AB*, ciascuna nelle tre viste (in alto a sinistra il prospetto, sotto la pianta, a destra il fianco). In verde le viste in vera grandezza; un segmento perpendicolare a un piano si riduce a un punto su quel piano.

Tabella 5.2 Le posizioni del segmento e le sue proiezioni (v.g. = vera grandezza).

Posizione	Pianta (PO)	Prospetto (PV)	Fianco (PL)
verticale (⊥ PO)	punto	v.g., ⊥ LT	v.g., verticale
di punta (⊥ PV)	v.g., ⊥ LT	punto	v.g., orizzontale
fronto-orizzontale (⊥ PL)	v.g., ∥ LT	v.g., ∥ LT	punto
frontale (∥ PV)	scorcio, ∥ LT	v.g. e angolo vero con il PO	scorcio, verticale
orizzontale (∥ PO)	v.g. e angolo vero con il PV	scorcio, ∥ LT	scorcio, orizzontale
di profilo (∥ PL)	scorcio, ⊥ LT	scorcio, ⊥ LT	v.g.
generico	scorcio	scorcio	scorcio

5.4.2 Vera grandezza e scorcio

Dalla tabella si ricava la regola fondamentale: **un segmento appare in vera grandezza soltanto sul piano a cui è parallelo**. Su un piano a cui è inclinato appare accorciato, e lo scorcio è tanto maggiore quanto più il segmento è inclinato: al limite, quando diventa perpendicolare al piano, la proiezione si riduce a un punto.

Se un segmento non è parallelo a nessun piano, la sua lunghezza vera non si può misurare direttamente sul disegno. Si può però **calcolare**. Pensa al segmento AB come all'ipotenusa di un triangolo rettangolo «nascosto» nello spazio: un cateto è orizzontale ed è lungo quanto la pianta $A'B'$; l'altro è verticale ed è lungo quanto il dislivello, cioè la differenza tra le quote dei due estremi.

IN SINTESI

$$AB^2 = (A'B')^2 + (z_B - z_A)^2$$

La vera lunghezza di un segmento è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti la lunghezza della pianta e il dislivello tra gli estremi. Allo stesso modo si può usare il prospetto e la differenza degli aggetti: $AB^2 = (A''B'')^2 + (y_B - y_A)^2$. Se si conoscono le tre coordinate, $AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

ERRORE FREQUENTE

«Misuro $A'B'$ sulla pianta e ho la lunghezza del segmento»: falso, a meno che il segmento non sia orizzontale. Allo stesso modo l'angolo che $A''B''$ forma con la LT è l'angolo vero del segmento con il PO **solo** se il segmento è frontale. Prima di misurare un segmento o un angolo su una vista, chiediti sempre: questo elemento è parallelo al piano su cui lo sto misurando?

5.4.3 Trovare la vera grandezza per rotazione

Oltre al calcolo, esiste un modo grafico, elegante e molto usato, per ottenere la vera grandezza di un segmento generico: farlo **ruotare** finché diventa parallelo a un piano di proiezione. Facciamo ruotare il segmento AB attorno alla retta verticale che passa per A, come una porta attorno ai suoi cardini (figura 5.6).

1. Durante la rotazione l'estremo B descrive una circonferenza orizzontale: la sua quota non cambia e la lunghezza della pianta non cambia. In pianta, quindi, B' si muove su un arco di centro A' e raggio $A'B'$. Fermiamo la rotazione quando B' arriva in B'_1, sulla parallela alla LT passante per A'.
2. Ora il segmento ruotato AB_1 ha la pianta parallela alla LT: è un segmento **frontale**. Da B'_1 si conduce la linea di richiamo verso l'alto fino all'orizzontale di B'' (la quota è rimasta la stessa): si trova B''_1.
3. Il segmento $A''B''_1$ è la **vera grandezza** di AB, e l'angolo α che forma con la LT è l'angolo vero tra il segmento e il PO.

ESEMPIO SVOLTO

Dati: $A(90; 12; 12)$ e $B(40; 42; 52)$, in millimetri. Trova la vera grandezza di AB e l'angolo con il PO.

Pianta. In pianta la distanza orizzontale tra A' e B' è $90 - 40 = 50$ mm e quella verticale è $42 - 12 = 30$ mm, quindi $A'B' = \sqrt{(50^2 + 30^2)} = \sqrt{3400} \approx 58{,}31$ mm. È questo il raggio dell'arco di rotazione.

Vera grandezza. Il dislivello è $52 - 12 = 40$ mm. Quindi $AB = \sqrt{(3400 + 40^2)} = \sqrt{5000} \approx 70{,}71$ mm. Sul disegno, $A''B''_1$ deve misurare circa 70,7 mm: se misuri 69 o 72 mm, controlla l'arco e le linee di richiamo.

Angolo con il PO. Nel triangolo rettangolo di cateti 58,31 mm (orizzontale) e 40 mm (verticale) l'angolo α si misura con il goniometro sul disegno: risulta $\alpha \approx 34{,}4°$. Nota che il prospetto originale $A''B''$, lungo $\sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64{,}03$ mm, forma con la LT un angolo di circa 38,7°: non è l'angolo vero, perché il segmento non è frontale.

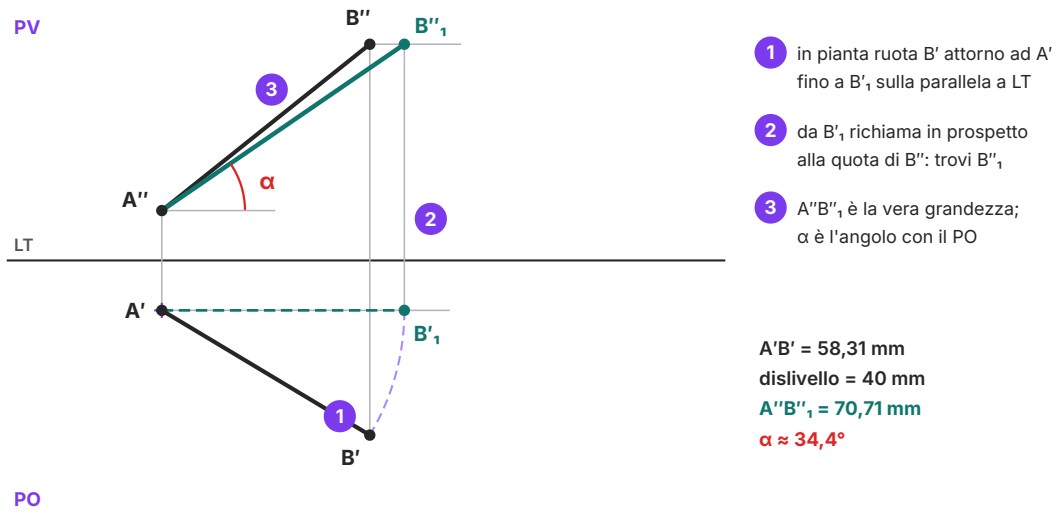

Figura 5.6 Vera grandezza di un segmento generico per rotazione. Il segmento *AB* dell'esempio svolto ruota attorno alla verticale per *A* finché diventa frontale (AB_1); il suo prospetto $A''B''_1$ è allora in vera grandezza e forma con la LT l'angolo vero α.

Allo stesso modo si potrebbe ruotare il segmento attorno a una retta di punta per renderlo orizzontale e leggerne la vera grandezza in pianta; i passaggi sono gli stessi, con i ruoli di pianta e prospetto scambiati. Per quest'anno basta il caso della figura.

5.5 Le figure piane

5.5.1 Figure parallele a un piano di proiezione

Una figura piana (un triangolo, un quadrato, un esagono, un cerchio) si proietta proiettando i suoi vertici, o, per il cerchio, un numero sufficiente di punti del contorno. Il caso più semplice è quello di una figura parallela a uno dei tre piani, ed è anche il più frequente nel disegno architettonico: un pavimento è parallelo al PO, una facciata al PV.

La regola discende direttamente da quella dei segmenti: **una figura parallela a un piano di proiezione si proietta su quel piano in vera forma, e sugli altri due piani in un segmento**, parallelo alla LT o all'asse verticale (figura 5.7). Il motivo è che il piano della figura è perpendicolare agli altri due piani di proiezione, e tutti i raggi proiettanti condotti dai suoi punti verso quei piani giacciono nel piano stesso.

- Un **esagono regolare parallelo al PO**, a quota z: in pianta si vede l'esagono vero, costruito come nel cap. 3; in prospetto e in fianco si vede un segmento orizzontale a quota z. La lunghezza del segmento in prospetto è la larghezza dell'esagono misurata parallelamente alla

LT; in fianco è la sua profondità. Se l'esagono ha due vertici opposti su una parallela alla LT e lato l, il prospetto è lungo $2l$ e il fianco $l\sqrt{3} \approx 1{,}732\,l$.

- Un **triangolo equilatero parallelo al PO**, con un lato parallelo alla LT: in prospetto si vede un segmento lungo quanto il lato, in fianco un segmento lungo quanto l'altezza del triangolo.
- Un **pentagono regolare parallelo al PV**: in prospetto il pentagono vero, in pianta e in fianco due segmenti.
- Una **circonferenza parallela al PV**, di diametro d: in prospetto la circonferenza vera, in pianta un segmento parallelo alla LT lungo d, in fianco un segmento verticale lungo d. Sui segmenti si segna con la linea mista l'asse che passa per il centro.

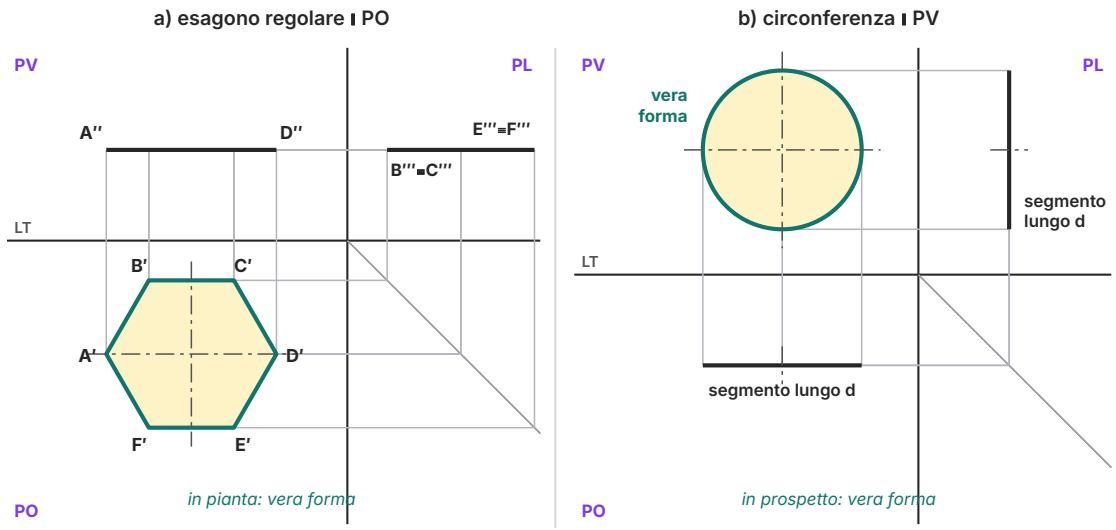

Figura 5.7 Figure parallele a un piano di proiezione. (a) Esagono regolare parallelo al PO: in pianta è in vera forma, in prospetto e in fianco si riduce a segmenti orizzontali. (b) Circonferenza parallela al PV, di diametro d: in prospetto è in vera forma, in pianta e in fianco è un segmento lungo d. Gli assi sono in linea mista punto-linea.

5.5.2 Figure perpendicolari a un piano e inclinate sugli altri due

Pensa a un tetto a una falda, o al coperchio aperto di un portatile visto di fronte. Il piano della figura è **perpendicolare al PV**, ma inclinato di un angolo α rispetto al PO. Un piano perpendicolare a un piano di proiezione si chiama **piano proiettante** rispetto a quel piano, perché tutti i raggi proiettanti condotti dai suoi punti verso quel piano giacciono in esso: la sua proiezione si riduce a una retta, la sua **traccia** (indicata con t'' quando sta sul PV).

Ne segue che:

- in **prospetto** tutta la figura si riduce a un segmento posato sulla traccia t'', inclinato di α sulla LT; la sua lunghezza è la vera misura della figura nella direzione della pendenza;

- in **pianta** le misure perpendicolari al PV (la profondità) restano vere, mentre quelle nella direzione della pendenza si accorciano: la figura appare «schiacciata» nel verso parallelo alla LT;
- in **fianco** la profondità resta vera e le misure nella direzione della pendenza si accorciano in un altro modo, e appaiono in verticale.

Di quanto si accorciano? Una misura m presa lungo la pendenza ha in pianta una lunghezza che dipende solo dall'angolo α. Per $\alpha = 30°$ la pianta misura circa 0,866 m e il fianco 0,5 m; per $\alpha = 45°$ entrambe le viste misurano circa 0,707 m; per $\alpha = 60°$ i valori si scambiano rispetto ai 30°. Nel triennio, in trigonometria, scoprirai che questi fattori sono il coseno e il seno di α. Per ora puoi ricavarli dal triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, metà di un triangolo equilatero, che hai costruito nel cap. 2: il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa, l'altro è $(\sqrt{3} : 2) \approx 0{,}866$ volte l'ipotenusa.

ESEMPIO SVOLTO

Un quadrato inclinato. Un quadrato di lato 50 mm giace in un piano perpendicolare al PV e inclinato di 30° sul PO; un suo lato appoggia sul PO ed è perpendicolare al PV. Come appaiono le tre viste?

Prospetto: un segmento lungo 50 mm (il lato in pendenza, in vera grandezza) inclinato di 30° sulla LT; l'estremo alto sta a quota $50 \times 0{,}5 = 25$ mm. **Pianta:** un rettangolo con i lati perpendicolari alla LT lunghi 50 mm (veri: sono di punta) e i lati paralleli alla LT lunghi $50 \times 0{,}866 \approx 43{,}30$ mm. **Fianco:** un rettangolo largo 50 mm (la profondità) e alto 25 mm. La pianta, quindi, non è un quadrato: è un rettangolo, perché il quadrato non è parallelo al PO.

5.5.3 Il metodo del ribaltamento: la circonferenza inclinata

Con un quadrato basta proiettare quattro vertici. Con una figura più complessa, o con una circonferenza, serve un metodo che parta dalla figura in vera forma. È il **metodo del ribaltamento** (o del piano ausiliario): si fa ruotare il piano inclinato attorno alla sua traccia fino a farlo coincidere con un piano di proiezione, vi si disegna la figura vera, poi si riporta ogni punto nella posizione reale. Applichiamolo a una circonferenza di raggio 25 mm in un piano perpendicolare al PV e inclinato di 30° sul PO (figura 5.8).

1. **Traccia del piano.** In prospetto disegna la traccia t'', la retta che parte dal punto H'' della LT e forma con essa l'angolo di 30°.
2. **Figura in vera forma.** Immagina di far ruotare il piano attorno a t'' fino ad adagiarlo sul PV. Ogni punto del piano si porta a una distanza da t'' uguale al suo aggetto. Disegna quindi la circonferenza vera con il centro a una distanza da t'' pari all'aggetto del centro (qui 40 mm), e dividila in 12 parti uguali (cap. 3), numerando i punti.

3. **Ritorno al prospetto.** Da ciascun punto conduci la perpendicolare a *t*″: il piede è la proiezione *P*″ del punto nella posizione reale. Tutti i punti del prospetto stanno sulla traccia, e la circonferenza si riduce a un segmento lungo 50 mm, il suo diametro.
4. **Pianta.** Da ogni punto del prospetto scendi con la linea di richiamo; su di essa segna, sotto la LT, l'aggetto del punto, cioè la sua distanza da *t*″ nella figura ribaltata (la riporti con il compasso). Unisci i 12 punti con il curvilineo.
5. **Fianco.** Dai punti del prospetto conduci le orizzontali e dalla pianta trasporta gli aggetti con la retta a 45°: gli incroci danno i 12 punti del fianco.

Il risultato è una curva chiusa, simmetrica rispetto a due assi perpendicolari: un'**ellisse**. In pianta l'asse maggiore è perpendicolare alla LT e misura 50 mm, quanto il diametro; l'asse minore è parallelo alla LT e misura 50 × 0,866 ≈ 43,30 mm. In fianco l'asse maggiore è orizzontale e misura ancora 50 mm, l'asse minore è verticale e misura 50 × 0,5 = 25 mm.

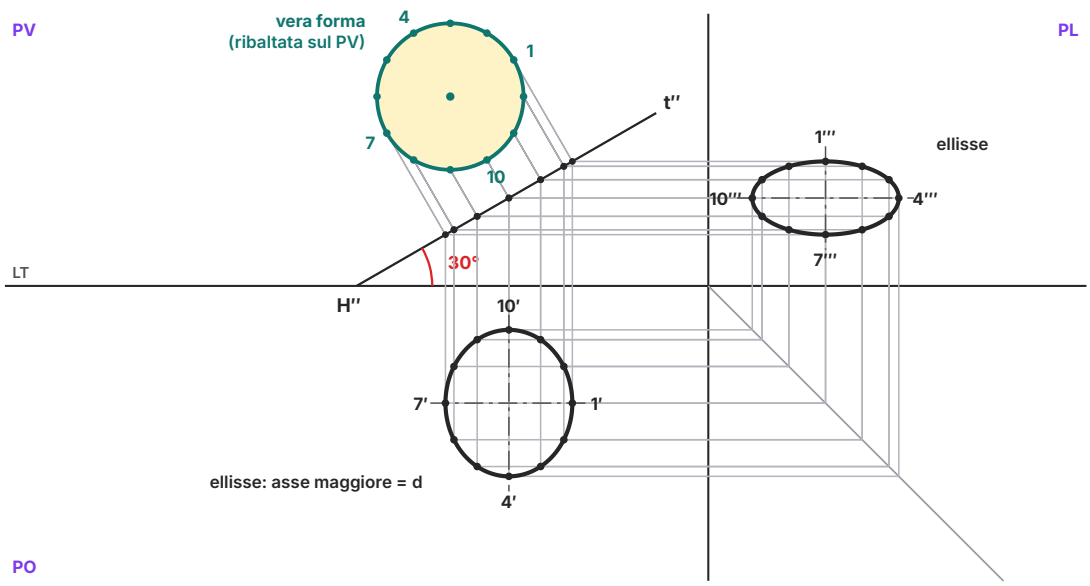

Figura 5.8 Circonferenza di raggio 25 mm in un piano perpendicolare al PV e inclinato di 30° sul PO. La vera forma, ribaltata sul PV attorno alla traccia *t*″, è divisa in 12 parti; ogni punto è riportato sulla traccia e da lì in pianta e in fianco. Le proiezioni sono ellissi con l'asse maggiore uguale al diametro (50 mm) e assi minori di circa 43,3 mm (pianta) e 25 mm (fianco).

ERRORE FREQUENTE

Ellisse, non ovale. La proiezione di una circonferenza inclinata è un'**ellisse**, una curva che cambia curvatura con continuità; non è un ovale a quattro centri come quelli del cap. 4, formati da archi di circonferenza raccordati. L'ovale può servire, in un disegno a mano libera, ad approssimare l'ellisse, ma in un'epura i punti si costruiscono uno per uno e si uniscono con il curvilineo. E ricorda: l'**asse maggiore dell'ellisse è sempre uguale al diametro** della circonferenza, perché il diametro di punta resta parallelo al piano di proiezione; solo l'altro asse si accorcia.

Il metodo vale per qualsiasi figura piana in un piano perpendicolare al PV: per un esagono basta riportare sei vertici invece di dodici punti. Se l'angolo diventa 90°, il piano è parallelo al PL: in fianco si vede la circonferenza vera e in pianta un segmento. Se l'angolo è 0°, il piano coincide con un piano orizzontale e la circonferenza vera compare in pianta. Le figure inclinate su tutti e tre i piani richiedono procedimenti più lunghi, che non affronteremo quest'anno.

5.6 Leggere e impostare una tavola di proiezioni

5.6.1 Impostare l'epura sul foglio

Una tavola di proiezioni si esegue su un foglio A4 squadrato con le norme del cap. 1. Prima di tracciare qualsiasi linea conviene decidere dove cadranno le tre viste, perché devono stare tutte nella cornice. Nella maggior parte degli esercizi di questo libro userai questa impostazione: foglio in verticale, **LT orizzontale a 140 mm dal bordo superiore della cornice**, **asse verticale a 120 mm dal bordo sinistro della cornice**, retta a 45° nel quadrante in basso a destra. In una cornice di 190 × 277 mm restano così 120 mm a sinistra dell'asse per prospetto e pianta e 70 mm a destra per il fianco: le distanze dal PL dei punti devono stare entro 120 mm, gli aggetti entro 70 mm.

L'ordine di lavoro è sempre lo stesso: prima le linee di riferimento (LT, asse, retta a 45°) con linea fine; poi, con la mina dura e il tratto leggero, le linee di richiamo e le costruzioni; infine il ripasso dei contorni con linea continua grossa. Le lettere si scrivono in stampatello, vicino ai punti ma senza toccare le linee, con gli apici ben visibili.

5.6.2 Leggere le tre viste

Saper leggere un'epura è importante quanto saperla disegnare: è quello che fa un tecnico davanti al progetto di un altro. Per leggere un disegno in proiezioni ortogonali conviene seguire alcuni passi.

- **Riconoscere le viste.** Il prospetto sta in alto a sinistra, la pianta sotto, il fianco a destra. Ognuna mostra due dimensioni: il prospetto larghezza e altezza, la pianta larghezza e pro-

fondità, il fianco profondità e altezza.

- **Seguire le lettere.** Ogni vertice compare in tutte e tre le viste con la stessa lettera e un diverso numero di apici. Quando due punti si sovrappongono in una vista, si scrive, per esempio, $A'' \equiv B''$: il segno ≡ significa «coincide con».
- **Interpretare il tipo di linea.** La linea continua grossa indica contorni e spigoli in vista; la **tratteggiata** contorni e spigoli nascosti, che si trovano dietro altre parti dell'oggetto rispetto all'osservatore; la **mista fine punto-linea** indica gli assi di simmetria e gli assi dei cerchi; la continua fine le linee di richiamo e di costruzione.
- **Controllare gli allineamenti.** Le tre regole del paragrafo 5.2.4 permettono di scoprire subito un errore: un punto della pianta che non sta sotto il suo prospetto, un fianco più alto del prospetto.

Con i solidi del cap. 6 le linee nascoste diventeranno frequenti: uno spigolo sul retro di un prisma, per esempio, si vede in prospetto solo come tratteggio. Ricorda che nel metodo europeo l'osservatore guarda il prospetto stando davanti, la pianta stando sopra e il fianco stando a **sinistra** dell'oggetto: è per questo che il fianco, dopo il ribaltamento, si trova a destra. Una linea è nascosta se, lungo la direzione di quello sguardo, c'è una parte dell'oggetto tra l'osservatore e la linea stessa.

APPROFONDIMENTO

Pianta, parete di fuori, parete di dentro

Molto prima di Monge, gli architetti del Rinascimento disegnavano già gli edifici in viste coordinate. Nella cosiddetta *Lettera a Leone X* (c. 1519), attribuita a Raffaello con la collaborazione di Baldassarre Castiglione, si propone di rilevare i monumenti della Roma antica con tre disegni: la pianta, la «parete di fuori» (l'alzato esterno) e la «parete di dentro» (l'alzato interno), eseguiti senza le deformazioni della prospettiva, in modo che vi si possano misurare le vere grandezze. È lo stesso principio delle proiezioni ortogonali: rinunciare all'illusione della profondità per guadagnare la misura esatta.

5.6.3 Dalle proiezioni all'architettura

Le parole che hai imparato in questo capitolo sono anche le parole dell'architettura. La **pianta** di un edificio è la sua proiezione sul piano orizzontale (di solito «tagliata» a un'altezza convenzionale per mostrare muri, porte e finestre); il **prospetto** è la proiezione di una facciata su un piano verticale parallelo a essa; le viste laterali corrispondono ai fianchi. Un tempio greco, per esempio, si descrive con la pianta, che mostra il numero delle colonne e la forma della cella, e con il prospetto della fronte, che mostra l'ordine architettonico (cap. 12). Una piramide egizia ha per pianta un quadrato con le diagonali, che sono le proiezioni degli spigoli inclinati (cap. 10). Nel cap. 6 imparerai a disegnare proprio questi volumi semplici: prismi, piramidi, cilindri, coni.

COLLEGAMENTI

Disegno e misura nella vita reale. I disegni in pianta e prospetto non sono solo esercizi di scuola: le planimetrie catastali di una casa, i libretti di istruzioni dei mobili da montare, i progetti depositati in Comune per costruire un edificio sono tutti in proiezioni ortogonali, in scala (cap. 1). Chi li legge ricava le misure con il righello e il rapporto di scala, senza bisogno di vedere l'oggetto. Le rappresentazioni che danno l'illusione della profondità, l'assonometria e la prospettiva, sono più facili da «vedere», ma meno adatte a misurare: l'assonometria la studierai il prossimo anno, insieme alle sezioni dei solidi, la prospettiva nel secondo biennio.

SINTESI

- Una proiezione associa a ogni punto di una figura il punto in cui il raggio proiettante incontra il quadro; nella proiezione centrale i raggi escono da un punto, in quella parallela sono paralleli.
- La proiezione ortogonale è una proiezione parallela con i raggi perpendicolari al quadro: conserva le misure delle figure parallele al quadro.
- Il metodo di Monge usa tre piani a due a due perpendicolari: PO (pianta, P'), PV (prospetto, P''), PL (fianco, P'''); PO e PV si incontrano nella linea di terra LT.
- Nel metodo europeo l'oggetto sta nel primo diedro, sopra il PO e davanti al PV.
- Con il ribaltamento il PO ruota sotto la LT e il PL a destra del PV: prospetto in alto a sinistra, pianta sotto, fianco a destra.
- Un punto ha quota z (dal PO), aggetto y (dal PV) e distanza x dal PL; P' e P'' stanno sulla stessa perpendicolare alla LT, P'' e P''' sulla stessa orizzontale; l'aggetto passa dalla pianta al fianco con la retta a 45°.
- Un segmento è in vera grandezza solo sul piano a cui è parallelo; sul piano a cui è perpendicolare si riduce a un punto; negli altri casi appare in scorcio.
- Posizioni notevoli: verticale, di punta, fronto-orizzontale, frontale, orizzontale, di profilo, generico.
- La vera grandezza di un segmento generico si ottiene ruotandolo finché diventa frontale, o con Pitagora: $AB^2 = (A'B')^2 + (\Delta z)^2$.
- Una figura parallela a un piano si proietta su quel piano in vera forma e sugli altri due in segmenti.
- Una figura in un piano perpendicolare al PV e inclinato sul PO si proietta in prospetto sulla traccia t''; la si costruisce in pianta e in fianco con il metodo del ribaltamento.
- Una circonferenza inclinata si proietta in un'ellisse (non in un ovale) con l'asse maggiore uguale al diametro.

ESERCIZI

Negli esercizi le coordinate di un punto sono scritte come (x; y; z) = (distanza dal PL; aggetto; quota), in millimetri. Dove non è detto altrimenti, imposta l'epura su un A4 squadrato verticale con la LT a 140 mm dal bordo superiore della cornice e l'asse verticale a 120 mm dal suo bordo sinistro.

Comprendere e ricordare

1. ● In una proiezione ortogonale i raggi proiettanti sono:
   - **A.** uscenti tutti da un punto
   - **B.** paralleli tra loro e obliqui rispetto al quadro
   - **C.** paralleli tra loro e perpendicolari al quadro
   - **D.** perpendicolari tra loro

2. ● L'ombra di una mano proiettata sul muro da una lampadina vicina è un esempio di proiezione:
   - **A.** centrale
   - **B.** ortogonale
   - **C.** parallela obliqua
   - **D.** cilindrica

3. ● Nel metodo europeo l'oggetto si trova:
   - **A.** nel terzo diedro, dietro il PV
   - **B.** nel primo diedro, tra l'osservatore e i piani di proiezione
   - **C.** sempre appoggiato sulla LT
   - **D.** nel secondo diedro, sopra il PO e dietro il PV

4. ● La proiezione P' di un punto giace sul:
   - **A.** piano verticale
   - **B.** piano laterale
   - **C.** quadro di una proiezione centrale
   - **D.** piano orizzontale

5. ● Un segmento perpendicolare al PO si proietta sul PO come:
   - **A.** un segmento in vera grandezza
   - **B.** un punto
   - **C.** un segmento più corto
   - **D.** un segmento parallelo alla LT

6. ●● Un segmento appare in vera grandezza su un piano di proiezione quando:
   - **A.** è perpendicolare a quel piano
   - **B.** è inclinato di 45° su quel piano
   - **C.** è parallelo a quel piano
   - **D.** ha un estremo sulla LT

7. ●● Una circonferenza di diametro 50 mm, in un piano perpendicolare al PV e inclinato sul PO, in pianta appare come:
   - **A.** un'ellisse con l'asse maggiore di 50 mm
   - **B.** una circonferenza più piccola
   - **C.** un ovale a quattro centri
   - **D.** un'ellisse con l'asse minore di 50 mm

8. ● A che cosa serve la retta a 45° nell'epura?
   - **A.** a tracciare gli assi di simmetria
   - **B.** a trasportare gli aggetti dalla pianta al fianco
   - **C.** a ribaltare il PO sotto la LT
   - **D.** a misurare la quota dei punti

9. ● Chi pubblicò nel 1799 la *Géométrie descriptive*?
   - **A.** Vitruvio
   - **B.** Euclide
   - **C.** Raffaello
   - **D.** Gaspard Monge

Lessico e norme

10. ● Completa: «Dopo il ribaltamento il PO si trova _____ il PV e il PL si trova _____ del PV. La retta comune a PO e PV si chiama _____. Le linee sottili che uniscono P' e P'' si chiamano linee di _____ e sono _____ alla LT. La distanza di un punto dal PO si chiama _____, quella dal PV _____.»

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) In prospetto si leggono la quota e la distanza dal PL di un punto. b) P' e P''' stanno sempre sulla stessa linea orizzontale. c) Un punto del PO ha la proiezione P'' sulla LT. d) Un segmento frontale è in vera grandezza anche in pianta.

12. ● Abbina ogni posizione del segmento al suo nome. 1) perpendicolare al PO; 2) perpendicolare al PV; 3) parallelo al PV e inclinato sul PO; 4) parallelo al PO e inclinato sul PV; 5) parallelo alla LT; 6) inclinato su tutti e tre i piani. a) frontale; b) generico; c) di punta; d) fronto-orizzontale; e) verticale; f) orizzontale.

13. ● Abbina ogni elemento di un'epura al tipo di linea (cap. 1); un tipo di linea può servire per più elementi: 1) contorni in vista; 2) contorni nascosti; 3) assi di simmetria di una circonferenza; 4) linee di richiamo; 5) linea di terra. a) mista fine punto-linea; b) continua fine; c) continua grossa; d) tratteggiata.

14. ●● Spiega con parole tue, in 5–6 righe, la differenza tra proiezione centrale e proiezione parallela, con un esempio tratto dalla vita quotidiana per ciascuna. Quale delle due conserva le misure di una figura parallela al quadro?

15. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Nella proiezione centrale una figura parallela al quadro si proietta sempre congruente. b) In una proiezione parallela due segmenti paralleli restano paralleli. c) Un segmento di punta si proietta in prospetto come un punto. d) Il primo diedro sta sopra il PO e dietro il PV.

Costruire

16. ● **Quattro punti.** Disegna le tre proiezioni dei punti $A(80; 30; 50)$, $B(40; 0; 70)$, $C(60; 45; 0)$ e $D(100; 0; 0)$. Accanto a ciascuno scrivi dove si trova il punto nello spazio.

17. ● **Segmento verticale e segmento di punta.** Disegna le tre viste del segmento AB con $A(90; 25; 10)$ e $B(90; 25; 80)$ e del segmento CD con $C(40; 10; 50)$ e $D(40; 60; 50)$. Indica con «v.g.» le viste in vera grandezza e scrivi le due lunghezze.

18. ● **Segmento frontale.** Disegna le tre viste del segmento con $A(100; 30; 15)$ e $B(40; 30; 75)$. In quale vista è in vera grandezza? Misura la sua lunghezza e l'angolo che forma con il PO, poi controllali con il calcolo.

19. ●● **Segmento orizzontale.** Disegna le tre viste del segmento con $A(95; 10; 40)$ e $B(45; 60; 40)$. Calcola la vera grandezza e l'angolo con il PV; indica le lunghezze del prospetto e del fianco.

20. ●● **Vera grandezza per rotazione.** Disegna le tre viste del segmento generico con $A(100; 15; 20)$ e $B(50; 50; 70)$. Con il procedimento della figura 5.6 trova la vera grandezza e l'angolo con il PO, e confrontali con il calcolo.

21. ● **Triangolo parallelo al PO.** Un triangolo equilatero di lato 50 mm è parallelo al PO a quota 40 mm; il lato AB è parallelo alla LT a 15 mm dal PV, con A a 95 mm e B a 45 mm dal PL, e il vertice C è più lontano dal PV. Disegna le tre viste e calcola la lunghezza del segmento che rappresenta il triangolo in fianco.

22. ●● **Esagono parallelo al PV.** Un esagono regolare di lato 30 mm è parallelo al PV; il centro è in (70; 25; 60) e due vertici opposti stanno sull'orizzontale del centro. Disegna le tre viste. Quanto sono lunghi i segmenti in pianta e in fianco? Tra quali quote è compreso il fianco?

23. ●● **Pentagono parallelo al PO.** Un pentagono regolare, inscritto in una circonferenza di raggio 30 mm, è parallelo al PO a quota 50 mm; il centro ha $x = 70$ mm e $y = 40$ mm, e un vertice è rivolto verso il PV, sulla perpendicolare alla LT passante per il centro. Costruisci il pentagono in pianta (cap. 3) e completa prospetto e fianco. Calcola la lunghezza dei due segmenti.

24. ● **Circonferenza parallela al PL.** Una circonferenza di raggio 30 mm è parallela al PL; il centro è in (60; 35; 50). Disegna le tre viste con gli assi in linea mista e indica la lunghezza dei segmenti in pianta e in prospetto.

25. ●●● **Quadrato inclinato.** Un quadrato di lato 50 mm sta in un piano perpendicolare al PV e inclinato di 30° sul PO, che sale verso il PL. Un lato appoggia sul PO a 100 mm dal PL, ed è di punta, con aggetti da 10 a 60 mm. Disegna le tre viste e calcola le dimensioni della pianta e del fianco.

26. ●●● **Circonferenza inclinata di 45°.** Una circonferenza di raggio 30 mm sta in un piano perpendicolare al PV, inclinato di 45° sul PO, la cui traccia t'' parte dal punto H'' della LT a 95 mm dal PL e sale verso il PL. Il centro sta su t'' a 50 mm da H'' e ha aggetto 38 mm. Con il metodo del ribaltamento (12 punti) costruisci pianta e fianco. Quanto misurano gli assi delle due ellissi?

Leggere il disegno

27. ● In un'epura P'' si trova 45 mm sopra la LT e 60 mm a sinistra dell'asse verticale; P' si trova 30 mm sotto la LT. Scrivi le coordinate di P e indica dove deve trovarsi P'''.

28. ●● Un compagno consegna l'epura del punto $Q(50; 20; 35)$ con questi difetti: a) Q' è 4 mm a destra della verticale di Q''; b) Q''' è a 50 mm dall'asse verticale; c) la retta a 45° è tracciata nel quadrante in alto a destra. Spiega ciascun errore e indica la posizione corretta delle proiezioni.

29. ●● Osserva il riquadro 4 della figura 5.5. Quale vista mostra il segmento in vera grandezza? Se $A''B''$ misura 85 mm e forma 45° con la LT, quanto sono lunghi $A'B'$ e $A'''B'''$?

30. ●● La pianta di un segmento misura $A'B' = 48$ mm; le quote degli estremi sono 20 mm e 56 mm. Calcola la vera grandezza del segmento. Che cosa si ottiene se le due quote sono uguali?

31. ●●● Nella figura 5.8 il raggio è 25 mm e l'inclinazione 30°. Indica la lunghezza degli assi delle due ellissi. Per quale inclinazione le ellissi di pianta e fianco sono uguali, e quanto misurano allora i loro assi? Che cosa si vede nelle tre viste se l'inclinazione diventa 90°?

Verso la verifica

32. ●●● **Distanza tra due punti.** Disegna le tre viste del segmento con $A(80; 20; 30)$ e $B(30; 60; 70)$. Calcola la vera grandezza in due modi: con la pianta e il dislivello, e con la formula delle tre coordinate. Poi verificala con la rotazione e misura l'angolo con il PO.

33. ●●● **La falda di un tetto.** La falda rettangolare di un tetto misura 4 m lungo la pendenza e 6 m nel verso perpendicolare al PV; è inclinata di 30° sul piano orizzontale e il suo lato più basso, di punta, appoggia sul PO. Disegnala in scala 1:100 nelle tre viste. Calcola le dimensioni della pianta e del fianco sul foglio e nella realtà, e confronta l'area vera della falda con quella della sua pianta.

34. ●●● **Ragionare sulle proiezioni.** Dove si trova nello spazio un punto se: a) P', P'' e P''' coincidono in O; b) P' e P'' coincidono in un punto della LT; c) P'' sta sulla LT e P''' sull'asse verticale; d) P' e P''' distano entrambi 30 mm rispettivamente dalla LT e dall'asse, e P'' sta sull'asse verticale? Motiva ogni risposta con le regole dell'allineamento.

PER APPROFONDIRE

- [MON] G. Monge, *Géométrie descriptive*: il testo delle lezioni del 1795, con l'introduzione dei due piani di proiezione e della linea di terra.
- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro XI: le definizioni di retta perpendicolare a un piano e di piani perpendicolari, su cui si fonda la proiezione ortogonale.
- [VIT] Vitruvio, *De architectura*, libro I, cap. 2: *ichnographia* e *orthographia*, gli antenati della pianta e del prospetto.

Glossario del capitolo

Aggetto
Distanza di un punto dal piano verticale PV.

Epura
Disegno piano che si ottiene dopo il ribaltamento, con pianta, prospetto e fianco legati dalle linee di richiamo.

Linea di terra (LT)
Retta di intersezione tra il piano orizzontale e il piano verticale di proiezione.

Linee di richiamo
Linee continue fini che collegano le proiezioni di uno stesso punto: perpendicolari alla LT tra pianta e prospetto, parallele tra prospetto e fianco.

Metodo del ribaltamento
Procedimento che ruota il piano di una figura inclinata attorno alla sua traccia per disegnarla in vera forma e poi riportarne i punti nelle viste.

Primo diedro
Regione dello spazio sopra il PO e davanti al PV, dove si colloca l'oggetto nel metodo europeo (ISO E).

Proiezione
Operazione che associa a ogni punto di una figura il punto in cui il raggio proiettante che lo attraversa incontra un piano, il quadro; anche l'immagine così ottenuta.

Proiezione centrale (conica)
Proiezione in cui tutti i raggi escono da un unico centro a distanza finita; è la base della prospettiva.

Proiezione ortogonale
Proiezione parallela con i raggi perpendicolari al quadro: una figura parallela al quadro vi appare in vera grandezza.

Proiezione parallela (cilindrica)
Proiezione con i raggi tutti paralleli tra loro; può essere obliqua oppure ortogonale.

Quadro
Piano su cui si forma una proiezione (piano di proiezione), indicato spesso con π.

Quota
Distanza di un punto dal piano orizzontale PO (altezza).

Raggi proiettanti
Rette che portano i punti di una figura sul quadro.

Retta a 45°
Retta tracciata da O nel quadrante in basso a destra dell'epura, che serve a trasportare gli aggetti dalla pianta al fianco.

Ribaltamento
Rotazione di 90° del PO (sotto la LT) e del PL (a destra del PV) che porta le tre viste su un unico foglio.

Scorcio
Accorciamento apparente di un segmento o di una figura inclinati rispetto al piano di proiezione.

Segmento di punta
Segmento perpendicolare al PV: in prospetto si riduce a un punto.

Segmento frontale
Segmento parallelo al PV e inclinato sul PO: in prospetto appare in vera grandezza con il suo vero angolo sul PO.

Traccia
Retta in cui un piano proiettante (perpendicolare a un piano di proiezione) si proietta su quel piano; indicata con t″ sul PV.

Vera grandezza
Misura reale di un segmento o di una figura; appare solo nella vista sul piano a cui l'elemento è parallelo.

Soluzioni

1. C. Nella proiezione ortogonale i raggi sono paralleli tra loro e perpendicolari al quadro.

2. A. Centrale (conica): i raggi escono tutti dalla lampadina.

3. B. Nel primo diedro, sopra il PO e davanti al PV, tra l'osservatore e i piani di proiezione.

4. D. P′ è la proiezione sul piano orizzontale (pianta).

5. B. Un segmento perpendicolare al PO si proietta sul PO in un punto.

6. C. Solo quando è parallelo a quel piano.

7. A. Un'ellisse il cui asse maggiore è uguale al diametro (50 mm); l'asse minore è più corto.

8. B. Trasporta l'aggetto dalla pianta (distanza dalla LT) al fianco (distanza dall'asse verticale).

9. D. Gaspard Monge.

10. sotto; a destra; linea di terra (LT); richiamo (o riporto); perpendicolari; quota; aggetto.

11. a) V. b) F: P′ e P‴ non sono allineati; sono P″ e P‴ a stare sulla stessa orizzontale (stessa quota); P′ e P‴ hanno solo la stessa distanza (l'aggetto) rispettivamente dalla LT e dall'asse. c) V. d) F: il segmento frontale è in vera grandezza solo in prospetto; in pianta è parallelo alla LT ma in scorcio.

12. 1-e; 2-c; 3-a; 4-f; 5-d; 6-b.

13. 1-c; 2-d; 3-a; 4-b; 5-b (la LT è una linea di riferimento, continua fine).

14. Traccia: nella proiezione centrale i raggi escono da un punto a distanza finita (lampadina, occhio, macchina fotografica: ombra della mano sul muro, una fotografia); l'immagine cambia dimensione con la distanza e rette parallele possono convergere. Nella parallela i raggi sono paralleli (Sole: ombre in cortile); il parallelismo è conservato. Solo la proiezione parallela dà un'immagine congruente di una figura parallela al quadro.

15. a) F: nella proiezione centrale la figura parallela al quadro è simile ma ingrandita o rimpicciolita (congruente solo nella proiezione parallela). b) V. c) V. d) F: il primo diedro sta sopra il PO e *davanti* al PV (dietro il PV c'è il secondo).

16. A: A″ 80 mm a sinistra dell'asse e 50 mm sopra la LT, A′ sulla stessa verticale 30 mm sotto la LT, A‴ 30 mm a destra dell'asse e 50 mm sopra la LT (punto nello spazio, primo diedro). B: aggetto 0, punto del PV: B′ sulla LT a 40 mm dall'asse, B″ 70 mm sopra la LT, B‴ sull'asse verticale a quota 70. C: quota 0, punto del PO: C″ sulla LT a 60 mm dall'asse, C′ 45 mm sotto la LT, C‴ sulla LT 45 mm a destra dell'asse. D: punto della LT: D′≡D″ sulla LT a 100 mm dall'asse, D‴ in O.

17. AB è verticale: in pianta A′≡B′ (punto); in prospetto e in fianco segmenti verticali in v.g., lunghi 80 − 10 = 70 mm. CD è di punta: in prospetto C″≡D″; in pianta segmento perpendicolare alla LT e in fianco segmento orizzontale, entrambi in v.g., lunghi 60 − 10 = 50 mm.

18. Segmento frontale (aggetto costante 30 mm): v.g. in prospetto. Lunghezza $\sqrt{(60^2 + 60^2)} \approx 84{,}85$ mm; angolo con il PO 45°. Pianta: segmento parallelo alla LT lungo 60 mm; fianco: segmento verticale lungo 60 mm (entrambi in scorcio).

19. Segmento orizzontale (quota costante 40 mm): v.g. in pianta, $\sqrt{(50^2 + 50^2)} \approx 70{,}71$ mm; angolo con il PV 45°. Prospetto: segmento parallelo alla LT lungo 50 mm; fianco: segmento orizzontale lungo 50 mm.

20. $A'B' = \sqrt{(50^2 + 35^2)} \approx 61{,}03$ mm; dislivello 50 mm; vera grandezza $\sqrt{(61{,}03^2 + 50^2)} = \sqrt{6225} \approx 78{,}90$ mm; angolo con il PO ≈ 39,3°. Passi: arco di centro A′ e raggio A′B′ fino alla parallela alla LT per A′ (B'_1), richiamo in prospetto alla quota 70 (B''_1), misura di $A''B''_1$.

21. C ha x = 70 mm e y = 15 + 43,30 = 58,30 mm (altezza del triangolo $50 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 43{,}30$ mm). Pianta:

triangolo in vera forma. Prospetto: segmento a quota 40 lungo 50 mm (da x = 45 a x = 95). Fianco: segmento a quota 40 da 15 a 58,30 mm a destra dell'asse, lungo ≈ 43,30 mm.

22. Prospetto: esagono in vera forma (vertici a x = 40 e 100 mm a quota 60; gli altri a x = 55 e 85 mm, quote ≈ 34,02 e 85,98 mm). Pianta: segmento parallelo alla LT, a 25 mm sotto di essa, lungo 2 · 30 = 60 mm. Fianco: segmento verticale a 25 mm a destra dell'asse, lungo 30 · √3 ≈ 51,96 mm, tra le quote ≈ 34,02 e ≈ 85,98 mm.

23. Vertici in pianta (x; y): (70; 10), (98,53; 30,73), (87,63; 64,27), (52,37; 64,27), (41,47; 30,73); lato ≈ 35,27 mm. Prospetto: segmento a quota 50 da x ≈ 41,47 a ≈ 98,53 mm, lungo 98,53 − 41,47 ≈ 57,06 mm. Fianco: segmento a quota 50 da y = 10 a y ≈ 64,27 mm, lungo ≈ 54,27 mm.

24. Fianco: circonferenza vera di raggio 30 mm con il centro 35 mm a destra dell'asse e 50 mm sopra la LT. Pianta: segmento perpendicolare alla LT, a 60 mm dall'asse, da 5 a 65 mm sotto la LT, lungo 60 mm. Prospetto: segmento verticale a 60 mm dall'asse, tra le quote 20 e 80 mm, lungo 60 mm. Assi in linea mista.

25. Prospetto: segmento lungo 50 mm da (x = 100; z = 0) a (x ≈ 56,70; z = 25), inclinato di 30° sulla LT. Pianta: rettangolo tra x ≈ 56,70 e 100 mm e y da 10 a 60 mm: 43,30 × 50 mm. Fianco: rettangolo tra y = 10 e 60 mm e quote da 0 a 25 mm: 50 × 25 mm.

26. Centro: x = 95 − 50 · 0,707 ≈ 59,64 mm, quota ≈ 35,36 mm, aggetto 38 mm. Circonferenza ribaltata sul PV con il centro a 38 mm da t″ (ribaltando verso l'alto, come nella figura 5.8: centro ribaltato a x ≈ 86,51 mm e ≈ 62,23 mm sopra la LT). Pianta: ellisse con asse maggiore 60 mm (perpendicolare alla LT, aggetti da 8 a 68 mm) e asse minore 60 · 0,707 ≈ 42,43 mm. Fianco: ellisse con asse maggiore 60 mm (orizzontale) e asse minore ≈ 42,43 mm (verticale). A 45° le due ellissi sono congruenti.

27. P(60; 30; 45). P‴ sta 30 mm a destra dell'asse verticale e 45 mm sopra la LT, sull'orizzontale di P″.

28. a) Q′ e Q″ devono stare sulla stessa perpendicolare alla LT (entrambi a 50 mm dall'asse): la linea di richiamo è stata tracciata a occhio. b) In fianco la distanza dall'asse è l'aggetto: Q‴ va a 20 mm dall'asse, non a 50 (che è la distanza dal PL), e a quota 35. c) La retta a 45° va nel quadrante in basso a destra, quello senza viste, partendo da O. Posizioni corrette: Q″ (50 mm a sinistra, 35 sopra), Q′ (50 a sinistra, 20 sotto), Q‴ (20 a destra, 35 sopra).

29. Il segmento è frontale: è in vera grandezza il prospetto. A′B′ = A‴B‴ = 85 · 0,707 ≈ 60,10 mm (pianta parallela alla LT, fianco verticale).

30. Dislivello 56 − 20 = 36 mm; vera grandezza $\sqrt{(48^2 + 36^2)} = 60$ mm (terna 3-4-5 moltiplicata per 12); angolo con il PO ≈ 36,9°. Con quote uguali il segmento è orizzontale e la vera grandezza è la pianta stessa, 48 mm.

31. Pianta: assi 50 mm e ≈ 43,30 mm; fianco: assi 50 mm e 25 mm. Le ellissi sono uguali per 45°: assi 50 mm e ≈ 35,36 mm. A 90° il piano è parallelo al PL: in fianco la circonferenza vera, in pianta e in prospetto segmenti lunghi 50 mm perpendicolari alla LT.

32. $A'B' = \sqrt{(50^2 + 40^2)} \approx 64{,}03$ mm; dislivello 40 mm; $AB = \sqrt{(64{,}03^2 + 40^2)} \approx 75{,}50$ mm. Con le tre coordinate: $\sqrt{(50^2 + 40^2 + 40^2)} = \sqrt{5700} \approx 75{,}50$ mm. Angolo con il PO ≈ 32,0°.

33. Sul foglio la falda misura 40 × 60 mm. Prospetto: segmento di 40 mm inclinato di 30°. Pianta: rettangolo 40 · 0,866 ≈ 34,64 mm × 60 mm (reali ≈ 3,46 × 6 m). Fianco: rettangolo 60 mm × 20 mm (reali 6 × 2 m: il colmo è a 2 m sul lato basso). Area vera 4 × 6 = 24 m^2; area della pianta ≈ 3,46 × 6 ≈ 20,78 m^2 (circa l'86,6 %).

34. a) P coincide con O, il vertice comune dei tre piani. b) Quota e aggetto nulli: P sta sulla LT (e P‴ è in O). c) P″ sulla LT significa quota 0, P‴ sull'asse significa aggetto 0: P sta sulla LT, con P‴ in O (che è sia sulla LT sia sull'asse). d) P″ sull'asse verticale significa distanza 0 dal PL: P sta sul PL, con aggetto 30 mm; anche P′ sta sull'asse, 30 mm sotto la LT, e P‴ coincide con P.