CAPITOLO

4

Tangenti, raccordi, ovali e spirali

Una linea retta che si piega senza spezzarsi: è tutto il segreto di un arco, di una curva stradale, di una voluta.

OBIETTIVI

1. Riconoscere le posizioni reciproche di rette e circonferenze e usare le due proprietà fondamentali della tangenza.
2. Costruire la tangente in un punto, le tangenti da un punto esterno e le tangenti comuni a due circonferenze.
3. Eseguire i raccordi tra rette, tra retta e arco e tra due archi, trovando con esattezza centri e punti di tangenza.
4. Costruire come figure geometriche i principali tipi di arco usati in architettura.
5. Costruire ovali e ovoli e distinguere l'ovale policentrico dall'ellisse.
6. Tracciare spirali policentriche, la spirale di Archimede e la spirale aurea, conoscendone i limiti.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 La tangenza 2
4.2 Costruire le tangenti 4
4.3 I raccordi 6
4.4 Gli archi come costruzioni geometriche 11
4.5 Ovali, ovoli ed ellisse 14
4.6 Le spirali 17

Disegno e Storia dell'arte 1 · Parte I · Il disegno geometrico · versione 1.0
Capitolo 4: Tangenti, raccordi, ovali e spirali · pagine 99–124 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda il profilo di un oggetto qualsiasi costruito dall'uomo: lo spigolo arrotondato di un tavolo, il bordo di un lavandino, la sagoma di una chiave, il tracciato di una pista di atletica. Quasi mai le linee si incontrano formando angoli vivi; più spesso un tratto rettilineo si trasforma dolcemente in una curva, e una curva in un'altra, senza che l'occhio percepisca uno scalino o un gomito. Lo stesso accade in architettura: la curva di un arco romano «nasce» dal pilastro verticale senza spezzarsi, la voluta di un capitello ionico si avvolge su se stessa con continuità, la pianta di un anfiteatro si chiude in un anello allungato e regolare.

Dietro tutte queste forme c'è una sola idea geometrica, la **tangenza**: due linee che si toccano in un punto senza attraversarsi, condividendo in quel punto la stessa direzione. In questo capitolo impariamo a costruirla con esattezza. Partiremo dalle tangenti a una circonferenza, che si tracciano con le perpendicolari e gli assi del cap. 2; passeremo ai **raccordi**, cioè ai modi di collegare rette e archi senza gomiti; applicheremo tutto agli **archi** dell'architettura, agli **ovali** e alle **spirali**. Sono costruzioni che userai continuamente: nelle tavole di quest'anno, nelle proiezioni ortogonali del cap. 5 e quando, nella seconda parte del libro, leggerai le piante e gli alzati degli edifici antichi.

4.1 La tangenza

4.1.1 Retta e circonferenza: tre posizioni

Una retta e una circonferenza di centro O e raggio r possono trovarsi in tre posizioni, che dipendono soltanto dalla **distanza *d*** del centro dalla retta, cioè dalla lunghezza del segmento perpendicolare condotto da O alla retta (figura 4.1a):

- se $d < r$ la retta è **secante**: taglia la circonferenza in due punti;
- se $d = r$ la retta è **tangente**: ha con la circonferenza un solo punto in comune, il **punto di tangenza** T;
- se $d > r$ la retta è **esterna**: non ha punti in comune con la circonferenza.

Dalla seconda condizione discende la proprietà più importante di tutto il capitolo. Se la retta è tangente, il suo punto più vicino a O è proprio T, e il punto di una retta più vicino a un punto esterno è il piede della perpendicolare: dunque **la tangente è perpendicolare al raggio che arriva nel punto di tangenza**. Vale anche il contrario: la retta perpendicolare a un raggio nel suo estremo T è tangente alla circonferenza. È questo il teorema che trasforma ogni problema di tangenza in un problema di perpendicolari, che sai già risolvere.

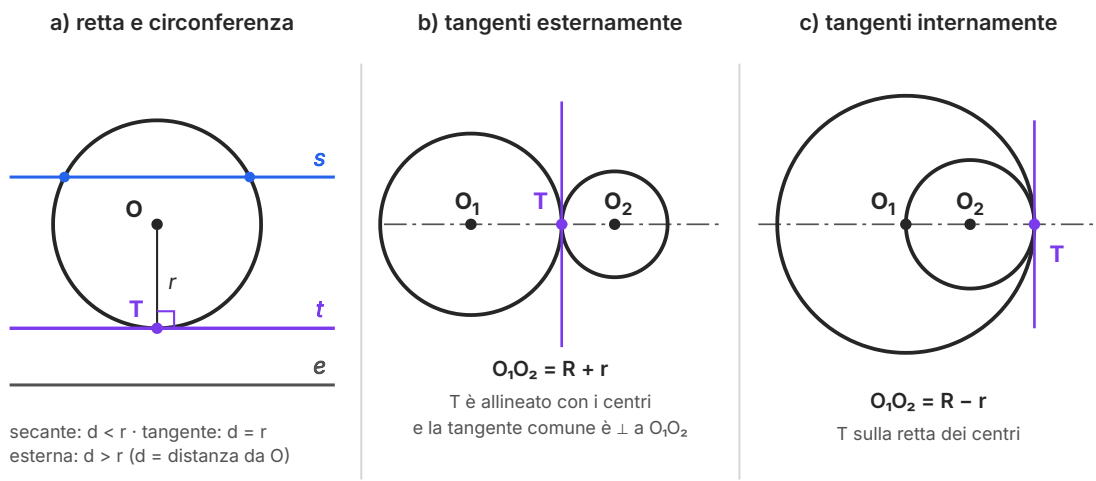

Figura 4.1 Posizioni reciproche e tangenza. a) La retta *s* è secante, *t* è tangente in T, *e* è esterna: decide la distanza *d* del centro dalla retta; il raggio OT è perpendicolare alla tangente. b) Due circonferenze tangenti esternamente: la distanza dei centri è R + r. c) Tangenti internamente: la distanza dei centri è R − r. In entrambi i casi il punto di tangenza T sta sulla retta dei centri.

4.1.2 Due circonferenze tangenti

Due circonferenze, di centri O_1 e O_2 e raggi R e *r* (con $R \geq r$), sono **tangenti** quando hanno un solo punto in comune. Ciò accade in due modi (figura 4.1b e c). Sono **tangenti esternamente** quando stanno una fuori dall'altra e si toccano: allora la distanza dei centri è la somma dei raggi, $O_1O_2 = R + r$. Sono **tangenti internamente** quando la minore sta dentro la maggiore e la tocca dall'interno: allora $O_1O_2 = R - r$. Se la distanza dei centri è diversa da questi due valori, le circonferenze sono secanti (due punti in comune), esterne o interne una all'altra senza toccarsi.

In entrambi i casi il punto di tangenza T si trova **sulla retta che congiunge i centri**. Il motivo è semplice: in T le due circonferenze hanno la stessa retta tangente, e i due raggi O_1T e O_2T sono entrambi perpendicolari a quella retta nello stesso punto; due rette perpendicolari alla stessa retta nello stesso punto coincidono, quindi O_1, O_2 e T sono allineati.

DA RICORDARE

Le due regole della tangenza

1. La tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. **2.** Se due archi sono tangenti, i loro centri e il punto di tangenza sono allineati. Ogni costruzione di questo capitolo, dal raccordo più semplice alla voluta di un capitello, è un'applicazione di queste due regole. Quando un disegno «non torna», controlla per prima cosa se le hai rispettate.

4.2 Costruire le tangenti

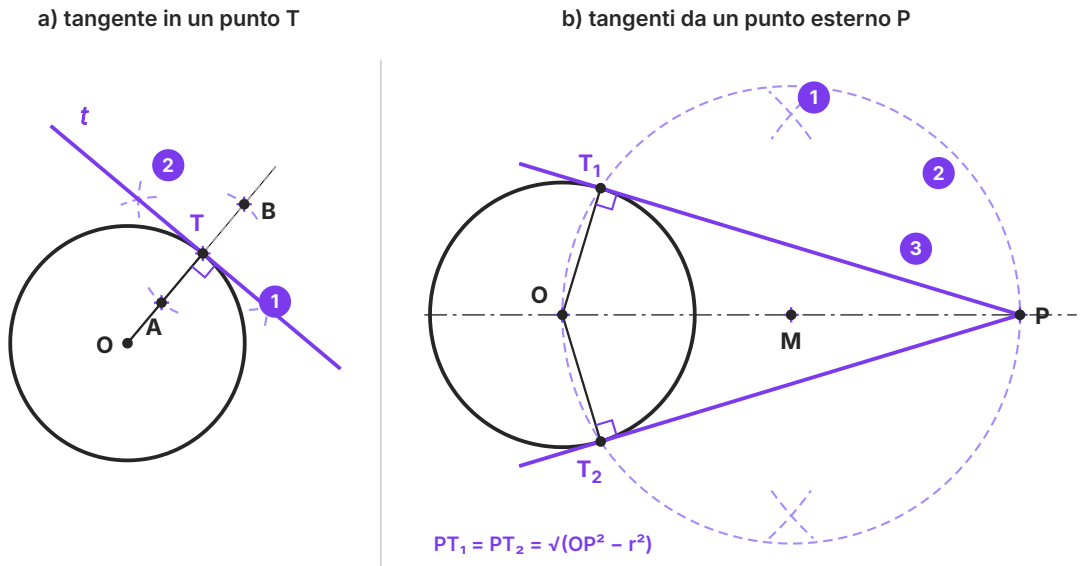

Figura 4.2 Costruzione delle tangenti. a) Tangente in un punto T: si prolunga il raggio OT, si riportano TA = TB e si costruisce l'asse di AB. b) Tangenti da un punto esterno P: la circonferenza di diametro OP (centro M) individua i punti di tangenza T_1 e T_2, perché l'angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

4.2.1 La tangente in un punto della circonferenza

È data una circonferenza di centro O e un suo punto T; vogliamo la tangente in T (figura 4.2a). Per la prima regola basta tracciare la perpendicolare al raggio OT nel punto T. (1) Si congiunge O con T e si prolunga la semiretta oltre T. (2) Si punta il compasso in T e con un'apertura qualsiasi si segnano sulla retta OT due punti A e B equidistanti da T; poi si costruisce l'asse del segmento AB, come nel cap. 2. L'asse passa per T ed è perpendicolare a OT: è la tangente cercata. Con le squadre, l'operazione è ancora più rapida: si appoggia un cateto della squadra sul raggio OT, si accosta la seconda squadra e si fa scorrere la prima fino a T, tracciando la perpendicolare.

4.2.2 Le tangenti da un punto esterno

Da un punto P esterno a una circonferenza si possono condurre esattamente **due** tangenti. Il problema è trovare i punti di tangenza, perché non li conosciamo in partenza. L'idea risolutiva viene dalla geometria del cap. 2: un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto. Se T è un punto di tangenza, l'angolo OTP è retto (il raggio è perpendicolare alla tangente); quindi T vede il segmento OP sotto un angolo retto e appartiene alla circonferenza che ha OP come diametro.

La costruzione (figura 4.2b) è perciò: (1) si costruisce l'asse di OP e se ne trova il punto medio M; (2) con centro M e raggio MO = MP si traccia una circonferenza, che taglia la circonferenza data nei punti T_1 e T_2; (3) le rette PT_1 e PT_2 sono le tangenti richieste. I due segmenti di tangente PT_1 e PT_2 sono uguali, e la retta OP è asse di simmetria della figura.

ESEMPIO SVOLTO

Controllare una tangente con il teorema di Pitagora

Una circonferenza ha raggio r = 30 mm e il punto P dista dal centro OP = 50 mm. Quanto deve misurare il segmento di tangente PT?

Il triangolo OTP è rettangolo in T, con ipotenusa OP. Per il teorema di Pitagora $PT = \sqrt{(OP^2 - r^2)} = \sqrt{(2500 - 900)} = \sqrt{1600} = 40$ mm. Dopo aver eseguito la costruzione, misura PT_1 e PT_2: se trovi 40 mm, con uno scarto di qualche decimo di millimetro, la costruzione è corretta. Questo tipo di controllo, che userai anche negli esercizi, non sostituisce la costruzione: serve a scoprire gli errori.

4.2.3 Le tangenti comuni a due circonferenze

Date due circonferenze esterne una all'altra, di centri O_1 e O_2 e raggi $R > r$, esistono quattro rette tangenti a entrambe: due **tangenti comuni esterne**, che lasciano le due circonferenze dalla stessa parte, e due **tangenti comuni interne**, che passano tra le circonferenze e si incrociano sulla retta dei centri. Il trucco per costruirle è ridurre il problema a quello, già risolto, delle tangenti da un punto esterno (figura 4.3).

Tangenti esterne. Si traccia una circonferenza ausiliaria di centro O_1 e raggio $R - r$. Dal punto O_2 si conduce la tangente a questa circonferenza ausiliaria, con il metodo del paragrafo precedente (circonferenza di diametro O_1O_2), trovando il punto H. Si prolunga O_1H fino a incontrare la circonferenza maggiore in T_1; da O_2 si traccia il raggio parallelo a O_1T_1 (con le squadre), che individua T_2 sulla circonferenza minore. La retta T_1T_2 è una tangente comune esterna: è parallela a O_2H e spostata rispetto a essa proprio della lunghezza r. La seconda tangente esterna è simmetrica rispetto alla retta dei centri.

Tangenti interne. Il procedimento è identico, ma la circonferenza ausiliaria ha raggio $R + r$. Il raggio O_1H taglia la circonferenza maggiore in T_1; da O_2 si traccia il raggio parallelo a O_1H ma **di verso opposto**, che dà T_2. Le tangenti interne esistono solo se le circonferenze sono esterne una all'altra ($O_1O_2 > R + r$).

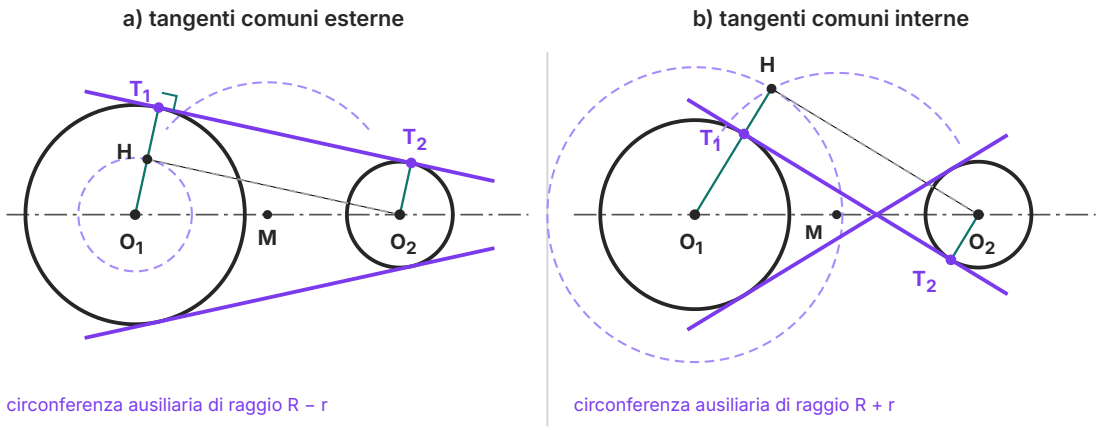

Figura 4.3 Tangenti comuni a due circonferenze. a) Esterne: con la circonferenza ausiliaria di raggio R − r il problema si riduce alla tangente condotta da O_2; i raggi O_1T_1 e O_2T_2 sono paralleli ed entrambi perpendicolari alla tangente. b) Interne: la circonferenza ausiliaria ha raggio R + r e i raggi verso i punti di tangenza hanno verso opposto.

Anche qui un controllo numerico è possibile. Il segmento di tangente comune esterna compreso tra i punti di tangenza misura $\sqrt{(d^2 - (R - r)^2)}$, quello di tangente interna $\sqrt{(d^2 - (R + r)^2)}$, dove d è la distanza dei centri: per R = 30 mm, r = 15 mm e d = 90 mm si ottengono circa 88,7 mm e 77,9 mm.

COLLEGAMENTI

Cinghie e pulegge

In una macchina, due pulegge di diametro diverso collegate da una cinghia sono un esempio concreto di tangenti comuni. Se la cinghia è «aperta», i suoi tratti rettilinei seguono le tangenti comuni esterne e le due pulegge girano nello stesso verso; se la cinghia è «incrociata», segue le tangenti interne e le pulegge girano in versi opposti. Per calcolare la lunghezza della cinghia, i tecnici sommano proprio i segmenti di tangente e gli archi avvolti sulle pulegge.

4.3 I raccordi

4.3.1 Che cos'è un raccordo

Un **raccordo** è un arco di circonferenza che collega due linee (rette o archi) in modo che, in ciascun punto di collegamento, l'arco sia tangente alla linea che incontra. Il risultato è una linea continua **senza spigoli**: nei punti di raccordo la direzione non cambia bruscamente, si dice che

c'è **continuità della tangente**. I punti in cui l'arco si stacca dalle linee date si chiamano punti di raccordo o di tangenza, e vanno sempre costruiti, mai stimati a occhio.

Ogni raccordo richiede di trovare due cose: il **centro** dell'arco e i due **punti di tangenza**. Il centro si trova sempre allo stesso modo, intersecando due *luoghi geometrici*: l'insieme dei punti che stanno alla distanza giusta dalla prima linea e quello dei punti che stanno alla distanza giusta dalla seconda.

- I centri degli archi di raggio *r* tangenti a una **retta** stanno su una **parallela** alla retta, a distanza *r*.
- I centri degli archi di raggio *r* tangenti **esternamente** a una circonferenza di centro C e raggio R stanno sulla circonferenza di centro C e raggio **R + *r***.
- I centri degli archi di raggio *r* tangenti **internamente** (che la contengono) stanno sulla circonferenza di centro C e raggio ***r* − R**.

I punti di tangenza si trovano poi con le due regole della tangenza: su una retta, al piede della perpendicolare condotta dal centro; su un arco, sulla retta che congiunge i due centri.

Tabella 4.1 La regola dei centri: dove cercare il centro O di un raccordo di raggio r e dove cadono i punti di tangenza.

Il raccordo è tangente a…	Luogo del centro O	Punto di tangenza
una retta	parallela alla retta a distanza *r*	piede della perpendicolare da O alla retta
un arco (C, R), esternamente	circonferenza di centro C e raggio R + *r*	sul segmento OC
un arco (C, R), internamente	circonferenza di centro C e raggio *r* − R	sul prolungamento di OC oltre C

4.3.2 Raccordo di due rette

Rette perpendicolari. È il caso dello spigolo arrotondato di un tavolo (figura 4.4a). Dato il vertice V e il raggio *r*: (1) con centro V e raggio *r* si segnano sulle due rette i punti di tangenza T_1 e T_2; (2–3) con la stessa apertura e centri in T_1 e in T_2 si tracciano due archi che si incontrano nel centro O; con centro O si traccia l'arco T_1T_2. La figura VT_1OT_2 è un quadrato di lato *r*: è questo che garantisce che OT_1 e OT_2 siano perpendicolari alle rette.

Rette incidenti con angolo qualsiasi. Il metodo del quadrato non funziona più, e si applica la regola generale (figura 4.4b). Si tracciano, all'interno dell'angolo, le parallele alle due rette a distanza *r* (con il metodo del cap. 2 o con le squadre); il loro punto d'incontro è il centro O. Dal centro si conducono le perpendicolari alle due rette: i piedi sono T_1 e T_2. Il centro O cade sempre sulla bisettrice dell'angolo, perché è equidistante dai due lati: questa osservazione offre un utile controllo.

Rette parallele. Due rette parallele a distanza d si raccordano con una semicirconferenza di raggio $d/2$ (figura 4.4c). Fissato il punto T_1 su una retta, la perpendicolare per T_1 incontra l'altra retta in T_2; il punto medio O di T_1T_2 è il centro. È il profilo delle curve di una pista d'atletica, di una graffetta, dell'estremità di un'asola.

Raccordo a S. Talvolta due rette parallele devono essere collegate «sfalsate», da un punto A sulla prima a un punto B sulla seconda, con una curva e una **controcurva**: è il caso di una strada che deve spostarsi lateralmente o di molti profili di modanature (figura 4.4d). Si congiunge A con B e si trova il punto medio M, dove la curva cambierà verso. Si costruiscono gli assi di AM e di MB; si tracciano le perpendicolari alle rette in A e in B. L'asse di AM incontra la perpendicolare in A nel centro O_1; l'asse di MB incontra la perpendicolare in B nel centro O_2. I due archi, A–M di centro O_1 e M–B di centro O_2, hanno lo stesso raggio e si toccano in M, dove O_1, M e O_2 sono allineati: è la seconda regola della tangenza. In M la curvatura si inverte; si parla di **flesso**.

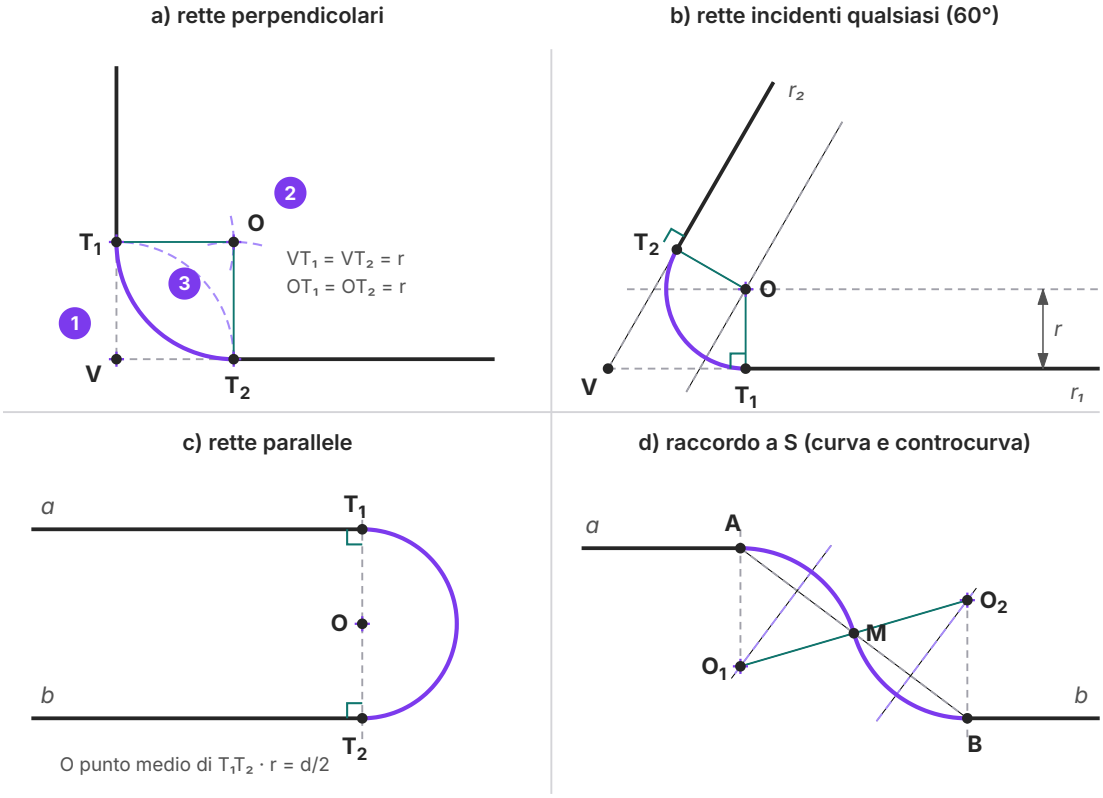

Figura 4.4 Raccordi tra rette. a) Rette perpendicolari: VT_1OT_2 è un quadrato di lato r. b) Rette incidenti a 60°: il centro O è l'incontro delle parallele a distanza r e cade sulla bisettrice. c) Rette parallele: semicirconferenza di diametro T_1T_2. d) Raccordo a S tra A e B: i centri O_1 e O_2 stanno sulle perpendicolari in A e in B e sugli assi di AM e MB.

ESEMPIO SVOLTO

Dove cadono i punti di tangenza

Due rette formano un angolo di 60° e devono essere raccordate con $r = 30$ mm. A quale distanza dal vertice cadono i punti di tangenza?

Il centro O sta sulla bisettrice, che forma 30° con ciascun lato. Nel triangolo rettangolo VT_1O il cateto $OT_1 = 30$ mm è opposto all'angolo di 30°, quindi l'ipotenusa VO è il doppio: VO = 60 mm (il triangolo è metà di un triangolo equilatero). Per Pitagora $VT_1 = \sqrt{(60^2 - 30^2)} = \sqrt{2700} \approx 51{,}96$ mm. Lo stesso vale per VT_2. Se nella tua tavola i due punti di tangenza non sono alla stessa distanza dal vertice, una delle due parallele è sbagliata.

ERRORE FREQUENTE

Il raccordo «a occhio»

Molti principianti tracciano prima l'arco, puntando il compasso dove «sembra» che vada il centro, e poi prolungano le rette fino a toccarlo. Il risultato si riconosce subito: nel punto di unione c'è un piccolo gradino, oppure la retta entra nell'arco formando un gomito. L'ordine corretto è sempre: **centro → punti di tangenza → arco → ripasso**. I punti di tangenza si segnano con un trattino leggero; il ripasso delle linee definitive si fa partendo dagli archi e arrestando poi le rette esattamente nei punti segnati, perché è molto più facile raccordare una retta a un arco che il contrario.

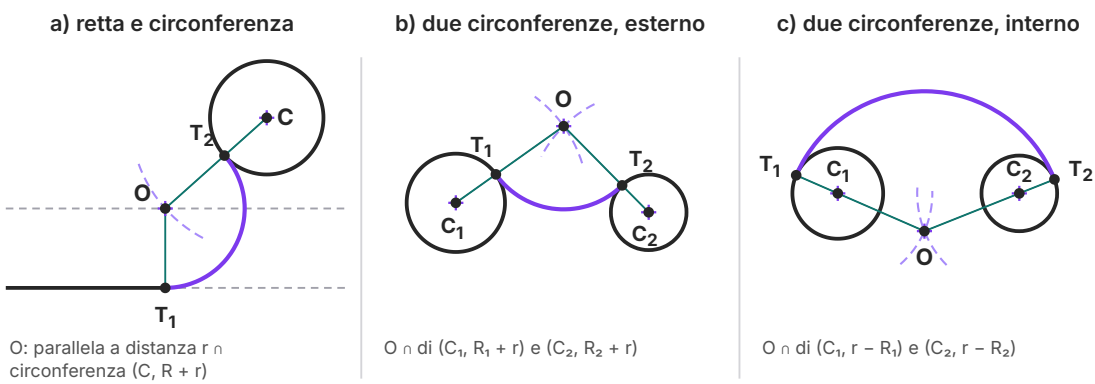

Figura 4.5 Raccordi con archi. a) Retta e circonferenza: il centro O sta sulla parallela a distanza r e sulla circonferenza (C, R + r). b) Raccordo esterno di due circonferenze: raggi ausiliari $R_1 + r$ e $R_2 + r$. c) Raccordo interno: raggi ausiliari $r - R_1$ e $r - R_2$; i punti di tangenza stanno sul prolungamento dei segmenti OC.

4.3.3 Raccordo tra una retta e un arco

È data una retta e una circonferenza di centro C e raggio R; vogliamo un arco di raggio r tangente a entrambe (figura 4.5a). Applicando la tabella 4.1, il centro O deve stare sulla parallela alla retta a distanza r e, se il raccordo è esterno, sulla circonferenza di centro C e raggio $R + r$. L'intersezione di questi due luoghi dà O. Il punto di tangenza T_1 sulla retta è il piede della perpendicolare da O; il punto T_2 sulla circonferenza è l'intersezione del segmento OC con la circonferenza data. Se il raccordo deve invece avvolgere la circonferenza data (raccordo interno), il luogo dei centri è la circonferenza di raggio $r - R$ e T_2 cade sul prolungamento di OC oltre C.

4.3.4 Raccordo tra due archi

Date due circonferenze di centri C_1, C_2 e raggi R_1, R_2, un arco di raggio r le può raccordare in due modi.

Nel **raccordo esterno** l'arco tocca le due circonferenze dall'esterno, come una «sella» tra due colline (figura 4.5b). Il centro O è l'intersezione delle circonferenze di centro C_1 e raggio $R_1 + r$ e di centro C_2 e raggio $R_2 + r$. I punti di tangenza stanno sui segmenti OC_1 e OC_2.

Nel **raccordo interno** l'arco avvolge entrambe le circonferenze, come un ponte che le scavalca (figura 4.5c). Il raggio r deve essere maggiore di entrambi i raggi dati, e il centro O è l'intersezione delle circonferenze di centro C_1 e raggio $r - R_1$ e di centro C_2 e raggio $r - R_2$. I punti di tangenza stanno sui prolungamenti di OC_1 e OC_2 oltre i centri. In tutti e due i casi le circonferenze ausiliarie devono incontrarsi: se il raggio scelto è troppo piccolo, il raccordo è impossibile, e il disegno te lo segnala subito con due archi che non si toccano.

IN SINTESI

Un unico procedimento per tutti i raccordi

1. Per ciascuna delle due linee da raccordare, traccia il luogo dei centri: parallela a distanza r (per una retta), circonferenza concentrica di raggio $R + r$ o $r - R$ (per un arco). 2. L'intersezione dei due luoghi è il centro O. 3. Trova i punti di tangenza: perpendicolare da O sulla retta, congiungente O con il centro dell'arco. 4. Traccia l'arco di raccordo tra i due punti di tangenza e ripassa.

COLLEGAMENTI

Raccordi in strade e ferrovie

Un raccordo circolare garantisce la continuità della direzione, ma non quella della curvatura: nel punto di tangenza si passa di colpo da una linea dritta, che non curva affatto, a un arco di curvatura costante. Disegnando non ce ne accorgiamo, ma un'automobile o un treno che percorrono quel tracciato ad alta velocità sentirebbero una brusca spinta laterale. Per questo nella progettazione di strade e ferrovie tra il rettilineo e la curva circolare si inseriscono **curve di transizione** (per esempio la *clotoide*), la cui curvatura cresce gradualmente. È un buon esempio di come la stessa idea geometrica venga raffinata quando cambiano le esigenze.

4.4 Gli archi come costruzioni geometriche

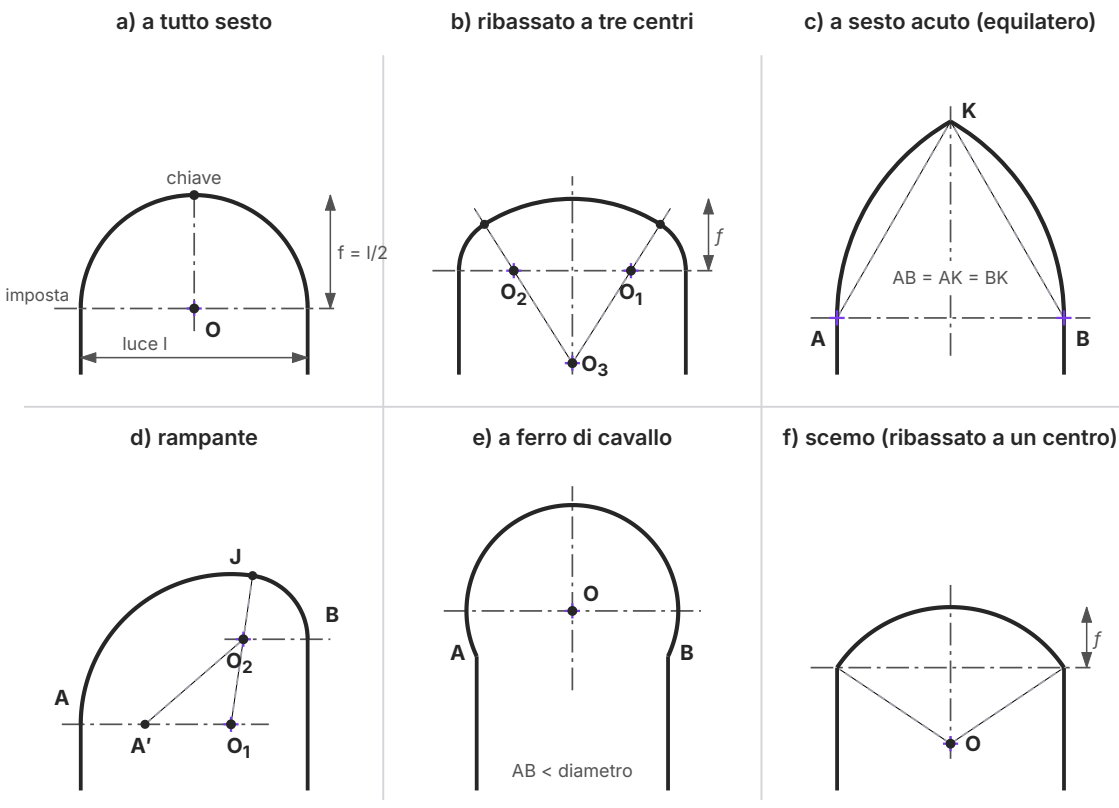

Figura 4.6 Tipi di arco come costruzioni geometriche (intradosso, schema). a) A tutto sesto: f = l/2. b) Ribassato a tre centri: O_1 e O_2 sulla linea d'imposta, O_3 sotto di essa. c) A sesto acuto equilatero: centri nelle imposte, raggio uguale alla luce. d) Rampante: O_1 sta sull'asse di $A'O_2$, e O_1, O_2, J sono allineati. e) A ferro di cavallo: arco maggiore della semicirconferenza. f) Scemo: un solo centro, sotto l'imposta.

4.4.1 Gli elementi di un arco

In architettura un **arco** è una struttura curva che scavalca un'apertura e scarica il peso che sostiene sui due sostegni laterali, i **piedritti** (pilastri, colonne o muri). Il funzionamento statico e la costruzione con conci e centine li studierai nel cap. 16, a proposito di Roma; qui ci interessa la sua **forma geometrica**, cioè la curva dell'intradosso, la superficie interna dell'arco, vista di fronte. Bastano tre termini (figura 4.6a): la **linea d'imposta** è la retta orizzontale da cui l'arco «parte», all'altezza della sommità dei piedritti; la **luce** l è la distanza tra i piedritti; la **freccia** f è l'altezza del punto più alto dell'intradosso (dove si trova il concio di chiave) sopra la linea d'imposta. Il rapporto tra freccia e luce è il primo dato che distingue un tipo di arco dall'altro.

Quasi tutti gli archi sono costruzioni di raccordo: la curva deve uscire dal piedritto verticale senza formare un gomito. Perciò, quando l'arco è tangente ai piedritti, **i centri degli archi che toccano le imposte stanno sulla linea d'imposta**: il raggio nel punto d'imposta è orizzontale, perpendicolare al piedritto verticale.

4.4.2 Arco a tutto sesto, ribassato e scemo

L'**arco a tutto sesto** è una semicirconferenza: il centro è il punto medio della luce, sulla linea d'imposta, e la freccia è metà della luce, $f = l/2$ (figura 4.6a). È l'arco degli acquedotti, dei ponti e degli archi trionfali romani, già usato dagli Etruschi nelle porte delle loro città (cap. 15 e cap. 16).

Un arco con freccia minore di metà luce si dice **ribassato**. Ne esistono due famiglie. L'**arco scemo** è un solo arco di circonferenza, minore di una semicirconferenza, con il centro *sotto* la linea d'imposta (figura 4.6f): è semplice da tracciare, ma forma un angolo con i piedritti. Note luce e freccia, il raggio si ricava dal teorema di Pitagora: $R = (l^2/4 + f^2) / (2f)$; per una luce di 6 m e una freccia di 1,5 m risulta R = 3,75 m. Il ponte Vecchio di Firenze (1345) poggia su tre arcate ribassate di questo tipo. L'**arco a tre centri**, detto anche a manico di paniere, conserva invece la tangenza con i piedritti (figura 4.6b): due archi laterali hanno il centro sulla linea d'imposta, un terzo arco, più ampio, ha il centro sotto di essa, sull'asse di simmetria. La sua costruzione è la metà superiore dell'ovale dati gli assi, che vedremo nel paragrafo 4.5, con la luce come asse maggiore e il doppio della freccia come asse minore.

4.4.3 Arco a sesto acuto

L'**arco a sesto acuto** è formato da due archi di circonferenza che si incontrano in alto formando una punta. Nel tipo più regolare, l'arco a sesto acuto **equilatero**, i due centri sono gli estremi A e B della luce e il raggio è uguale alla luce stessa (figura 4.6c): il vertice K forma con A e B un triangolo equilatero, e quindi la freccia è l'altezza di quel triangolo, $f = l \cdot \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866\ l$. Avvicinando i centri tra loro si ottengono archi più bassi, allontanandoli archi più slanciati. Nell'arco a sesto acuto le due curve *non* sono tangenti in K: la punta è voluta. L'arco acuto è caratteristico dell'architettura gotica, che studierai il prossimo anno.

4.4.4 Arco rampante e arco a ferro di cavallo

L'**arco rampante** ha le due imposte a quote diverse: lo si trova sotto le rampe delle scale e, nelle cattedrali gotiche, negli archi che portano la spinta delle volte verso l'esterno. Una costruzione con due centri (figura 4.6d) applica il raccordo interno tra due archi. Siano A l'imposta bassa e B quella alta. Si sceglie il raggio r_2 dell'arco superiore e se ne fissa il centro O_2 sulla linea d'imposta di B, a distanza r_2 da B. Il centro O_1 dell'arco inferiore deve stare sulla linea d'imposta di A e deve distare da O_2 esattamente $r_1 - r_2$. Per trovarlo si riporta da A, verso l'interno, il punto A′ con $AA' = r_2$: O_1 è l'intersezione della linea d'imposta di A con l'asse del segmento $A'O_2$. Il punto di raccordo J sta sul prolungamento di O_1O_2.

L'**arco a ferro di cavallo** è un arco di circonferenza *maggiore* di una semicirconferenza: il centro sta sopra la linea d'imposta e l'apertura tra le imposte è più stretta del diametro (figura 4.6e). Qui l'arco non è tangente ai piedritti, che si «rientrano» sotto la curva. È tipico dell'architettura islamica, per esempio nella Grande Moschea di Cordova, in Spagna.

Tabella 4.2 Gli archi a confronto (l = luce, f = freccia).

Arco	Centri	Freccia	Tangente ai piedritti?
a tutto sesto	1, sulla linea d'imposta	$f = l/2$	sì
scemo	1, sotto la linea d'imposta	$f < l/2$	no
a tre centri	2 sulla linea d'imposta, 1 sotto	$f < l/2$	sì
a sesto acuto equilatero	2, nelle imposte (raggio = l)	$f \approx 0{,}866\ l$	sì
rampante	2, sulle due linee d'imposta	imposte a quote diverse	sì
a ferro di cavallo	1, sopra la linea d'imposta	$f > l/2$	no

COLLEGAMENTI

Dalla tavola alla storia dell'architettura

Le costruzioni di questo paragrafo ti serviranno a leggere gli edifici della seconda parte del libro. Nel cap. 11 vedrai che i Micenei coprivano le loro tombe a *tholos* con una «falsa cupola» di pietre sporgenti, che ha la forma di una curva ma non lavora come un arco; nel cap. 15 incontrerai i veri archi a tutto sesto delle porte etrusche; nel cap. 16 gli archi, le volte e le cupole di Roma, con il loro lessico tecnico (conci, chiave, centina, spinta). L'arco acuto, gli archi rampanti delle cattedrali e l'arco a ferro di cavallo appartengono a epoche successive: qui li hai conosciuti come figure geometriche.

4.5 Ovali, ovoli ed ellisse

4.5.1 L'ovale: una curva di quattro archi

Un **ovale** è una curva chiusa formata da **quattro archi di circonferenza** raccordati tra loro, simmetrica rispetto a due assi perpendicolari: l'**asse maggiore** AB e l'**asse minore** CD. Due archi uguali, più piccoli, formano le «testate» alle estremità dell'asse maggiore; due archi uguali, più ampi, formano i fianchi. Poiché è fatto di archi di cerchio, l'ovale si chiama anche *policentrico* (a più centri). In ogni punto di raccordo valgono le regole della tangenza: il centro dell'arco piccolo, il centro dell'arco grande e il punto di raccordo sono allineati. Vediamo tre costruzioni, che differiscono per i dati di partenza (figura 4.7).

Ovale dato l'asse maggiore. Si divide AB in tre parti uguali (con il teorema di Talete o, più semplicemente, notando che serve un terzo di AB), ottenendo i punti O_1 e O_2. Con centri O_1 e O_2 e raggio $O_1A = AB/3$ si tracciano due circonferenze, che passano ciascuna per il centro dell'altra e si tagliano nei punti O_3 e O_4. Si tracciano le rette O_3O_1, O_3O_2, O_4O_1, O_4O_2 e le si prolunga fino alle due circonferenze: i quattro punti trovati sono i punti di raccordo. Infine, con centro O_3 si traccia l'arco grande inferiore e con centro O_4 quello superiore, ciascuno con raggio pari a due terzi di AB. Poiché $O_1O_2O_3$ è un triangolo equilatero, l'asse minore risulta circa 0,756 volte l'asse maggiore: per AB = 180 mm si ottiene CD ≈ 136,1 mm.

Ovale dato l'asse minore. Si traccia la circonferenza che ha per diametro l'asse minore CD; il suo diametro orizzontale individua i punti E ed F. I centri degli archi grandi sono C e D, quelli degli archi piccoli sono E ed F. Si tracciano le rette CE, CF, DE, DF e le si prolunga; con centro C e raggio CD si traccia l'arco grande che passa per D, compreso tra i prolungamenti di CE e CF; analogamente con centro D. Gli archi piccoli, di centri E ed F, chiudono la curva. L'asse maggiore risulta circa 1,586 volte l'asse minore (esattamente $(3 - \sqrt{2})$ volte).

Ovale dati i due assi. È la costruzione più usata, perché permette di disegnare un ovale delle dimensioni volute. Siano AB e CD gli assi, che si tagliano nel centro O. (1) Si congiunge A con C. (2) Con centro O e raggio OA si riporta la lunghezza del semiasse maggiore sul prolungamento di OC, trovando E; la differenza CE vale OA − OC. (3) Con centro C e raggio CE si taglia il segmento AC nel punto F. (4) Si costruisce l'asse del segmento AF: esso taglia l'asse maggiore nel centro O_1 e il prolungamento dell'asse minore nel centro O_3. I centri O_2 e O_4 si ottengono per simmetria. Gli archi piccoli hanno centri O_1, O_2 e raggio O_1A; gli archi grandi hanno centri O_3, O_4 e raggio O_3C; i punti di raccordo stanno sulle rette O_3O_1, O_3O_2, O_4O_1, O_4O_2.

ESEMPIO SVOLTO

Un ovale di 120 × 80 mm

Si costruisce l'ovale con asse maggiore 120 mm e asse minore 80 mm (OA = 60 mm, OC = 40 mm). Allora CE = 60 − 40 = 20 mm e AC = $\sqrt{(60^2 + 40^2)} \approx 72{,}11$ mm, quindi AF ≈ 52,11 mm. Eseguendo la costruzione e misurando, si trova: O_1 a circa 28,7 mm da O, quindi raggio degli archi piccoli $O_1A \approx 31{,}3$ mm; O_3 a circa 43,0 mm da O, sotto l'asse maggiore, quindi raggio degli archi grandi $O_3C \approx 83{,}0$ mm. Il primo punto di raccordo sta circa 46,1 mm a destra e 26,1 mm sopra il centro. Questi numeri, ottenuti con il calcolo, permettono di controllare la tavola con il righello.

4.5.2 L'ovolo

L'**ovolo** (o ovoide) è una curva chiusa a forma di uovo, simmetrica rispetto a un solo asse: una parte è più larga e arrotondata, l'altra più stretta. Si costruisce dato l'asse minore AB, cioè la larghezza massima (figura 4.7d). Si traccia la circonferenza di diametro AB e centro O, e se ne conserva la metà inferiore. La perpendicolare ad AB in O incontra la circonferenza, dalla parte opposta alla semicirconferenza conservata, nel punto E. Si tracciano le rette AE e BE e le si prolunga. Con centro A e raggio AB si traccia l'arco da B fino al prolungamento di AE (punto F); con centro B e lo stesso raggio, l'arco da A fino al prolungamento di BE (punto G). Infine, con centro E e raggio EF si chiude l'ovolo con il piccolo arco FG. L'altezza totale dell'ovolo è $(4 - \sqrt{2})$ volte il raggio della circonferenza di diametro AB, circa 2,59 volte: per AB = 80 mm, circa 103,4 mm. Il profilo a uovo compare anche in architettura, per esempio nella modanatura classica detta appunto *ovolo* e negli «ovoli» scolpiti del capitello ionico (cap. 12).

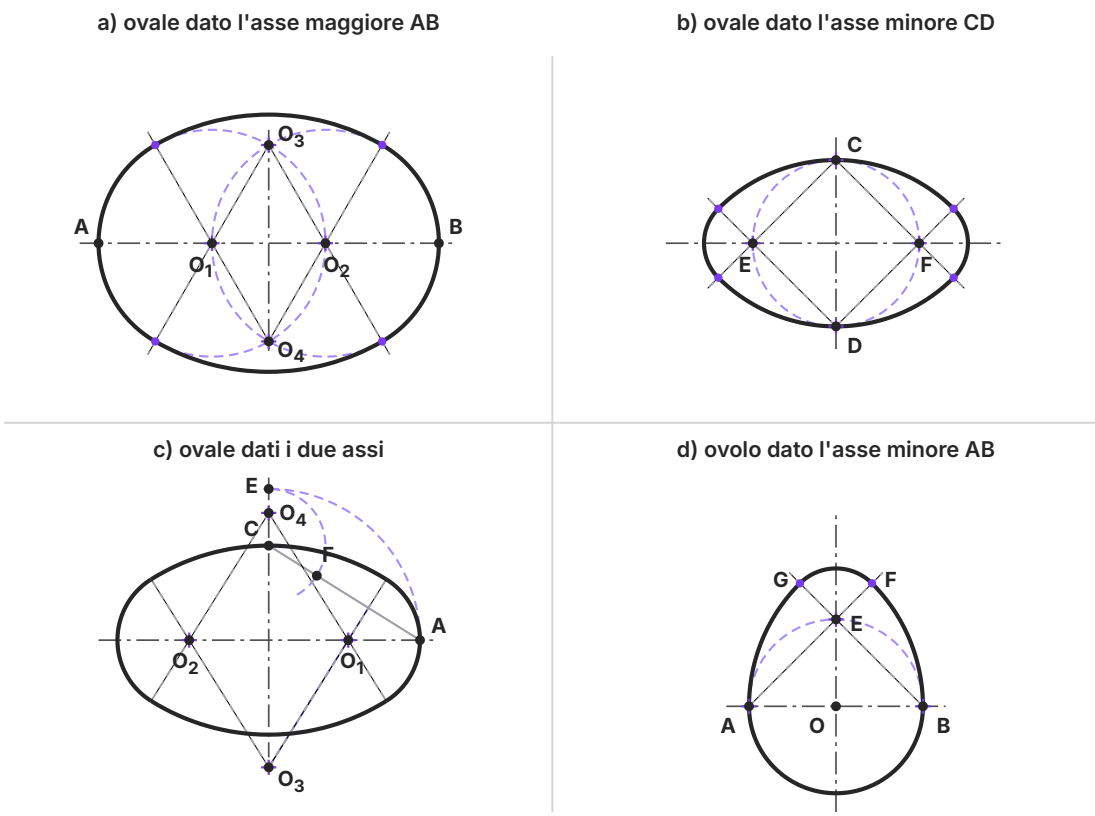

Figura 4.7 Ovali e ovolo. a) Ovale dato l'asse maggiore: AB diviso in tre parti, centri O_1...O_4. b) Ovale dato l'asse minore: centri C, D (archi grandi) ed E, F (archi piccoli). c) Ovale dati i due assi: l'asse di AF dà i centri O_1 e O_3. d) Ovolo dato l'asse minore AB: semicirconferenza inferiore e tre archi di centri A, B ed E. I punti viola sono i punti di raccordo.

4.5.3 Ovale ed ellisse non sono la stessa curva

L'**ellisse** è una curva diversa dall'ovale, anche se a prima vista gli somiglia. È il luogo dei punti del piano per i quali è costante (e uguale all'asse maggiore) la **somma** delle distanze da due punti fissi, i **fuochi**; è una delle *coniche*, perché si ottiene tagliando un cono con un piano inclinato. Un'ellisse non contiene alcun arco di circonferenza: la sua curvatura cambia in modo continuo, punto per punto, mentre l'ovale ha curvatura costante su ogni arco e la cambia di colpo nei quattro punti di raccordo. Per questo, con riga e compasso, l'ellisse non si può tracciare come linea continua: se ne costruiscono singoli punti, da unire con il curvilineo. L'ovale dati i due assi è dunque una buona **approssimazione** dell'ellisse con gli stessi assi, comoda perché si traccia tutta con il compasso.

ERRORE FREQUENTE

«Ho disegnato un'ellisse con il compasso»

Non è possibile: con il compasso si disegnano solo archi di cerchio, e un'ellisse non ne contiene nessuno. Quello che si ottiene è un ovale. La differenza è piccola, ma esiste: per assi di 120 e 80 mm, l'ovale dell'esempio svolto si discosta dall'ellisse al massimo di circa 0,6 mm, sugli archi piccoli, poco prima dei raccordi. Nelle tavole, quando l'esercizio chiede un ovale non chiamarlo ellisse; quando chiede un'ellisse (lo farà nelle proiezioni ortogonali del cap. 5), costruiscine i punti.

APPROFONDIMENTO

Il metodo del giardiniere

Per tracciare un'aiuola ellittica, i giardinieri piantano due paletti nei **fuochi**, vi legano le estremità di una corda lunga quanto l'asse maggiore e, tenendo la corda tesa con un terzo paletto, girano intorno: il paletto mobile disegna un'ellisse, perché la somma delle sue distanze dai fuochi resta uguale alla lunghezza della corda. I fuochi si trovano con il compasso: con centro in un estremo dell'asse minore e apertura uguale a metà dell'asse maggiore, si traccia un arco che taglia l'asse maggiore proprio nei due fuochi. Sul foglio lo stesso metodo funziona con due spilli e un filo: provalo su un cartoncino.

Anche in architettura la distinzione conta. La pianta del Colosseo (c. 188 × 156 m) viene spesso detta «ellittica», ma molti studiosi ritengono che gli anfiteatri romani fossero tracciati sul terreno come ovali policentrici, più facili da picchettare con corde e paletti; la questione è ancora discussa (cap. 16). Nel Seicento architetti come Francesco Borromini, nella chiesa di San Carlo alle Quattro Fontane a Roma, fecero dell'ovale un tema compositivo.

4.6 Le spirali

4.6.1 Che cos'è una spirale

Una **spirale** è una curva piana aperta che gira intorno a un punto, il polo o centro, allontanandosene progressivamente a ogni giro. La distanza, misurata lungo una stessa semiretta uscente dal centro, tra due giri consecutivi si chiama **passo**. In disegno si costruiscono due famiglie di spirali: quelle **policentriche**, formate da archi di circonferenza raccordati, che si tracciano interamente con il compasso, e quelle definite **per punti**, come la spirale di Archimede, che si costruiscono individuando molti punti e unendoli con il curvilineo.

4.6.2 Spirali policentriche

Una **spirale policentrica** si costruisce su un piccolo poligono regolare, i cui vertici sono i centri degli archi, presi in ordine ciclico (figura 4.8a e b). Ogni arco termina sul prolungamento del lato del poligono che unisce il suo centro al centro successivo: così, nel punto di passaggio, i due centri e il punto di raccordo sono allineati, e la curva è continua senza spigoli. A ogni arco il raggio aumenta di una lunghezza pari al lato del poligono.

Spirale a due centri. Su un segmento AB (lato del «poligono» degenere) si traccia una semicirconferenza di centro A e raggio AB; dal punto in cui essa taglia la retta AB si prosegue con una semicirconferenza di centro B e raggio 2·AB, poi di nuovo con centro A e raggio 3·AB, e così via, alternando i centri e sempre dalla stessa parte di rotazione. Ogni giro completo richiede due semicirconferenze, e il passo è $p = 2 \cdot AB$.

Spirale a tre e a quattro centri. Con un triangolo equilatero di lato a si usano archi di 120°, con un quadrato di lato a archi di 90°; si prolungano i lati del poligono, tutti nello stesso verso di rotazione, e si traccia ogni arco tra due prolungamenti consecutivi, con raggio a, $2a$, $3a$... In generale, per un poligono di n lati il passo è $p = n \cdot a$: $3a$ per la spirale a tre centri, $4a$ per quella a quattro centri. Quanto più numerosi sono i centri, tanto più la spirale policentrica si avvicina a una spirale «regolare» come quella di Archimede.

4.6.3 La spirale di Archimede

La **spirale di Archimede** è la curva descritta da un punto che si allontana a velocità costante dal centro lungo una semiretta che, a sua volta, ruota a velocità costante intorno al centro. Il risultato è che il raggio cresce di quantità **uguali** per rotazioni **uguali**, e il passo è costante: i giri sono equidistanti, come i solchi di un vecchio disco o le spire di una molla piana. Archimede di Siracusa la studiò nel III secolo a.C. nel trattato *Sulle spirali*.

Si costruisce per punti (figura 4.8c). Fissato il passo p, si traccia la circonferenza di centro O e raggio p e la si divide in 12 parti uguali con le costruzioni del cap. 3, ottenendo 12 semirette a 30° l'una dall'altra; si divide anche il raggio p in 12 parti uguali con il teorema di Talete. Sulla prima semiretta si riporta 1/12 di p, sulla seconda 2/12, sulla terza 3/12, e così via, riportando le lunghezze con archi concentrici; dopo un giro si arriva al punto 12, a distanza p dal centro, e si può continuare per un secondo giro aggiungendo p. I punti si uniscono con il curvilineo, facendo coincidere lo strumento con almeno tre punti per volta.

4.6.4 La spirale aurea

Nel cap. 2 hai visto che, togliendo un quadrato da un rettangolo aureo, rimane un rettangolo ancora aureo, più piccolo e ruotato di 90°. Ripetendo l'operazione si ottiene una successione di quadrati sempre più piccoli che si avvolgono su se stessi. Se in ogni quadrato si traccia un quarto di circonferenza, con centro in un vertice e raggio uguale al lato, gli archi si raccordano tra

loro e formano la **spirale aurea** (figura 4.8d). A ogni quarto di giro il raggio si riduce di un fattore $\varphi \approx 1{,}618$.

Attenzione, però: questa curva è una spirale policentrica, fatta di archi di cerchio, e quindi è solo un'**approssimazione** della vera **spirale logaritmica**, la curva in cui la distanza dal polo cresce dello stesso fattore a ogni uguale rotazione e la curvatura varia con continuità. Nella figura le due curve, quasi sovrapposte, mostrano quanto l'approssimazione sia buona e, insieme, che non è perfetta. Molte forme naturali, come la conchiglia del nautilo, sono vicine a spirali logaritmiche, ma con un fattore di crescita che in genere non è φ: l'idea che il nautilo sia una «spirale aurea» è un luogo comune che le misure non confermano.

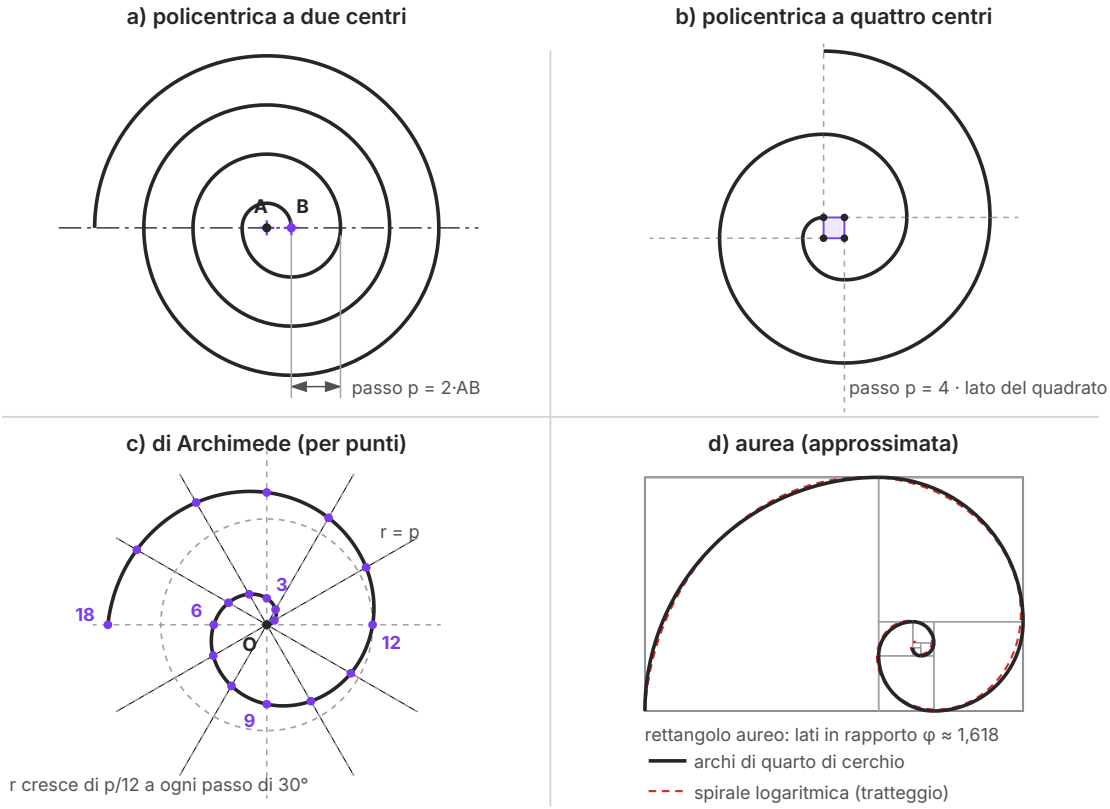

Figura 4.8 Spirali. a) Policentrica a due centri A e B: semicirconferenze di raggio AB, 2AB, 3AB...; passo 2·AB. b) A quattro centri sui vertici di un quadrato, con archi di 90° tra i prolungamenti dei lati; passo 4 volte il lato. c) Spirale di Archimede per punti: a ogni rotazione di 30° il raggio cresce di p/12. d) Spirale aurea: quarti di cerchio nei quadrati di un rettangolo aureo, confrontati con la spirale logaritmica (tratteggio rosso).

APPROFONDIMENTO

La voluta del capitello ionico

La spirale più celebre dell'architettura antica è la **voluta** del capitello ionico, che studierai nel cap. 12. Vitruvio, nel *De architectura* (libro III, cap. 5), ne fissa le proporzioni a partire da un piccolo cerchio centrale, l'«occhio», e rimanda per il tracciato a un disegno posto alla fine del libro; ma tutte le illustrazioni del trattato sono andate perdute. Per questo, a partire dal Rinascimento, architetti e trattatisti proposero diverse ricostruzioni del procedimento, quasi tutte basate su spirali policentriche con i centri disposti dentro l'occhio. Non esiste dunque un unico «metodo greco» della voluta: gli scalpellini antichi usarono probabilmente tracciati diversi, e la forma delle volute varia da un edificio all'altro.

Con questo capitolo si chiude la prima parte del libro. Hai ora tutti gli strumenti del disegno geometrico piano: perpendicolari e parallele, angoli, poligoni, tangenti e raccordi, ovali e spirali. Nella seconda parte li userai per rappresentare oggetti a tre dimensioni con il metodo delle proiezioni ortogonali; e in tutta la seconda metà del libro li ritroverai nelle piante, negli alzati e nei dettagli delle architetture antiche.

SINTESI

- Una retta è secante, tangente o esterna a una circonferenza se la distanza del centro è minore, uguale o maggiore del raggio.
- La **tangente** è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza; nelle circonferenze tangenti i centri e il punto di tangenza sono **allineati** ($O_1O_2 = R + r$ esterne, $R - r$ interne).
- Le tangenti da un punto esterno P si trovano con la circonferenza di diametro OP; i due segmenti di tangente sono uguali e misurano $\sqrt{(OP^2 - r^2)}$.
- Le tangenti comuni esterne e interne a due circonferenze si costruiscono con una circonferenza ausiliaria di raggio $R - r$ o $R + r$.
- Un **raccordo** è un arco tangente alle linee che collega: garantisce la continuità della tangente, senza gomiti né gradini.
- Il centro di un raccordo di raggio r sta su una parallela a distanza r (per una retta) o su una circonferenza concentrica di raggio $R + r$ o $r - R$ (per un arco).
- Ordine di lavoro: centro, punti di tangenza, arco, ripasso; i punti di tangenza si costruiscono, non si stimano.
- Negli archi la luce è la distanza tra i piedritti e la freccia l'altezza della chiave sull'imposta: tutto sesto $f = l/2$, sesto acuto equilatero $f \approx 0{,}866\ l$, ribassato $f < l/2$.
- L'**ovale** è formato da quattro archi di cerchio e si costruisce dato l'asse maggiore, l'asse minore o entrambi; l'ovolo ha un solo asse di simmetria.
- L'**ellisse** è una conica, non contiene archi di cerchio e si costruisce per punti: l'ovale ne è solo un'approssimazione.
- Nelle spirali policentriche su un poligono di n lati di lato a il passo è $n \cdot a$; nella spirale di Archimede il raggio cresce in modo uniforme con l'angolo.
- La spirale aurea a quarti di cerchio approssima una spirale logaritmica; la voluta ionica fu tracciata con metodi diversi, e quello descritto da Vitruvio non ci è giunto illustrato.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La tangente a una circonferenza nel punto T è:
   - **A.** parallela al raggio OT;
   - **B.** perpendicolare al raggio OT;
   - **C.** inclinata di 45° rispetto al raggio OT;
   - **D.** la retta che passa per O e per T.

2. ● Due circonferenze di raggi 40 mm e 15 mm sono tangenti esternamente. La distanza tra i centri è:

   A. 25 mm;
   B. 40 mm;
   C. 55 mm;
   D. 600 mm.

3. ●● Per trovare i punti di tangenza delle tangenti condotte da un punto esterno P si usa:

   A. la circonferenza che ha per diametro il segmento OP;
   B. la circonferenza di centro P e raggio uguale al raggio dato;
   C. la bisettrice dell'angolo tra OP e la verticale;
   D. la parallela a OP alla distanza del raggio.

4. ●● Il centro dell'arco che raccorda due rette incidenti con raggio r si trova:

   A. nel vertice dell'angolo;
   B. sul prolungamento di una delle due rette;
   C. sulla perpendicolare a una retta passante per il vertice;
   D. nell'incontro delle parallele alle due rette a distanza r, cioè sulla bisettrice.

5. ●● Un arco di raggio r deve essere tangente esternamente a una circonferenza di centro C e raggio R. Il suo centro sta sulla circonferenza di centro C e raggio:

   A. R − r;
   B. R + r;
   C. r;
   D. R · r.

6. ● In un arco a sesto acuto equilatero i centri degli archi si trovano:

   A. nei due punti d'imposta, con raggio uguale alla luce;
   B. nel punto medio della luce, con raggio metà luce;
   C. sotto la linea d'imposta, sull'asse di simmetria;
   D. sopra la linea d'imposta, con raggio metà luce.

7. ●● Quale affermazione sull'ovale è corretta?

   A. È un'ellisse costruita con il compasso.
   B. È una curva aperta che gira intorno a un centro.
   C. È formato da quattro archi di circonferenza raccordati.
   D. Ha un solo asse di simmetria.

8. ●● Una spirale policentrica è costruita sui vertici di un quadrato di lato 10 mm. Il passo è:
   A. 10 mm;
   B. 20 mm;
   C. 31,4 mm;
   D. 40 mm.

9. ●● Nella spirale di Archimede:
   A. il raggio raddoppia a ogni giro;
   B. a rotazioni uguali corrispondono aumenti uguali del raggio;
   C. ogni quarto di giro è un arco di cerchio;
   D. il passo diminuisce a ogni giro.

Lessico e norme

10. ● Completa. Un raccordo è un arco di circonferenza che collega due linee essendo _____ a ciascuna di esse; nel punto di raccordo c'è continuità della _____. I punti di raccordo su una retta si trovano al piede della _____ condotta dal centro.

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Due circonferenze tangenti internamente hanno i centri a distanza R + r. b) Il punto di tangenza di due archi tangenti sta sulla retta dei centri. c) L'ovale dati gli assi è un'ellisse esatta. d) La spirale aurea costruita con quarti di cerchio è un'approssimazione della spirale logaritmica.

12. ● Abbina ciascun arco alla sua caratteristica: 1. a tutto sesto; 2. a sesto acuto equilatero; 3. scemo; 4. a ferro di cavallo; 5. rampante — a. imposte a quote diverse; b. arco maggiore di una semicirconferenza, centro sopra l'imposta; c. semicirconferenza, f = l/2; d. due centri nelle imposte, raggio uguale alla luce; e. un solo arco minore della semicirconferenza, centro sotto l'imposta.

13. ● Indica il tipo di linea (continua grossa, continua fine, mista fine punto-linea) da usare in una tavola per: a) i due assi di un ovale; b) le circonferenze ausiliarie di un raccordo; c) il profilo finale raccordato; d) le rette che uniscono i centri degli archi di un ovale.

14. ●● Spiega con parole tue la differenza tra raccordo esterno e raccordo interno di due circonferenze, indicando in ciascun caso i raggi delle circonferenze ausiliarie e dove cadono i punti di tangenza.

15. ●● Completa. In un arco la _____ è la distanza tra i piedritti e la _____ è l'altezza della chiave sulla linea d'imposta. Nell'arco a tutto sesto $f =$ _____ ; nel sesto acuto equilatero $f \approx$ _____ $\cdot\, l$.

Costruire

16. ● Su un foglio A4 squadrato verticale, con centro O a metà larghezza e 80 mm sotto il margine superiore della squadratura, traccia una circonferenza di raggio 50 mm. Costruisci la tangente nel punto T in cui il raggio forma 45° con l'orizzontale (in alto a destra). Poi fissa un punto P sulla verticale per O, 110 mm sotto O, e costruisci le tangenti da P. Misura PT_1.

17. ● Traccia due circonferenze di raggi R = 40 mm e r = 25 mm con i centri su una retta orizzontale a distanza 110 mm. Costruisci le due tangenti comuni esterne e misura il segmento compreso tra i punti di tangenza.

18. ●● Con le stesse circonferenze dell'esercizio 17, costruisci le due tangenti comuni interne e misura il segmento compreso tra i punti di tangenza. Dove si incrociano le due tangenti interne?

19. ● Disegna un rettangolo di 150 × 90 mm al centro del foglio e raccordane i quattro angoli con archi di raggio 35 mm (rette perpendicolari). Segna i punti di tangenza e i centri.

20. ●● Da un vertice V traccia una semiretta orizzontale e una seconda semiretta inclinata di 60° (lati lunghi almeno 110 mm). Raccorda le due semirette con un arco di raggio 30 mm, costruendo le parallele a distanza 30 mm. Misura VT_1, VT_2 e VO.

21. ●● Traccia una retta orizzontale *r* e una circonferenza di raggio R = 30 mm con il centro C a 70 mm sopra *r*. Raccorda la retta e la circonferenza con un arco di raggio 25 mm, tangente esternamente alla circonferenza, posto a sinistra di C. Di quanto è spostato, in orizzontale, il centro O del raccordo rispetto a C?

22. ●● Disegna due circonferenze di raggi R_1 = 30 mm e R_2 = 20 mm, con i centri C_1 e C_2 su una retta orizzontale a 100 mm di distanza. Costruisci, dalla parte superiore, a) un raccordo esterno di raggio 40 mm; b) un raccordo interno di raggio 90 mm. Per ciascuno, indica a che distanza da C_1 (in orizzontale) e a che distanza dalla retta dei centri (sopra o sotto) si trova il centro O.

23. ● Su una linea d'imposta orizzontale disegna, affiancati, due archi di luce 80 mm: a tutto sesto e a sesto acuto equilatero, con piedritti alti 60 mm. Indica la freccia di ciascun arco.

24. ● Costruisci l'ovale dato l'asse maggiore AB = 150 mm. Misura l'asse minore e il raggio degli archi grandi.

25. ●● Costruisci l'ovale dati gli assi di 140 mm e 90 mm. Misura la distanza dal centro dei quattro centri degli archi e i due raggi. Nella metà inferiore del foglio costruisci l'ovolo dato l'asse minore AB = 80 mm e misurane l'altezza.

26. ●● Costruisci a) una spirale a quattro centri su un quadrato di lato 10 mm, tracciando otto archi; b) su un secondo foglio, una spirale di Archimede di passo 48 mm per due giri, dividendo il giro in 12 parti. Indica per a) il raggio dell'ultimo arco e il passo, per b) l'aumento del raggio tra due punti consecutivi e la distanza dal centro del punto finale.

Leggere il disegno

27. ●● Osserva la figura 4.4b. Se le due rette formano un angolo di 60° e il raggio del raccordo è 42 mm, quanto distano dal vertice V il centro O e i punti di tangenza?

28. ●● Trova l'errore. Per raccordare una retta con una circonferenza di raggio 30 mm usando un arco esterno di raggio 20 mm, un compagno cerca il centro O sulla parallela a distanza 20 mm e sulla circonferenza concentrica di raggio 20 mm. Che cosa sbaglia? Quale raggio doveva usare?

29. ●● Osserva la figura 4.7a. Se l'asse maggiore misura 90 mm, quanto misurano il raggio degli archi piccoli, quello degli archi grandi e l'asse minore?

30. ●● Osserva la figura 4.6d. Perché i punti O_1, O_2 e J devono essere allineati? Che cosa si vedrebbe nel disegno se J fosse scelto fuori da quella retta?

31. ● Osserva la figura 4.8a. Se AB = 8 mm, quanto misurano i raggi dei primi quattro archi? Quanto vale il passo? Quale centro usa il quinto arco?

Verso la verifica

32. ●●● Disegna il profilo di una piastra rettangolare di 160 × 90 mm con i quattro angoli raccordati con raggio 20 mm e due fori circolari di diametro 30 mm, con i centri sull'asse orizzontale a 45 mm dai lati corti. Traccia gli assi con la linea corretta. Quanto misurano i tratti rettilinei del contorno? Calcola il perimetro del profilo esterno.

33. ●●● Tre portali hanno piedritti alti 100 mm e luce 80 mm. Disegnali affiancati su un A4 squadrato orizzontale, a 15 mm l'uno dall'altro, con arco a tutto sesto, a sesto acuto equilatero e ribassato a tre centri con freccia 25 mm. Calcola l'altezza complessiva di ciascun portale dal suolo alla chiave e, per l'arco a tre centri, indica la posizione dei tre centri.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libri I e III: le proprietà della tangente e dell'angolo inscritto nella semicirconferenza su cui si fondano tutte le costruzioni del capitolo.
- [VIT] Vitruvio, *De architectura*, libro III: le proporzioni del capitello ionico e la descrizione della voluta.
- [GOM] E. H. Gombrich, *La storia dell'arte*: per riconoscere, nelle architetture delle diverse epoche, gli archi che qui hai imparato a costruire.

Glossario del capitolo

Arco a sesto acuto
Arco formato da due archi di circonferenza che si incontrano in una punta; nel tipo equilatero i centri sono le imposte e il raggio è uguale alla luce.

Arco a tutto sesto
Arco a semicirconferenza con il centro sulla linea d'imposta; la freccia è metà della luce.

Arco ribassato
Arco con freccia minore di metà luce: scemo (un solo centro sotto l'imposta) o a tre centri (tangente ai piedritti).

Circonferenze tangenti
Circonferenze con un solo punto in comune: esternamente se la distanza dei centri è R + r, internamente se è R − r; il punto di tangenza sta sulla retta dei centri.

Controcurva
Seconda curva, di verso opposto alla prima, in un raccordo a S tra due rette parallele; nel punto di passaggio si ha un flesso.

Ellisse
Conica formata dai punti per cui è costante la somma delle distanze da due fuochi; non contiene archi di cerchio e si costruisce per punti.

Freccia
Altezza del punto più alto dell'intradosso di un arco (la chiave) sopra la linea d'imposta.

Linea d'imposta
Retta orizzontale da cui parte la curva di un arco, all'altezza della sommità dei piedritti.

Luce
Distanza orizzontale tra i piedritti di un arco.

Ovale
Curva chiusa formata da quattro archi di circonferenza raccordati, simmetrica rispetto a due assi perpendicolari; approssima un'ellisse.

Ovolo
Curva chiusa a forma di uovo, con un solo asse di simmetria, formata da una semicirconferenza e tre archi raccordati.

Passo (di una spirale)
Distanza, misurata su una stessa semiretta uscente dal centro, tra due giri consecutivi di una spirale.

Punto di tangenza
Unico punto in comune tra una curva e una retta (o un'altra curva) a essa tangente; nei raccordi va sempre costruito, mai stimato.

Raccordo
Arco di circonferenza che collega due linee essendo tangente a entrambe, così che nei punti di unione ci sia continuità della tangente.

Raccordo esterno
Raccordo di due circonferenze con un arco che le tocca dall'esterno; il centro sta sulle circonferenze concentriche di raggio R + r.

Raccordo interno
Raccordo di due circonferenze con un arco che le avvolge; il centro sta sulle circonferenze concentriche di raggio r − R.

Retta tangente
Retta che ha con una circonferenza un solo punto in comune; è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza.

Spirale di Archimede
Spirale in cui il raggio cresce di quantità uguali per rotazioni uguali, con passo costante; si costruisce per punti.

Tangenti comuni esterne
Rette tangenti a due circonferenze che le lasciano dalla stessa parte; si costruiscono con una circonferenza ausiliaria di raggio R − r.

Tangenti comuni interne
Rette tangenti a due circonferenze che passano tra di esse e si incrociano sulla retta dei centri; si costruiscono con una circonferenza ausiliaria di raggio R + r.

Soluzioni

1. B. La tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza.

2. C. Tangenti esternamente: $O_1O_2 = R + r = 40 + 15 = 55$ mm (25 mm sarebbe il caso di tangenza interna).

3. A. Se T è un punto di tangenza, l'angolo OTP è retto, quindi T sta sulla circonferenza di diametro OP.

4. D. Il centro è l'incontro delle parallele ai lati a distanza r; essendo equidistante dai lati, sta sulla bisettrice.

5. B. Tangenza esterna: distanza dei centri R + r.

6. A. Nel sesto acuto equilatero i centri sono le imposte e il raggio è uguale alla luce.

7. C. L'ovale è fatto di quattro archi di circonferenza raccordati; non è un'ellisse, è chiuso e ha due assi di simmetria.

8. D. Passo = numero dei centri × lato = $4 \cdot 10 = 40$ mm.

9. B. Nella spirale di Archimede il raggio cresce in modo proporzionale all'angolo di rotazione: il passo è costante.

10. tangente; tangente (della direzione); perpendicolare.

11. a) F: internamente la distanza è R − r. b) V. c) F: è un ovale, cioè un'approssimazione dell'ellisse fatta di archi di cerchio. d) V.

12. 1–c; 2–d; 3–e; 4–b; 5–a.

13. a) mista fine punto-linea; b) continua fine (leggera); c) continua grossa; d) continua fine (linee di costruzione).

14. Traccia: nel raccordo esterno l'arco tocca le due circonferenze dall'esterno; il centro sta sulle circonferenze ausiliarie di raggi $R_1 + r$ e $R_2 + r$ e i punti di tangenza cadono sui segmenti che uniscono O ai centri. Nel raccordo interno l'arco le avvolge; r deve superare entrambi i raggi, le ausiliarie hanno raggi $r - R_1$ e $r - R_2$ e i punti di tangenza cadono sui prolungamenti di OC_1 e OC_2 oltre i centri.

15. luce; freccia; l/2; 0,866 (cioè $\sqrt{3}/2$).

16. La tangente in T è la perpendicolare a OT in T (inclinata di 45°, scende verso destra). Da P: circonferenza di diametro OP (centro M a 55 mm sotto O). $PT_1 = PT_2 = \sqrt{(110^2 - 50^2)} = \sqrt{9600} \approx 97{,}98$ mm. Il foglio è sufficiente: P cade 190 mm sotto il margine superiore della squadratura.

17. Circonferenza ausiliaria di centro O_1 e raggio $40 - 25 = 15$ mm, tangenti da O_2, poi raggi paralleli. Segmento di tangente esterna: $\sqrt{(110^2 - 15^2)} = \sqrt{11\,875} \approx 108{,}97$ mm.

18. Ausiliaria di raggio $40 + 25 = 65$ mm. Segmento di tangente interna: $\sqrt{(110^2 - 65^2)} = \sqrt{7875} \approx 88{,}74$ mm. Le due tangenti interne si incrociano sulla retta dei centri, nel punto che divide O_1O_2 in parti proporzionali ai raggi: a $110 \cdot 40/65 \approx 67{,}69$ mm da O_1 (≈ 42,31 mm da O_2).

19. In ogni angolo: arco di centro nel vertice e raggio 35 mm per i punti di tangenza (a 35 mm dal vertice su ciascun lato), centro O nel vertice opposto del quadrato di lato 35 mm. Restano tratti rettilinei di $150 - 70 = 80$ mm e $90 - 70 = 20$ mm.

20. Il centro O sta sulla bisettrice, a 30° da ciascun lato. Il triangolo VOT_1 è rettangolo in T_1 e ha in V un angolo di 30°: è metà di un triangolo equilatero, quindi l'ipotenusa VO è il doppio del cateto OT_1: $VO = 2 \cdot 30 = 60$ mm. Con il teorema di Pitagora $VT_1 = VT_2 = \sqrt{(60^2 - 30^2)} = \sqrt{2700} \approx 51{,}96$ mm: sul disegno misurerai circa 52 mm.

21. Il centro O sta sulla parallela a 25 mm da r e sulla circonferenza (C, $30 + 25 = 55$ mm). Il dislivello tra O e C è $70 - 25 = 45$ mm, quindi lo spostamento orizzontale è $\sqrt{(55^2 - 45^2)} = \sqrt{1000} \approx 31{,}62$ mm a sinistra di C.

22. a) Raccordo esterno: O sulle circonferenze (C_1, 70) e (C_2, 60): $x = (70^2 - 60^2 + 100^2)/200 = 56{,}5$ mm da C_1, a $\sqrt{(70^2 - 56{,}5^2)} \approx 41{,}32$ mm sopra la retta dei centri. b) Raccordo interno: O sulle circonferenze (C_1, $90 - 30 = 60$) e (C_2, $90 - 20 = 70$): $x = (60^2 - 70^2 + 100^2)/200 = 43{,}5$ mm da C_1, a $\sqrt{(60^2 - 43{,}5^2)} \approx 41{,}32$ mm *sotto* la retta dei centri, perché l'arco deve scavalcare le circonferenze dall'alto.

23. Tutto sesto: centro nel punto medio della luce, f = 40 mm. Sesto acuto equilatero: centri nelle imposte, raggio 80 mm, $f = 80 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 69{,}28$ mm. Altezze complessive dal suolo: 100 mm e ≈ 129,28 mm; i due archi affiancati occupano 160 mm più lo spazio tra l'uno e l'altro.

24. Terzi di AB: 50 mm. Archi piccoli di raggio 50 mm, archi grandi di raggio 100 mm. Distanza dei centri O_3, O_4 dall'asse maggiore: $50 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 43{,}30$ mm; semiasse minore $100 - 43{,}30 = 56{,}70$ mm; asse minore ≈ 113,40 mm.

25. Ovale 140 × 90 (semiassi 70 e 45): O_1, O_2 a ≈ 35,40 mm dal centro sull'asse maggiore, raggio archi piccoli ≈ 34,60 mm; O_3, O_4 a ≈ 55,06 mm dal centro sull'asse minore, raggio archi grandi ≈ 100,06 mm. Ovolo con AB = 80 mm: altezza $40 \cdot (4 - \sqrt{2}) \approx 103{,}43$ mm (40 mm la semicirconferenza inferiore, 40 mm da O a E, $40 \cdot (2 - \sqrt{2}) \approx 23{,}43$ mm l'arco superiore).

26. a) Raggi 10, 20, … 80 mm: l'ottavo arco ha raggio 80 mm; passo $4 \cdot 10 = 40$ mm. b) Aumento tra due punti consecutivi 48/12 = 4 mm; dopo due giri (24 punti) il punto finale dista 96 mm dal centro (la spirale occupa al massimo 168 mm in larghezza: 96 + 72 mm).

27. Come nell'esercizio 20, il triangolo VOT_1 è metà di un triangolo equilatero: $VO = 2 \cdot 42 = 84$ mm; $VT_1 = VT_2 = \sqrt{(84^2 - 42^2)} = \sqrt{5292} \approx 72{,}75$ mm.

28. Il centro di un arco tangente esternamente a una circonferenza di raggio R sta sulla circonferenza concentrica di raggio R + r, non r. Doveva usare 30 + 20 = 50 mm.

29. Archi piccoli: AB/3 = 30 mm; archi grandi: $2 \cdot 30 = 60$ mm; i centri O_3, O_4 distano $30 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 25{,}98$ mm dall'asse maggiore, quindi il semiasse minore è $60 - 25{,}98 \approx 34{,}02$ mm e l'asse minore ≈ 68,04 mm.

30. Perché J è il punto di tangenza tra i due archi: per la seconda regola della tangenza i due centri e il punto di contatto sono allineati. Con J fuori da quella retta i due archi formerebbero in J un angolo (un gomito) oppure non si incontrerebbero affatto.

31. Raggi 8, 16, 24, 32 mm; passo $2 \cdot 8 = 16$ mm. I centri si alternano A, B, A, B…: il quinto arco ha centro A (raggio 40 mm).

32. Raccordi di raggio 20 mm agli angoli: tratti rettilinei di $160 - 40 = 120$ mm (lati lunghi) e $90 - 40 = 50$ mm (lati corti). Perimetro = $2 \cdot 120 + 2 \cdot 50 + 2\pi \cdot 20 \approx 340 + 125{,}66 \approx 465{,}66$ mm. Fori: centri sull'asse orizzontale, a 45 mm dai lati corti, raggio 15 mm; assi e linee di centro con linea mista fine punto-linea.

33. Tutto sesto: $100 + 40 = 140$ mm. Sesto acuto equilatero: $100 + 80 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 169{,}28$ mm. Ribassato a tre centri (semiassi 40 e 25 mm): $100 + 25 = 125$ mm; i due centri laterali stanno sulla linea d'imposta a ≈ 21,03 mm dall'asse (raggio ≈ 18,97 mm), il terzo sull'asse ≈ 33,65 mm sotto la linea d'imposta (raggio ≈ 58,65 mm). Ingombro orizzontale: $3 \cdot 80 + 2 \cdot 15 = 270$ mm, entro i 277 mm della cornice.