CAPITOLO

3

Poligoni regolari

Un compasso, una riga e una circonferenza: basta aprire lo strumento della misura giusta perché un poligono perfetto si chiuda da solo.

OBIETTIVI

1. Definire un poligono regolare e riconoscerne centro, raggio, apotema, angolo al centro e angolo interno.
2. Calcolare gli angoli di un poligono regolare di n lati e verificare le misure di un disegno.
3. Costruire con riga e compasso i poligoni regolari inscritti in una circonferenza data: triangolo, quadrato, pentagono, esagono, ottagono, decagono, dodecagono.
4. Costruire i principali poligoni regolari dato il lato.
5. Distinguere le costruzioni esatte da quelle approssimate e usare consapevolmente il metodo generale.
6. Riconoscere poligoni, stelle e tassellazioni nell'architettura e nei pavimenti antichi.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Che cos'è un poligono regolare 2
3.2 Poligoni inscritti in una circonferenza data 6
3.3 Poligoni regolari dato il lato 10
3.4 Il metodo generale approssimato 12
3.5 Stelle e tassellazioni 15
3.6 Poligoni nell'arte e nell'architettura 17

Disegno e Storia dell'arte 1 · Parte I · Il disegno geometrico · versione 1.0
Capitolo 3: Poligoni regolari · pagine 75–98 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda una matita esagonale, il bullone di una bicicletta, la cella di un favo, il cartello di stop, la pianta di un battistero: in tutti questi oggetti ritorna la stessa idea, una figura chiusa con i lati tutti uguali e gli angoli tutti uguali. Sono i **poligoni regolari**, le figure più ordinate che si possano tracciare con segmenti. Non sono solo belle: sono comode. Un dado esagonale si stringe con la chiave da sei direzioni diverse, un pavimento di esagoni copre il piano senza lasciare buchi, una torre a otto facce può guardare gli otto venti.

Nel cap. 2 hai imparato a tracciare con riga e compasso perpendicolari, parallele, bisettrici e a dividere un segmento in parti uguali. In questo capitolo metti insieme quegli strumenti per costruire i poligoni regolari, prima dentro una circonferenza data, poi a partire dalla misura del lato. Scoprirai anche un fatto sorprendente, dimostrato soltanto tra Settecento e Ottocento: alcuni poligoni regolari, come l'ettagono, *non* si possono costruire esattamente con riga e compasso. Per loro useremo un metodo approssimato, e impareremo a dire con onestà quanto è approssimato.

3.1 Che cos'è un poligono regolare

3.1.1 Poligoni: lati, vertici, angoli

Un **poligono** è la parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa i cui segmenti non si intrecciano. I segmenti sono i **lati**, i loro estremi sono i **vertici**; due lati consecutivi formano un **angolo interno**. I segmenti che uniscono due vertici non consecutivi si chiamano **diagonali**. Un poligono si dice **convesso** quando ogni diagonale cade tutta al suo interno (nessun angolo interno supera 180°); altrimenti è **concavo**. In questo capitolo, salvo le stelle del paragrafo 3.5, lavoriamo con poligoni convessi.

Il nome di un poligono dice quanti lati ha, con radici greche: triangolo (3), quadrilatero (4), **pentagono** (5), **esagono** (6), **ettagono** (7), **ottagono** (8), **ennagono** o enneagono (9), **decagono** (10), endecagono (11), **dodecagono** (12). Per un poligono di n lati, da ogni vertice partono $n - 3$ diagonali (non si collega con sé stesso né con i due vertici vicini); contando ogni diagonale una sola volta, le diagonali sono in tutto $n(n - 3) : 2$. Un pentagono ne ha 5, un esagono 9, un ottagono 20.

3.1.2 Equilatero ed equiangolo

Un poligono è **regolare** quando è insieme **equilatero** (tutti i lati uguali) ed **equiangolo** (tutti gli angoli interni uguali). Le due condizioni sono indipendenti, e servono entrambe. Il rombo ha quattro lati uguali ma due angoli acuti e due ottusi: è equilatero, non equiangolo. Il rettangolo ha quattro angoli retti ma due lati lunghi e due corti: è equiangolo, non equilatero. L'unico qua-

drilatero regolare è il quadrato. Fa eccezione soltanto il triangolo: un triangolo equilatero è automaticamente anche equiangolo (tre angoli di 60°), e viceversa.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «Ha tutti i lati uguali, quindi è regolare»: falso, basta pensare al rombo. Allo stesso modo un esagono con gli angoli tutti di 120° ma con lati alterni lunghi e corti non è regolare. Quando verifichi una tua costruzione, controlla con il compasso che tutti i lati siano uguali *e* che i vertici stiano tutti sulla stessa circonferenza.

3.1.3 Centro, raggio, apotema

Ogni poligono regolare ha un punto speciale, il **centro** O, equidistante da tutti i vertici e da tutti i lati. Ne seguono due circonferenze con lo stesso centro (figura 3.1):

- la **circonferenza circoscritta**, che passa per tutti i vertici; il suo raggio, distanza dal centro a un vertice, è il **raggio** r del poligono;
- la **circonferenza inscritta**, tangente a tutti i lati nei loro punti medi; il suo raggio, distanza dal centro a un lato, si chiama **apotema** a.

L'apotema OH cade sempre nel **punto medio** del lato ed è **perpendicolare** a esso; è sempre più corto del raggio, perché nel triangolo rettangolo OHD il raggio OD è l'ipotenusa. Si dice che il poligono è **inscritto** nella circonferenza che passa per i suoi vertici e **circoscritto** alla circonferenza tangente ai suoi lati. Il centro si trova come incrocio degli assi di due lati (che sono corde della circonferenza circoscritta, cap. 2) oppure, nei poligoni con un numero pari di lati, come incrocio di due diagonali maggiori.

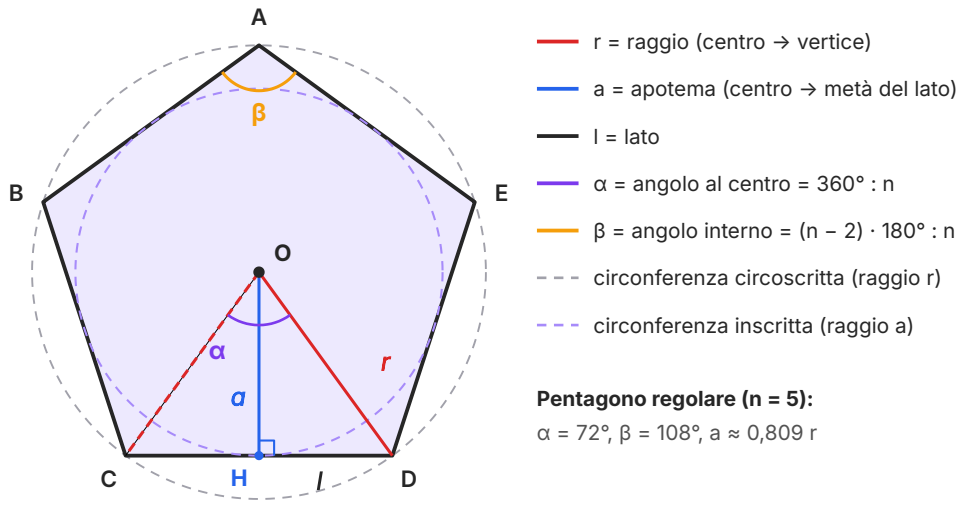

Figura 3.1 Gli elementi di un poligono regolare. Nel pentagono il raggio *r* va dal centro a un vertice, l'apotema *a* dal centro al punto medio *H* di un lato, ad angolo retto; α è l'angolo al centro, β l'angolo interno.

3.1.4 Gli angoli di un poligono regolare

Unendo il centro con tutti i vertici, un poligono regolare di n lati si divide in n triangoli isosceli uguali. I loro angoli al vertice O riempiono l'angolo giro e sono tutti uguali: ciascuno è l'**angolo al centro** $\alpha = 360° : n$. Nel pentagono $\alpha = 72°$, nell'esagono 60°, nell'ottagono 45°. È l'angolo che si deve ripetere attorno al centro per trovare i vertici: per questo costruire un poligono inscritto significa, in fondo, **dividere la circonferenza in *n* archi uguali**.

Ogni triangolo isoscele ha gli angoli alla base uguali, ciascuno di $(180° - \alpha) : 2$. Due di questi angoli, affiancati in un vertice, formano l'**angolo interno** β del poligono. Facendo il calcolo si ottiene la formula:

IN SINTESI

$$\alpha = \frac{360°}{n} \qquad \beta = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} \qquad \alpha + \beta = 180°$$

La **somma** degli angoli interni di un poligono di n lati (regolare o no) è $(n - 2) \cdot 180°$: dividendo il poligono con le diagonali uscenti da un vertice si ottengono $n - 2$ triangoli. L'**angolo esterno**, supplementare dell'interno, è uguale all'angolo al centro: $360° : n$.

ESEMPIO SVOLTO

L'ottagono regolare. $n = 8$. Angolo al centro: $360° : 8 = 45°$. Somma degli angoli interni: $(8 - 2) \cdot 180° = 1080°$. Angolo interno: $1080° : 8 = 135°$. Controllo: $45° + 135° = 180°$. Diagonali: $8 \cdot (8 - 3) : 2 = 20$.

Al contrario: un poligono regolare ha l'angolo interno di 150°. Quanti lati ha? L'angolo esterno è $180° - 150° = 30°$, quindi $n = 360° : 30° = 12$: è un dodecagono.

La tabella 3.1 raccoglie i valori per i poligoni da 3 a 12 lati, insieme ai rapporti tra lato, apotema e raggio, che useremo per **controllare le costruzioni** con il righello. Per esempio, in un pentagono inscritto in una circonferenza di raggio 60 mm il lato deve misurare $1{,}176 \times 60 \approx 70{,}5$ mm: se misuri 68 mm, qualcosa è andato storto. I rapporti si calcolano con la trigonometria, che studierai più avanti in matematica; per ora usali come strumento di verifica. La stessa tabella, in forma ridotta, è anche in appendice (Tavola E.4).

Tabella 3.1 Poligoni regolari da 3 a 12 lati: angoli, rapporti con il raggio r della circonferenza circoscritta e possibilità di costruzione esatta con riga e compasso.

Lati	Nome	Angolo al centro	Angolo interno	Lato : raggio	Apotema : raggio	Costruzione
3	triangolo equilatero	120°	60°	1,732	0,500	esatta
4	quadrato	90°	90°	1,414	0,707	esatta
5	pentagono	72°	108°	1,176	0,809	esatta
6	esagono	60°	120°	1,000	0,866	esatta
7	ettagono	≈ 51,43°	≈ 128,57°	0,868	0,901	solo approssimata
8	ottagono	45°	135°	0,765	0,924	esatta
9	ennagono	40°	140°	0,684	0,940	solo approssimata
10	decagono	36°	144°	0,618	0,951	esatta
11	endecagono	≈ 32,73°	≈ 147,27°	0,563	0,959	solo approssimata
12	dodecagono	30°	150°	0,518	0,966	esatta

DA RICORDARE

Raggio e apotema non vanno confusi: il **raggio** arriva a un **vertice**, l'**apotema** al **punto medio di un lato**, perpendicolarmente. Solo nell'esagono il lato è uguale al raggio; in tutti gli altri poligoni lato e raggio sono diversi (più lungo il lato con meno di 6 lati, più corto con più di 6).

3.2 Poligoni inscritti in una circonferenza data

Il caso più frequente nel disegno è questo: è data una circonferenza di centro O e raggio r, e bisogna inscrivere un poligono regolare. Il lavoro consiste nel dividere la circonferenza in n archi uguali; poi basta unire i punti di divisione consecutivi. In tutte le costruzioni si comincia tracciando, con linea mista fine, un diametro verticale (e spesso anche quello orizzontale), che fanno da assi di simmetria. Il primo vertice si mette di solito in alto, sull'asse verticale, così che la figura risulti simmetrica.

3.2.1 Esagono, triangolo e dodecagono

La costruzione dell'**esagono** si basa su una proprietà da ricordare: **il lato dell'esagono regolare è uguale al raggio della circonferenza circoscritta**. Il motivo è semplice: l'angolo al centro è 60°, e un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 60° ha anche gli angoli alla base di 60°, quindi è equilatero. Ognuno dei sei triangoli OAB, OBC… ha dunque tre lati uguali a r.

Costruzione (figura 3.2a): traccia il diametro verticale AD. Con centro in A e raggio r (la stessa apertura del compasso usata per la circonferenza) descrivi un arco che taglia la circonferenza in B e F; con centro in D e lo stesso raggio ottieni C ed E. Unisci A, B, C, D, E, F. In alternativa puoi «puntare» il compasso sulla circonferenza e riportare sei volte il raggio, ma ogni piccolo errore si somma al successivo: con i due archi da A e D l'errore si dimezza e la figura resta simmetrica.

Il **triangolo equilatero** si ottiene unendo un vertice sì e uno no dell'esagono. Basta però un solo arco (figura 3.2b): con centro nell'estremo inferiore D del diametro e raggio r si trovano C ed E; il triangolo è ACE. Il suo lato misura $r\sqrt{3} \approx 1{,}732\ r$.

Il **dodecagono** ha l'angolo al centro di 30°, metà di quello dell'esagono. Si può bisecare ogni arco dell'esagono con gli assi delle corde, ma c'è un metodo più rapido (figura 3.2c): si tracciano due diametri perpendicolari e, con raggio r, quattro archi centrati nei loro quattro estremi. Ogni arco taglia la circonferenza in due punti; con i quattro estremi dei diametri si ottengono $4 + 8 = 12$ punti equidistanti, perché ogni arco stacca angoli di 60° da un punto che è già a 90° dai suoi vicini.

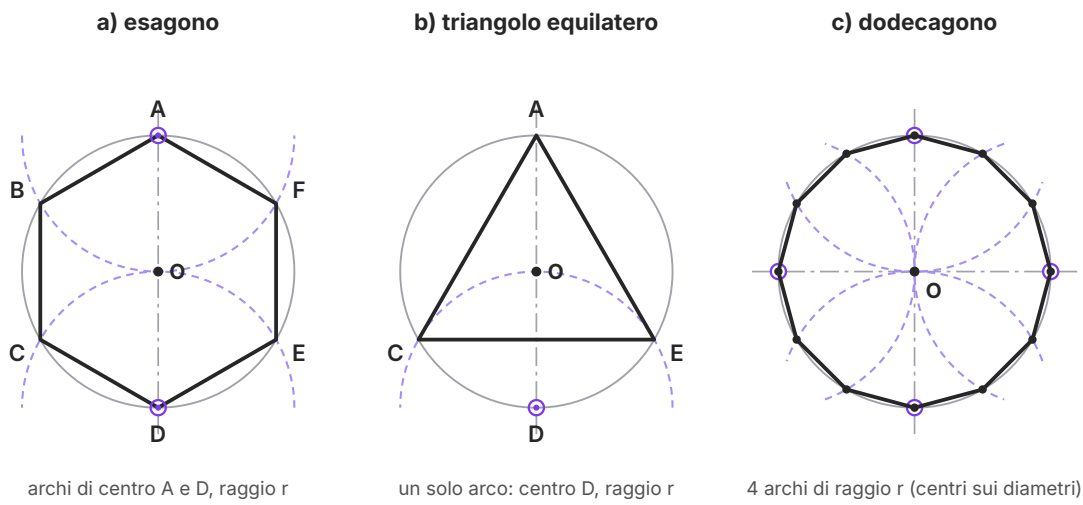

Figura 3.2 Esagono, triangolo equilatero e dodecagono inscritti. Tutti gli archi di costruzione (tratteggiati) hanno lo stesso raggio della circonferenza data; i cerchietti viola indicano i punti in cui si punta il compasso.

3.2.2 Quadrato e ottagono

Il **quadrato** inscritto ha l'angolo al centro di 90°: i suoi vertici sono gli estremi di due diametri perpendicolari (figura 3.3a). Il diametro verticale si traccia con la squadra oppure, con il solo compasso, come asse del diametro orizzontale. Il lato del quadrato è la diagonale di un quadrato di lato r, cioè $r\sqrt{2} \approx 1{,}414\,r$.

Per l'**ottagono** si dimezzano i quattro angoli retti con le loro **bisettrici**. Poiché la bisettrice dell'angolo al centro AOC coincide con l'asse della corda AC, la si traccia con due archi di uguale raggio centrati in A e in C, che si incontrano fuori dalla circonferenza (figura 3.3b). Le due bisettrici, prolungate oltre il centro, tagliano la circonferenza nei quattro vertici mancanti. Dimezzando ancora gli archi dell'ottagono si ottiene il poligono di 16 lati, e così via: 32, 64… lati, sempre in modo esatto.

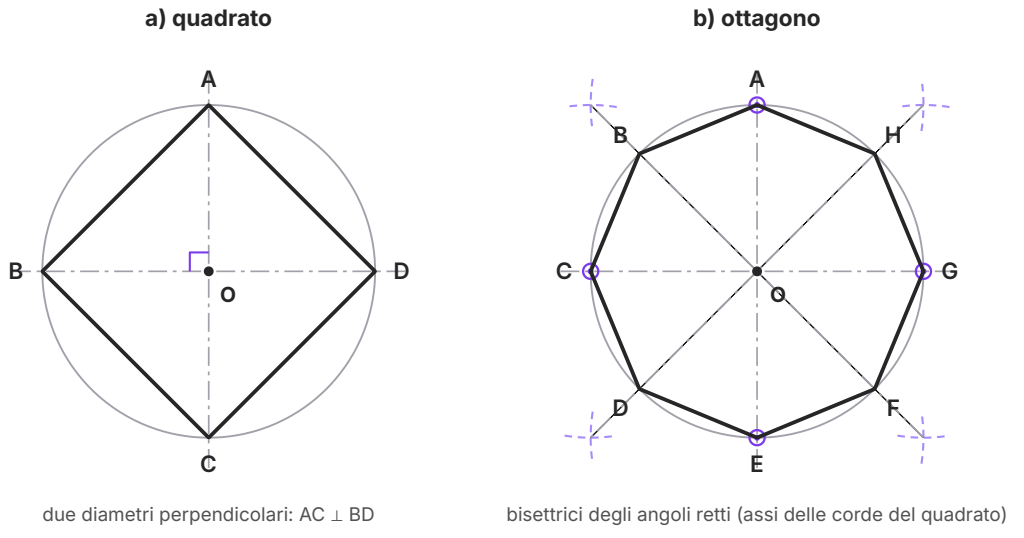

Figura 3.3 Quadrato e ottagono inscritti. Il quadrato nasce da due diametri perpendicolari; l'ottagono dalle bisettrici degli angoli retti, costruite come assi delle corde del quadrato.

3.2.3 Pentagono e decagono

Il pentagono è il primo poligono la cui costruzione non si «vede» a colpo d'occhio. Il metodo classico, descritto dall'astronomo Tolomeo nell'*Almagesto* (II sec. d.C.) e fondato su teoremi degli *Elementi* di Euclide, è questo (figura 3.4a):

1. Traccia i due diametri perpendicolari; chiama A l'estremo superiore del diametro verticale e R l'estremo destro di quello orizzontale. Costruisci l'asse del raggio OR e trova il suo punto medio M.
2. Con centro in M e raggio MA descrivi un arco che, scendendo da A, taglia il diametro orizzontale, dalla parte opposta di M, nel punto N.
3. Il segmento AN è il **lato del pentagono**; il segmento ON è il **lato del decagono** inscritto nella stessa circonferenza. Riporta AN con il compasso a partire da A, a destra e a sinistra, per trovare B ed E; poi, da questi, C e D.

Perché funziona? Chiamiamo r il raggio. Nel triangolo rettangolo MOA i cateti misurano $r/2$ e r, quindi per il teorema di Pitagora $MA = r\sqrt{5} : 2 \approx 1{,}118\ r$. Allora $ON = MN - MO = r(\sqrt{5} - 1) : 2 \approx 0{,}618\ r$: è la **sezione aurea del raggio**, che hai costruito nel cap. 2, e un antico teorema garantisce che è proprio il lato del decagono. Infine, nel triangolo rettangolo NOA, $AN^2 = r^2 + ON^2$: il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono (che vale r) e del decagono. È esattamente la proposizione 10 del libro XIII degli *Elementi*. Il calcolo dà $AN \approx 1{,}176\ r$, in accordo con la tabella 3.1.

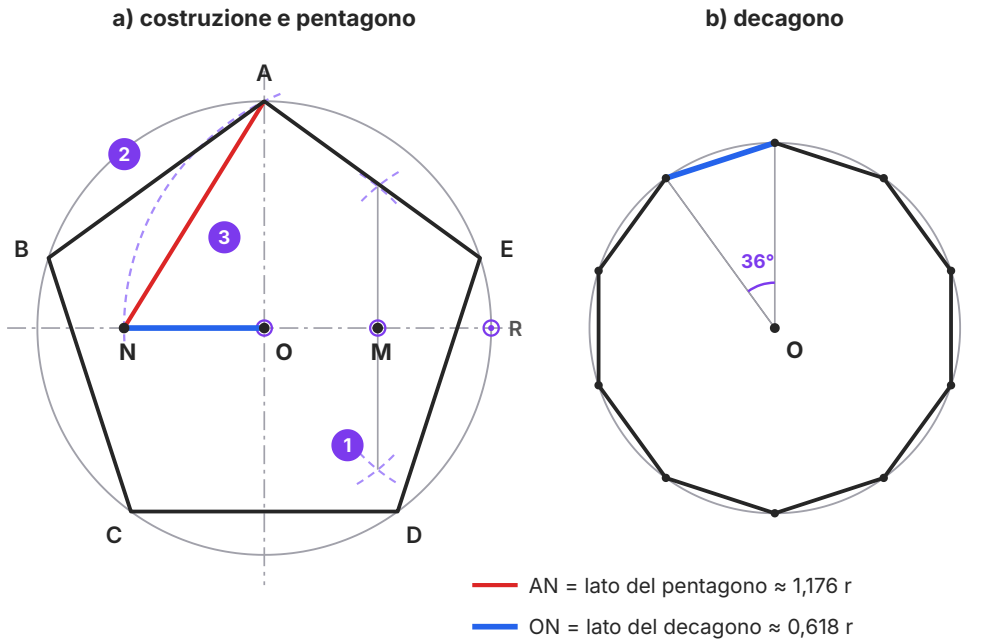

Figura 3.4 Pentagono e decagono inscritti in circonferenze di ugual raggio (il decagono, a destra, è disegnato in scala ridotta). 1: asse del raggio *OR* e punto medio *M*; 2: arco di centro *M* e raggio *MA*, che dà *N*; 3: *AN* è il lato del pentagono, *ON* quello del decagono (angolo al centro di 36°).

Il **decagono** si ottiene riportando dieci volte *ON* sulla circonferenza (figura 3.4b) oppure, più precisamente, bisecando gli archi del pentagono con i diametri che passano per i suoi vertici: ogni diametro uscente da un vertice del pentagono taglia la circonferenza, dalla parte opposta, nel punto medio dell'arco opposto, cioè in un vertice del decagono. È un buon controllo reciproco tra le due costruzioni.

ESEMPIO SVOLTO

Verificare un pentagono inscritto. Circonferenza di raggio $r = 60$ mm. $OM = 30$ mm; $MA = \sqrt{(30^2 + 60^2)} = \sqrt{4500} \approx 67{,}08$ mm; $ON = 67{,}08 - 30 = 37{,}08$ mm (lato del decagono); $AN = \sqrt{(60^2 + 37{,}08^2)} \approx 70{,}53$ mm (lato del pentagono). Controllo con la tabella 3.1: $1{,}176 \times 60 \approx 70{,}5$ mm e $0{,}618 \times 60 \approx 37{,}1$ mm. Sul foglio, con il righello, lo scarto accettabile è di qualche decimo di millimetro.

3.2.4 Esatto o approssimato?

Una costruzione è **esatta** quando, se gli strumenti fossero perfetti, darebbe il poligono senza alcun errore: l'imprecisione che resta dipende solo dalla mano e dalla matita. Sono esatte tutte le costruzioni viste finora: triangolo, quadrato, pentagono, esagono, ottagono, decagono, dode-

cagono, e quelle che se ne ricavano raddoppiando i lati. Una costruzione è **approssimata** quando, anche con strumenti perfetti, il risultato differisce di poco da quello giusto. Il disegnatore deve sempre sapere in quale dei due casi si trova, e dichiararlo.

> **APPROFONDIMENTO**
>
> **Il libro IV di Euclide**
>
> Nel libro IV degli *Elementi* (c. 300 a.C.) Euclide insegna a inscrivere e circoscrivere triangoli, quadrati, pentagoni ed esagoni a una circonferenza. La costruzione del pentagono inscritto è la proposizione 11, quella dell'esagono la 15. L'ultima, la 16, è un piccolo capolavoro: il poligono regolare di 15 lati. Euclide inscrive nella stessa circonferenza, con un vertice comune, un triangolo equilatero e un pentagono regolare. L'arco tra il vertice comune e il successivo del triangolo misura 120°, quello che arriva al secondo vertice del pentagono $2 \times 72° = 144°$: la differenza, 24°, è proprio l'angolo al centro del pentadecagono ($360° : 15$).

3.3 Poligoni regolari dato il lato

Spesso non è data la circonferenza ma la misura del lato: un pavimento di piastrelle esagonali di 10 cm, una torre ottagonale con le facce larghe 3 m. Le costruzioni partono allora da un segmento AB, che conviene disporre orizzontale nella parte bassa dello spazio disponibile, e consistono nel trovare il **centro** O del poligono, oppure direttamente i vertici successivi.

3.3.1 Triangolo, quadrato, esagono

Triangolo equilatero (figura 3.5a): con centro in A e poi in B e raggio AB si descrivono due archi che si incontrano in C. È la prima proposizione del libro I di Euclide.

Quadrato (figura 3.5b): si alzano in A e in B le perpendicolari ad AB (con il compasso, come nel cap. 2, o con le squadre); con centro in A e in B e raggio AB si staccano su di esse D e C. Controllo: le diagonali AC e BD devono essere uguali e misurare $AB\sqrt{2} \approx 1{,}414\ AB$.

Esagono (figura 3.5c): si costruisce il triangolo equilatero ABO, che è uno dei sei triangoli in cui il centro divide l'esagono. Il vertice O è quindi il centro; con raggio $OA = AB$ si traccia la circonferenza circoscritta e su di essa si riporta il lato altre quattro volte. Le due diagonali maggiori misurano $2\ AB$, le minori $AB\sqrt{3}$.

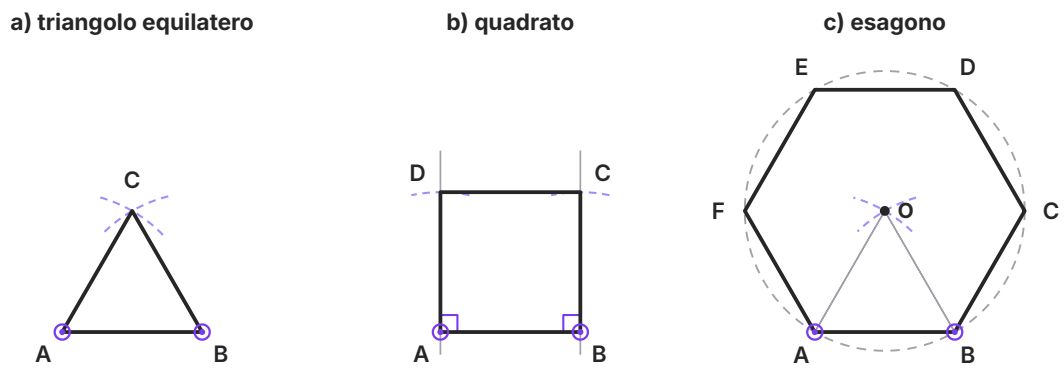

Figura 3.5 Triangolo equilatero, quadrato ed esagono dato il lato *AB*. In tutti e tre i casi basta un'unica apertura del compasso, uguale al lato.

3.3.2 L'ottagono dato il lato

Per l'ottagono bisogna trovare il centro *O* sull'asse del lato *AB*, a una distanza da *AB* uguale all'apotema. La costruzione è elegante (figura 3.6a):

1. Traccia l'asse di *AB*, che lo taglia nel punto medio *M*. Con centro in *M* e raggio *MA* descrivi una semicirconferenza: taglia l'asse in *E*.
2. Con centro in *E* e raggio *EA* descrivi un arco: taglia l'asse in *O*, centro dell'ottagono.
3. Con centro in *O* e raggio *OA* traccia la circonferenza circoscritta e riporta su di essa il lato *AB* sei volte.

Perché *O* è il centro? *E* è il centro del quadrato costruito su *AB*, e l'angolo *AEB* è retto. L'arco di centro *E* passa per *A*, *B* e *O*, quindi l'angolo *AOB*, che insiste sullo stesso arco *AB* dalla parte opposta, è metà di 90°, cioè 45°: proprio l'angolo al centro dell'ottagono. In numeri: $ME = AB/2$, $EO = EA = AB/\sqrt{2}$, quindi l'apotema $MO = AB(1 + \sqrt{2})/2 \approx 1{,}207\ AB$.

3.3.3 Il pentagono dato il lato

Nel pentagono regolare la **diagonale** sta al lato come l'intero sta alla sua parte aurea: $d : l = \varphi \approx 1{,}618$, dove $\varphi = (1 + \sqrt{5}) : 2$ è il **numero aureo** che hai incontrato nel cap. 2. Per costruire il pentagono dato il lato basta quindi costruire la diagonale (figura 3.6b):

1. In *B* traccia la perpendicolare ad *AB* e staccaci $BP = AB$. Trova il punto medio *M* di *AB*.
2. Con centro in *M* e raggio *MP* descrivi un arco che taglia il prolungamento di *AB* in *Q*. Il segmento *AQ* è la diagonale: infatti $MP = AB\sqrt{5} : 2$ e $AQ = AB/2 + AB\sqrt{5}/2 = \varphi \cdot AB$.
3. Con raggio *AQ* descrivi archi da *A* e da *B*: si incontrano sull'asse di *AB* nel vertice opposto *D*. Il vertice *C* è l'incrocio dell'arco di centro *A* e raggio *AQ* con l'arco di centro *B* e raggio *AB*; il

vertice *E*, simmetrico, si ottiene scambiando i ruoli di *A* e *B*.

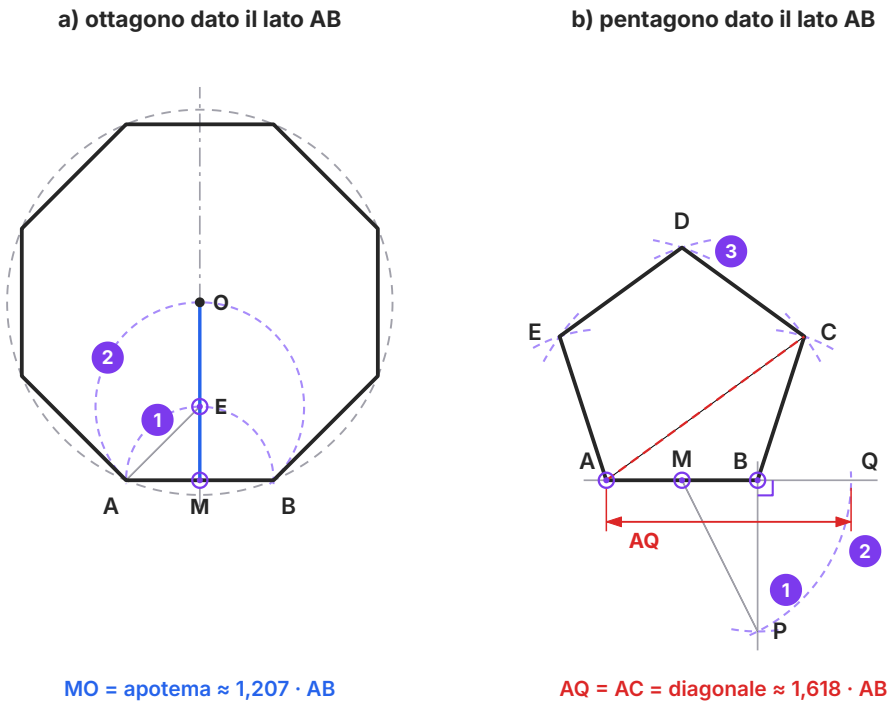

Figura 3.6 Ottagono e pentagono dato il lato *AB*. A sinistra: 1, semicirconferenza di centro *M*; 2, arco di centro *E* che dà il centro *O*. A destra: 1, *BP* = *AB* perpendicolare; 2, arco di centro *M* che dà la diagonale *AQ*; 3, archi che individuano i vertici *C*, *D*, *E*.

ERRORE FREQUENTE

Nel pentagono il rapporto aureo tra diagonale e lato è un fatto geometrico esatto. Da qui non si deve saltare alla conclusione, molto diffusa, che gli architetti antichi progettassero templi e piramidi sulla sezione aurea: per il Partenone o per le piramidi di Giza è un'ipotesi moderna, discussa e non dimostrata (ne riparleremo nei capp. 10 e 13). Usa il numero aureo per costruire, non per «spiegare» qualunque edificio.

3.4 Il metodo generale approssimato

3.4.1 La costruzione

Per l'ettagono, l'ennagono, l'endecagono e molti altri poligoni non esiste una costruzione esatta con riga e compasso. Il disegno tecnico usa allora un **metodo generale** che funziona per qualunque numero di lati inscritto in una circonferenza data. Vediamolo con l'ettagono (figura 3.7):

1. Traccia il diametro verticale AB e dividilo in tante parti uguali quanti sono i lati, qui 7, con il fascio di parallele del teorema di Talete (cap. 2). Numera i punti di divisione 1, 2, 3… a partire da A.
2. Con centro in A e in B e raggio AB (il diametro) descrivi due archi che si incontrano, a destra e a sinistra, nei punti P e P', sul prolungamento del diametro orizzontale.
3. Congiungi P con il **secondo** punto di divisione e prolunga la retta fino a incontrare la circonferenza dalla parte opposta, in C. Il segmento AC è, con buona approssimazione, il lato del poligono: riportalo con il compasso lungo la circonferenza.

Per una maggiore precisione si possono unire P e P' con tutti i punti di divisione di numero pari (2, 4, 6…) e prolungare: si ottengono direttamente tutti i vertici, senza accumulare gli errori del compasso.

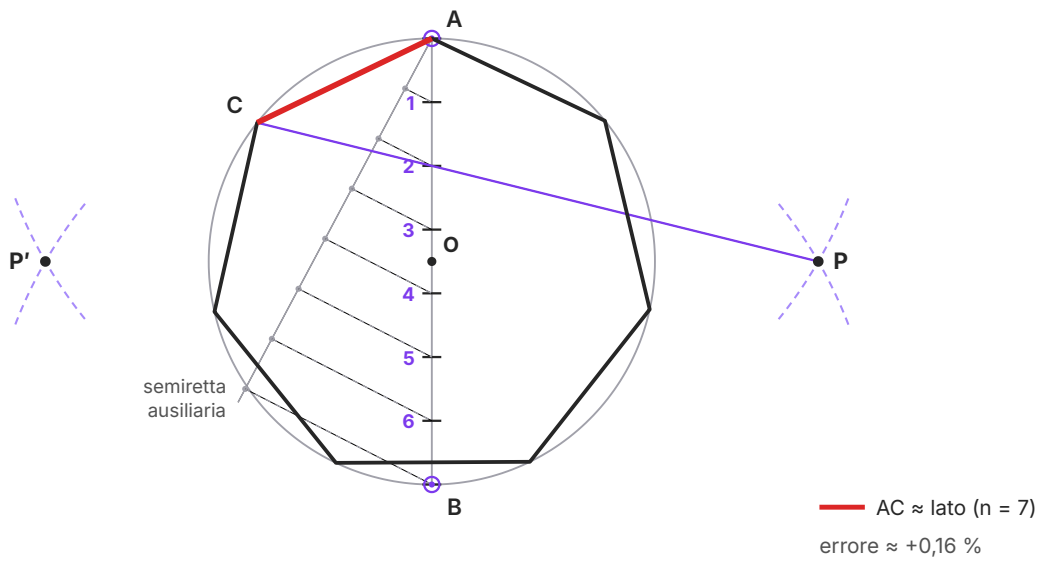

Figura 3.7 Il metodo generale applicato all'ettagono. Il diametro AB è diviso in 7 parti con una semiretta ausiliaria; gli archi di raggio AB da A e B danno P e P'; la retta da P per il punto 2 individua C. La costruzione è approssimata.

APPROFONDIMENTO

Quanto è approssimato?

Con il calcolo si può confrontare il lato ottenuto con il lato vero (tabella 3.2). Per n = 3, 4 e 6 il metodo dà il risultato esatto (prova a verificarlo); per il pentagono sbaglia di meno di un decimo di millimetro su una circonferenza scolastica; per l'ettagono l'errore è di circa il +0,16 %. Su una circonferenza di raggio 60 mm il lato vero è 52,07 mm e quello costruito 52,15 mm: meno di un decimo di millimetro, meno dello spessore di una linea. Al crescere di n l'errore aumenta, e soprattutto si **accumula**: riportando sette volte il lato approssimato dell'ettagono, il punto di arrivo supera quello di partenza di circa 0,7 mm; per l'ennagono, sulla stessa circonferenza, di oltre 2,5 mm. Per questo, con molti lati, conviene usare la variante con tutti i punti pari.

Tabella 3.2 Errore del metodo generale: lato costruito confrontato con il lato vero, per una circonferenza di raggio 60 mm (valori calcolati).

Lati	Lato vero (mm)	Lato costruito (mm)	Errore
5	70,53	70,49	– 0,06 %
7	52,07	52,15	+ 0,16 %
9	41,04	41,32	+ 0,67 %
11	33,81	34,23	+ 1,25 %
13	28,72	29,24	+ 1,82 %

ERRORE FREQUENTE

«Ho costruito l'ettagono con riga e compasso, quindi è esatto»: no. Il metodo generale usa solo riga e compasso, ma **non è una costruzione esatta**, e non lo diventa disegnando con più cura. Nel cartiglio o accanto alla figura scrivi sempre «costruzione approssimata». Al contrario, il pentagono si può costruire esattamente: per lui il metodo generale è inutile.

Esistono anche approssimazioni particolari. Una tradizionale e molto semplice per l'ettagono prende come lato la **metà del lato del triangolo equilatero** inscritto, cioè l'apotema dell'esagono: $r\sqrt{3} : 2 \approx 0{,}866\ r$, contro il valore vero $0{,}868\ r$, con un errore di circa lo 0,2 % per difetto. È rapidissima: con la costruzione della figura 3.2b, la metà della corda *CE* è già sul foglio.

APPROFONDIMENTO

Il poligono di 17 lati

Per circa duemila anni dopo Euclide nessuno riuscì a costruire esattamente un nuovo poligono regolare con un numero primo di lati. Nel 1796 il diciottenne Carl Friedrich Gauss scoprì che il **poligono regolare di 17 lati** è costruibile con riga e compasso; nel 1837 Pierre Wantzel dimostrò che l'ettagono e l'ennagono, invece, non lo sono, e che in generale un angolo non si può dividere in tre parti uguali (cap. 2).

3.5 Stelle e tassellazioni

3.5.1 I poligoni stellati

Se, invece di unire i vertici consecutivi di un poligono regolare, li unisci saltandone sempre lo stesso numero, ottieni un **poligono stellato**. Si indica con il simbolo $\{n/k\}$: n è il numero dei punti sulla circonferenza, k il passo (si unisce ogni punto con quello k posti più avanti). La figura 3.8 ne mostra tre esempi.

- Il **pentagramma** $\{5/2\}$ si ottiene unendo i vertici del pentagono uno sì e uno no: sono le cinque diagonali. Si traccia senza mai staccare la matita e torna al punto di partenza dopo aver toccato tutti i vertici. Ogni punta misura 36°. Le diagonali si tagliano tra loro secondo la sezione aurea, e al centro della stella si forma un pentagono regolare più piccolo, capovolto. Secondo la tradizione antica i Pitagorici lo usavano come segno di riconoscimento.
- L'**esagramma** $\{6/2\}$ unisce i vertici dell'esagono uno sì e uno no: non si chiude in un solo percorso, ma dà **due triangoli equilateri** sovrapposti e ruotati di 60°. Le punte misurano 60° e al centro resta un esagono regolare.
- L'**ottagramma** $\{8/3\}$, unendo i vertici dell'ottagono ogni tre, è invece unicursale, con punte di 45°; il passo 2, $\{8/2\}$, dà due quadrati sovrapposti ruotati di 45°, la stella a otto punte frequente nei pavimenti e nei soffitti.

La regola generale: la stella si traccia in un solo percorso se n e k non hanno divisori comuni (5 e 2, 8 e 3); se ne hanno, si scompone in più poligoni (6 e 2: due triangoli; 8 e 2: due quadrati). Ogni punta di una stella $\{n/k\}$ misura $180° \cdot (n - 2k) : n$.

3.5.2 Le tassellazioni regolari

Una **tassellazione** è un ricoprimento del piano con figure che non si sovrappongono e non lasciano spazi vuoti; è **regolare** quando è fatta con poligoni regolari tutti uguali, che si toccano lato contro lato. Quali poligoni regolari ci riescono? Il ragionamento è semplice e conviene saperlo rifare. In ogni vertice della tassellazione si incontrano alcuni poligoni, diciamo m, e i loro

angoli interni devono riempire esattamente l'angolo giro: $m \cdot \beta = 360°$. Quindi β deve essere un divisore di 360°, e servono almeno 3 poligoni perché ciascun angolo interno è minore di 180°.

- Triangolo: $\beta = 60°$, $360° : 60° = 6$ triangoli per vertice. Funziona.
- Quadrato: $\beta = 90°$, 4 quadrati per vertice. Funziona.
- Pentagono: $\beta = 108°$, $360° : 108° \approx 3{,}33$, non è intero. Tre pentagoni coprono 324° e lasciano un vuoto di 36°; quattro si sovrapporrebbero. Non funziona.
- Esagono: $\beta = 120°$, 3 esagoni per vertice. Funziona.
- Da 7 lati in su: β è maggiore di 120° e minore di 180°; tre poligoni supererebbero 360°, due non arriverebbero a 360°. Impossibile.

Le tassellazioni regolari sono dunque **soltanto tre**: di triangoli, di quadrati, di esagoni (figura 3.8, in basso). Tra le tre, quella esagonale racchiude la superficie maggiore con il perimetro minore; già Pappo di Alessandria, nel IV secolo d.C., osservava ammirato che le api costruiscono le loro celle esagonali.

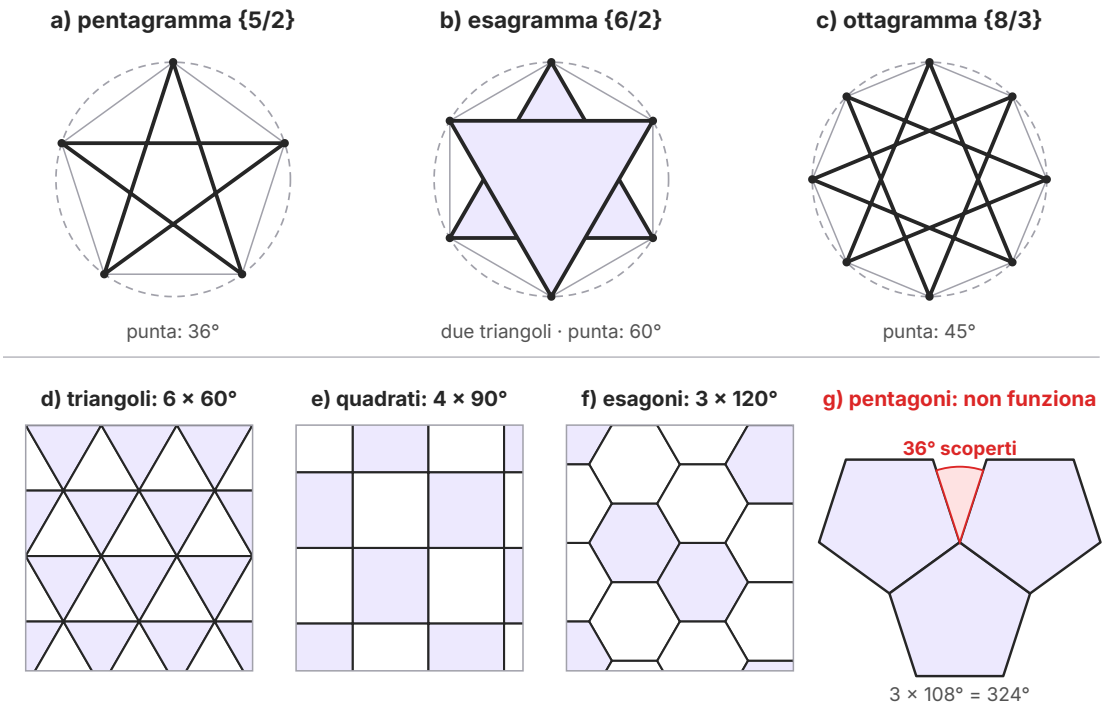

Figura 3.8 Poligoni stellati e tassellazioni. In alto tre stelle inscritte nella stessa circonferenza: pentagramma, esagramma (due triangoli) e ottagramma. In basso le tre sole tassellazioni regolari e il caso dei pentagoni, che lasciano un vuoto di 36°.

ESEMPIO SVOLTO

Ottagoni e quadrati. Un pavimento molto diffuso alterna ottagoni regolari e quadrati con lo stesso lato. Funziona? In ogni vertice si incontrano due ottagoni e un quadrato: 135° + 135° + 90° = 360°. Sì. Non è una tassellazione *regolare*, perché usa due poligoni diversi, ma è **semiregolare**: tutti i vertici sono circondati nello stesso modo. Con il lato di 30 mm, ogni ottagono è largo tra due lati opposti $30 \cdot (1 + \sqrt{2}) \approx 72{,}4$ mm, e questa è anche la distanza tra i centri di due ottagoni vicini.

3.6 Poligoni nell'arte e nell'architettura

3.6.1 Piante poligonali

Una pianta a poligono regolare ha una qualità particolare: non ha una facciata principale, ma un **centro**. Chi entra è portato a guardare in alto e attorno, e l'edificio «risponde» in modo uguale da ogni direzione. Per questo le piante centrali, circolari o poligonali, sono state scelte per edifici che celebrano un punto: una tomba, un fonte battesimale, un luogo di osservazione.

Un esempio antico, e ancora in piedi, è la **Torre dei Venti** ad Atene, nell'area dell'agorà romana: una torre di marmo a pianta **ottagonale** attribuita dalle fonti antiche all'astronomo Andronico di Cirro e datata di solito al I sec. a.C. (secondo alcuni studiosi al secolo precedente). Ognuna delle otto facce è orientata verso uno dei venti principali, rappresentato in rilievo nella fascia alta; sulle pareti erano tracciate meridiane e all'interno funzionava un orologio ad acqua. L'ottagono, qui, non è una scelta decorativa: è la rosa dei venti divisa in otto settori di 45°, cioè l'angolo al centro dell'ottagono. In età romana l'ottagono compare anche negli ambienti più sperimentali, come la sala ottagona della *Domus Aurea* di Nerone a Roma (dopo il 64 d.C.), che studierai insieme all'architettura romana nel cap. 16.

COLLEGAMENTI

Architettura dei secoli successivi. L'ottagono avrà un enorme successo più tardi: sono ottagonali molti battisteri, come quello di San Giovanni a Firenze, e Castel del Monte, fatto costruire da Federico II in Puglia verso la metà del XIII secolo, ha una pianta ottagonale con otto torri anch'esse ottagonali (patrimonio UNESCO dal 1996). Li vedrai il prossimo anno. Ancora più tardi, nel 1593, la Repubblica di Venezia fondò in Friuli la città-fortezza di **Palmanova**, a pianta stellare con nove bastioni: un poligono di 9 lati, cioè proprio uno di quelli che non si possono costruire esattamente con riga e compasso. Sul terreno, d'altra parte, gli ingegneri tracciavano con corde, picchetti e misure, e a quella scala l'approssimazione era più che sufficiente.

3.6.2 Pavimenti, mosaici, rosoni

Il campo in cui i poligoni regolari si incontrano più spesso è la decorazione delle superfici. I pavimenti romani in mosaico e in *opus sectile* (lastrine di marmi colorati tagliate su misura) usano reticoli di quadrati, di esagoni, di triangoli, combinazioni di ottagoni e quadrati, stelle a otto punte formate da due quadrati: sono esattamente le tassellazioni e le stelle del paragrafo 3.5. Il motivo è pratico prima che estetico: una tassellazione si ripete all'infinito con pochi pezzi uguali, che si possono tagliare in serie con una sagoma. Tracciare il disegno di un pavimento significa quindi costruire una sola cella, con la precisione delle costruzioni di questo capitolo, e poi ripeterla.

Ancora più tardi, nelle facciate delle chiese romaniche e gotiche, i **rosoni** divideranno un grande cerchio in 8, 12, 16 o 24 settori uguali: costruzioni esatte, ottenute con i metodi del paragrafo 3.2 e con successive bisezioni. Anche questo lo vedrai il prossimo anno. Nel cap. 4, intanto, aggiungerai ai poligoni gli archi di raccordo, che servono a trasformare queste geometrie in archi, finestre e cornici.

I poligoni regolari non appartengono solo all'arte. Le formule degli angoli di questo capitolo sono le stesse che userai in geometria; i rapporti lato/raggio della tabella 3.1 li ritroverai in trigonometria. In chimica, il benzene è un anello di sei atomi di carbonio disposti ai vertici di un esagono regolare; in scienze della Terra, il ghiaccio cristallizza con una simmetria esagonale, ed è per questo che i fiocchi di neve hanno sei punte. In meccanica, la testa esagonale di bulloni e dadi si può afferrare con la chiave da sei posizioni diverse, ruotando ogni volta di 60°.

DA RICORDARE

Prima di ogni tavola sui poligoni: 1) calcola α e β e, con la tabella 3.1, la misura attesa del lato; 2) traccia assi e diametri con linea mista fine; 3) lascia visibili archi e linee di costruzione; 4) ripassa il poligono con linea grossa; 5) controlla con il compasso che tutti i lati siano uguali e scrivi, se è il caso, «costruzione approssimata».

SINTESI

- Un poligono è regolare se è equilatero ed equiangolo; il rombo e il rettangolo non lo sono, il quadrato sì.
- Il centro di un poligono regolare è il centro comune della circonferenza circoscritta (raggio r, fino ai vertici) e di quella inscritta (apotema a, fino ai punti medi dei lati, perpendicolare ai lati).
- Angolo al centro $\alpha = 360° : n$; angolo interno $\beta = (n - 2) \cdot 180° : n$; $\alpha + \beta = 180°$; diagonali $n(n - 3) : 2$.
- Nell'esagono il lato è uguale al raggio: da qui le costruzioni di esagono, triangolo e dodecagono inscritti con archi di raggio r.
- Quadrato e ottagono inscritti nascono da due diametri perpendicolari e dalle bisettrici degli angoli retti; ogni bisezione raddoppia i lati.
- Pentagono e decagono inscritti: M punto medio del raggio, arco di centro M e raggio MA fino a N; AN è il lato del pentagono ($\approx 1{,}176\ r$), ON quello del decagono ($\approx 0{,}618\ r$).
- Dato il lato: triangolo, quadrato ed esagono con un'unica apertura del compasso; ottagono trovando il centro sull'asse (apotema $\approx 1{,}207\ l$); pentagono costruendo la diagonale aurea ($\approx 1{,}618\ l$).
- Sono costruibili esattamente i poligoni di 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17… lati; ettagono, ennagono, endecagono no (Gauss 1796, Wantzel 1837).
- Il metodo generale (diametro diviso in n parti, punto P, retta per il punto 2) vale per ogni n ma è approssimato, con un errore che cresce con n e si accumula.
- I poligoni stellati $\{n/k\}$ si ottengono unendo i vertici a salti; sono unicursali se n e k non hanno divisori comuni.
- Le sole tassellazioni regolari sono di triangoli, quadrati ed esagoni, perché solo 60°, 90° e 120° dividono esattamente 360° tra gli angoli interni possibili.
- Piante ottagonali (Torre dei Venti, sala ottagona della *Domus Aurea*) e pavimenti geometrici romani sono applicazioni dirette di queste costruzioni.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'angolo al centro di un ottagono regolare misura:
   - **A.** 40°
   - **B.** 45°
   - **C.** 135°
   - **D.** 60°

2. ● L'angolo interno di un esagono regolare misura:
   - **A.** 120°
   - **B.** 60°
   - **C.** 108°
   - **D.** 135°

3. ● In quale poligono regolare il lato è uguale al raggio della circonferenza circoscritta?
   - **A.** triangolo equilatero
   - **B.** quadrato
   - **C.** esagono
   - **D.** ottagono

4. ●● Nella costruzione classica del pentagono inscritto, il segmento *ON* (dal centro al punto *N* sul diametro orizzontale) è:
   - **A.** il lato del pentagono
   - **B.** l'apotema del pentagono
   - **C.** metà del raggio
   - **D.** il lato del decagono inscritto

5. ● Quale di questi poligoni regolari **non** si può costruire esattamente con riga e compasso?
   - **A.** pentagono
   - **B.** dodecagono
   - **C.** ettagono
   - **D.** ottagono

6. ● L'apotema di un poligono regolare è:
   - **A.** il segmento che unisce due vertici non consecutivi
   - **B.** il segmento dal centro al punto medio di un lato, perpendicolare al lato
   - **C.** il segmento dal centro a un vertice
   - **D.** la metà di una diagonale

7. ●● Quali poligoni regolari, da soli, ricoprono il piano senza vuoti né sovrapposizioni?
   - **A.** triangolo, quadrato e pentagono
   - **B.** quadrato, esagono e ottagono
   - **C.** solo il quadrato
   - **D.** triangolo, quadrato ed esagono

8. ●● Nel pentagono regolare il rapporto tra diagonale e lato è:
   - **A.** il numero aureo, circa 1,618
   - **B.** √2, circa 1,414
   - **C.** √3, circa 1,732
   - **D.** 2

9. ●● (approfondimento) Che cosa scoprì Gauss nel 1796?
   - **A.** che il pentagono regolare è costruibile
   - **B.** che nessun angolo si può bisecare con riga e compasso
   - **C.** che il poligono regolare di 17 lati è costruibile con riga e compasso
   - **D.** il metodo generale approssimato

Lessico e norme

10. ● Completa: «Un poligono regolare è insieme _____ ed _____ . Il suo _____ è equidistante dai vertici e dai lati. La circonferenza che passa per i vertici si dice _____ ; quella tangente ai lati si dice _____ e ha per raggio l' _____ .»

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Il rombo è un poligono regolare. b) La somma degli angoli interni di un esagono è 720°. c) In un poligono regolare l'apotema è più lungo del raggio. d) Il metodo generale fornisce un ettagono esatto se si disegna con molta cura.

12. ● Abbina ogni poligono regolare al suo angolo interno: 1) triangolo; 2) quadrato; 3) pentagono; 4) esagono; 5) ottagono; 6) decagono. a) 144°; b) 108°; c) 60°; d) 135°; e) 90°; f) 120°.

13. ● Spiega con parole tue la differenza tra «poligono inscritto in una circonferenza» e «poligono circoscritto a una circonferenza», e disegna uno schizzo a mano libera per ciascun caso.

14. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Il pentagramma si traccia senza staccare la matita dal foglio. b) Anche l'esagramma si traccia in un solo percorso chiuso. c) Il dodecagono inscritto si può ottenere dimezzando gli archi dell'esagono. d) La Torre dei Venti di Atene ha pianta esagonale.

15. ●● Completa la tabella con il numero di diagonali: pentagono _____ ; esagono _____ ; ottagono _____ ; dodecagono _____ .

Costruire

16. ● **Esagono e triangolo inscritti.** Su un A4 squadrato traccia due circonferenze di raggio 60 mm con i centri sull'asse verticale della cornice, a 75 mm e a 215 mm dal lato superiore della cornice. Inscrivi un esagono nella prima e un triangolo equilatero nella seconda. Misura e scrivi accanto a ciascun poligono la lunghezza del lato.

17. ● **Quadrato e ottagono inscritti.** In una circonferenza di raggio 70 mm inscrivi un quadrato; nella stessa figura, con le bisettrici costruite come assi delle corde, completa l'ottagono. Ripassa il quadrato con linea fine e l'ottagono con linea grossa. Quanto misurano i due lati?

18. ● **Dodecagono inscritto.** In una circonferenza di raggio 75 mm costruisci il dodecagono con i quattro archi di raggio r centrati negli estremi di due diametri perpendicolari. Controlla con il compasso che i 12 lati siano uguali e scrivi la loro misura attesa.

19. ●● **Pentagono e decagono.** In una circonferenza di raggio 60 mm costruisci il pentagono inscritto con il metodo del paragrafo 3.2.3, numerando i passaggi. In una seconda circonferenza uguale, sotto la prima, costruisci il decagono usando *ON*. Indica le misure attese di *MA*, *ON* e *AN*.

20. ● **Tre poligoni dato il lato.** Su un A4 squadrato orizzontale, lungo una stessa retta orizzontale, disegna tre segmenti *AB* lunghi 60 mm e su di essi costruisci un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono, lasciando almeno 10 mm tra una figura e l'altra (attenzione: l'esagono è largo il doppio del lato). Misura l'altezza del triangolo, la diagonale del quadrato e le due diagonali (maggiore e minore) dell'esagono.

21. ●● **Ottagono dato il lato.** Costruisci un ottagono regolare con lato $AB = 45$ mm, seguendo i tre passaggi del paragrafo 3.3.2. Calcola e poi misura *ME*, *EA*, l'apotema *MO* e il raggio *OA*.

22. ●● **Pentagono dato il lato.** Costruisci un pentagono regolare con lato $AB = 60$ mm usando la diagonale aurea. Calcola la lunghezza attesa di *MP* e della diagonale *AQ*, poi verifica sul disegno che tutte e cinque le diagonali abbiano questa lunghezza.

23. ●● **Ettagono approssimato.** Con il metodo generale inscrivi un ettagono in una circonferenza di raggio 60 mm (posiziona il centro in modo che il punto *P*, a destra, rientri nella cornice: a quale distanza dal centro si trova?). Scrivi accanto alla figura «costruzione approssimata» e confronta la lunghezza del lato ottenuto con quella vera ($0{,}868\,r$).

24. ●● **Pentagramma.** In una circonferenza di raggio 60 mm costruisci il pentagono inscritto e da esso il pentagramma {5/2}, ripassando con linea grossa solo la stella. Misura una diagonale e l'angolo di una punta con il goniometro.

25. ●● **Pavimento esagonale.** Costruisci sette esagoni regolari di lato 25 mm: uno centrale e sei attorno, ciascuno con un lato in comune con quello centrale. Quanto distano i centri di due esagoni adiacenti? Quanti esagoni si incontrano in ciascun vertice?

26. ●●● **Ottagoni e quadrati.** Disegna una porzione di pavimento formata da quattro ottagoni regolari di lato 30 mm disposti a 2×2, con un quadrato di lato 30 mm nello spazio centrale tra di essi. Verifica con il calcolo degli angoli che in ogni vertice non resti alcun vuoto e calcola la larghezza di ciascun ottagono tra due lati opposti.

Leggere il disegno

27. ●● Nella costruzione della figura 3.4 supponi che il raggio sia di 50 mm. Calcola *OM*, *MA*, *ON* e *AN*. Quale dei due segmenti, *ON* o *AN*, useresti per costruire il decagono?

28. ●● Un compagno presenta un ennagono costruito con il metodo generale e scrive nel cartiglio «ennagono regolare inscritto, costruzione esatta». Il suo ultimo lato misura circa 2,5 mm meno degli altri. Spiega che cosa è successo e correggi la dicitura. Quanto deve misurare l'angolo interno?

29. ● Osserva la figura 3.8, riquadro g. Spiega perché tre pentagoni regolari attorno a un vertice lasciano un vuoto e calcola l'ampiezza del vuoto. Poi spiega perché due ottagoni e un quadrato, invece, chiudono esattamente.

30. ● Un poligono regolare ha l'angolo interno di 150°. Quanti lati ha? Quanto misura il suo angolo al centro? Si può costruire esattamente?

31. ●●● Nella figura 3.6a, chiamando l il lato AB, esprimi in funzione di l le lunghezze ME, EA e MO. Perché l'angolo AOB misura 45°?

Verso la verifica

32. ●●● **Un padiglione ottagonale.** Un padiglione da giardino ha pianta a ottagono regolare con il lato di 3,2 m. Disegnane la pianta in scala 1:50, costruendo l'ottagono dato il lato. Calcola la misura del lato sul foglio, l'apotema e la larghezza tra due lati opposti, sul foglio e nella realtà. La figura sta nella cornice di un A4?

33. ●●● **Un rosone a sei punte.** In una circonferenza di raggio 80 mm inscrivi l'esagono e da esso l'esagramma {6/2}; ripassa la stella con linea grossa e colora l'esagono che si forma al centro. Calcola il lato dei due triangoli e quello dell'esagono centrale (suggerimento: ogni lato del triangolo è diviso in tre parti uguali dalle intersezioni).

34. ●●● **Il pentadecagono di Euclide.** In una circonferenza di raggio 70 mm inscrivi, con un vertice comune in alto, un triangolo equilatero e un pentagono regolare. Individua l'arco di 24° e usalo per completare il poligono regolare di 15 lati. Spiega perché la costruzione è esatta e calcola la lunghezza attesa del lato.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro IV: le costruzioni con riga e compasso dei poligoni inscritti e circoscritti, fino al poligono di 15 lati (proposizione 16).
- [VIT] Vitruvio, *De architectura*, libro I, cap. 6: la rosa dei venti e l'orientamento delle strade della città, con il ricordo della torre ottagonale di Andronico ad Atene.
- [GOM] E. H. Gombrich, *La storia dell'arte*: per collocare nel tempo gli edifici a pianta centrale citati in questo capitolo.

Glossario del capitolo

Angolo al centro
Angolo con il vertice nel centro, compreso tra i raggi condotti a due vertici consecutivi; misura 360° : n.

Angolo interno
Angolo formato da due lati consecutivi di un poligono; in un poligono regolare misura (n − 2) · 180° : n.

Apotema
Segmento che va dal centro di un poligono regolare al punto medio di un lato, perpendicolare al lato; è il raggio della circonferenza inscritta.

Centro (di un poligono regolare)
Punto equidistante da tutti i vertici e da tutti i lati; è il centro comune delle circonferenze inscritta e circoscritta.

Circonferenza circoscritta
Circonferenza che passa per tutti i vertici di un poligono, che si dice inscritto in essa.

Circonferenza inscritta
Circonferenza tangente a tutti i lati di un poligono, che si dice circoscritto a essa.

Costruzione approssimata
Costruzione che, anche con strumenti ideali, dà un risultato solo vicino a quello corretto; va dichiarata come tale.

Costruzione esatta
Costruzione con riga e compasso che, con strumenti ideali, dà il risultato senza alcun errore teorico.

Diagonale
Segmento che unisce due vertici non consecutivi di un poligono; un poligono di n lati ne ha n(n − 3) : 2.

Esagramma
Stella a sei punte {6/2}, formata da due triangoli equilateri sovrapposti e ruotati di 60°.

Metodo generale
Costruzione approssimata di un poligono regolare di n lati inscritto: diametro diviso in n parti, punto P dagli archi di raggio pari al diametro, retta da P per il secondo punto di divisione.

Numero aureo
Il numero φ = (1 + √5) : 2 ≈ 1,618; nel pentagono regolare è il rapporto tra diagonale e lato.

Opus sectile
Tecnica decorativa romana di pavimenti e pareti con lastrine di marmi colorati tagliate secondo forme geometriche.

Pentagramma
Stella a cinque punte {5/2}, formata dalle cinque diagonali del pentagono regolare; si traccia in un solo percorso.

Poligono regolare
Poligono che ha tutti i lati uguali (equilatero) e tutti gli angoli interni uguali (equiangolo).

Poligono stellato
Figura ottenuta unendo i punti di una circonferenza divisa in n parti uguali a salti costanti di k; si indica con {n/k}.

Raggio (di un poligono regolare)
Distanza dal centro a un vertice; è il raggio della circonferenza circoscritta.

Tassellazione
Ricoprimento del piano con figure che non si sovrappongono e non lasciano vuoti; è regolare se usa un solo poligono regolare (triangolo, quadrato o esagono).

Soluzioni

1. B. $360° : 8 = 45°$.

2. A. $(6 - 2) \cdot 180° : 6 = 120°$.

3. C. L'esagono: i sei triangoli con vertice nel centro hanno l'angolo al vertice di 60° e sono equilateri.

4. D. $ON = r(\sqrt{5} - 1) : 2 \approx 0{,}618\,r$, sezione aurea del raggio, è il lato del decagono; il lato del pentagono è AN.

5. C. L'ettagono si costruisce solo in modo approssimato; pentagono, ottagono e dodecagono hanno costruzioni esatte.

6. B. L'apotema va dal centro al punto medio di un lato ed è perpendicolare al lato; il segmento dal centro a un vertice è il raggio.

7. D. Solo 60°, 90° e 120° sono angoli interni di poligoni regolari che dividono esattamente 360° (6, 4 e 3 poligoni per vertice).

8. A. $d : l = \varphi = (1 + \sqrt{5}) : 2 \approx 1{,}618$.

9. C. Gauss (1796) dimostrò che il poligono regolare di 17 lati è costruibile con riga e compasso.

10. equilatero; equiangolo; centro; circoscritta; inscritta; apotema.

11. a) F: il rombo è equilatero ma non equiangolo, quindi non è regolare. b) V: $(6 - 2) \cdot 180° = 720°$. c) F: l'apotema è più corto del raggio (è un cateto del triangolo rettangolo che ha il raggio per ipotenusa). d) F: il metodo generale è approssimato per natura; la cura nel disegno non lo rende esatto.

12. 1–c (60°); 2–e (90°); 3–b (108°); 4–f (120°); 5–d (135°); 6–a (144°).

13. Traccia: un poligono è inscritto in una circonferenza quando tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza (la circonferenza è fuori, «attorno»); è circoscritto a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza (la circonferenza è dentro e tocca ogni lato nel punto medio, per i poligoni regolari). Nel primo caso il raggio della circonferenza è il raggio del poligono, nel secondo è l'apotema.

14. a) V: {5/2} è unicursale perché 5 e 2 non hanno divisori comuni. b) F: l'esagramma {6/2} è formato da due triangoli distinti, perché 6 e 2 hanno il divisore comune 2. c) V: ogni arco di 60° dell'esagono si divide in due archi di 30°. d) F: la Torre dei Venti ha pianta ottagonale (otto facce per otto venti).

15. Con $n(n - 3) : 2$: pentagono 5; esagono 9; ottagono 20; dodecagono 54.

16. Esagono: lato = raggio = 60 mm. Triangolo: lato = $60 \cdot \sqrt{3} \approx 103{,}9$ mm. Le circonferenze occupano le fasce da 15 a 135 mm e da 155 a 275 mm dal lato superiore della cornice: entrano nell'altezza utile di 277 mm. Passaggi: diametro verticale, archi di raggio 60 mm da A e D (esagono) o dal solo D (triangolo).

17. Quadrato: $70 \cdot \sqrt{2} \approx 99{,}0$ mm. Ottagono: $0{,}765 \times 70 \approx 53{,}6$ mm (tabella 3.1).

18. Lato atteso: $0{,}518 \times 75 \approx 38{,}8$ mm (tabella 3.1). Passaggi: due diametri perpendicolari; quattro archi di raggio 75 mm centrati negli estremi; i 12 punti si uniscono in ordine.

19. $OM = 30$ mm; $MA = \sqrt{(30^2 + 60^2)} \approx 67{,}08$ mm; $ON \approx 37{,}08$ mm (lato del decagono); $AN \approx 70{,}53$ mm (lato del pentagono).

20. Altezza del triangolo: $60 \cdot \sqrt{3} : 2 \approx 52{,}0$ mm. Diagonale del quadrato: $60 \cdot \sqrt{2} \approx 84{,}9$ mm. Esagono: diagonale maggiore $2 \cdot 60 = 120$ mm, minore $60 \cdot \sqrt{3} \approx 103{,}9$ mm. Ingombro: $60 + 60 + 120 = 240$ mm più gli spazi, entro i 277 mm della cornice orizzontale; l'esagono è alto $\approx 103{,}9$ mm.

21. $ME = 22{,}5$ mm; $EA = 45 : \sqrt{2} \approx 31{,}8$ mm; apotema $MO = 22{,}5 + 31{,}8 \approx 54{,}3$ mm; raggio $OA \approx 58{,}8$ mm ($= 1{,}307 \times 45$). L'ottagono è largo $2 \times 54{,}3 \approx 108{,}6$ mm tra due lati opposti.

22. $MP = \sqrt{(30^2 + 60^2)} = 60 \cdot \sqrt{5} : 2 \approx 67{,}1$ mm; $AQ = 30 + 67{,}1 \approx 97{,}1$ mm $= 1{,}618 \times 60$. Tutte le diagonali devono misurare ≈ 97,1 mm; il raggio della circonferenza circoscritta è ≈ 51,0 mm e l'altezza del pentagono (dal lato al vertice opposto) ≈ 92,3 mm.

23. P dista dal centro $\sqrt{3} \cdot 60 \approx 103{,}9$ mm, quindi il centro va posto ad almeno 104 mm dal bordo destro della cornice (e a più di 60 mm da quello sinistro). Il diametro si divide in 7 parti di $120 : 7 \approx 17{,}1$ mm. Lato costruito ≈ 52,15 mm, lato vero $0{,}868 \times 60 \approx 52{,}07$ mm: errore ≈ +0,16 %. Riportando sette volte il lato, l'ultimo risulta più corto di circa 0,7 mm.

24. Lato del pentagono $= 1{,}176 \times 60 \approx 70{,}53$ mm; diagonale $= 1{,}618 \times 70{,}53 \approx 114{,}1$ mm ($d : l = \varphi$). Ogni punta misura 36° ($180° \cdot (5 - 4) : 5$).

25. Distanza tra i centri $= 2 \times$ apotema $= 25 \cdot \sqrt{3} \approx 43{,}3$ mm. In ogni vertice si incontrano 3 esagoni ($3 \times 120° = 360°$); sul contorno della figura alcuni vertici appartengono a uno o due esagoni soltanto.

26. In ogni vertice: $135° + 135° + 90° = 360°$, nessun vuoto. Larghezza dell'ottagono tra lati opposti: $30 \cdot (1 + \sqrt{2}) \approx 72{,}4$ mm; la porzione 2×2 è quindi larga circa 144,9 mm. Il quadrato centrale ha i lati in comune con i quattro ottagoni.

27. $OM = 25$ mm; $MA = 50 \cdot \sqrt{5} : 2 \approx 55{,}9$ mm; $ON \approx 55{,}9 - 25 = 30{,}9$ mm; $AN = \sqrt{(50^2 + 30{,}9^2)} \approx 58{,}8$ mm. Per il decagono si usa ON.

28. Traccia: il metodo generale è approssimato (per l'ennagono il lato costruito è circa lo 0,7 % più lungo del vero); riportandolo nove volte l'errore si accumula e l'ultimo lato risulta più corto degli altri. La dicitura corretta è «ennagono regolare inscritto, costruzione approssimata»; conviene usare la variante con i punti pari. L'ennagono non è costruibile esattamente con riga e compasso. Angolo interno: $7 \cdot 180° : 9 = 140°$.

29. L'angolo interno del pentagono è 108°: $3 \times 108° = 324°$, resta un vuoto di $360° - 324° = 36°$; un quarto pentagono (108°) non ci sta. Due ottagoni e un quadrato: $135° + 135° + 90° = 360°$ esatti.

30. Angolo esterno 30°, quindi $n = 360 : 30 = 12$ (dodecagono); angolo al centro 30°. Sì, è costruibile esattamente (fig. 3.2c).

31. $ME = l/2$; $EA = l/\sqrt{2} \approx 0{,}707\, l$; $MO = l(1 + \sqrt{2})/2 \approx 1{,}207\, l$. E è il centro del quadrato di lato AB, quindi l'angolo AEB è retto; O sta sulla circonferenza di centro E passante per A e B, e l'angolo alla circonferenza AOB è metà dell'angolo al centro AEB: $90° : 2 = 45°$, l'angolo al centro dell'ottagono.

32. Lato sul foglio: $3200 : 50 = 64$ mm. Apotema: $32 \cdot (1 + \sqrt{2}) \approx 77{,}3$ mm sul foglio (≈ 3,86 m reali); larghezza tra lati opposti ≈ 154,5 mm (≈ 7,73 m reali); raggio ≈ 83,6 mm, larghezza tra vertici opposti ≈ 167,2 mm (≈ 8,36 m). Sì: 154,5 e 167,2 mm sono minori di 190 mm.

33. Lato dei triangoli: $80 \cdot \sqrt{3} \approx 138{,}6$ mm. Ogni lato è diviso in tre parti uguali dalle intersezioni, quindi il lato dell'esagono centrale è $138{,}6 : 3 \approx 46{,}2$ mm ($= 80 : \sqrt{3}$).

34. Con vertice comune A, il secondo vertice del triangolo è a 120° e il secondo vertice del pentagono a 144°: l'arco tra i due misura $24° = 360° : 15$. Riportando la corda corrispondente (o bisecando e combinando archi esatti) si ottengono i 15 vertici. È esatta perché usa solo le costruzioni esatte del triangolo e del pentagono. Lato atteso ≈ 29,1 mm (misura sul disegno; controllo: $15 \times 29{,}1 \approx 437$ mm, poco meno della circonferenza $2\pi \cdot 70 \approx 440$ mm).