CAPITOLO

2

Costruzioni geometriche fondamentali

«Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e con qualsiasi raggio.» — Euclide, Elementi, libro I, postulato 3 (traduzione nostra)

OBIETTIVI

1. Conoscere le regole delle costruzioni con riga e compasso e capire perché le linee di costruzione restano visibili.
2. Tracciare l'asse di un segmento, perpendicolari e parallele, con il compasso e con le squadre.
3. Dividere un segmento in parti uguali o proporzionali applicando il teorema di Talete.
4. Trasportare e bisecare un angolo, costruire gli angoli notevoli e distinguere ciò che è possibile da ciò che è impossibile.
5. Costruire triangoli e quadrilateri dai dati e trovarne i punti notevoli con i cerchi inscritto e circoscritto.
6. Costruire la sezione aurea di un segmento e il rettangolo aureo, distinguendo i fatti storici dai miti.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Costruire con riga e compasso 2
2.2 Le perpendicolari 4
2.3 Parallele e divisione di un segmento 7
2.4 Gli angoli 10
2.5 Triangoli e quadrilateri 14
2.6 La sezione aurea 17

Disegno e Storia dell'arte 1 · Parte I · Il disegno geometrico · versione 1.0
Capitolo 2: Costruzioni geometriche fondamentali · pagine 49–74 del volume completo · estratto per lo studio

Immagina di dover tracciare, sul pavimento di un cantiere, l'angolo retto esatto da cui partiranno le fondazioni di una casa. Non hai un goniometro grande come una stanza, né una squadra lunga dieci metri: hai solo una corda, qualche picchetto e la tua intelligenza geometrica. Oppure immagina di dover dividere un'asse di legno lunga 130 cm in sette parti esattamente uguali, senza calcolatrice e con un metro che non dà numeri «tondi». Problemi come questi hanno accompagnato architetti, carpentieri e scalpellini per millenni, e la soluzione è sempre la stessa: una costruzione geometrica.

In questo capitolo impariamo le costruzioni che stanno alla base di tutto il disegno tecnico: perpendicolari e parallele, divisioni di segmenti, angoli, triangoli e quadrilateri, fino alla celebre sezione aurea. Sono poche operazioni, ma combinate tra loro permettono di disegnare quasi tutto ciò che vedrai in questo libro, dai poligoni regolari del cap. 3 agli archi e alle volte del cap. 4 e del cap. 16. Per ogni costruzione non ci limiteremo al «come si fa»: cercheremo anche il **perché funziona**, perché è proprio questo che distingue chi disegna con consapevolezza da chi copia una ricetta.

2.1 Costruire con riga e compasso

2.1.1 Le regole del gioco

Una **costruzione geometrica** è una sequenza ordinata di operazioni grafiche che, partendo da elementi dati (punti, segmenti, angoli), produce un nuovo elemento con proprietà precise: il punto medio di un segmento, una retta perpendicolare, un angolo di 60°. La tradizione che seguiremo risale alla geometria greca e ammette soltanto due strumenti ideali: la **riga**, che serve a tracciare la retta passante per due punti, e il **compasso**, che serve a tracciare una circonferenza di centro e raggio dati. La riga di questo gioco è «muta»: non ha tacche, non serve a misurare, ma solo a congiungere. Il compasso, oltre a tracciare archi, ci permette di *riportare* una lunghezza da una parte all'altra del foglio.

Perché tanta severità, se sul tavolo abbiamo anche un righello millimetrato e un goniometro? Perché una misura è sempre approssimata: lo spessore della mina, l'errore di lettura, la tacca un po' spostata si sommano. Una costruzione con riga e compasso, invece, è **esatta**: se fosse eseguita con strumenti ideali darebbe il risultato perfetto, e nella pratica il suo errore dipende solo dalla cura con cui tracciamo, non da arrotondamenti nei numeri. Pensa alla divisione di un segmento di 130 mm in 7 parti: ogni parte misura 18,571428… mm, un numero che nessun righello può leggere; la costruzione che vedremo nel paragrafo 2.3 la risolve invece senza alcun calcolo.

APPROFONDIMENTO

Euclide e gli *Elementi*

Gli *Elementi* di Euclide, scritti ad Alessandria d'Egitto intorno al 300 a.C., raccolgono in tredici libri la geometria greca del tempo. Il libro I si apre con definizioni, postulati e «nozioni comuni»; i primi tre postulati descrivono proprio le operazioni consentite: tracciare una retta da un punto a un altro, prolungare un segmento, descrivere un cerchio con qualsiasi centro e raggio. Seguono le *proposizioni*, molte delle quali sono costruzioni che rifaremo in questo capitolo: il triangolo equilatero su un segmento dato (I, 1), la bisettrice di un angolo (I, 9), il punto medio di un segmento (I, 10), la perpendicolare da un punto della retta (I, 11) e da un punto esterno (I, 12), il trasporto di un angolo (I, 23), la parallela per un punto (I, 31). Il libro IV tratta i cerchi inscritti e circoscritti ai triangoli e ai poligoni regolari. Per oltre duemila anni gli *Elementi* sono stati il manuale di geometria d'Europa.

2.1.2 Le linee di costruzione restano visibili

In una tavola di costruzioni geometriche le linee ausiliarie non si cancellano. Archi, rette di appoggio e centri del compasso restano sul foglio, tracciati con linea **continua fine** e leggera (mina dura, per esempio 2H), mentre il **risultato** della costruzione si ripassa con linea continua grossa (mina media, HB o F). Gli assi di simmetria, come hai visto nel cap. 1, si tracciano con la linea mista fine punto-linea. La ragione è semplice: le linee di costruzione sono la «dimostrazione» del disegno. Chi guarda la tavola deve poter ripercorrere ogni passaggio, capire da quale centro è stato puntato il compasso e con quale apertura. Una tavola con il solo risultato, senza costruzioni, è come un compito di matematica con il solo risultato finale: non si può controllare, e non si valuta.

Nelle figure di questo capitolo useremo una convenzione costante: le linee di costruzione sono tratteggiate in viola chiaro o grigio, i centri del compasso sono segnati da un punto, il risultato è in nero spesso o in viola, e i numeri nei cerchietti viola indicano l'**ordine dei passaggi**. Sul tuo foglio, naturalmente, tutto sarà a matita, distinguendo le linee per spessore e intensità.

2.1.3 L'operazione di base: riportare un segmento

Quasi ogni costruzione comincia così: si apre il compasso sulla lunghezza di un segmento dato, si punta in un altro punto e si traccia un arco. Questa operazione si chiama **trasporto di un segmento**: l'arco contiene tutti i punti che distano dal centro quanto il segmento dato. È il modo più preciso per riportare una misura, molto più preciso del leggere i millimetri sul righello e riscriverli altrove. Per questo, nel disegno tecnico, il compasso si usa spesso anche «a punte fisse», come un divisore, per riportare lunghezze sul foglio.

Euclide si spinse oltre: nella proposizione I, 2 dimostra che si può riportare un segmento anche con un compasso che «si chiude» appena lo si solleva dal foglio. Per noi la questione è

solo teorica, ma ci insegna lo spirito delle costruzioni: ottenere il massimo risultato con il minimo degli strumenti.

Ricorda il principio che fa funzionare quasi tutte le costruzioni del capitolo. Una **circonferenza** è l'insieme dei punti che hanno la stessa distanza dal centro: ogni volta che tracci un arco, stai disegnando tutti i punti che distano dal centro esattamente quanto l'apertura del compasso. Quando due archi si incontrano, il punto d'incontro ha *contemporaneamente* le due distanze richieste.

2.2 Le perpendicolari

Due rette sono **perpendicolari** quando, incontrandosi, formano quattro angoli retti (90°). La perpendicolarità è dappertutto nel disegno: tra i lati della squadratura, tra pareti e pavimenti, tra la linea di terra e le linee di richiamo delle proiezioni ortogonali che studierai nel cap. 5. Vediamo quattro situazioni diverse e il metodo giusto per ciascuna.

2.2.1 L'asse di un segmento

L'**asse di un segmento** è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio. La costruzione (figura 2.1) è la prima che ogni studente di disegno impara:

1. Punta il compasso in A con un'apertura **maggiore della metà di AB** e traccia un arco sopra e uno sotto il segmento.
2. Senza cambiare apertura, punta in B e traccia due archi che taglino i precedenti nei punti C e D.
3. Congiungi C e D: la retta CD è l'asse di AB e incontra il segmento nel suo **punto medio** M.

Perché funziona? C è stato trovato con due archi di uguale raggio, uno centrato in A e uno in B: quindi CA = CB. Lo stesso vale per D. Ora, l'insieme di tutti i punti del piano equidistanti da A e da B è proprio l'asse di AB: i punti C e D vi appartengono entrambi, e per due punti passa una sola retta. In linguaggio geometrico si dice che l'asse è il **luogo geometrico** dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. Un luogo geometrico è l'insieme di *tutti e soli* i punti che godono di una certa proprietà: la circonferenza è il luogo dei punti a distanza data da un centro, l'asse il luogo dei punti equidistanti da due punti. Questa idea tornerà quando cercheremo il centro del cerchio che passa per i tre vertici di un triangolo.

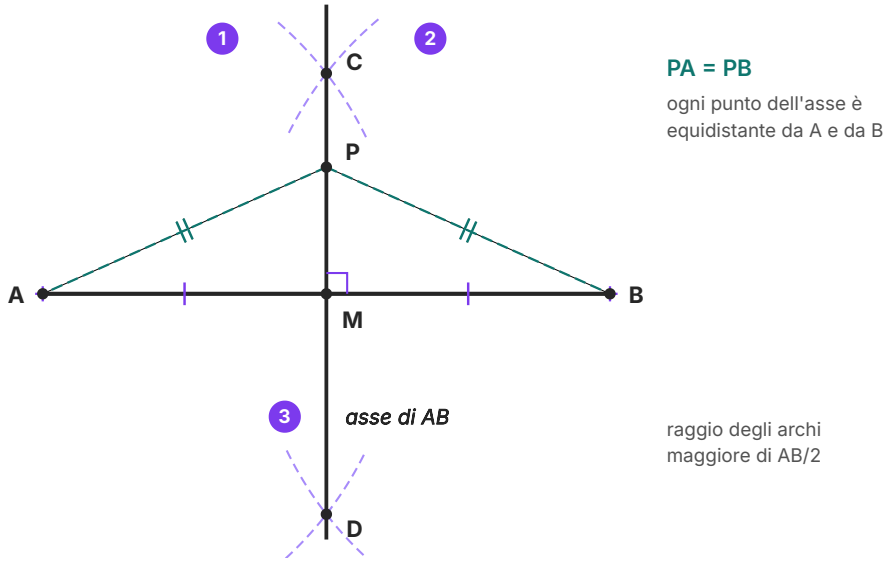


Figura 2.1 Asse di un segmento. Gli archi di uguale raggio (maggiore di AB/2) centrati in A e in B si incontrano in C e D; la retta CD è perpendicolare ad AB nel punto medio M. Ogni punto dell'asse, come P, è equidistante da A e da B.

ERRORE FREQUENTE

Se apri il compasso meno della metà di AB, gli archi centrati in A e in B **non si incontrano** e la costruzione fallisce. Se lo apri appena più della metà, gli archi si tagliano con un angolo molto acuto e il punto d'incontro diventa incerto. La regola pratica: un'apertura pari a circa i due terzi o i tre quarti del segmento dà intersezioni nette. Allo stesso modo, prendi C e D **lontani tra loro**: una retta definita da due punti vicini si sbaglia facilmente di direzione.

2.2.2 Perpendicolare da un punto della retta

Data una retta r e un suo punto P, si vuole la perpendicolare a r passante per P (figura 2.2a). Si punta il compasso in P e, con un'apertura qualsiasi, si segnano su r due punti A e B simmetrici rispetto a P. A questo punto P è il punto medio del segmento AB, e la perpendicolare cercata non è altro che l'asse di AB: con un'apertura maggiore di PA si tracciano due archi da A e da B, che si incontrano in Q; la retta PQ è la perpendicolare. Hai appena visto un'idea che ricorre spesso: **ricondurre un problema nuovo a uno già risolto**.

2.2.3 Perpendicolare da un punto esterno

Se il punto P è fuori dalla retta (figura 2.2b), si punta in P con un'apertura sufficiente a tagliare r in due punti A e B. Poiché PA = PB, il punto P sta già sull'asse di AB; basta trovarne un secondo

punto, Q, con due archi di uguale raggio centrati in A e in B (conviene tracciarli dalla parte opposta a P, per avere i due punti lontani). La retta PQ incontra *r* nel punto H, detto **piede della perpendicolare**. Il segmento PH è la **distanza** del punto P dalla retta: è il più corto tra tutti i segmenti che uniscono P a un punto di *r*.

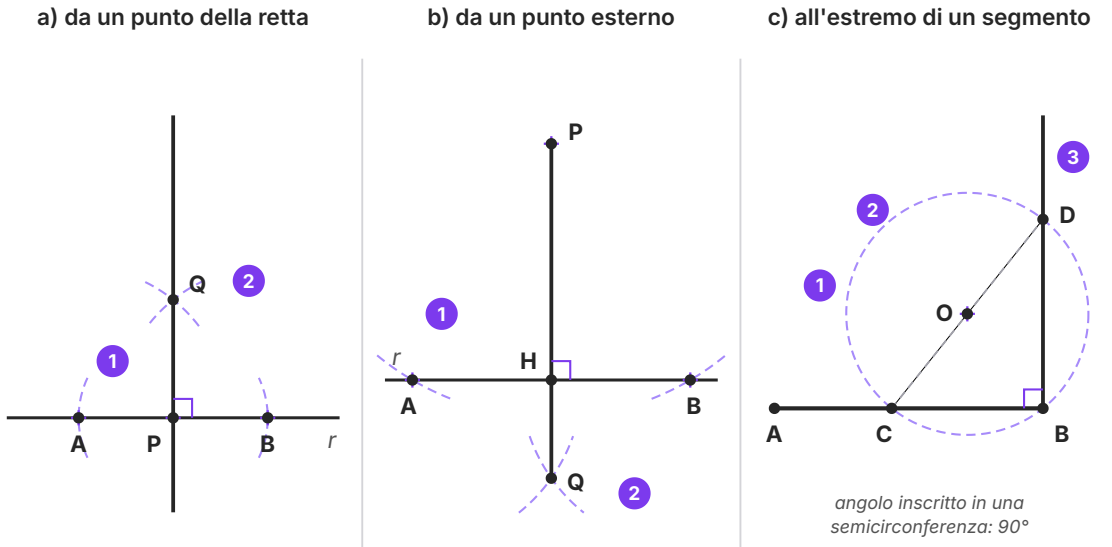


Figura 2.2 Tre costruzioni della perpendicolare. a) Da un punto P della retta: P diventa il punto medio di AB. b) Da un punto esterno P: P è già equidistante da A e B, si trova un secondo punto Q dell'asse. c) All'estremo B di un segmento: la circonferenza di centro O passa per B, il diametro CD dà il punto D e l'angolo CBD è retto.

2.2.4 Perpendicolare all'estremo di un segmento

Capita spesso di dover alzare una perpendicolare proprio nell'estremo B di un segmento AB, senza spazio per prolungarlo oltre B: è il caso, per esempio, dell'angolo di una squadratura. Un metodo elegante (figura 2.2c) sfrutta una proprietà della circonferenza:

1. Scegli un punto O qualsiasi sopra il segmento, non troppo lontano da B ma spostato verso A (non sulla verticale di B, altrimenti la circonferenza toccherebbe la retta solo in B), e traccia la circonferenza di centro O passante per B. Essa taglia di nuovo il segmento AB in un punto C.
2. Traccia il diametro che parte da C e passa per O; il suo secondo estremo sulla circonferenza è D.
3. La retta BD è perpendicolare ad AB in B.

La ragione è un teorema che studierai anche in matematica: ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto (Euclide, *Elementi* III, 31). Il triangolo CBD ha il lato CD che è un diametro, quindi l'angolo in B misura 90°.

Un secondo metodo, antichissimo, si basa sulla **terna pitagorica** 3, 4, 5. Poiché $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, un triangolo con i lati proporzionali a 3, 4 e 5 è rettangolo (è l'inverso del teorema di Pitagora, Euclide I, 48). Scelta un'unità, per esempio 20 mm, si riporta da B verso A un segmento di 3 unità (60 mm), poi si traccia da B un arco di raggio 4 unità (80 mm) e dall'estremo del primo segmento un arco di raggio 5 unità (100 mm): i due archi si incontrano in un punto della perpendicolare in B. Il metodo è un po' meno comodo sul foglio, ma diventa preziosissimo sul terreno, dove al posto del compasso si usano corde e picchetti.

COLLEGAMENTI

L'angolo retto in cantiere

Ancora oggi muratori e carpentieri usano la regola del «3-4-5» per verificare che due muri siano a squadra: si segnano 3 m su un muro e 4 m sull'altro a partire dall'angolo, e si controlla che la distanza tra i due segni sia 5 m. Spesso si legge che anche gli antichi Egizi tracciassero gli angoli retti dei loro edifici con una corda divisa da nodi in 12 parti uguali ($3 + 4 + 5 = 12$): è un'ipotesi suggestiva avanzata dagli storici moderni, ma non è documentata con certezza dalle fonti egizie. Sicuro, invece, è il collegamento con la matematica: è lo stesso teorema di Pitagora che studi in geometria.

2.2.5 Perpendicolari con le squadre

Nel lavoro quotidiano, quando la precisione richiesta non è quella di una dimostrazione, le perpendicolari si tracciano più in fretta con le squadre, come hai visto nel cap. 1. Si appoggia un cateto della squadra a 45° (o della squadra 30°/60°) lungo la retta data e si accosta saldamente la riga (o l'altra squadra) all'ipotenusa. Tenendo ferma la riga, si fa scorrere la squadra lungo di essa finché l'altro cateto passa per il punto voluto: poiché i due cateti formano un angolo retto, la linea tracciata lungo il secondo cateto è perpendicolare alla retta data. Il metodo è veloce ma dipende dalla precisione delle squadre: conviene controllarle ogni tanto, tracciando una perpendicolare, ribaltando la squadra e ripassandola. Se le due linee non coincidono, la squadra non è perfettamente a 90°.

2.3 Parallele e divisione di un segmento

Due rette di un piano sono **parallele** quando non hanno punti in comune, cioè quando conservano sempre la stessa distanza. Il bordo superiore e quello inferiore di una pagina, i binari di una ferrovia, le linee di un quaderno sono esempi familiari.

2.3.1 La parallela per un punto: il metodo del rombo

Data la retta r e un punto P esterno, la parallela per P si costruisce con il solo compasso (figura 2.3a). Si sceglie un punto A su r e si apre il compasso con raggio AP. Da A si traccia un arco che

passi per P e tagli *r* in B; poi, con la stessa apertura, si tracciano un arco centrato in B e uno centrato in P, che si incontrano in Q. I quattro lati AP, PQ, QB e BA sono uguali: il quadrilatero APQB è un **rombo**, e in un rombo i lati opposti sono paralleli. Quindi la retta PQ è parallela ad AB, cioè a *r*.

2.3.2 La parallela a distanza data

Spesso il dato non è un punto ma una distanza *d*: per esempio, si deve tracciare il bordo interno di un muro spesso 30 cm. Si scelgono su *r* due punti C e D lontani tra loro, si alzano in ciascuno la perpendicolare a *r* e si riporta su entrambe, con il compasso, la distanza *d*, ottenendo C_1 e D_1 (figura 2.3b). La retta C_1D_1 è la parallela cercata. Attenzione: non basta riportare *d* «a occhio» da due punti, perché la distanza tra due rette si misura sempre **sulla perpendicolare**. Di parallele a distanza *d* da una retta ce ne sono due, una per parte.

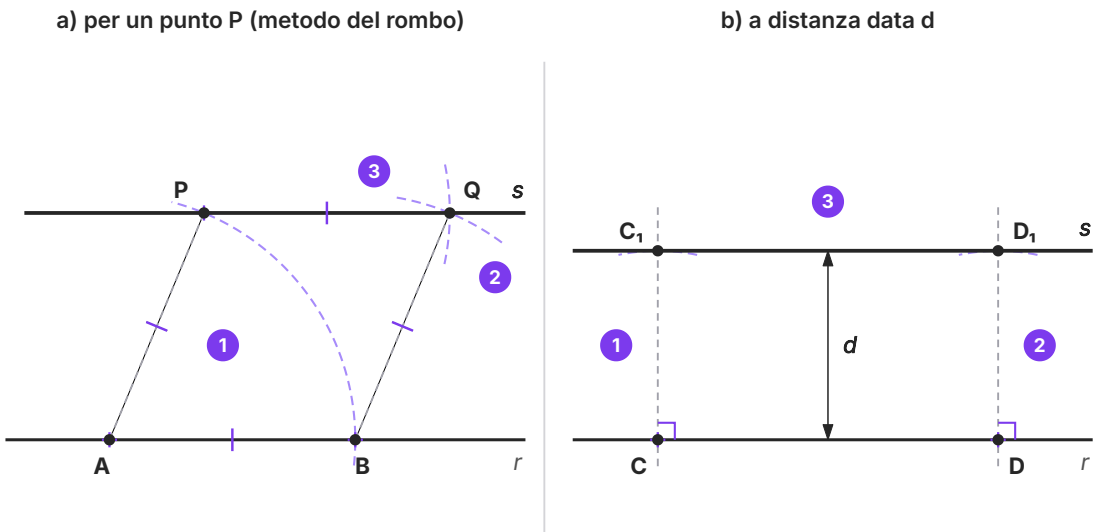


Figura 2.3 Costruzione delle parallele. a) Per un punto P: con un'unica apertura di compasso, pari ad AP, si ottiene il rombo APQB e quindi la parallela *s* = PQ. b) A distanza data *d*: si riporta *d* sulle perpendicolari a *r* in C e in D.

2.3.3 Parallele con le squadre

Con la riga e una squadra si tracciano rapidamente intere famiglie di parallele: si appoggia un lato della squadra alla retta data, si accosta saldamente la riga a un altro lato e si fa scorrere la squadra lungo la riga tenuta ferma. Tutte le linee tracciate lungo lo stesso lato della squadra sono parallele tra loro. È il metodo che userai per tratteggiare superfici, per tracciare le righe guida della scritturazione e, nella seconda parte del libro, per le linee di richiamo delle proiezioni.

2.3.4 Dividere un segmento in 2, 4, 8… parti

L'asse di un segmento lo divide in due parti uguali. Ripetendo la costruzione sulle due metà si ottengono quattro parti, poi otto, sedici e così via: con assi successivi si divide un segmento in 2^n parti uguali. Il metodo è esatto, ma diventa presto scomodo per la piccolezza delle parti: per dividere in 16 parti un segmento di 120 mm bisogna costruire 15 assi di segmenti lunghi pochi millimetri.

2.3.5 Dividere un segmento in *n* parti uguali

Per dividere un segmento AB in un numero qualsiasi n di parti uguali (3, 5, 7…) si usa una costruzione basata sul **teorema di Talete**: se un fascio di rette parallele taglia due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull'altra (e, più in generale, i segmenti corrispondenti sono proporzionali). La costruzione (figura 2.4, con $n = 5$) procede così:

1. Da A traccia una semiretta ausiliaria con un'inclinazione qualsiasi (meglio tra 20° e 40°) e riporta su di essa, con il compasso, n segmenti uguali consecutivi, di lunghezza a piacere: ottieni i punti 1, 2, …, n.
2. Congiungi l'ultimo punto n con l'estremo B.
3. Dai punti 1, 2, …, $n - 1$ traccia le parallele a nB (con le squadre o con il metodo del rombo): esse tagliano AB in n parti uguali.

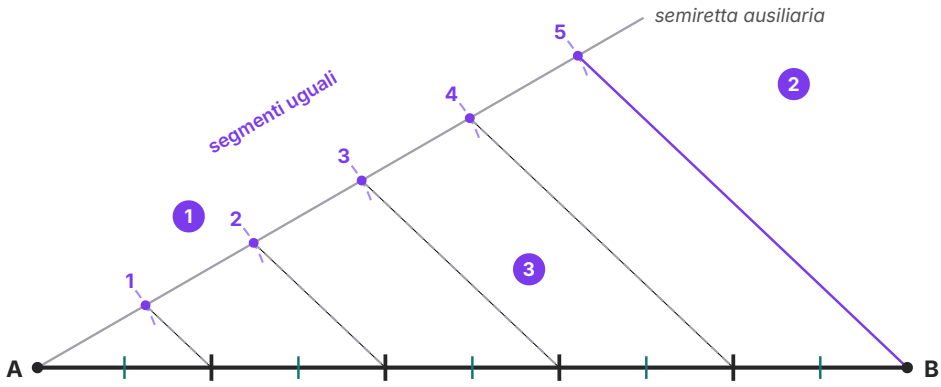


Figura 2.4 Divisione di un segmento AB in 5 parti uguali. Sulla semiretta ausiliaria uscente da A si riportano 5 segmenti uguali; si unisce il punto 5 con B e si tracciano le parallele per i punti 1–4. La lunghezza dei segmenti ausiliari è arbitraria.

ESEMPIO SVOLTO

Un segmento di 130 mm in 7 parti

Problema. Dividi un segmento AB = 130 mm in 7 parti uguali.

Soluzione. Il calcolo darebbe 130 : 7 = 18,571… mm, misura impossibile da riportare con il righello. Da A tracciamo una semiretta inclinata di circa 30° e, con il compasso aperto su 20 mm (una misura comoda, scelta a piacere), riportiamo 7 segmenti: l'ultimo punto, 7, dista 140 mm da A. Uniamo 7 con B e, con riga e squadra, tracciamo le parallele a 7B per i punti 1–6. Le intersezioni con AB lo dividono in 7 parti di circa 18,6 mm ciascuna. **Verifica:** misurando con il righello sei parti consecutive dovresti leggere circa 111,4 mm (6 · 18,57).

2.3.6 La divisione proporzionale

La stessa costruzione permette di dividere un segmento in parti **proporzionali** a numeri dati. Supponiamo di voler dividere AB = 120 mm in tre parti proporzionali a 2, 3 e 5. Sulla semiretta ausiliaria si riportano 2 + 3 + 5 = 10 unità uguali, si congiunge il decimo punto con B e si tracciano le parallele soltanto per il punto 2 e per il punto 5 (cioè 2 e 2 + 3). Le parti ottenute misurano 24, 36 e 60 mm, perché 120 : 10 = 12 mm è il valore di un'unità. Allo stesso modo si può dividere un segmento in parti proporzionali a segmenti dati, riportandoli direttamente sulla semiretta. È la costruzione che serve, per esempio, a disegnare in scala le suddivisioni di una facciata o a ripartire in parti uguali la larghezza di una scala.

IN SINTESI

Teorema di Talete. Un fascio di rette parallele determina su due trasversali segmenti corrispondenti proporzionali: se sulla prima trasversale i segmenti sono uguali, lo sono anche sulla seconda.

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$$

Per dividere un segmento in parti uguali o proporzionali non serve misurare il segmento: basta riportare sulla semiretta ausiliaria unità uguali scelte a piacere.

2.4 Gli angoli

Un angolo è la parte di piano compresa tra due semirette uscenti dallo stesso punto, il *vertice*. Con il goniometro un angolo si misura; con riga e compasso lo si può riportare, dividere, sommare e, in molti casi, costruire esattamente.

2.4.1 Trasportare un angolo

Il **trasporto di un angolo** consiste nel ricopiarlo esattamente in un'altra posizione, su una semiretta data (figura 2.5b). Si punta il compasso nel vertice O dell'angolo dato e si traccia un arco che tagli i due lati in A e B. Con la stessa apertura si punta nel vertice O′ della nuova semiretta e si traccia un arco ampio, che la taglia in A′. Poi si prende con il compasso la corda AB e la si riporta puntando in A′: l'arco incontra il primo in B′. La semiretta O′B′ forma con O′A′ un angolo uguale a quello dato. Il motivo è che i triangoli OAB e O′A′B′ hanno i tre lati ordinatamente uguali, e due triangoli con i tre lati uguali sono congruenti (terzo criterio di congruenza): hanno quindi anche gli angoli uguali.

2.4.2 La bisettrice

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che, uscendo dal vertice, lo divide in due angoli uguali (figura 2.5a). Puntato il compasso nel vertice V, si traccia un arco che tagli i lati in A e B; da A e da B, con un'apertura uguale (non necessariamente pari alla prima), si tracciano due archi che si incontrano in C. La semiretta VC è la bisettrice. Anche qui funziona il terzo criterio: i triangoli VAC e VBC hanno VA = VB, AC = BC e il lato VC in comune, quindi gli angoli in V sono uguali. Ogni punto della bisettrice è equidistante dai due lati dell'angolo: la bisettrice è il **luogo dei punti equidistanti dai lati**, come l'asse lo era dagli estremi di un segmento.

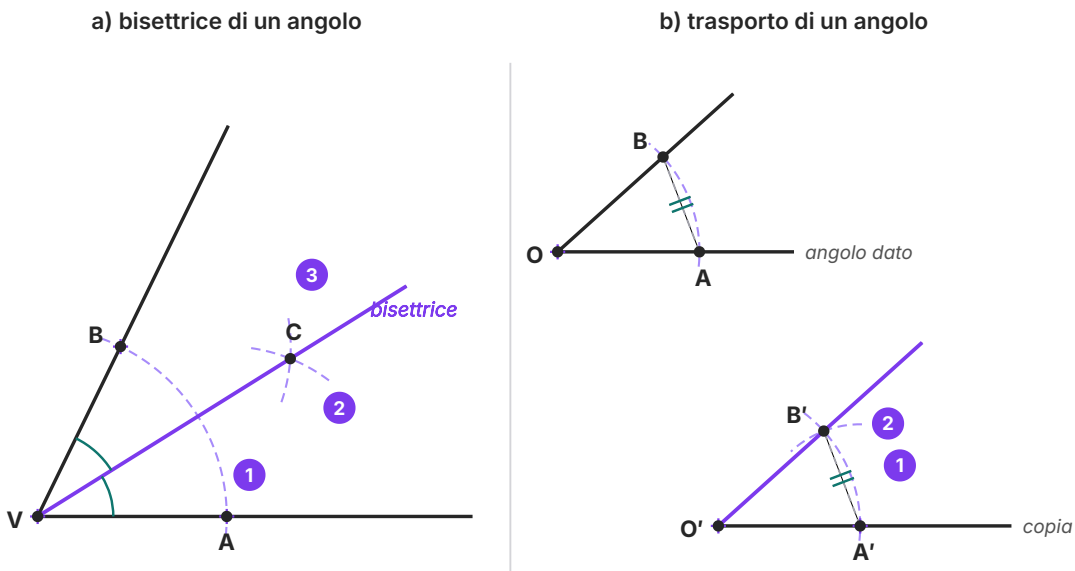


Figura 2.5 a) Bisettrice: gli archi uguali centrati in A e in B si incontrano in C, e VC divide l'angolo in due parti uguali. b) Trasporto: con la stessa apertura si tracciano gli archi in O e in O′, poi si riporta la corda AB da A′ per ottenere B′.

2.4.3 Angoli notevoli costruiti con il compasso

Due costruzioni sono il punto di partenza di tutte le altre. La prima è l'angolo di **60°** (figura 2.6a): puntato il compasso nel vertice V, si traccia un arco che taglia il lato in A; con la stessa apertura si punta in A e si segna sull'arco il punto B. Il triangolo VAB ha tre lati uguali al raggio, quindi è **equilatero** e i suoi angoli misurano 60°: l'angolo AVB è quello cercato. È la proposizione I, 1 di Euclide. Se poi nel triangolo equilatero VAB tracci l'altezza da B, lo dividi in due triangoli rettangoli con angoli di 30°, 60° e 90°, la forma della squadra 30°/60° del cap. 1: in ciascuno il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa, mentre l'altro cateto, l'altezza, misura $(\sqrt{3}/2) \approx 0{,}866$ volte l'ipotenusa. La seconda è l'angolo di **90°**, cioè la perpendicolare, che sai già costruire in quattro modi. Da queste due, con bisettrici, somme e differenze, si ottengono molti altri angoli (tabella 2.1).

Tabella 2.1 Angoli costruibili esattamente con riga e compasso a partire da 60° e 90°.

Angolo	Costruzione
60°	triangolo equilatero: arco da V, poi stessa apertura da A
30°	bisettrice di 60°
15°	bisettrice di 30°
90°	perpendicolare (asse, semicirconferenza, terna 3-4-5)
45°	bisettrice di 90°
120°	due angoli di 60° consecutivi, oppure 180° − 60°
75°	60° + 15°, oppure 90° − 15°
105°	90° + 15°, oppure 60° + 45°
135°	90° + 45°, oppure 180° − 45°
150°	180° − 30°, oppure 90° + 60°

2.4.4 Somma e differenza di angoli

Per **sommare** due angoli si trasporta il secondo in modo che abbia lo stesso vertice del primo e un lato in comune con esso, dalla parte esterna: l'angolo complessivo è la somma. Per la **differenza** si trasporta l'angolo minore dentro il maggiore, a partire da uno dei suoi lati: l'angolo che rimane è la differenza. Così si ottiene, per esempio, 75° come 90° − 15°, oppure 165° come 180° − 15°. Ricorda che l'angolo piatto (180°) è «gratis»: è formato dalle due semirette opposte di una stessa retta. Ne segue che ogni angolo costruito ci regala anche il suo *supplementare*.

2.4.5 L'angolo retto diviso in tre parti, e un'impossibilità

L'angolo retto si divide esattamente in tre parti uguali di 30° (figura 2.6b). Puntato il compasso nel vertice O, si traccia un arco di raggio qualsiasi che tagli i lati in A e in B. Con la **stessa apertura** si punta in A e si segna sull'arco il punto F; poi si punta in B e si segna il punto E. Le semirette OE e OF dividono l'angolo retto in tre angoli di 30°. La ragione è quella dell'angolo di 60°: il triangolo OAF è equilatero, dunque l'angolo AOF misura 60°; allo stesso modo l'angolo BOE misura 60°, quindi AOE = 90° − 60° = 30°, e il terzo angolo, EOF, è anch'esso di 30°.

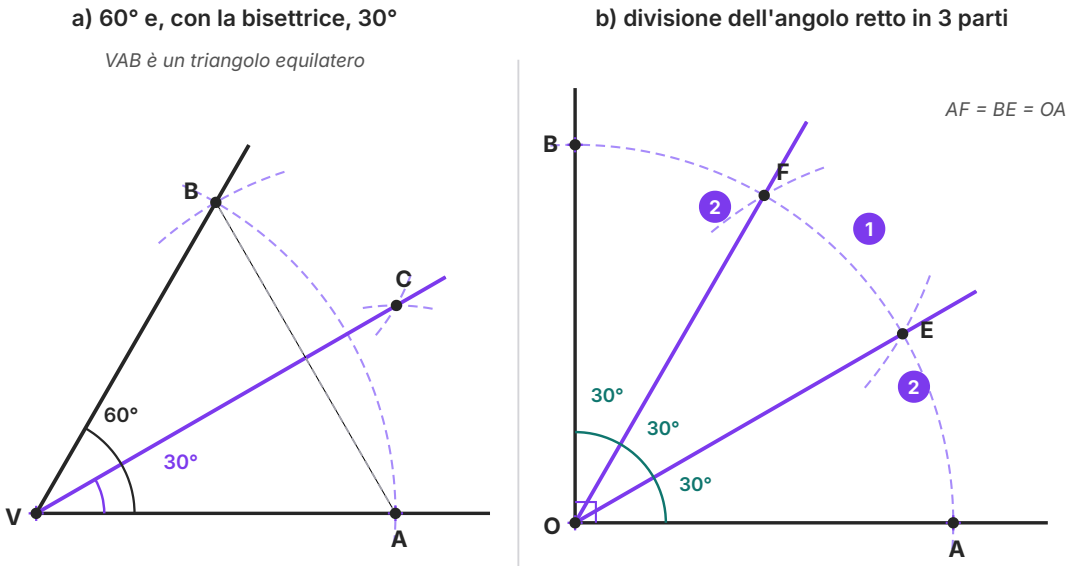


Figura 2.6 Angoli notevoli. a) L'angolo di 60° nasce dal triangolo equilatero VAB; la bisettrice VC dà 30°. b) Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali: archi di raggio OA centrati in A e in B individuano F (60°) ed E (30°).

ERRORE FREQUENTE

Il successo con l'angolo retto fa pensare che ogni angolo si possa dividere in tre parti con riga e compasso. **Non è così.** La **trisezione** di un angolo qualsiasi è impossibile con riga e compasso: alcuni angoli particolari (90°, 180°, 45°) si trisecano, ma non esiste un procedimento valido per tutti, e per molti angoli (per esempio 60°) non esiste proprio. Un'altra tentazione da evitare: dividere in tre parti uguali la *corda* AB e unire i punti al vertice. Gli angoli ottenuti **non** sono uguali, perché parti uguali della corda corrispondono ad angoli diversi (quello centrale è più ampio). Per una trisezione approssimata si usa il goniometro, dichiarando che il risultato è misurato.

APPROFONDIMENTO

I tre problemi dell'antichità

I geometri greci si posero tre problemi che non riuscirono a risolvere con riga e compasso: la **trisezione dell'angolo**, la **duplicazione del cubo** (costruire lo spigolo di un cubo di volume doppio di uno dato) e la **quadratura del cerchio** (costruire un quadrato con la stessa area di un cerchio dato). Per oltre duemila anni matematici e dilettanti cercarono una soluzione. Solo nell'Ottocento si capì che una soluzione non poteva esistere: nel 1837 il matematico francese Pierre Wantzel dimostrò l'impossibilità della trisezione e della duplicazione, e nel 1882 il tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è un numero trascendente, rendendo impossibile anche la quadratura. È un esempio straordinario: la matematica sa dimostrare non solo che qualcosa è vero, ma anche che qualcosa non si può fare.

2.5 Triangoli e quadrilateri

2.5.1 Costruire un triangolo dai dati

Un triangolo è determinato (cioè costruibile in un solo modo, a meno della posizione sul foglio) quando si conoscono certi gruppi di tre elementi, gli stessi dei criteri di congruenza che studi in matematica.

- **Tre lati** a, b, c. Si traccia il lato $c = AB$; da A si traccia un arco di raggio b, da B un arco di raggio a; il loro incontro è il terzo vertice C. Gli archi si incontrano solo se è rispettata la **disuguaglianza triangolare**: ogni lato deve essere minore della somma degli altri due. Con lati di 40, 50 e 100 mm il triangolo non esiste, perché $40 + 50 < 100$.
- **Due lati e l'angolo compreso.** Si traccia il primo lato, nel suo estremo si trasporta (o si costruisce) l'angolo, sul secondo lato dell'angolo si riporta la seconda misura; si chiude congiungendo i due estremi liberi.
- **Un lato e i due angoli adiacenti.** Si traccia il lato e ai suoi estremi si costruiscono i due angoli; il terzo vertice è l'incontro dei due lati. Gli angoli devono avere somma minore di 180°, perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Alcuni casi particolari sono immediati. Il **triangolo equilatero** di lato dato si costruisce con due archi di raggio uguale al lato (Euclide I, 1). Il **triangolo isoscele** di base e lato obliquo dati si ottiene con due archi uguali centrati agli estremi della base; se invece è data l'altezza, si traccia l'asse della base e vi si riporta l'altezza. Il **triangolo rettangolo** di cateti dati si costruisce alzando una perpendicolare all'estremo del primo cateto e riportandovi il secondo.

ESEMPIO SVOLTO

Due lati e l'angolo compreso

Problema. Costruisci il triangolo ABC con AB = 90 mm, AC = 70 mm e angolo in A di 60°. Quanto misura il lato BC?

Soluzione. Traccia AB = 90 mm orizzontale. In A costruisci l'angolo di 60° con il metodo del triangolo equilatero (arco da A, stessa apertura dal punto trovato). Sul secondo lato dell'angolo riporta con il compasso AC = 70 mm e congiungi C con B. Misurando con il righello, BC risulta di circa 82 mm. La costruzione ti ha dato il risultato senza alcun calcolo, con la precisione del disegno: qualche decimo di millimetro, se le linee sono sottili e i punti ben segnati.

2.5.2 I punti notevoli del triangolo

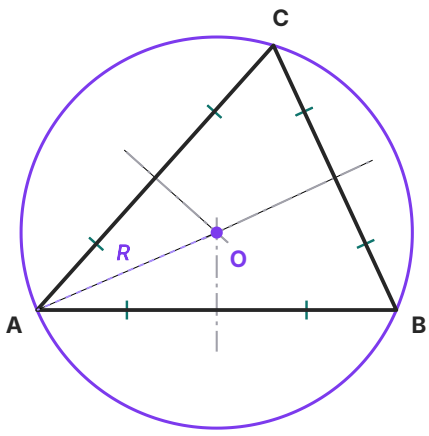
In ogni triangolo ci sono quattro terne di rette speciali, e ciascuna terna ha la proprietà sorprendente di passare per uno stesso punto. Sono i **punti notevoli** (figura 2.7 e tabella 2.2).

Il **circocentro** è il punto d'incontro dei tre **assi dei lati**. Poiché ogni punto dell'asse di AB è equidistante da A e da B, e ogni punto dell'asse di BC è equidistante da B e da C, il loro punto d'incontro O dista ugualmente da A, B e C: quindi anche il terzo asse passa per O, e O è il centro della **circonferenza circoscritta**, quella che passa per i tre vertici. Per costruirla bastano due assi; il terzo serve da verifica. Il circocentro è interno al triangolo se questo è acutangolo, cade nel punto medio dell'ipotenusa se è rettangolo, è esterno se è ottusangolo. La stessa costruzione risolve un problema pratico frequente: trovare la circonferenza che passa per tre punti non allineati, o ritrovare il centro di un arco già disegnato.

L'**incentro** è il punto d'incontro delle tre **bisettrici** degli angoli. Ogni punto della bisettrice è equidistante dai lati dell'angolo, perciò l'incentro I è equidistante da tutti e tre i lati: è il centro della **circonferenza inscritta**, tangente ai tre lati. Attenzione al raggio: non è la distanza da I a un vertice, ma la distanza da I a un lato, cioè il segmento di **perpendicolare** condotto da I a quel lato. L'incentro è sempre interno al triangolo. Le perpendicolari dal centro ai lati individuano i punti di tangenza, un tema che riprenderemo nel cap. 4.

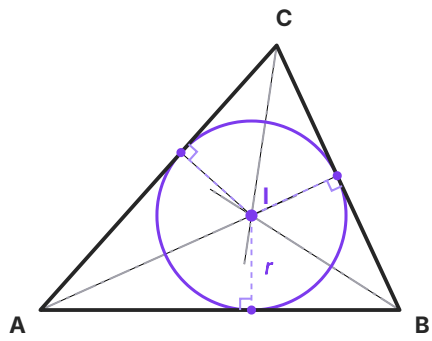
Il **baricentro** è l'incontro delle tre **mediane**, i segmenti che uniscono ciascun vertice al punto medio del lato opposto; divide ogni mediana in due parti, di cui quella verso il vertice è doppia dell'altra. Se ritagli un triangolo di cartone, è il punto in cui puoi tenerlo in equilibrio sulla punta di una matita: da qui il nome, che viene dal greco *barýs*, «pesante». L'**ortocentro**, infine, è l'incontro delle tre **altezze**, le perpendicolari condotte da ciascun vertice al lato opposto (o al suo prolungamento).

a) circocentro e cerchio circoscritto



assi dei lati (punto-linea)

b) incentro e cerchio inscritto



bisettrici degli angoli (punto-linea)

Figura 2.7 Due punti notevoli dello stesso triangolo acutangolo. a) Il circocentro O, incontro degli assi dei lati, è il centro della circonferenza passante per A, B, C. b) L'incentro I, incontro delle bisettrici, è il centro della circonferenza tangente ai lati; il raggio *r* è perpendicolare a ciascun lato.

Tabella 2.2 I punti notevoli del triangolo.

Punto	Incontro di	Proprietà	Posizione
Circocentro	assi dei lati	centro della circonferenza circoscritta	interno, sull'ipotenusa o esterno
Incentro	bisettrici degli angoli	centro della circonferenza inscritta	sempre interno
Baricentro	mediane	divide le mediane nel rapporto 2 : 1	sempre interno
Ortocentro	altezze	nel triangolo rettangolo coincide con il vertice dell'angolo retto	interno, nel vertice o esterno

DA RICORDARE

Asse ↔ **circoscritta** (equidistanza dai *vertici*); bisettrice ↔ **inscritta** (equidistanza dai *lati*). Nel triangolo equilatero i quattro punti notevoli coincidono. In ogni triangolo, circocentro, baricentro e ortocentro stanno su una stessa retta, detta *retta di Eulero* dal matematico svizzero Leonhard Euler, che lo dimostrò nel 1765.

2.5.3 I quadrilateri

Con le costruzioni viste finora si disegnano anche tutti i quadrilateri principali, purché si sfruttino le loro proprietà.

- **Quadrato** di lato dato: si alzano le perpendicolari agli estremi del lato, vi si riporta il lato e si chiude. Se è data la *diagonale*, si sfrutta il fatto che le diagonali del quadrato sono uguali, perpendicolari e si dimezzano: si traccia la diagonale, il suo asse, e con centro nel punto medio si riporta sull'asse metà diagonale da una parte e dall'altra.
- **Rettangolo** di lati dati: come il quadrato, con due perpendicolari e due misure diverse.
- **Rombo**: se sono date le diagonali, si traccia la prima, il suo asse, e sull'asse si riporta metà della seconda per parte, perché le diagonali del rombo sono perpendicolari e si dividono a metà. Se sono dati il lato e un angolo, si procede come per il parallelogramma.
- **Parallelogramma** di due lati e angolo compreso: si costruisce l'angolo, si riportano i due lati, e il quarto vertice si trova con due archi (di raggi uguali ai lati opposti) oppure con due parallele.
- **Trapezio isoscele** di basi e altezza date: si traccia la base maggiore e il suo asse; sull'asse si riporta l'altezza e per il punto trovato si traccia la parallela alla base, su cui si centra la base minore, metà da una parte e metà dall'altra dell'asse. Il **trapezio rettangolo** si ottiene invece alzando l'altezza a un estremo della base maggiore.

Questi quadrilateri compaiono continuamente nell'architettura: un portale è un rettangolo sormontato da un arco, molti pavimenti sono decorati con rombi e quadrati, la sezione di un muro a scarpa è un trapezio. Saperli costruire con esattezza è la premessa per disegnare piante e prospetti.

2.6 La sezione aurea

2.6.1 Che cos'è

Dividiamo un segmento AB in due parti con un punto E. Tra tutte le divisioni possibili ce n'è una speciale: quella in cui il segmento intero sta alla parte maggiore come la parte maggiore sta alla minore. Questa divisione si chiama **sezione aurea**, e la parte maggiore AE si dice *sezione aurea* di AB. In formula:

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AE} = \mathrm{AE} : \mathrm{EB}$$

Se $\mathrm{AB} = a$ e $\mathrm{AE} = x$, risolvendo la proporzione (lo saprai fare quando studierai le equazioni di secondo grado) si trova $x = a \cdot (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618 \cdot a$. Il rapporto tra il segmento e la sua sezione aurea è il numero

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

detto **numero aureo** e indicato spesso con la lettera greca φ (*phi*). È un numero irrazionale: le sue cifre decimali non finiscono e non si ripetono mai. Ha una proprietà curiosa: $1/\varphi = \varphi - 1 \approx 0{,}618$.

2.6.2 La costruzione

Pur essendo φ irrazionale, la sezione aurea si costruisce esattamente con riga e compasso (figura 2.8a):

1. Nell'estremo B del segmento AB = a alza la perpendicolare e riportaci BC = $a/2$ (metà di AB, trovata con l'asse).
2. Congiungi A con C. Puntando in C con raggio CB, traccia un arco che tagli AC nel punto D.
3. Puntando in A con raggio AD, traccia un arco che tagli AB nel punto E. Il segmento AE è la sezione aurea di AB.

Verifichiamolo. Il triangolo ABC è rettangolo in B con cateti a e $a/2$; per il teorema di Pitagora l'ipotenusa misura $AC = \sqrt{(a^2 + a^2/4)} = a \cdot \sqrt{5}/2 \approx 1{,}118 \cdot a$. Togliendo $CD = a/2$ si ottiene $AD = a \cdot (\sqrt{5} - 1)/2$, che è esattamente la sezione aurea. Per un segmento di 100 mm, AE ≈ 61,8 mm ed EB ≈ 38,2 mm.

2.6.3 Il rettangolo aureo

Un **rettangolo aureo** è un rettangolo in cui il lato lungo sta al lato corto come φ sta a 1. Si costruisce facilmente a partire da un quadrato PQRS (figura 2.8b): si trova il punto medio M del lato PQ, si punta in M con raggio MR (il segmento che va da M al vertice R del lato opposto) e si traccia un arco che tagli il prolungamento di PQ nel punto G. Il rettangolo di lati PG e PS è aureo. Infatti, se il lato del quadrato è l, si ha $MR = \sqrt{(l^2 + l^2/4)} = l \cdot \sqrt{5}/2$, e $PG = l/2 + l \cdot \sqrt{5}/2 = l \cdot \varphi$. Il rettangolo QGHR che si aggiunge al quadrato è anch'esso aureo: togliendo da un rettangolo aureo un quadrato, rimane un rettangolo aureo più piccolo. Nel cap. 4 useremo questa proprietà per costruire la cosiddetta spirale aurea.

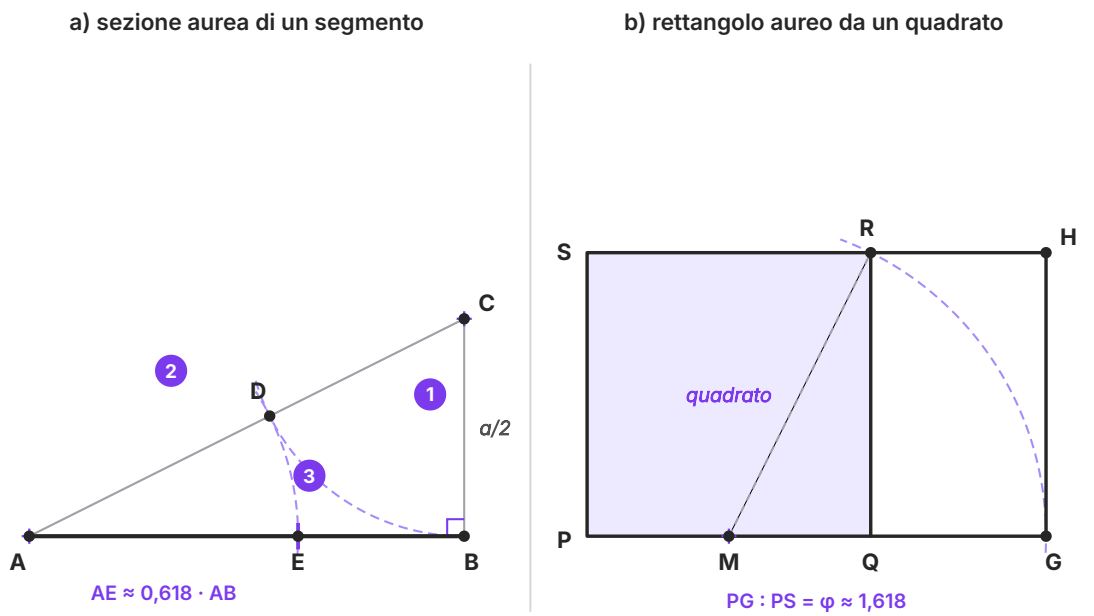


Figura 2.8 a) Sezione aurea di AB: BC = AB/2 perpendicolare in B, arco di centro C fino a D su AC, arco di centro A fino a E. b) Rettangolo aureo: l'arco di centro M (punto medio di PQ) e raggio MR individua G; il rettangolo PGHS ha i lati nel rapporto φ ≈ 1,618.

IN SINTESI

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \cdot \mathrm{AB} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Sezione aurea di un segmento: costruzione con il triangolo rettangolo di cateti a e $a/2$. Rettangolo aureo: dal quadrato, con l'arco centrato nel punto medio di un lato.

2.6.4 Storia e leggende della proporzione aurea

La divisione «in estrema e media ragione», come la chiamavano i Greci, è definita da Euclide nel libro VI degli *Elementi*, e la sua costruzione compare già nel libro II (proposizione 11). Ai Greci interessava soprattutto perché compare nel pentagono regolare: il rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono è proprio φ, come vedrai nel cap. 3. Nel Rinascimento il frate matematico Luca Pacioli le dedicò il trattato *De divina proportione*, pubblicato a Venezia nel 1509 e illustrato con le figure di poliedri disegnate da Leonardo da Vinci. Il nome di «sezione aurea» è molto più recente: si diffuse nell'Ottocento.

ERRORE FREQUENTE

Il Partenone non è «costruito sulla sezione aurea»

Su libri divulgativi e siti web si legge spesso che il Partenone, le piramidi d'Egitto o le statue greche furono progettati sulla sezione aurea. Sono affermazioni **non dimostrate**: si tratta di ipotesi formulate in età moderna, soprattutto tra Ottocento e Novecento, molto discusse dagli studiosi. Nessuna fonte antica lo attesta, e le misure degli edifici, che si possono sempre «aggiustare» scegliendo i punti più comodi, non lo confermano in modo convincente. Vitruvio, l'unico architetto antico di cui ci resti un trattato, parla di proporzioni basate su un *modulo* e su rapporti tra numeri interi, non di φ. Quando incontri un rettangolo aureo «nascosto» in un monumento antico, chiediti sempre: chi l'ha detto, e su quali prove?

COLLEGAMENTI

Dove la sezione aurea è stata davvero usata

Ci sono casi in cui l'uso di φ è certo, perché dichiarato dagli autori stessi. Il più noto è il *Modulor*, un sistema di misure proporzionate alla figura umana elaborato dall'architetto Le Corbusier a metà del Novecento e basato esplicitamente sulla sezione aurea. Anche in matematica il numero aureo ha un ruolo importante: i rapporti tra numeri consecutivi della successione di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…) si avvicinano sempre più a φ: 21 : 13 ≈ 1,615, 34 : 21 ≈ 1,619. In natura, la disposizione delle foglie e dei semi in alcune piante (il girasole, la pigna) segue spesso numeri di Fibonacci: un tema che potrai approfondire con l'insegnante di scienze.

Con questo capitolo hai a disposizione la «cassetta degli attrezzi» del disegno geometrico. Nel prossimo la userai per costruire i poligoni regolari, dove ritroverai la sezione aurea nel pentagono e la divisione in parti uguali nel metodo generale; nel cap. 4 le perpendicolari diventeranno lo strumento chiave per tangenti e raccordi.

SINTESI

- Le costruzioni con riga (senza tacche) e compasso sono **esatte**: non dipendono da misure e arrotondamenti. Le linee di costruzione restano visibili, sottili; il risultato si ripassa con linea grossa.
- L'**asse** di un segmento è la perpendicolare nel punto medio ed è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi; gli archi devono avere raggio maggiore di metà segmento.
- La perpendicolare da un punto della retta o da un punto esterno si riconduce alla costruzione dell'asse; all'estremo di un segmento si usa la semicirconferenza (angolo inscritto retto) o la terna 3-4-5.
- La **parallela** per un punto si costruisce con il metodo del rombo; quella a distanza data riportando la distanza su due perpendicolari.
- Con assi successivi si divide un segmento in 2^n parti; con il **teorema di Talete** (fascio di parallele) in n parti uguali o in parti proporzionali.
- Il trasporto di un angolo e la bisettrice si giustificano con il terzo criterio di congruenza; la bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati.
- Da 60° (triangolo equilatero) e 90° si ottengono, con bisettrici, somme e differenze, 30°, 15°, 45°, 75°, 105°, 120°, 135°, 150°…
- L'angolo retto si divide esattamente in tre parti, ma la **trisezione** di un angolo qualsiasi è impossibile con riga e compasso (Wantzel, 1837).
- Un triangolo si costruisce da tre lati (se vale la disuguaglianza triangolare), da due lati e l'angolo compreso, da un lato e i due angoli adiacenti.
- Circocentro (assi) → circonferenza circoscritta; incentro (bisettrici) → inscritta; baricentro (mediane); ortocentro (altezze).
- La **sezione aurea** divide un segmento in modo che il tutto stia alla parte maggiore come questa alla minore: $AE \approx 0{,}618 \cdot AB$, $\varphi \approx 1{,}618$; si costruisce esattamente.
- L'uso della sezione aurea nel Partenone o nelle piramidi è un'ipotesi moderna non dimostrata; è certo invece in Euclide, in Pacioli e nel *Modulor*.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'asse di un segmento AB è:
   - **A.** la retta che passa per A e per B;
   - **B.** la retta perpendicolare ad AB nel suo punto medio;
   - **C.** qualsiasi retta perpendicolare ad AB;
   - **D.** la retta parallela ad AB alla distanza AB/2.

2. ● Per costruire l'asse di un segmento lungo 80 mm, gli archi centrati negli estremi devono avere raggio:
   - **A.** esattamente 40 mm;
   - **B.** minore di 40 mm;
   - **C.** maggiore di 40 mm;
   - **D.** uguale a 80 mm, e solo così.

3. ● La divisione di un segmento in 7 parti uguali con riga e compasso si basa:
   - **A.** sul teorema di Talete;
   - **B.** sul teorema di Pitagora;
   - **C.** sulla misura con il righello;
   - **D.** sulla sezione aurea.

4. ●● Quale delle seguenti costruzioni è **impossibile** con riga e compasso?
   - **A.** Dividere un angolo retto in tre parti uguali.
   - **B.** Costruire un angolo di 75°.
   - **C.** Dividere un segmento in 13 parti uguali.
   - **D.** Dividere in tre parti uguali un angolo qualsiasi.

5. ● Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro:
   - **A.** degli assi dei lati;
   - **B.** delle bisettrici degli angoli;
   - **C.** delle mediane;
   - **D.** delle altezze.

6. ●● Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è:
   - **A.** la distanza dall'incentro a un vertice;
   - **B.** metà del lato minore;
   - **C.** la distanza dall'incentro a un lato, misurata sulla perpendicolare;
   - **D.** la distanza dal circocentro a un lato.

7. ●● Quale terna di lunghezze dà un triangolo rettangolo, utile per tracciare un angolo retto?
   - **A.** 30, 40, 60 mm;
   - **B.** 30, 40, 50 mm;
   - **C.** 40, 50, 60 mm;
   - **D.** 50, 50, 50 mm.

8. ●● Con quali lati il triangolo **non** si può costruire?
   - **A.** 60, 60, 60 mm;
   - **B.** 50, 70, 100 mm;
   - **C.** 45, 60, 75 mm;
   - **D.** 40, 50, 100 mm.

9. ●● La sezione aurea di un segmento lungo 100 mm misura circa:
   A. 50,0 mm;
   B. 38,2 mm;
   C. 61,8 mm;
   D. 70,7 mm.

Lessico e norme

10. ● Completa. L'asse di un segmento è il _____ geometrico dei punti _____ dagli estremi del segmento; la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai _____ dell'angolo.

11. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) In una tavola di costruzioni le linee ausiliarie si cancellano alla fine. b) Una costruzione con riga e compasso è esatta perché non richiede misure. c) Il metodo del rombo serve a tracciare la perpendicolare da un punto esterno. d) Il piede della perpendicolare condotta da P a una retta individua la distanza di P dalla retta.

12. ● Abbina ogni punto notevole alle rette che lo determinano: 1. circocentro; 2. incentro; 3. baricentro; 4. ortocentro — a. altezze; b. mediane; c. assi dei lati; d. bisettrici.

13. ●● Completa la proporzione che definisce la sezione aurea AE del segmento AB (E è un punto di AB): AB : _____ = _____ : EB. Il rapporto AB : AE si indica con _____ e vale circa _____ .

14. ●● Spiega con parole tue la differenza tra una costruzione *esatta* e una costruzione *misurata*, facendo l'esempio della divisione di un segmento di 100 mm in 3 parti.

15. ● Indica il tipo di linea (continua grossa, continua fine, mista fine punto-linea) da usare in una tavola per: a) gli archi di costruzione; b) il triangolo risultante; c) l'asse di simmetria di un triangolo isoscele; d) la circonferenza circoscritta richiesta dall'esercizio.

Costruire

16. ● Su un foglio A4 squadrato verticale, traccia al centro un segmento orizzontale AB = 140 mm. Costruiscine l'asse e il punto medio M. Segna sull'asse un punto P a 50 mm da M e misura PA e PB.

17. ● Traccia una retta orizzontale r a 100 mm dal bordo inferiore della squadratura e un punto P a 45 mm sopra di essa. Costruisci con il compasso la perpendicolare da P a r e indica il piede H. Poi, in un punto K di r a 60 mm da H, costruisci la perpendicolare a r con il metodo del punto sulla retta. Che cosa si può dire delle due perpendicolari?

18. ●● Traccia un segmento AB = 90 mm. Alza in B la perpendicolare con la terna 3-4-5, usando come unità 20 mm. Indica le tre misure che riporti con il compasso. Verifica poi il risultato con il metodo della semicirconferenza.

19. ●● Traccia una retta r inclinata di 30° rispetto al bordo orizzontale del foglio. Costruisci le due parallele a r alla distanza di 35 mm (una per parte). Quanto distano tra loro le due parallele?

20. ●● Dividi con il metodo di Talete un segmento AB = 130 mm in 7 parti uguali, usando sulla semiretta ausiliaria un'unità di 20 mm. Quanto misura ciascuna parte?

21. ●● Dividi un segmento AB = 120 mm in tre parti proporzionali ai numeri 2, 3 e 5. Quante unità riporti sulla semiretta ausiliaria e per quali punti tracci le parallele? Quanto misurano le tre parti?

22. ●● Costruisci con riga e compasso, ciascuno su una semiretta orizzontale lunga 70 mm, gli angoli di 60°, 30°, 15°, 75°, 105° e 135°. Per ognuno scrivi accanto la costruzione usata (bisettrice, somma, differenza).

23. ●● Costruisci il triangolo di lati 100, 80 e 60 mm. Di che tipo è? Costruisci la circonferenza circoscritta e quella inscritta e misurane i raggi.

24. ●● Costruisci il triangolo ABC con AB = 90 mm, AC = 70 mm e angolo in A di 60° (costruito con il compasso). Misura BC.

25. ●● Costruisci: a) un rombo di diagonali 120 mm e 80 mm, e misurane il lato; b) un trapezio isoscele di basi 120 mm e 60 mm e altezza 50 mm, e misurane i lati obliqui.

26. ●●● Costruisci la sezione aurea di un segmento AB = 150 mm e misura le due parti. Poi, partendo da un quadrato di lato 80 mm, costruisci il rettangolo aureo e misurane il lato lungo.

Leggere il disegno

27. ● Uno studente deve costruire l'asse di un segmento di 80 mm e apre il compasso a 35 mm. Che cosa vedrà sul foglio? Come deve correggere la costruzione?

28. ●● Osserva la figura 2.4. Se AB = 115 mm, quanto misura ciascuna delle cinque parti? Perché i segmenti riportati sulla semiretta ausiliaria non devono essere uguali alle parti di AB?

29. ●● Di un triangolo si sa che il circocentro cade fuori dal triangolo. Che tipo di triangolo è? E dove cade il circocentro del triangolo di lati 60, 80 e 100 mm?

30. ●●● Trova l'errore. Per dividere un angolo retto in tre parti, un compagno traccia un arco con centro nel vertice O, che taglia i lati in A e B; poi divide in tre parti uguali la corda AB e unisce i due punti di divisione con O. Misurando, trova tre angoli di circa 26,6°, 36,9° e 26,6°. Spiega perché il metodo è sbagliato e indica la costruzione corretta.

31. ●● Osserva la figura 2.6b. Spiega perché l'arco di centro A e raggio OA individua sull'arco AB un punto F tale che l'angolo AOF misuri 60°.

Verso la verifica

32. ●●● Costruisci il triangolo ABC con AB = 100 mm, angolo in A di 45° e angolo in B di 60°, costruendo entrambi gli angoli con il compasso. Quanto misura l'angolo in C? Misura i lati BC e AC.

33. ●●● Su un foglio A4 fissa un'origine A e segna i punti B a 120 mm a destra di A e C a 30 mm a destra e 90 mm sopra A. Costruisci la circonferenza che passa per A, B e C, spiegando quale punto notevole stai cercando. Misura il raggio.

34. ●●● Costruisci un quadrato di cui è data la diagonale, lunga 100 mm, usando solo riga e compasso. Misura il lato, poi costruisci la circonferenza circoscritta e quella inscritta al quadrato e indicane i raggi.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libri I e IV: le costruzioni originali di perpendicolari, parallele, bisettrici, triangoli e cerchi inscritti e circoscritti.
- [VIT] Vitruvio, *De architectura*, libro III: le proporzioni degli edifici fondate sul modulo, utili per confrontare la teoria antica con i miti sulla sezione aurea.

Glossario del capitolo

Asse di un segmento
Retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio; è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi.

Baricentro
Punto d'incontro delle mediane di un triangolo; divide ciascuna mediana nel rapporto 2 : 1 a partire dal vertice.

Bisettrice
Semiretta che divide un angolo in due angoli uguali; è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Circocentro
Punto d'incontro degli assi dei lati di un triangolo; centro della circonferenza circoscritta, che passa per i tre vertici.

Costruzione geometrica
Sequenza ordinata di operazioni con riga e compasso che, a partire da elementi dati, produce un nuovo elemento con proprietà precise; è esatta perché non richiede misure.

Disuguaglianza triangolare
Condizione di esistenza di un triangolo: ogni lato deve essere minore della somma degli altri due.

Divisione proporzionale
Divisione di un segmento in parti proporzionali a numeri o segmenti dati, eseguita con il metodo di Talete.

Incentro
Punto d'incontro delle bisettrici di un triangolo; centro della circonferenza inscritta, tangente ai tre lati.

Luogo geometrico
Insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una data proprietà (per esempio la circonferenza, l'asse, la bisettrice).

Ortocentro
Punto d'incontro delle altezze di un triangolo (o dei loro prolungamenti).

Parallele
Rette di un piano che non hanno punti in comune e conservano sempre la stessa distanza.

Perpendicolari
Rette che, incontrandosi, formano quattro angoli retti.

Piede della perpendicolare
Punto in cui la perpendicolare condotta da un punto esterno incontra la retta; il segmento dal punto al piede è la distanza del punto dalla retta.

Punto medio
Punto che divide un segmento in due parti uguali; si trova come intersezione del segmento con il suo asse.

Rettangolo aureo
Rettangolo i cui lati stanno nel rapporto $\varphi \approx 1{,}618$; togliendone un quadrato resta un rettangolo aureo più piccolo.

Sezione aurea
Parte AE di un segmento AB tale che AB : AE = AE : EB; misura circa $0{,}618 \cdot AB$.

Teorema di Talete
Un fascio di rette parallele determina su due trasversali segmenti corrispondenti proporzionali; è la base della divisione di un segmento in parti uguali.

Terna pitagorica
Tre numeri interi che verificano il teorema di Pitagora, come 3, 4, 5; un triangolo con lati proporzionali a essi è rettangolo.

Trasporto di un angolo
Costruzione che ricopia un angolo dato su una nuova semiretta, riportando con il compasso raggio e corda.

Trisezione dell'angolo
Divisione di un angolo in tre parti uguali; esatta per alcuni angoli (come il retto), impossibile con riga e compasso per un angolo qualsiasi.

Soluzioni

1. B. L'asse è la perpendicolare al segmento nel suo punto medio.

2. C. Il raggio deve superare metà segmento (40 mm), altrimenti gli archi non si incontrano; con 40 mm esatti si toccherebbero in un solo punto, M.

3. A. Teorema di Talete: un fascio di parallele taglia su due trasversali segmenti proporzionali.

4. D. La trisezione di un angolo qualsiasi è impossibile con riga e compasso (Wantzel, 1837); le altre tre costruzioni sono possibili (75° = 60° + 15°; il segmento si divide in 13 parti con Talete).

5. A. Il circocentro è l'incontro degli assi dei lati.

6. C. Il raggio inscritto è la distanza dell'incentro da un lato, misurata sulla perpendicolare.

7. B. $30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2$: è la terna 3-4-5 con unità 10 mm.

8. D. 40 + 50 = 90 < 100: non vale la disuguaglianza triangolare. Le altre terne la rispettano (45, 60, 75 è anche rettangolo).

9. C. $100 \cdot (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 61{,}8$ mm (la parte minore misura ≈ 38,2 mm).

10. luogo; equidistanti; lati.

11. a) F: le linee di costruzione restano visibili, sottili, perché documentano il procedimento. b) V. c) F: il metodo del rombo serve a tracciare la parallela per un punto. d) V: il segmento PH, con H piede della perpendicolare, è la distanza di P dalla retta.

12. 1–c; 2–d; 3–b; 4–a.

13. AB : AE = AE : EB; φ; 1,618.

14. Traccia: una costruzione esatta usa solo riga (per congiungere) e compasso (per riportare distanze) e darebbe il risultato perfetto con strumenti ideali; una costruzione misurata usa righello o goniometro e introduce arrotondamenti. 100 : 3 = 33,333… mm non si legge sul righello; con il metodo di Talete (tre unità uguali sulla semiretta ausiliaria e parallele) la divisione è esatta senza misurare.

15. a) continua fine; b) continua grossa; c) mista fine punto-linea; d) continua grossa (è un risultato richiesto), mentre i due assi usati per trovarne il centro restano linee di costruzione fini.

16. Archi da A e da B con raggio maggiore di 70 mm (per esempio 100 mm), retta per le due intersezioni; M a 70 mm da A. PA = PB = $\sqrt{(70^2 + 50^2)} \approx 86{,}0$ mm: i due valori uguali confermano che P sta sull'asse.

17. Da P arco che taglia *r* in A e B (raggio per esempio 60 mm), poi archi uguali da A e da B sotto *r*: la retta per P e per l'intersezione dà H; PH = 45 mm. In K: arco da K che segna due punti simmetrici su *r*, poi l'asse di questi. Le due perpendicolari sono parallele tra loro (due rette perpendicolari alla stessa retta) e distano 60 mm.

18. Si riporta da B verso A il segmento di 3 unità = 60 mm (punto T); da B si traccia un arco di raggio 4 unità = 80 mm, da T un arco di raggio 5 unità = 100 mm; la loro intersezione U dà BU $\perp$ AB, perché $60^2 + 80^2 = 100^2$. La semicirconferenza per B (centro O scelto sopra AB) e il diametro per C devono dare la stessa retta.

19. Si scelgono due punti C e D lontani su *r*, si alzano le perpendicolari (con l'asse o con le squadre), si riportano 35 mm da una parte e dall'altra e si congiungono i punti corrispondenti. Le due parallele distano tra loro 70 mm.

20. Si riportano 7 unità di 20 mm (140 mm) sulla semiretta, si unisce il punto 7 con B e si tracciano le parallele per i punti 1–6. Ogni parte misura 130 : 7 ≈ 18,6 mm (18,57 mm).

21. Si riportano 2 + 3 + 5 = 10 unità uguali; si unisce il punto 10 con B e si tracciano le parallele per i punti 2 e 5. Unità su AB = 12 mm; parti: 24 mm, 36 mm, 60 mm.

22. 60°: triangolo equilatero (arco dal vertice, stessa apertura dal punto sul lato). 30°: bisettrice di 60°. 15°: bisettrice di 30°. 75° = 60° + 15° (oppure 90° − 15°). 105° = 90° + 15° (oppure 60° + 45°). 135° = 90° + 45° (oppure 180° − 45°, supplementare della bisettrice dell'angolo retto).

23. Si traccia il lato di 100 mm e si chiude con archi di 80 e 60 mm. È un triangolo rettangolo ($60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10\,000 = 100^2$), con l'angolo retto opposto al lato di 100 mm. Circonferenza circoscritta: centro nel punto medio dell'ipotenusa, R = 50 mm. Inscritta: centro nell'incontro delle bisettrici, r = (60 + 80 − 100)/2 = 20 mm.

24. BC = $\sqrt{(90^2 + 70^2 - 2 \cdot 90 \cdot 70 \cdot 0{,}5)} = \sqrt{6700} \approx 81{,}9$ mm.

25. a) Si traccia la diagonale di 120 mm, il suo asse, e si riportano sull'asse 40 mm per parte. Lato = $\sqrt{(60^2 + 40^2)} \approx 72{,}1$ mm. b) Base maggiore 120 mm e suo asse; sull'asse 50 mm; parallela alla base; base minore centrata (30 mm per parte). Lato obliquo = $\sqrt{(30^2 + 50^2)} \approx 58{,}3$ mm.

26. BC = 75 mm perpendicolare in B; AC = $\sqrt{(150^2 + 75^2)} \approx 167{,}7$ mm; AD = AC − 75 ≈ 92,7 mm. Le parti: AE ≈ 92,7 mm, EB ≈ 57,3 mm. Rettangolo aureo: arco di centro nel punto medio del lato di base e raggio $\sqrt{(40^2 + 80^2)} \approx 89{,}4$ mm; lato lungo = 40 + 89,4 ≈ 129,4 mm (= 80 · φ).

27. Gli archi di raggio 35 mm centrati negli estremi non si incontrano, perché 35 + 35 = 70 < 80 mm. Deve aprire il compasso a più di 40 mm, meglio sui 55–60 mm, per avere intersezioni nette.

28. 115 : 5 = 23 mm. I segmenti sulla semiretta servono solo a creare 5 parti uguali tra loro: il teorema di Talete garantisce che le parallele trasportano l'uguaglianza (non la lunghezza) sul segmento AB, quindi la loro misura è arbitraria.

29. È un triangolo ottusangolo. Il triangolo 60-80-100 è rettangolo, quindi il circocentro cade nel punto medio dell'ipotenusa (il lato di 100 mm).

30. Parti uguali della corda non sottendono angoli uguali: i punti di divisione centrali sono più vicini al vertice O di quelli estremi e «vedono» un angolo più ampio (26,6° + 36,9° + 26,6° = 90°). Metodo corretto: con la stessa apertura OA, archi centrati in A e in B che tagliano l'arco AB in F (60°) ed E (30°); OE e OF dividono l'angolo retto in tre angoli di 30°.

31. F sta sull'arco di centro O, quindi OF = OA; sta sull'arco di centro A e raggio OA, quindi AF = OA. Il triangolo OAF ha tre lati uguali, è equilatero e i suoi angoli misurano 60°: AOF = 60°.

32. Angolo in C = 180° − 45° − 60° = 75°. Per il teorema dei seni: BC = 100 · sin 45° / sin 75° ≈ 73,2 mm; AC = 100 · sin 60° / sin 75° ≈ 89,7 mm. Costruzione: 45° come bisettrice dell'angolo retto in A, 60° con il triangolo equilatero in B, C nell'incontro dei due lati.

33. Si cerca il circocentro del triangolo ABC: si costruiscono gli assi di AB e di AC (il terzo, di BC, per verifica). Il centro cade 60 mm a destra e 30 mm sopra A; il raggio misura $\sqrt{(60^2 + 30^2)} \approx 67{,}1$ mm.

34. Si traccia la diagonale AC = 100 mm e il suo asse; con centro nel punto medio O e raggio 50 mm si segnano sull'asse B e D; ABCD è il quadrato (diagonali uguali, perpendicolari, che si dimezzano). Lato = 100/√2 ≈ 70,7 mm. Circonferenza circoscritta: centro O, R = 50 mm. Inscritta: centro O, r = metà lato ≈ 35,4 mm.