Verifica di fine parte V · Probabilità, modelli e fondamenti

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). **È ammessa la calcolatrice scientifica.** Per la distribuzione normale usa la tavola di $\Phi(z)$ del Formulario; nella formula dell'area di un triangolo sferico gli angoli vanno in radianti. Scrivi tutti i passaggi e controlla che le probabilità di una distribuzione abbiano somma 1: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

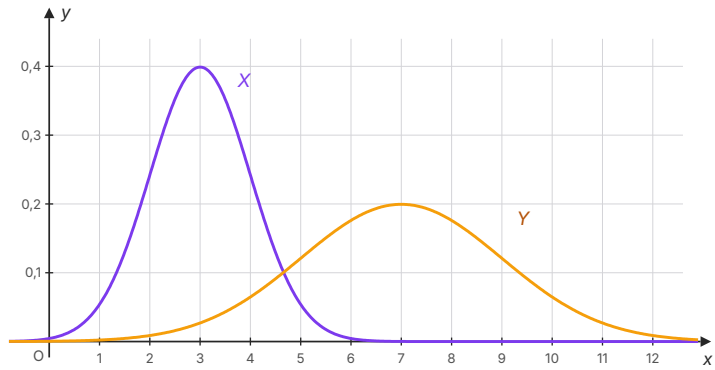

Figura V5.1 Le densità di due variabili aleatorie normali X (in viola) e Y (in arancione). Scale diverse sui due assi.

1. ● *(0,5 punti · cap. 11)* Una variabile aleatoria X ha varianza $\mathrm{Var}(X) = 9$. La deviazione standard della variabile $2X - 5$ è:

   A. 1
   B. 13
   C. 6
   D. 36

2. ● *(0,5 punti · cap. 11)* La Figura V5.1 mostra le densità di due variabili aleatorie normali, $X \sim \mathrm{N}(\mu_X; \sigma_X)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y; \sigma_Y)$. Quale affermazione è vera?

   A. $\mu_X < \mu_Y$ e $\sigma_X < \sigma_Y$
   B. $\mu_X < \mu_Y$ e $\sigma_X > \sigma_Y$
   C. $\mu_X > \mu_Y$ e $\sigma_X < \sigma_Y$
   D. $\mu_X < \mu_Y$ e l'area sotto la curva di Y è minore di quella sotto la curva di X

3. ● *(0,5 punti · cap. 12)* Nel disco di Poincaré valgono tutti i postulati della geometria euclidea tranne quello delle parallele. Da questo fatto segue che:
   A. il quinto postulato è falso nello spazio fisico
   B. il quinto postulato non si può dimostrare a partire dagli altri
   C. la geometria iperbolica non contiene contraddizioni, qualunque cosa accada alla geometria euclidea
   D. la geometria euclidea contiene una contraddizione

4. ● *(0,5 punti · cap. 12)* Quale terna può essere formata dagli angoli di un triangolo sferico?
   A. 60°, 60°, 60°
   B. 90°, 45°, 45°
   C. 50°, 60°, 70°
   D. 80°, 70°, 40°

Calcolare

5. ●● *(1,5 punti · cap. 11)* Un arciere tira tre frecce e X è il numero di bersagli colpiti. La distribuzione di X è (dati inventati): $P(X=0)=0{,}2$, $P(X=1)=0{,}4$, $P(X=2)=p$, $P(X=3)=0{,}1$. a) Trova p e disegna il diagramma a barre della distribuzione. b) Scrivi la funzione di ripartizione $F(x)=P(X\le x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e usala per calcolare $P(1<X\le 3)$. c) Calcola il valore atteso $E(X)$, la varianza e la deviazione standard di X. d) Un amico propone all'arciere un gioco: paga 4 € per i tre tiri e riceve 3 € per ogni bersaglio colpito. Scrivi il guadagno G in funzione di X, calcola $E(G)$ e la deviazione standard di G con le regole delle trasformazioni lineari. Il gioco è equo? Quale prezzo lo renderebbe equo?

6. ●● *(1 punto · cap. 11)* Un'altezza viene misurata e arrotondata al centimetro. L'errore di arrotondamento X, in centimetri, si può considerare distribuito in modo uniforme nell'intervallo $[-0{,}5;\,0{,}5]$. a) Scrivi la densità $f(x)$ e disegnane il grafico. Il valore della densità è 1: è una probabilità? b) Calcola $P(X\le 0{,}1)$ e la probabilità che l'errore superi 0,3 cm in valore assoluto, cioè $P(|X|>0{,}3)$. c) Trova il valore atteso e la deviazione standard di X; controlla la varianza calcolando $\int_{-0{,}5}^{0{,}5} x^2 f(x)\,dx$. d) Perché $P(X=0{,}3)=0$, e perché $P(X\le 0{,}1)$ e $P(X<0{,}1)$ sono uguali?

Dimostrare e argomentare

7. ●● *(1,5 punti · cap. 12)* a) Nel 1733 Saccheri, sviluppando l'ipotesi dell'angolo acuto, ricavò che esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza mai incontrarsi, e dichiarò l'ipotesi «contraria alla natura della linea retta». Spiega che cosa occorre per avere davvero una contraddizione e perché quella di Saccheri non lo era. b) Che cosa dimostra il disco di Poincaré a proposito del quinto postulato? Perché si dice che garantisce soltanto una coerenza *relativa*? c) Considera gli assiomi del capitolo 12: (A1) ogni retta contiene almeno due punti; (A2) per due punti distinti passa una e una sola retta; (A3) esistono tre punti non allineati; e l'enunciato (E) «due rette distinte hanno sempre un punto in comune». Verifica che tre punti A, B, C, con le tre rette {A, B}, {B, C}, {A, C}, sono un modello di A1, A2, A3 e di E. Poi usa anche il modello con quattro punti A, B, C, D e le sei rette formate dalle loro coppie per spiegare perché da A1, A2, A3 non si può dedurre né E né la sua negazione. Quale proprietà del sistema A1, A2, A3 mostra questo fatto?

Problemi

8. ●● *(1 punto · cap. 11)* Un test ha 8 domande, ciascuna con 4 risposte possibili di cui una sola esatta. Uno studente che non ha studiato risponde a caso a tutte le domande, in modo indipendente; X è il numero di risposte esatte. a) Qual è la distribuzione di X? Calcola $P(X = 2)$. b) Per superare il test servono almeno 6 risposte esatte: con quale probabilità lo studente lo supera? c) Calcola il valore atteso e la deviazione standard di X e spiega il significato del valore atteso in questo contesto.

9. ●● *(1,5 punti · cap. 11)* La massa delle uova prodotte da un allevamento è distribuita in modo approssimativamente normale, $X \sim N(60; 5)$, in grammi (dati inventati). Le uova si classificano in piccole (meno di 53 g), medie (da 53 a 63 g), grandi (da 63 a 73 g) e grandissime (oltre 73 g). a) Calcola, con la tavola di $\Phi(z)$, la percentuale di uova di ciascuna classe, e controlla che la somma sia 100%. b) Senza tavola, con la regola 68–95–99,7: quale intervallo simmetrico attorno a 60 g contiene circa il 95% delle uova? Circa quale percentuale delle uova supera 65 g? c) Una confezione contiene 6 uova prese a caso, in modo indipendente. Qual è la probabilità che siano tutte medie o grandi?

Sfida

10. ●●● *(1,5 punti · cap. 12)* Considera la Terra come una sfera di raggio medio $R \approx 6371$ km. Il triangolo sferico ABC ha un vertice A nel polo Nord e gli altri due vertici B e C sull'equatore, nei punti di longitudine 0° e 40° E; i lati sono archi di cerchio massimo. a) Spiega perché gli angoli in B e in C sono retti e perché l'angolo in A misura 40°. b) Calcola la somma degli angoli, l'eccesso sferico in radianti e l'area del triangolo. c) Quale frazione della superficie terrestre occupa il triangolo? Controlla il risultato osservando che il triangolo è la metà settentrionale di un fuso sferico, e calcolando l'area del fuso con la formula $A_{\text{fuso}} = 2\alpha R^2$. d) Su un altro triangolo sferico, molto più piccolo, tracciato sulla superficie terrestre, la somma degli angoli supera 180° di mezzo grado (dati inventati). Quanto misura la sua area? Perché su un triangolo grande come un campo da calcio la somma degli angoli sembra esattamente 180°?

Soluzioni

1. C. Per le regole delle trasformazioni lineari $\mathrm{Var}(2X - 5) = 2^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 9 = 36$, quindi la deviazione standard è $\sqrt{36} = 6$ (equivalentemente: $\sigma(X) = 3$ e un fattore 2 raddoppia la deviazione standard). La costante −5 sposta la media ma non cambia la dispersione. La A applica la trasformazione alla deviazione standard, costante compresa ($2 \cdot 3 - 5 = 1$); la B la applica alla varianza ($2 \cdot 9 - 5 = 13$); la D è la varianza, non la deviazione standard.

2. A. Il massimo della densità normale è nel valore atteso: la curva di X ha il massimo in 3, quella di Y in 7, quindi $\mu_X = 3 < \mu_Y = 7$. La curva di Y è più larga e più bassa, quindi ha deviazione standard maggiore (dalla figura: $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$; i flessi distano σ dal massimo, e raddoppiare σ dimezza l'altezza del massimo). La D è falsa: l'area sotto ogni densità è 1.

3. B. Se il quinto postulato si potesse dedurre dagli altri, sarebbe vero in ogni modello in cui gli altri sono veri, e quindi anche nel disco di Poincaré, dove invece è falso. Il modello non dice nulla sulla geometria dello spazio fisico (A), e prova solo una coerenza relativa: la geometria iperbolica è coerente *se* lo è quella euclidea, con cui il disco è costruito (C). Nulla indica che la geometria euclidea sia contraddittoria (D).

4. D. Per il teorema di Girard l'area di un triangolo sferico è $R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, che è positiva: la somma degli angoli deve superare 180°. Solo 80° + 70° + 40° = 190° la supera; le terne A, B e C hanno somma 180°, come i triangoli del piano euclideo.

5. a) Le probabilità hanno somma 1: $p = 1 - 0{,}2 - 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$. Il diagramma ha quattro barre, sopra 0, 1, 2, 3, di altezze 0,2; 0,4; 0,3; 0,1 (la più alta in 1). b) $F(x) = 0$ per $x < 0$; 0,2 per $0 \le x < 1$; 0,6 per $1 \le x < 2$; 0,9 per $2 \le x < 3$; 1 per $x \ge 3$: una scala non decrescente con gradini alti 0,2; 0,4; 0,3; 0,1. $\mathrm{P}(1 < X \le 3) = F(3) - F(1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (cioè $\mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3)$). c) $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$; $\mathrm{E}(X^2) = 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 = 2{,}5$; $\mathrm{Var}(X) = 2{,}5 - 1{,}3^2 = 0{,}81$; $\sigma = 0{,}9$. d) $G = 3X - 4$ (in euro). $\mathrm{E}(G) = 3 \cdot 1{,}3 - 4 = -0{,}10$ €, e $\sigma(G) = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7$ € (la varianza è $9 \cdot 0{,}81 = 7{,}29$). Il gioco non è equo: in media l'arciere perde 10 centesimi a partita. È equo se il prezzo è uguale al valore atteso della vincita, $3 \cdot 1{,}3 = 3{,}90$ €.

6. a) La densità vale $f(x) = \dfrac{1}{0{,}5 - (-0{,}5)} = 1$ in $[-0{,}5; 0{,}5]$ e 0 fuori: il grafico è un rettangolo di base 1 e altezza 1, di area 1. Il valore 1 non è una probabilità: le probabilità sono le aree sotto il grafico. b) $\mathrm{P}(X \le 0{,}1) = (0{,}1 - (-0{,}5)) \cdot 1 = 0{,}6$. $\mathrm{P}(|X| > 0{,}3) = \mathrm{P}(X < -0{,}3) + \mathrm{P}(X > 0{,}3) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$. c) $\mu = \dfrac{-0{,}5 + 0{,}5}{2} = 0$: in media l'arrotondamento non sposta la misura. $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{12}$ e $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{12}} \approx 0{,}289$ cm. Controllo: poiché $\mu = 0$, $\sigma^2 = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} x^2 \cdot 1 \, dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-0{,}5}^{0{,}5} = \dfrac{0{,}125 + 0{,}125}{3} = \dfrac{1}{12}$ ✓. d) Per una variabile continua la probabilità di un singolo valore è l'area di un rettangolo di base nulla, quindi è 0. Per lo stesso motivo aggiungere o togliere l'estremo 0,1 non cambia la probabilità: $\mathrm{P}(X \le 0{,}1) = \mathrm{P}(X < 0{,}1) + \mathrm{P}(X = 0{,}1) = \mathrm{P}(X < 0{,}1)$.

7. a) Una teoria è contraddittoria quando da essa si deducono sia un enunciato sia la sua negazione. Saccheri non dedusse nulla del genere: ottenne un risultato lontano dall'intuizione del foglio, che è euclidea, ma non in contrasto con gli altri postulati; scambiò lo «strano» per l'«assurdo», e la sua conclusione si basava su un ragionamento non valido. Oggi sappiamo che l'ipotesi dell'angolo acuto è coerente quanto la geometria euclidea: è la geometria iperbolica. b) Nel disco di Poincaré valgono tutti i postulati tranne il quinto, che è falso; quindi il quinto postulato non si può dedurre dagli altri: è indipendente, e i tentativi di dimostrarlo erano destinati a fallire. Il disco è costruito con cerchi e archi

euclidei: una contraddizione della geometria iperbolica si tradurrebbe in una contraddizione della geometria euclidea. Il modello prova quindi che la geometria iperbolica è coerente *se* lo è quella euclidea, non che lo sia in assoluto: per questo la coerenza è relativa. c) Nel modello con tre punti ogni retta ha due punti (A1); ogni coppia di punti forma una sola retta (A2); A, B, C non stanno su una stessa retta, perché ogni retta ne contiene solo due (A3); due rette distinte, per esempio {A, B} e {B, C}, hanno in comune esattamente un punto (qui B), e lo stesso vale per le altre due coppie di rette (E). Nel modello con quattro punti valgono ancora A1, A2, A3 (è l'esempio svolto del capitolo 12), ma E è falso: le rette {A, B} e {C, D} non hanno punti in comune. Se E si potesse dedurre da A1, A2, A3, sarebbe vero nel modello con quattro punti; se si potesse dedurre la negazione di E, questa sarebbe vera nel modello con tre punti. Nessuna delle due cose accade: E è indipendente da A1, A2, A3, e il sistema A1, A2, A3 non è completo, perché E è un enunciato del suo linguaggio che non si può né dimostrare né confutare. (Il modello con tre punti somiglia alla sfera, dove non ci sono parallele; quello con quattro al piano euclideo.)

8. a) Le risposte sono 8 prove indipendenti con probabilità di successo $\frac{1}{4} = 0{,}25$: $X \sim B(8; 0{,}25)$.
$P(X = 2) = C_{8,2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^6 = 28 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}75^6 \approx 0{,}311$.
b)
$P(X \geq 6) = C_{8,6} \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75^2 + C_{8,7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^8 \approx 0{,}003\,85 + 0{,}000\,37 + 0{,}000\,02 \approx 0{,}0042$: circa 4 volte su mille. c) $\mu = np = 8 \cdot 0{,}25 = 2$;
$\sigma^2 = np(1 - p) = 2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$, $\sigma = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$. Se molti studenti rispondessero a caso, il numero medio di risposte esatte sarebbe 2 su 8, cioè un quarto delle domande; non è una previsione per il singolo studente, che può ottenerne di più o di meno (2 è comunque il valore più probabile).

9. a) Punteggi standard: $z = \frac{53 - 60}{5} = -1{,}4$,
$z = \frac{63 - 60}{5} = 0{,}6$, $z = \frac{73 - 60}{5} = 2{,}6$. Piccole:
$\Phi(-1{,}4) = 1 - \Phi(1{,}4) = 1 - 0{,}9192 = 0{,}0808$, circa 8,1%. Medie: $\Phi(0{,}6) - \Phi(-1{,}4) = 0{,}7257 - 0{,}0808 = 0{,}6449$, circa 64,5%. Grandi:
$\Phi(2{,}6) - \Phi(0{,}6) = 0{,}9953 - 0{,}7257 = 0{,}2696$, circa 27,0%. Grandissime: $1 - \Phi(2{,}6) = 0{,}0047$, circa 0,5%. Somma: 0,0808 + 0,6449 + 0,2696 + 0,0047 = 1, cioè 100% (gli estremi delle classi, per esempio esattamente 63 g, hanno probabilità 0 e non contano). b) Circa il 95% delle uova cade entro due deviazioni standard dalla media: tra 60 − 10 = 50 g e 60 + 10 = 70 g. 65 g è una deviazione standard sopra la media: tra 55 e 65 g cade circa il 68,3% delle uova, e il resto si divide in parti uguali tra le due code, quindi supera 65 g circa $\frac{100\% - 68{,}3\%}{2} \approx 15{,}9\%$ delle uova
(con la tavola: $1 - \Phi(1) = 0{,}1587$). c) Un uovo è medio o grande con probabilità
$\Phi(2{,}6) - \Phi(-1{,}4) = 0{,}9953 - 0{,}0808 = 0{,}9145$. Per l'indipendenza la probabilità che lo siano tutte e sei è $0{,}9145^6 \approx 0{,}585$ (è $P(Y = 6)$ per $Y \sim B(6; 0{,}9145)$): poco più di una confezione su due.

10. a) I lati AB e AC sono archi di meridiano, cioè di cerchi massimi passanti per i poli; i loro piani contengono l'asse terrestre e sono perpendicolari al piano dell'equatore, che contiene il lato BC. L'angolo di un triangolo sferico è l'angolo tra i piani dei due lati, quindi in B e in C è retto. In A l'angolo è quello tra i piani dei meridiani di longitudine 0° e 40° E, cioè la differenza di longitudine, 40°. b) Somma: 90° + 90° + 40° = 220°; eccesso
$220° - 180° = 40° = \frac{2\pi}{9} \approx 0{,}698$ rad. Per il teorema di Girard $A = R^2 \cdot \frac{2\pi}{9} \approx 6371^2 \cdot 0{,}6981 \approx 28{,}3$ milioni di km². c) $\frac{R^2 \cdot \frac{2\pi}{9}}{4\pi R^2} = \frac{1}{18}$ della superficie terrestre.
Il fuso tra i meridiani di longitudine 0° e 40° E, da polo a polo, ha angolo $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ e area
$2\alpha R^2 = \frac{4\pi}{9} R^2$; l'equatore lo divide in due metà uguali, e quella settentrionale è il triangolo ABC:
$\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{9} R^2 = \frac{2\pi}{9} R^2$ ✓. d) Eccesso:
$0{,}5° = \frac{0{,}5 \cdot \pi}{180} \approx 0{,}008\,73$ rad; area
$\approx 6371^2 \cdot 0{,}008\,73 \approx 354\,000$ km², circa 354 mila km².
L'eccesso è proporzionale all'area: per un campo da calcio, di area inferiore a un centesimo di km², l'ec-

cesso è minore di $\frac{0{,}01}{6371^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ rad, cioè circa 50 milionesimi di secondo d'arco, molto al di sotto della precisione di qualunque misura: su piccola scala la geometria euclidea descrive benissimo la superficie terrestre.