Matematica 5 · Parte IV · Il calcolo integrale · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte IV · pagine 287–290 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte IV · Il calcolo integrale

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Gli angoli sono misurati in radianti. Scrivi tutti i passaggi e controlla ogni integrale indefinito derivando il risultato: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 9)* Si divide l'intervallo $[0; 1]$ in 4 parti uguali. Per la funzione $f(x) = 2x$ la somma inferiore s_4 e la somma superiore S_4 valgono:
   - **A.** $s_4 = 0{,}5$ e $S_4 = 1$
   - **B.** $s_4 = 1$ e $S_4 = 1$
   - **C.** $s_4 = 0{,}75$ e $S_4 = 1{,}25$
   - **D.** $s_4 = 0{,}75$ e $S_4 = 1$

2. ● *(0,5 punti · cap. 10)* $\int \cos \frac{x}{2}\,dx$ è uguale a:
   - **A.** $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c$
   - **B.** $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c$
   - **C.** $-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c$
   - **D.** $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + c$

3. ● *(0,5 punti · cap. 9)* Se $F(x) = \int_0^x (t^3 - 2t)\,dt$, allora $F'(1)$ vale:
   - **A.** $-\frac{3}{4}$
   - **B.** -1
   - **C.** 0
   - **D.** 1

4. ● *(0,5 punti · cap. 10)* Il segmento $y = 2x$, con $0 \le x \le 3$, ruota di un giro completo attorno all'asse x. Il volume del cono che descrive è:
   - **A.** 9π
   - **B.** 18π
   - **C.** $81\pi^2$
   - **D.** 36π

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 10)* Calcola gli integrali indefiniti e verifica ogni risultato derivando: a) $\int \left(6x^2 - 4x + \frac{3}{x}\right) dx$; b) $\int x^2 \, (x^3 + 1)^4 \, dx$; c) $\int e^{2x+1} \, dx$; d) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} \, dx$.

6. ●● *(1,5 punti · cap. 9)* a) Calcola con la formula di Newton–Leibniz $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$ e $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) \, dx$. b) Enuncia il teorema della media integrale (ipotesi e tesi). c) Calcola il valore medio della funzione $f(x) = 6x - 3x^2$ sull'intervallo $[0; 2]$, trova i punti in cui f lo assume e spiega il significato geometrico del risultato.

7. ●● *(1,5 punti · cap. 10)* Sono date la parabola $y = -x^2 + 2x + 3$ e la retta $y = x + 1$. a) Trova i punti A e B in cui si intersecano e stabilisci quale delle due curve sta sopra tra A e B. b) Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dalle due curve. c) Trova il punto C della parabola in cui la tangente è parallela alla retta AB e verifica il risultato di Archimede: l'area del segmento parabolico è i $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABC.

8. ●● *(1 punto · cap. 10)* La regione compresa tra il grafico di $y = e^x$, l'asse x e le rette $x = 0$ e $x = 1$ ruota di un giro completo attorno all'asse x. a) Calcola il volume del solido che si ottiene, in forma esatta e con due cifre decimali. b) Controlla che il risultato sia compreso tra i volumi di due cilindri di altezza 1, uno contenuto nel solido e uno che lo contiene.

Problemi

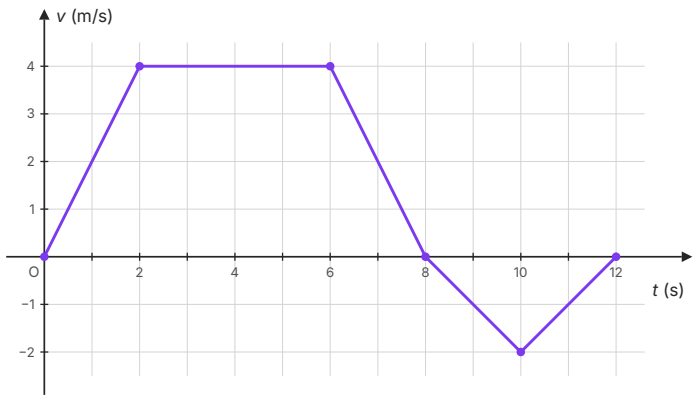

Figura V4.1 La velocità v di un robot su un binario rettilineo in funzione del tempo t, per $0 \le t \le 12$ s (dati inventati). Il grafico è la spezzata che unisce, nell'ordine, i punti (0; 0), (2; 4), (6; 4), (8; 0), (10; −2) e (12; 0). Scale diverse sui due assi: un quadretto vale 1 s in orizzontale e 1 m/s in verticale.

9. ●● *(1,5 punti · cap. 10)* Un piccolo robot si muove avanti e indietro lungo un binario rettilineo; la Figura V4.1 mostra la sua velocità, positiva quando si allontana dal punto di partenza. a) Descrivi il moto nei vari tratti e calcola l'accelerazione nei primi 2 secondi. b) Quanti metri percorre allontanandosi, e quanti tornando indietro? c) In quale istante è più lontano dal punto di partenza, e a quale distanza? d) A quale distanza dal punto di partenza si trova all'istante 12 s? Quanta strada ha percorso in tutto? e) Calcola il valore medio di v sull'intervallo $[0; 12]$ e spiega che cosa rappresenta. È uguale a spazio percorso diviso tempo?

Sfida

10. ●●● *(1,5 punti · cap. 10)* Un bicchiere ha la forma di un cono con il vertice in basso, di raggio r e altezza h. Mettiamo l'asse x lungo l'asse del bicchiere, con l'origine nel vertice: il bicchiere è il solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del segmento $y = \dfrac{r}{h}x$, con $0 \le x \le h$. a) Dimostra con un integrale che il volume del cono è $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. b) Dimostra che, se il liquido arriva all'altezza a (con $0 \le a \le h$), il suo volume è $V(a) = \dfrac{\pi r^2 a^3}{3h^2}$. c) Il bicchiere è pieno fino a metà altezza: quale frazione della sua capacità contiene? d) A quale altezza bisogna riempirlo perché contenga metà della sua capacità? Esprimi il risultato come frazione di h, con due cifre decimali.

Soluzioni

1. C. Con $\Delta x = \frac{1}{4}$ i punti della partizione sono 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1. La funzione è crescente: i rettangoli inscritti hanno per altezza il valore di f nell'estremo sinistro di ogni intervallo (0; 0,5; 1; 1,5), quelli circoscritti il valore nell'estremo destro (0,5; 1; 1,5; 2). Quindi $s_4 = \frac{1}{4}(0 + 0{,}5 + 1 + 1{,}5) = 0{,}75$ e $S_4 = \frac{1}{4}(0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2) = 1{,}25$. Il valore esatto dell'integrale è l'area del triangolo di base 1 e altezza 2, cioè 1, che sta tra le due somme. B dà a entrambe le somme il valore dell'integrale; D lo dà alla somma superiore; in A, 0,5 è la somma inferiore che si otterrebbe dividendo l'intervallo in due sole parti, $\frac{1}{2}(0 + 1)$, e 1 è di nuovo il valore dell'integrale.

2. A. Con la funzione interna $\frac{x}{2}$, la cui derivata è $\frac{1}{2}$: $\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + c$. Verifica: $(2\operatorname{sen}\frac{x}{2})' = 2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \cos\frac{x}{2}$ ✓. La B moltiplica per $\frac{1}{2}$ invece di dividere (la sua derivata è $\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$); la C sbaglia il segno, che compare integrando il seno, non il coseno.

3. B. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, poiché $t^3 - 2t$ è continua, $F'(x) = x^3 - 2x$, quindi $F'(1) = 1 - 2 = -1$. Il valore $-\frac{3}{4}$ è invece $F(1) = [\frac{t^4}{4} - t^2]_0^1 = \frac{1}{4} - 1$: la risposta A confonde la funzione integrale con la sua derivata.

4. D. $V = \pi\int_0^3 (2x)^2\,dx = 4\pi\,[\frac{x^3}{3}]_0^3 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$. Controllo: il cono ha altezza 3 e raggio di base $f(3) = 6$, e $\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 36\pi$ ✓. La A è $\pi\int_0^3 2x\,dx$ (manca il quadrato), la C è $(\pi\int_0^3 2x\,dx)^2$ (quadrato al posto sbagliato), la B è il cono con raggio e altezza scambiati.

5. a) Per la linearità: $\int (6x^2 - 4x + \frac{3}{x})\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 3\ln|x| + c$. Verifica: $(2x^3 - 2x^2 + 3\ln|x|)' = 6x^2 - 4x + \frac{3}{x}$ ✓. b) La funzione interna è $x^3 + 1$, con derivata $3x^2$; al posto di $3x^2$ c'è x^2, quindi si moltiplica e si divide per 3: $\int x^2(x^3 + 1)^4\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3 + 1)^4\,dx = \frac{(x^3 + 1)^5}{15} + c$. Verifica: $[\frac{(x^3 + 1)^5}{15}]' = \frac{5(x^3 + 1)^4 \cdot 3x^2}{15} = x^2(x^3 + 1)^4$ ✓. c) La derivata dell'esponente è 2: $\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$. Verifica: $(\frac{1}{2}e^{2x+1})' = \frac{1}{2}e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}$ ✓. d) Il numeratore è la derivata del denominatore, quindi l'integrale è della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$: $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx = \ln(x^2 + x + 3) + c$. Il valore assoluto non serve, perché $x^2 + x + 3$ ha discriminante $1 - 12 = -11 < 0$ ed è sempre positivo. Verifica: $[\ln(x^2 + x + 3)]' = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ ✓.

6. a) Su [1; 4] si ha $x > 0$; scrivendo $\sqrt{x} = x^{1/2}$, una primitiva è $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \ln x$. Quindi $\int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{x})\,dx = [\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \ln x]_1^4 = (\frac{16}{3} + \ln 4) - (\frac{2}{3} + 0) = \frac{14}{3} + \ln 4 \approx 6{,}05$. Poi $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + 2\cos x)\,dx = [-\cos x + 2\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = (0 + 2) - (-1 + 0) = 3$. b) **Teorema della media integrale.** Ipotesi: f è continua sull'intervallo $[a; b]$. Tesi: esiste almeno un punto $c \in [a; b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$. c) $\int_0^2 (6x - 3x^2)\,dx = [3x^2 - x^3]_0^2 = 12 - 8 = 4$, quindi il valore medio è $\frac{4}{2} = 2$. L'equazione $6x - 3x^2 = 2$ equivale a $3x^2 - 6x + 2 = 0$, con soluzioni $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, cioè $x \approx 0{,}42$ e $x \approx 1{,}58$: entrambe appartengono a [0; 2], e il teorema è verificato con due punti. Significato geometrico: il rettangolo di base [0; 2] e altezza 2 ha la stessa area (4) del

trapezoide delimitato dal grafico di f, che qui è un arco di parabola con il vertice in (1; 3).

7. a) $-x^2 + 2x + 3 = x + 1$ equivale a $x^2 - x - 2 = 0$, cioè $(x + 1)(x - 2) = 0$: $x = -1$ e $x = 2$. I punti sono $A(-1; 0)$ e $B(2; 3)$. In $x = 0$ la parabola vale 3 e la retta 1: tra A e B la parabola sta sopra. b) $\int_{-1}^{2} [(-x^2 + 2x + 3) - (x + 1)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = [-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^{2}$. Il valore in 2 è $-\frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$, quello in -1 è $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{6}$: l'area è $\frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$. Controllo con la formula $\frac{|a|\,d^3}{6}$, con $|a| = 1$ e $d = 2 - (-1) = 3$: $\frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ ✓. c) La retta AB ha pendenza $\frac{3 - 0}{2 - (-1)} = 1$. La tangente alla parabola nel punto di ascissa x ha pendenza $y' = -2x + 2$, che vale 1 per $x = \frac{1}{2}$ (il punto medio delle ascisse di A e B): $C(\frac{1}{2}; \frac{15}{4})$. Il punto della retta AB con ascissa $\frac{1}{2}$ è $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$; il segmento verticale che lo unisce a C, lungo $\frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, divide il triangolo ABC in due triangoli le cui altezze, misurate in orizzontale, sommano 3. Quindi l'area del triangolo è $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8}$ e $\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{2}$ ✓: il segmento parabolico è proprio i $\frac{4}{3}$ del triangolo.

8. a) $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2\,dx = \pi \int_0^1 e^{2x}\,dx = \pi\,[\frac{e^{2x}}{2}]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \approx 10{,}04$. Attenzione a elevare al quadrato prima di integrare: $(e^x)^2 = e^{2x}$, e l'integrale è quasi immediato. b) Su [0; 1] si ha $1 \le e^x \le e$, perché e^x è crescente: ogni sezione è un cerchio di raggio compreso tra 1 ed e. Il solido contiene il cilindro di raggio 1 e altezza 1, di volume $\pi \approx 3{,}14$, ed è contenuto nel cilindro di raggio e e altezza 1, di volume $\pi e^2 \approx 23{,}21$; infatti $3{,}14 < 10{,}04 < 23{,}21$ ✓.

9. a) Da 0 a 2 s la velocità cresce in modo uniforme da 0 a 4 m/s; da 2 a 6 s il robot va a velocità costante; da 6 a 8 s rallenta in modo uniforme fino a fermarsi; da 8 a 10 s torna indietro sempre più veloce, fino a 2 m/s; da 10 a 12 s rallenta e si ferma. Nei primi 2 s l'accelerazione è la pendenza del grafico: $a = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$ m/s^2. b) Il robot si allontana finché $v \ge 0$, cioè per $0 \le t \le 8$: lo spazio è l'area del trapezio di basi 8 e 4 (da 2 a 6 s) e altezza 4, $\frac{(8 + 4) \cdot 4}{2} = 24$ m. Torna indietro per $8 \le t \le 12$: l'integrale di v su questo intervallo è l'area con segno del triangolo sotto l'asse t, di base 4 e altezza 2, cioè −4 m: percorre 4 m all'indietro. c) La distanza dal punto di partenza all'istante t è l'area con segno sotto il grafico tra 0 e t: cresce finché $v > 0$ e decresce dopo. Il massimo è all'istante $t = 8$ s, a 24 m dal punto di partenza. d) $\int_0^{12} v\,dt = 24 - 4 = 20$ m: il robot si trova 20 m oltre il punto di partenza. La strada percorsa è invece 24 + 4 = 28 m. e) Il valore medio è $\frac{1}{12} \int_0^{12} v\,dt = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ m/s: è la velocità media della cinematica, lo spostamento diviso il tempo. Non è lo spazio percorso diviso il tempo, che vale $\frac{28}{12} \approx 2{,}33$ m/s: nella media di v i 4 m all'indietro contano con il segno meno.

10. a) Ogni sezione perpendicolare all'asse x è un cerchio di raggio $\frac{r}{h}x$: $V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\,[\frac{x^3}{3}]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. c.v.d. b) Il liquido occupa la parte del cono con $0 \le x \le a$: $V(a) = \pi \int_0^a \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi r^2 a^3}{3h^2}$. È ancora un cono, di altezza a e raggio $\frac{r}{h}a$, e infatti $\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{h}a)^2 a$ dà lo stesso risultato. c) $\frac{V(h/2)}{V(h)} = \frac{(h/2)^3}{h^3} = \frac{1}{8}$: pieno a metà altezza, il bicchiere contiene solo un ottavo della sua capacità. Il volume cresce come il cubo dell'altezza, perché il raggio della superficie del liquido cresce insieme all'altezza. d) Si vuole $\frac{a^3}{h^3} = \frac{1}{2}$, cioè $a = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}79\,h$: per riempire metà del bicchiere il liquido deve arrivare a circa quattro quinti dell'altezza.