Verifica di fine parte III · Il calcolo differenziale

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). **Non è ammessa la calcolatrice**: tutti i calcoli si possono fare a mano. Gli angoli sono misurati in radianti. Scrivi tutti i passaggi; quando usi un teorema, controlla e dichiara le sue ipotesi; in uno studio di funzione e in un problema di ottimizzazione giustifica ogni massimo e minimo con il segno della derivata: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

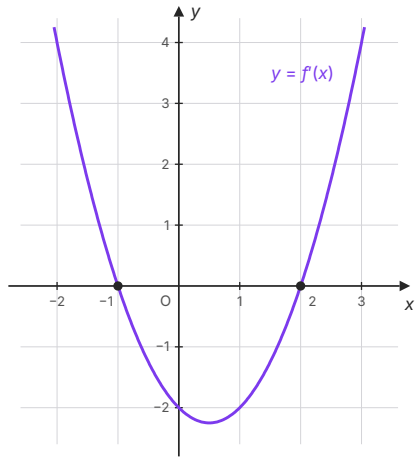

Figura V3.1 Il grafico della derivata f' di una funzione f derivabile in $\mathbb{R}$: è la parabola $y = x^2 - x - 2$, che taglia l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 (stessa scala sui due assi).

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La retta tangente al grafico di una funzione f nel punto di ascissa 2 ha equazione $y = 3x - 1$. Allora:
   - **A.** $f(2) = 3$ e $f'(2) = 5$
   - **B.** $f(2) = -1$ e $f'(2) = 3$
   - **C.** $f(2) = 5$ e $f'(2) = 3$
   - **D.** $f(2) = 5$ e $f'(2) = -1$

2. ● *(0,5 punti · cap. 6)* La derivata di $y = \cos(x^2)$ è:

   A. $y' = -\text{sen}(x^2)$

   B. $y' = -2x\ \text{sen}(x^2)$

   C. $y' = 2x\ \text{sen}(x^2)$

   D. $y' = -\text{sen}(2x)$

3. ● *(0,5 punti · cap. 7)* La Figura V3.1 mostra il grafico della *derivata* f' di una funzione f derivabile in $\mathbb{R}$. Quale affermazione su f è vera?

   A. f è decrescente nell'intervallo $]-\infty; -1[$

   B. f ha un minimo relativo in $x = \frac{1}{2}$

   C. $f(x) < 0$ per $-1 < x < 2$

   D. f ha un massimo relativo in $x = -1$ e un minimo relativo in $x = 2$

4. ● *(0,5 punti · cap. 8)* Due numeri positivi hanno prodotto 36. Il valore minimo della loro somma è:

   A. 12

   B. 13

   C. 20

   D. 37

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 5)* È data la funzione $f(x) = 2x^2 + x$. a) Calcola con la definizione, cioè come limite del rapporto incrementale, la derivata $f'(-1)$. b) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa -1. c) Controlla il risultato di a) con le regole di derivazione e trova il punto del grafico in cui la tangente è orizzontale.

6. ●● *(1 punto · cap. 6)* Calcola la derivata delle funzioni, indicando ogni volta la regola che usi: a) $y = (x^2 - 1)\ \text{sen}\ x$; b) $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$ (scomponi il numeratore della derivata); c) $y = e^{x^2 - 2x}$; d) $y = \ln(x^2 + 4)$.

7. ●● *(1,5 punti · cap. 7)* Studia la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$ e tracciane il grafico. a) Condizioni di esistenza, intersezioni con gli assi, segno. b) Limiti agli estremi del dominio e asintoti (verticale e obliquo). c) Derivata prima, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi. d) Derivata seconda e concavità; ci sono flessi? e) Il valore del massimo relativo è minore del valore del minimo relativo: spiega perché non c'è contraddizione.

Dimostrare

8. ●● *(1 punto · cap. 6)* a) Enuncia il teorema di Lagrange (ipotesi e tesi). b) Verifica che $f(x) = x^3 - 3x$ soddisfa le ipotesi del teorema nell'intervallo $[0; 3]$ e trova i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza. c) Per $g(x) = |x - 1|$ nell'intervallo $[0; 3]$ la corda che unisce gli estremi del grafico ha pendenza $\frac{1}{3}$, ma nessuna tangente al grafico ha questa pendenza. Spiega perché e perché questo non contraddice il teorema.

Problemi

9. ●● *(1 punto · cap. 6)* Un punto si muove lungo una retta secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$, con s in metri e t in secondi, per $0 \le t \le 6$ (dati inventati). a) Trova la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$. b) In quali istanti il punto è fermo, e in quali posizioni si trova? c) In quali intervalli di tempo avanza e in quali torna indietro? d) Dove si trova all'istante 6 s, e quale spazio ha percorso in tutto? e) In quale istante l'accelerazione è nulla? Quanto vale in quell'istante la velocità?

10. ●● *(1 punto · cap. 8)* Una scatola a forma di parallelepipedo, a base quadrata e senza coperchio, deve avere il volume di 32 dm^3. Detto x il lato di base in decimetri, scrivi l'area $S(x)$ della superficie della scatola (base più quattro facce laterali) e trova le dimensioni che richiedono la minima quantità di materiale. Giustifica che si tratta del minimo assoluto.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 8)* Un generatore con forza elettromotrice $f_{\text{em}} = 10$ V e resistenza interna $r = 4\ \Omega$ alimenta un utilizzatore di resistenza R. La corrente è $I = \frac{f_{\text{em}}}{R + r}$ e la potenza trasferita all'utilizzatore è $P = R\,I^2$. a) Scrivi $P(R)$ per $R > 0$ e trova, con la derivata, la resistenza che riceve la potenza massima e il valore di questa potenza. b) Per quali valori di R la potenza è 4 W? c) Dimostra che, per qualunque f_{em} e r, le resistenze R e $\frac{r^2}{R}$ ricevono la stessa potenza, e ritrova così il risultato di b). d) Il *rendimento* $\eta = \frac{R}{R + r}$ è la frazione della potenza prodotta dal generatore che arriva all'utilizzatore. Calcolalo per $R = 1\ \Omega$, $R = 4\ \Omega$ e $R = 16\ \Omega$ e spiega perché un apparecchio a batteria non viene progettato per ricevere la potenza massima.

Soluzioni

1. C. La tangente nel punto di ascissa 2 passa per il punto del grafico $(2; f(2))$ e ha pendenza $f'(2)$. Per $x = 2$ la retta dà $y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, quindi $f(2) = 5$; la pendenza è il coefficiente di x, quindi $f'(2) = 3$. La B scambia l'ordinata del punto con il termine noto della retta; A e D confondono i due numeri.

2. B. Per la regola della catena, con funzione esterna cos u e interna $u = x^2$: $y' = -\text{sen}(x^2) \cdot 2x = -2x\,\text{sen}(x^2)$. La A dimentica il fattore $(x^2)' = 2x$, la C sbaglia il segno della derivata del coseno, la D deriva il coseno di $2x$, che è un'altra funzione.

3. D. Dal grafico, $f'(x) > 0$ per $x < -1$ e per $x > 2$, $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 2$: f cresce in $]-\infty; -1]$, decresce in $[-1; 2]$ e cresce in $[2; +\infty[$. In $x = -1$ la derivata passa da positiva a negativa (massimo relativo), in $x = 2$ da negativa a positiva (minimo relativo). La A è falsa: in $]-\infty; -1[$ si ha $f' > 0$ e f cresce. La B è falsa: in $x = \frac{1}{2}$ ha il minimo la derivata, non la funzione; lì f' passa da decrescente a crescente, quindi f'' cambia segno e f ha un flesso. La C confonde il segno di f' con quello di f: il grafico di f' non dice dove f è negativa.

4. A. Se un numero è $x > 0$, l'altro è $\frac{36}{x}$ e la somma è $s(x) = x + \frac{36}{x}$. $s'(x) = 1 - \frac{36}{x^2}$ è negativa per $0 < x < 6$ e positiva per $x > 6$: il minimo assoluto è $s(6) = 6 + 6 = 12$. Le altre risposte sono somme di altre coppie con prodotto 36 (4 + 9, 2 + 18, 1 + 36).

5. a) $f(-1) = 2 - 1 = 1$ e $f(-1 + h) = 2(1 - 2h + h^2) + (-1 + h) = 1 - 3h + 2h^2$. Il rapporto incrementale è $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{-3h + 2h^2}{h} = -3 + 2h$ (per $h \neq 0$), che per $h \to 0$ tende a -3: $f'(-1) = -3$. b) Il punto è $(-1; 1)$: $y - 1 = -3(x + 1)$, cioè $y = -3x - 2$. c) Con le regole, $f'(x) = 4x + 1$ e $f'(-1) = -4 + 1 = -3$ ✓. La tangente è orizzontale dove $f'(x) = 0$, cioè per $x = -\frac{1}{4}$: il punto è $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{8})$, perché $f(-\frac{1}{4}) = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$ (è il vertice della parabola).

6. a) Regola del prodotto: $y' = 2x\,\text{sen}\,x + (x^2 - 1)\cos x$. b) Regola del quoziente: $y' = \frac{2(x^2+2) - (2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$. c) Regola della catena, con esterna e^u e interna $u = x^2 - 2x$: $y' = (2x - 2)\,e^{x^2-2x} = 2(x-1)\,e^{x^2-2x}$. d) Regola della catena, con esterna $\ln u$: $y' = \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+4}$ (qui $x^2 + 4 > 0$ per ogni x, quindi il dominio è $\mathbb{R}$).

7. a) C.E.: $x \neq 2$. Zeri: $x^2 - 3 = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ (circa ±1,73); intersezione con l'asse y: $(0; \frac{3}{2})$. Segno: il numeratore è positivo per $|x| > \sqrt{3}$, il denominatore per $x > 2$; quindi $f(x) \geq 0$ per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e per $x > 2$, $f(x) < 0$ per $x < -\sqrt{3}$ e per $\sqrt{3} < x < 2$. Non ci sono simmetrie. b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ (il numeratore tende a 1, il denominatore a 0 con il segno del lato): $x = 2$ è asintoto verticale. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (grado 2 contro 1), quindi non ci sono asintoti orizzontali. Dividendo, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$, e l'ultimo termine tende a 0 per $x \to \pm\infty$: $m = 1$, $q = 2$, l'asintoto obliquo è $y = x + 2$. c) $f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ (anche: $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$). Il denominatore è positivo nel dominio: $f' > 0$ per $x < 1$ e per $x > 3$, $f' < 0$ per $1 < x < 2$ e per $2 < x < 3$. f cresce in $]-\infty; 1]$, decresce in $[1; 2[$ e in $]2; 3]$, cresce in $[3; +\infty[$: massimo relativo $M(1; 2)$, minimo relativo $m(3; 6)$. d) $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$: negativa per $x < 2$ (concavità verso il basso), positiva per $x > 2$ (concavità verso l'alto). Non ci sono flessi: la

concavità cambia solo in $x = 2$, che non appartiene al dominio. Il grafico ha due rami: quello di sinistra sale fino a $M(1; 2)$ e scende verso $-\infty$ vicino a $x = 2$, stando sotto l'asintoto obliquo; quello di destra scende da $+\infty$ fino a $m(3; 6)$ e poi risale avvicinandosi dall'alto alla retta $y = x + 2$ (la differenza $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 2}$ è negativa a sinistra di 2 e positiva a destra). e) Massimi e minimi relativi sono confronti *locali*: $f(1) = 2$ è il valore più grande in un intorno di 1, $f(3) = 6$ il più piccolo in un intorno di 3. I due punti stanno su rami diversi, separati dall'asintoto verticale, e nessun teorema confronta i loro valori. La funzione non ha né massimo né minimo assoluto, perché assume valori arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli.

8. a) **Teorema di Lagrange.** Ipotesi: f è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$. Tesi: esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; cioè in almeno un punto la tangente è parallela alla corda che unisce gli estremi del grafico. b) f è un polinomio, quindi continua e derivabile in $\mathbb{R}$, e in particolare in $[0; 3]$ e in $]0; 3[$. $f(0) = 0$, $f(3) = 27 - 9 = 18$: la corda ha pendenza $\frac{18 - 0}{3 - 0} = 6$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 6$ dà $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$; solo $c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ appartiene a $]0; 3[$, e il teorema è verificato con un solo punto. c) $g(0) = 1$ e $g(3) = 2$, quindi la corda ha pendenza $\frac{1}{3}$. Ma $g(x) = 1 - x$ per $x < 1$ e $g(x) = x - 1$ per $x > 1$: le tangenti hanno pendenza -1 oppure $+1$, mai $\frac{1}{3}$. Non c'è contraddizione, perché g è continua in $[0; 3]$ ma non è derivabile in $x = 1 \in]0; 3[$ (punto angoloso, con derivata sinistra -1 e destra $+1$): manca un'ipotesi, e un teorema non dice nulla quando le sue ipotesi non sono soddisfatte.

9. a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t - 1)(t - 5)$ m/s; $a(t) = v'(t) = 6t - 18$ m/s^2. b) $v(t) = 0$ per $t = 1$ s e $t = 5$ s; le posizioni sono $s(1) = 1 - 9 + 15 = 7$ m e $s(5) = 125 - 225 + 75 = -25$ m. c) $v > 0$ per $0 \le t < 1$ e per $5 < t \le 6$: in questi intervalli il punto avanza (verso le s crescenti); $v < 0$ per $1 < t < 5$: torna indietro. d) $s(6) = 216 - 324 + 90 = -18$ m. Spazio percorso: da 0 a 7 m (7 m), da 7 a -25 m (32 m), da -25 a -18 m (7 m), in tutto $7 + 32 + 7 = 46$ m, mentre lo spostamento complessivo è solo -18 m. e) $a(t) = 0$ per $t = 3$ s, dove $v(3) = 27 - 54 + 15 = -12$ m/s: è l'istante in cui il punto torna indietro più velocemente (la velocità, che è una parabola in t, ha lì il suo minimo).

10. L'altezza h si ricava dal vincolo $x^2 h = 32$: $h = \frac{32}{x^2}$. La superficie è la base più quattro rettangoli $x \times h$: $S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$, con dominio $x > 0$. $S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$, che si annulla per $x^3 = 64$, cioè $x = 4$; è negativa per $0 < x < 4$ e positiva per $x > 4$, quindi S decresce e poi cresce: in $x = 4$ c'è il minimo assoluto (inoltre $S \to +\infty$ sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to +\infty$). Dimensioni: lato di base 4 dm, altezza $h = \frac{32}{16} = 2$ dm, cioè metà del lato; superficie minima $S(4) = 16 + 32 = 48$ dm^2. Controllo: $S(3) = 9 + \frac{128}{3} \approx 51{,}7$ dm^2 e $S(5) = 25 + 25{,}6 = 50{,}6$ dm^2, entrambi maggiori.

11. a) $P(R) = R \cdot \left(\frac{f_{em}}{R + r}\right)^2 = \frac{100\,R}{(R + 4)^2}$, per $R > 0$. Con la regola del quoziente $P'(R) = 100 \cdot \frac{(R + 4)^2 - 2R(R + 4)}{(R + 4)^4} = \frac{100(4 - R)}{(R + 4)^3}$: positiva per $R < 4$, negativa per $R > 4$. La potenza è massima per $R = 4\ \Omega$ (uguale alla resistenza interna) e vale $P(4) = \frac{400}{64} = \frac{25}{4} = 6{,}25$ W. b) $\frac{100R}{(R + 4)^2} = 4$ dà $25R = (R + 4)^2$, cioè $R^2 - 17R + 16 = 0$, con soluzioni $R = 1\ \Omega$ e $R = 16\ \Omega$. Controllo: $P(1) = \frac{100}{25} = 4$ W e $P(16) = \frac{1600}{400} = 4$ W ✓. c) $P\left(\frac{r^2}{R}\right) = \frac{f_{em}^2 \cdot \frac{r^2}{R}}{\left(\frac{r^2}{R} + r\right)^2} = \frac{f_{em}^2 \cdot \frac{r^2}{R}}{\frac{r^2 (r + R)^2}{R^2}} = \frac{f_{em}^2 R}{(R + r)^2} = P(R)$. In b) le due resistenze trovate sono legate proprio così: $1 \cdot 16 = 16 = r^2$. Ogni valore di potenza minore del massimo si ottiene con due resistenze di prodotto r^2, una minore e una maggiore di r; il massimo cor-

risponde al caso in cui le due coincidono, $R = \frac{r^2}{R}$, cioè $R = r$. d) $\eta(1) = \frac{1}{5} = 20\,\%$, $\eta(4) = \frac{1}{2} = 50\,\%$, $\eta(16) = \frac{16}{20} = 80\,\%$. Alla potenza massima metà della potenza prodotta si disperde in calore nella resistenza interna del generatore. Con $R = 16\ \Omega$ l'utilizzatore riceve la stessa potenza che con $R = 1\ \Omega$, ma con una corrente quattro volte minore (0,5 A invece di 2 A) e con un rendimento quattro volte maggiore: la batteria si scarica più lentamente e si scalda meno. Per questo un apparecchio a batteria si progetta con R molto maggiore di r, rinunciando alla potenza massima; l'adattamento $R = r$ serve quando conta trasferire più potenza possibile, non risparmiare energia.