Matematica 5 · Parte II · Successioni, limiti e continuità · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte II · pagine 125–128 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte II · Successioni, limiti e continuità

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). **Non è ammessa la calcolatrice**: tutti i calcoli si possono fare a mano. Gli angoli sono misurati in radianti. Scrivi tutti i passaggi, indica la forma di ogni limite prima di calcolarlo e, quando usi un teorema, controlla e dichiara le sue ipotesi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 2)* Quale delle seguenti serie converge?
   - **A.** $1 + \frac{5}{4} + (\frac{5}{4})^2 + (\frac{5}{4})^3 + \dots$
   - **B.** $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
   - **C.** $1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3 + \dots$
   - **D.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

2. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Con x in radianti, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$ vale:
   - **A.** 1
   - **B.** $\frac{3}{2}$
   - **C.** $\frac{2}{3}$
   - **D.** 0

3. ● *(0,5 punti · cap. 3)* $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2}$ vale:
   - **A.** $-\infty$
   - **B.** $+\infty$
   - **C.** 0
   - **D.** non si può calcolare, perché $\frac{3}{0}$ è una forma indeterminata

4. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Quale affermazione è vera?
   - **A.** una funzione può avere tre asintoti orizzontali
   - **B.** se f è continua nell'intervallo aperto $]a; b[$, ha in esso un massimo e un minimo
   - **C.** se $f(a) \cdot f(b) > 0$, la funzione non si annulla in $[a; b]$
   - **D.** il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto orizzontale

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 2)* a) Calcola $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-5n}{3n^2+1}$ e $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}}$. b) Scrivi il numero periodico $0{,}\overline{36}$ come serie geometrica, indicando il primo termine e la ragione, e ricava da essa la frazione generatrice.

6. ●● *(1 punto · cap. 3)* Calcola i limiti, indicando ogni volta la forma di partenza: a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-x+2}{1-2x^3}$; b) $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; c) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(3x)}{1-\cos x}$ (x in radianti; usa due limiti notevoli).

7. ●● *(1 punto · cap. 4)* È data la funzione $f(x)=kx-1$ per $x\le 2$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ per $x>2$, dove k è un numero reale. a) Spiega perché f è continua in ogni punto $x\neq 2$. b) Determina k in modo che f sia continua in $\mathbb{R}$. c) Per $k=0$ la funzione non è continua in 2: classifica la discontinuità e calcola il salto.

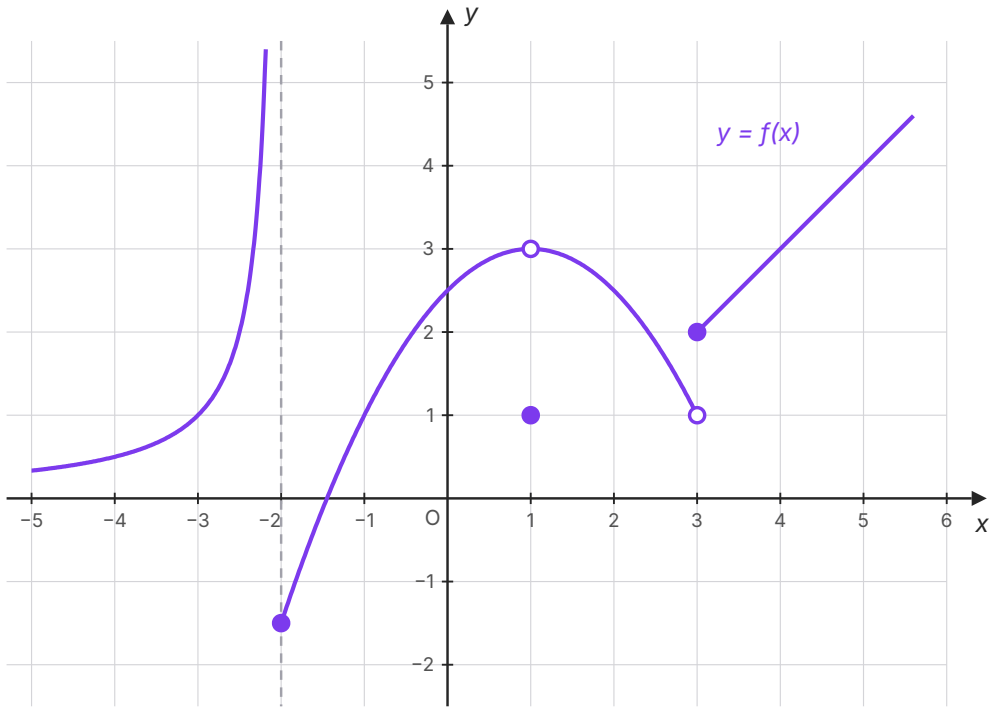

Figura V2.1 Il grafico di una funzione $y=f(x)$ definita in tutto $\mathbb{R}$ (stessa scala sui due assi). La retta $x=-2$, tratteggiata, è un asintoto verticale; per $-2\le x<3$ il grafico è un arco di parabola con vertice (1; 3), escluso il vertice, e in $x=1$ la funzione vale 1. Pallini pieni: punti del grafico; pallini vuoti: punti esclusi.

8. ●● *(1 punto · cap. 4)* Osserva il grafico della funzione f nella Figura V2.1. a) Per ciascuno dei punti $x = -2$, $x = 1$ e $x = 3$ leggi il valore della funzione e i limiti sinistro e destro. b) Classifica ciascuna discontinuità; per quella eliminabile indica come ridefinire f nel punto, per quella di prima specie calcola il salto. c) La funzione ha massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[-1; 0]$? E nell'intervallo $[1; 2]$? Rispondi leggendo il grafico e spiega il risultato con il teorema di Weierstrass.

9. ●● *(1 punto · cap. 4)* Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$. a) Trova il dominio e l'asintoto verticale, calcolando il limite destro e il limite sinistro. b) Spiega perché il grafico non ha asintoti orizzontali e trova l'asintoto obliquo calcolando m e q con i limiti. c) Controlla il risultato con la divisione fra polinomi e stabilisci per quali x il grafico sta sopra l'asintoto obliquo.

Dimostrare

10. ●● *(1 punto · cap. 4)* Considera l'equazione $x^3 + 2x - 4 = 0$. a) Dimostra con il teorema degli zeri che ha una soluzione nell'intervallo $]1; 2[$, verificando tutte le ipotesi. b) Dimostra che la soluzione è unica in $\mathbb{R}$. c) Con due passi del metodo di bisezione trova un intervallo di ampiezza $\dfrac{1}{4}$ che contiene la soluzione.

Problemi

11. ●● *(1 punto · cap. 2)* Una sfera appesa a un filo viene lasciata oscillare. Nella prima oscillazione percorre un arco lungo 64 cm, e in ogni oscillazione successiva un arco lungo $\dfrac{3}{4}$ di quello precedente (modello ideale, dati inventati). a) Scrivi la lunghezza a_n dell'arco percorso nella n-esima oscillazione e calcola a_5. b) Calcola la distanza percorsa nelle prime quattro oscillazioni. c) Se le oscillazioni continuassero all'infinito, quale sarebbe la distanza totale percorsa? Quanta ne resta da percorrere dopo le prime quattro oscillazioni? d) Spiega perché una somma di infiniti archi, tutti di lunghezza positiva, può dare una lunghezza finita, e quale paradosso antico si risolve con lo stesso calcolo.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 3–4)* Traccia il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. a) Trova il dominio e le eventuali simmetrie. b) Trova le intersezioni con gli assi e studia il segno. c) Calcola i limiti agli estremi del dominio e trova tutti gli asintoti. d) Stabilisci in quali punti il grafico interseca l'asintoto obliquo e in quali intervalli sta sopra di esso. e) Disegna il grafico probabile e indica un'informazione sul grafico che questo procedimento non ti dà.

Soluzioni

1. C. È la serie geometrica di ragione $q = -\frac{2}{3}$, con $|q| < 1$: converge e ha somma $\frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$. La A ha ragione $\frac{5}{4} > 1$ e diverge a $+\infty$; la B ha ragione -1 ed è irregolare (le somme parziali valgono 1, 0, 1, 0, ...); la D è la serie armonica, che diverge anche se i suoi termini tendono a 0.

2. B. $\frac{\text{sen}(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{sen}(3x)}{3x}$ e, con $t = 3x$, $\frac{\text{sen } t}{t} \to 1$: il limite è $\frac{3}{2}$. Controllo: per $x = 0{,}001$ la funzione vale circa 1,4999978. La A dimentica i coefficienti, la C li inverte.

3. A. Il numeratore tende a 3, il denominatore tende a 0 restando negativo (per $x < 2$ si ha $x - 2 < 0$): il quoziente tende a $-\infty$. La forma $\frac{l}{0}$ con $l \neq 0$ non è indeterminata (D): dà $\pm\infty$, con il segno deciso dal lato. Da destra il limite è $+\infty$ (B).

4. D. Per esempio $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ha asintoto $y = 0$ e vale 0 in $x = 0$. A è falsa: gli asintoti orizzontali sono al più due, uno per $x \to +\infty$ e uno per $x \to -\infty$. B è falsa: il teorema di Weierstrass richiede un intervallo chiuso e limitato ($y = x$ su $]0; 1[$ non ha né massimo né minimo). C è falsa: $x^2 - 1$ è positiva in -2 e in 2 ma si annulla in ± 1.

5. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$ con gradi uguali: raccogliendo n^2 si ha $\frac{2 - \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{3}$. Il secondo: $\frac{3^n - 2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ e $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ perché $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$: il limite è $\frac{1}{3}$. b) $0{,}\overline{36} = \frac{36}{100} + \frac{36}{10\,000} + \frac{36}{1\,000\,000} + \ldots$, serie geometrica di primo termine $\frac{36}{100}$ e ragione $\frac{1}{100}$, che converge perché $|q| < 1$. La somma è $\frac{36/100}{1 - 1/100} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$. Controllo: $4 : 11 = 0{,}3636\ldots$

6. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$, gradi uguali (3 e 3): il limite è il rapporto dei coefficienti direttivi, $\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. b) Forma $\frac{0}{0}$. Si scompone: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ e $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; per $x \neq 2$ la funzione vale $\frac{x - 3}{x + 2}$, che tende a $-\frac{1}{4}$. c) Forma $\frac{0}{0}$. Si divide numeratore e denominatore per x^2: $\frac{\text{sen}^2(3x)}{1 - \cos x} = 9\left(\frac{\text{sen}(3x)}{3x}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x}$. Il primo fattore tende a $9 \cdot 1 = 9$, il secondo a $\frac{1}{1/2} = 2$ (reciproco del limite notevole $\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$): il limite è 18. Controllo numerico: per $x = 0{,}001$ la funzione vale circa 17,99999.

7. a) Per $x < 2$ la funzione coincide con un polinomio; per $x > 2$ con una funzione razionale il cui denominatore non si annulla: in entrambi i casi è continua. Resta solo il punto di raccordo $x = 2$. b) $f(2) = 2k - 1$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2k - 1$. Da destra la forma è $\frac{0}{0}$: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, quindi per $x > 2$ si ha $f(x) = x + 1$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$. La funzione è continua in 2 se e solo se $2k - 1 = 3$, cioè $k = 2$. c) Con $k = 0$: $f(2) = -1$, limite sinistro -1, limite destro 3. I limiti unilaterali sono finiti e diversi: discontinuità di prima specie, con salto $|3 - (-1)| = 4$. (La funzione è continua da sinistra.)

8. a) In $x = -2$: $f(-2) = -\frac{3}{2}$ (pallino pieno), limite sinistro $+\infty$, limite destro $-\frac{3}{2}$. In $x = 1$: $f(1) = 1$, limite sinistro e destro uguali a 3. In $x = 3$: $f(3) = 2$, limite sinistro 1, limite destro 2. b) $x = -2$: seconda specie

(un limite unilaterale è infinito); la funzione è continua da destra. $x = 1$: terza specie, eliminabile: il limite esiste finito (3) ma è diverso da $f(1) = 1$; si elimina ponendo $f(1) = 3$. $x = 3$: prima specie, salto $|2 - 1| = 1$. c) In $[-1; 0]$ la funzione è continua (è un arco di parabola), quindi per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo: il massimo è $f(0) = \frac{5}{2}$, il minimo $f(-1) = 1$. In $[1; 2]$ il minimo è $f(1) = 1$, ma il massimo non c'è: per $x > 1$ i valori si avvicinano a 3 quanto si vuole senza mai raggiungerlo, e in $x = 1$ la funzione vale 1. Il teorema non si applica perché f non è continua in $x = 1$, che appartiene all'intervallo.

9. a) Dominio: $x \neq 2$. In $x = 2$ il numeratore vale $4 - 6 = -2$ e il denominatore tende a 0: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ (denominatore positivo) e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; la retta $x = 2$ è asintoto verticale. b) Il grado del numeratore supera di uno quello del denominatore: per $x \to \pm\infty$ la funzione tende a $\pm\infty$ (come x), quindi non c'è asintoto orizzontale. $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = 1$; $q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x - 2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x - 2} = -1$. L'asintoto obliquo è $y = x - 1$, lo stesso dai due lati. c) La divisione dà quoziente $x - 1$ e resto -2: $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x - 2}$, e l'ultimo termine tende a 0. La differenza $f(x) - (x - 1) = -\frac{2}{x - 2}$ è positiva per $x < 2$: il grafico sta sopra l'asintoto per $x < 2$ e sotto per $x > 2$.

10. a) $f(x) = x^3 + 2x - 4$ è un polinomio, quindi è continua nell'intervallo chiuso $[1; 2]$; inoltre $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 8 > 0$, cioè $f(1) \cdot f(2) < 0$. Per il teorema degli zeri esiste $c \in]1; 2[$ con $f(c) = 0$. b) x^3 e $2x$ sono strettamente crescenti in $\mathbb{R}$, quindi lo è anche la loro somma, e sottrarre 4 non cambia la monotonia. Una funzione strettamente crescente assume ogni valore al più una volta: lo zero è unico. c) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} + 3 - 4 = \frac{19}{8} > 0$: la soluzione sta in $\left]1; \frac{3}{2}\right[$. $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{64} + \frac{5}{2} - 4 = \frac{29}{64} > 0$: la soluzione sta in $\left]1; \frac{5}{4}\right[$, ampio $\frac{1}{4}$. (La soluzione è circa 1,18.)

11. a) Gli archi formano una progressione geometrica con $a_1 = 64$ e $q = \frac{3}{4}$: $a_n = 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ cm. Quindi $a_5 = 64 \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{4} = 20{,}25$ cm. b) $S_4 = 64 \cdot \frac{1 - (3/4)^4}{1 - 3/4} = 256 \cdot \frac{175}{256} = 175$ cm. Controllo: $64 + 48 + 36 + 27 = 175$. c) È la serie geometrica di primo termine 64 e ragione $\frac{3}{4}$, che converge perché $|q| < 1$: la distanza totale è $\frac{64}{1 - 3/4} = 256$ cm. Ne restano $256 - 175 = 81$ cm, cioè $256 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$. d) Le somme parziali crescono ma restano sempre minori di 256 e si avvicinano a 256 quanto si vuole: la somma della serie è il limite delle somme parziali, non il risultato di infinite addizioni eseguite una per una. Gli archi diventano così piccoli che il loro contributo complessivo resta finito. È lo stesso calcolo che risponde, sul piano matematico, al paradosso di Achille e la tartaruga di Zenone: infinite tappe di durata via via più breve richiedono un tempo totale finito.

12. a) Dominio: $x \neq \pm 2$. $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$: la funzione è dispari, il grafico è simmetrico rispetto all'origine. b) Il grafico passa solo per $O(0; 0)$ ($f(x) = 0$ solo per $x = 0$). Il numeratore ha il segno di x, il denominatore è positivo per $|x| > 2$: $f(x) > 0$ per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$; $f(x) < 0$ per $x < -2$ e per $0 < x < 2$. c) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ (numeratore che tende a 8, denominatore che tende a 0 con il segno del lato); per simmetria $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$. Le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali. Per $x \to \pm\infty$ la funzione tende a $\pm\infty$ (grado 3 contro 2): niente asintoti orizzontali; $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1$ e $q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0$: l'asintoto obliquo è $y = x$. d) $f(x) - x = \frac{4x}{x^2 - 4}$ si annulla solo in $x = 0$: il grafico attraversa l'asintoto obliquo nell'origine. La differenza è positiva per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$ (grafico sopra la retta $y = x$), negativa per $x < -2$ e per $0 < x < 2$ (sotto). e) Per $x > 2$ la curva scende da $+\infty$ (vicino a $x = 2$) e poi risale avvicinandosi dall'alto

alla retta $y = x$; in $]-2; 2[$ scende da $+\infty$ (vicino a $x = -2$), passa per l'origine attraversando la retta $y = x$ e scende verso $-\infty$ vicino a $x = 2$; per $x < -2$ il ramo è il simmetrico di quello per $x > 2$ rispetto all'origine. Il grafico probabile non dice dove sono esattamente i punti di minimo e di massimo dei due rami esterni (che pure esistono, perché in $]2; +\infty[$ la funzione tende a $+\infty$ ai due estremi), né come curva il grafico: per saperlo serviranno le derivate.