Matematica 5 · Parte I · Lo spazio in coordinate · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte I · pagine 45–48 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte I · Lo spazio in coordinate

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi e controlla i risultati sostituendo le coordinate dei punti nelle equazioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* Il piano $3y - 2z + 6 = 0$:
   - **A.** è parallelo all'asse x
   - **B.** passa per l'origine
   - **C.** è parallelo al piano yz
   - **D.** ha vettore normale $(3; -2; 6)$

2. ● *(0,5 punti · cap. 1)* La distanza tra i punti $A(1; -2; 4)$ e $B(3; 1; -2)$ è:
   - **A.** $\sqrt{13}$
   - **B.** 7
   - **C.** 49
   - **D.** $\sqrt{17}$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 1)* I piani $x - 2y + 2z - 3 = 0$ e $-2x + 4y - 4z + 6 = 0$ sono:
   - **A.** paralleli e distinti
   - **B.** perpendicolari
   - **C.** coincidenti
   - **D.** incidenti ma non perpendicolari

4. ●● *(0,5 punti · cap. 1)* L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 1 = 0$ rappresenta la sfera di:
   - **A.** centro $(3; 0; -1)$ e raggio 3
   - **B.** centro $(-3; 0; 1)$ e raggio $\sqrt{11}$
   - **C.** centro $(-6; 0; 2)$ e raggio 3
   - **D.** centro $(-3; 0; 1)$ e raggio 3

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 1)* Sono dati i punti $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 3)$, $C(1; 4; -2)$. a) Calcola le lunghezze dei lati AB e AC. b) Con il prodotto scalare calcola l'ampiezza dell'angolo BAC del triangolo, al centesimo di grado. c) Trova il punto medio M del lato BC e la lunghezza della mediana AM.

6. ●● *(1 punto · cap. 1)* Sono dati i punti $P(2; 0; 1)$, $Q(0; 1; 3)$, $R(1; 2; 0)$. a) Verifica che non sono allineati e scrivi l'equazione del piano π che passa per i tre punti, controllando il risultato. b) Scrivi l'equazione del piano parallelo a π che passa per l'origine. c) Verifica che π è perpendicolare al piano $x - 2y + z = 0$.

7. ●● *(1 punto · cap. 1)* La retta r passa per i punti $A(1; -1; 2)$ e $B(3; 1; 1)$. a) Scrivi le equazioni parametriche di r. b) Spiega perché r incontra il piano α: $x + y + 2z - 8 = 0$ e trova il punto comune. c) Stabilisci la posizione di r rispetto al piano σ: $x - y + 5 = 0$.

8. ●● *(1 punto · cap. 1)* Sono dati i piani α: $2x - y + 2z - 3 = 0$, β: $4x - 2y + 4z + 12 = 0$, γ: $x + 4y + z = 0$ e il punto $P(1; 2; 6)$. a) Stabilisci la posizione di β e di γ rispetto ad α. b) Calcola la distanza di P da α e da β. c) Calcola la distanza tra i piani α e β e spiega perché, in questo caso, la distanza di P da β è la somma delle altre due.

9. ●● *(1 punto · cap. 1)* È data l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 11 = 0$. a) Verifica che rappresenta una sfera e trovane il centro C e il raggio. b) Verifica che il piano π: $x + 2y - 2z + 15 = 0$ taglia la sfera e trova il raggio e il centro H della circonferenza di sezione. c) Stabilisci la posizione del piano $z = 8$ rispetto alla sfera e, se è tangente, trova il punto di tangenza.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 1) Dati inventati.* Su un terreno orizzontale, il piano $z = 0$ (unità: metri, asse z verticale), è piantato un palo verticale che va dal punto $P_0(4; 3; 0)$ alla cima $T(4; 3; 5)$. In un certo istante i raggi del Sole hanno la direzione del vettore $\mathbf{v}(-1; -2; -2)$. a) Scrivi le equazioni parametriche del raggio di sole che passa per la cima T. b) Trova il punto S del terreno in cui cade l'ombra della cima e calcola la lunghezza dell'ombra P_0S. c) L'altezza del Sole sull'orizzonte è l'angolo in S del triangolo P_0TS: calcolala con il prodotto scalare dei vettori SP_0 e ST, al centesimo di grado, e controlla il risultato con la trigonometria del triangolo rettangolo.

Sfida

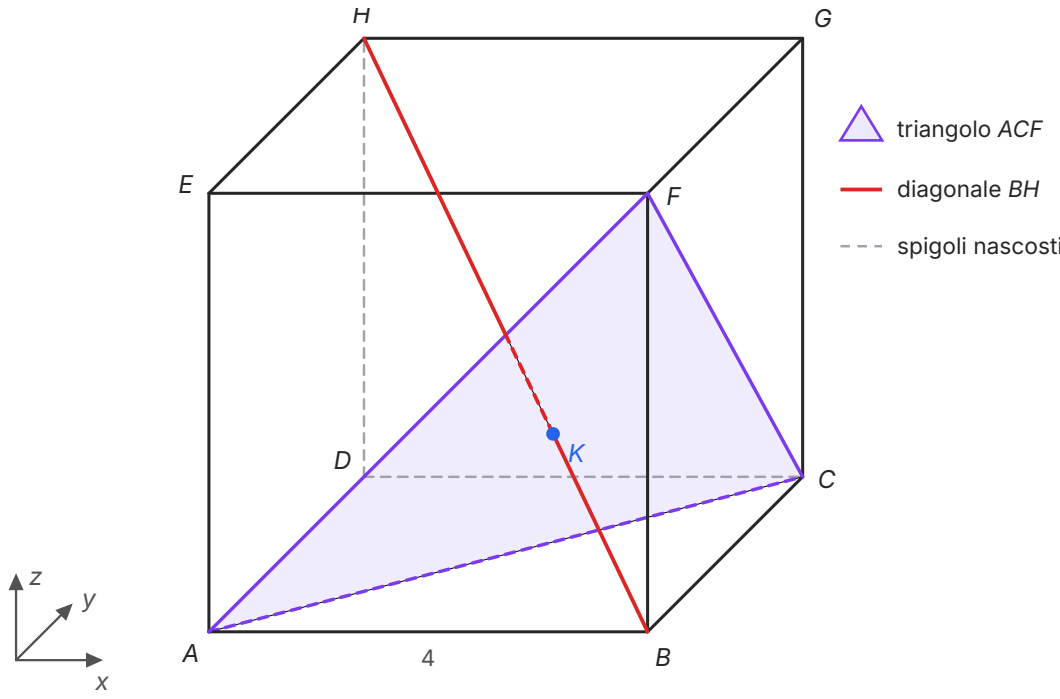

Figura V1.1 Il cubo *ABCDEFGH* di spigolo 4 in assonometria cavaliera (asse *y* a 45°, lunghezze in profondità dimezzate), con il triangolo *ACF*, la diagonale *BH* e il punto *K* in cui la diagonale incontra il piano *ACF*. Il lato *AC* sta sulla faccia di base, nascosta, ed è tratteggiato, come il tratto di *BH* che passa dietro al triangolo; a sinistra, l'orientamento degli assi del riferimento.

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 1)* Il cubo *ABCDEFGH* della Figura V1.1 ha lo spigolo lungo 4. Fissa il riferimento con l'origine in *A* e gli spigoli *AB*, *AD*, *AE* sui semiassi positivi x, y, z. a) Scrivi le coordinate di *B*, *C*, *F*, *H* e l'equazione del piano che passa per *A*, *C*, *F*. b) Dimostra che la diagonale *BH* è perpendicolare a questo piano, trova il punto *K* in cui lo incontra e verifica che *BK* è un terzo di *BH*. c) La sfera inscritta nel cubo ha il centro nel centro *M* del cubo e raggio 2: scrivine l'equazione, stabilisci se il piano *ACF* la taglia e, in caso affermativo, calcola il raggio della circonferenza di sezione.

Soluzioni

1. A. Nell'equazione manca la variabile x: il vettore normale $(0; 3; -2)$ è perpendicolare a $\mathbf{i}$, quindi il piano contiene, con ogni suo punto, la retta parallela all'asse x che passa per quel punto. Non passa per l'origine, perché il termine noto è $6 \neq 0$; non è parallelo al piano yz, che ha vettore normale $(1; 0; 0)$; il vettore normale si legge sui soli coefficienti di x, y, z ed è $(0; 3; -2)$, non $(3; -2; 6)$.

2. B. $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$, $\Delta z = -2 - 4 = -6$, quindi $AB = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$. $\sqrt{13}$ trascura Δz; $\sqrt{17}$ si ottiene calcolando Δz come $4 - 2$; 49 è il quadrato della distanza.

3. C. Il secondo vettore normale è $(-2; 4; -4) = -2(1; -2; 2)$, e anche il termine noto rispetta lo stesso rapporto: $6 = -2 \cdot (-3)$. La seconda equazione è la prima moltiplicata per -2, quindi i due piani coincidono. Rispondere «paralleli e distinti» vuol dire guardare solo i vettori normali e dimenticare il termine noto.

4. D. Completando i quadrati: $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = -1 + 9 + 1 = 9$, quindi centro $(-3; 0; 1)$ e raggio 3. Con la formula: $r^2 = \frac{36}{4} + \frac{4}{4} - 1 = 9$. La risposta B somma δ invece di sottrarlo, la C dimentica di dividere per 2 le coordinate del centro, la A sbaglia i segni.

5. a) $\overline{AB} = (2; 2; 1)$, $AB = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$; $AC = (0; 4; -4)$, $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$. b) $AB \cdot AC = 0 + 8 - 4 = 4$, quindi $\cos BAC = \frac{4}{3 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}2357$ e $BAC \approx 76{,}37°$: l'angolo è acuto, come annunciava il prodotto scalare positivo. c) $M(\frac{3+1}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{3-2}{2}) = M(2; 3; \frac{1}{2})$. Allora $\overline{AM} = (1; 3; -\frac{3}{2})$ e $AM = \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

6. a) $PQ = (-2; 1; 2)$ e $PR = (-1; 2; -1)$ non hanno le componenti proporzionali (le prime due stanno nel rapporto 2, le seconde nel rapporto $\frac{1}{2}$), quindi i punti non sono allineati. Sostituendo in $ax + by + cz + d = 0$: $2a + c + d = 0$, $b + 3c + d = 0$, $a + 2b + d = 0$. Dalla prima $c = -2a - d$; nella seconda $b = 6a + 2d$; nella terza $13a + 5d = 0$, cioè $a = -\frac{5}{13}d$, e poi $b = -\frac{4}{13}d$, $c = -\frac{3}{13}d$. Con $d = -13$: π: $5x + 4y + 3z - 13 = 0$. Controllo: $10 + 3 - 13 = 0$, $4 + 9 - 13 = 0$, $5 + 8 - 13 = 0$. b) Stesso vettore normale e termine noto nullo: $5x + 4y + 3z = 0$ (è distinto da π, perché $-13 \neq 0$). c) $(5; 4; 3) \cdot (1; -2; 1) = 5 - 8 + 3 = 0$: i vettori normali sono perpendicolari, e quindi anche i piani.

7. a) $\mathbf{v} = AB = (2; 2; -1)$: $x = 1 + 2t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 - t$, con $t \in \mathbb{R}$. b) Il vettore normale di α è $(1; 1; 2)$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2 + 2 - 2 = 2 \neq 0$: la retta non è parallela al piano, quindi lo incontra in un punto. Sostituendo: $(1 + 2t) + (-1 + 2t) + 2(2 - t) - 8 = 0$, cioè $2t - 4 = 0$ e $t = 2$; il punto è $(5; 3; 0)$. Controllo: $5 + 3 + 0 - 8 = 0$. c) Il vettore normale di σ è $(1; -1; 0)$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2 - 2 + 0 = 0$: r è parallela a σ. Il punto A non sta su σ ($1 + 1 + 5 = 7 \neq 0$), quindi r non ha punti in comune con σ. Lo conferma la sostituzione: $(1 + 2t) - (-1 + 2t) + 5 = 7$, che non è mai 0.

8. a) $(4; -2; 4) = 2(2; -1; 2)$, ma $12 \neq 2 \cdot (-3)$: β è parallelo ad α e distinto. $(2; -1; 2) \cdot (1; 4; 1) = 2 - 4 + 2 = 0$: γ è perpendicolare ad α. b) $d(P, \alpha) = \frac{|2 - 2 + 12 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$; $d(P, \beta) = \frac{|4 - 4 + 24 + 12|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{36}{6} = 6$. c) Il punto $(0; -3; 0)$ sta su α ($0 + 3 + 0 - 3 = 0$) e la sua distanza da β è $\frac{|0 + 6 + 0 + 12|}{6} = 3$: i piani paralleli α e β distano 3. Dividendo per 2, β è $2x - y + 2z + 6 = 0$: l'espressione $2x - y + 2z - 3$ vale $+9$ in P e -9 in ogni punto di β. Dunque P e β stanno da parti opposte di α, la perpendicolare condotta da P a β attraversa α e $6 = 3 + 3$.

9. a) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 11+4+1+9 = 25$: è la sfera di centro $C(2;-1;3)$ e raggio 5. b) $d(C,\pi) = \frac{|2-2-6+15|}{\sqrt{1+4}+4} = \frac{9}{3} = 3 < 5$: il piano è secante e $\rho = \sqrt{25-9} = 4$. Il centro H sta sulla retta per C perpendicolare a π, di punti $(2+t;-1+2t;3-2t)$; sostituendo in π si ottiene $9+9t=0$, $t=-1$, e quindi $H(1;-3;5)$. Controllo: $1-6-10+15=0$. c) La distanza di C dal piano $z=8$ è $|8-3|=5$, uguale al raggio: il piano è tangente. Il punto di tangenza è il piede della perpendicolare condotta da C, cioè della verticale per C: $T(2;-1;8)$. Controllo: $0+0+25=25$.

10. a) $x=4-t$, $y=3-2t$, $z=5-2t$, con $t \in \mathbb{R}$. b) Sul terreno è $z=0$: $5-2t=0$, $t=\frac{5}{2}$, quindi $S(\frac{3}{2};-2;0)$. $P_0S = \sqrt{(\frac{5}{2})^2+5^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5{,}59$ m. c) $SP_0 = (\frac{5}{2};5;0)$, $ST = (\frac{5}{2};5;5)$, $|ST| = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$; $SP_0 \cdot ST = \frac{25}{4}+25 = \frac{125}{4}$. Quindi $\cos\hat{S} = \frac{\frac{125}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{15}{2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7454$ e l'altezza del Sole è circa 41,81°. Controllo: il triangolo P_0TS è rettangolo in P_0 (il palo è verticale, l'ombra orizzontale) e $\text{tg}\,\hat{S} = \frac{P_0T}{P_0S} = \frac{5}{5\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}894$, che dà ancora 41,81°. Lo stesso angolo si trova con qualunque palo: dipende solo dalla direzione di $\mathbf{v}$.

11. a) $B(4;0;0)$, $C(4;4;0)$, $F(4;0;4)$, $H(0;4;4)$. Il piano passa per l'origine A, quindi $d=0$; sostituendo C e F in $ax+by+cz=0$: $4a+4b=0$ e $4a+4c=0$, cioè $b=c=-a$. Con $a=1$ il piano è $x-y-z=0$. Controllo: $4-4-0=0$, $4-0-4=0$. b) $BH = (-4;4;4) = -4(1;-1;-1)$ è parallelo al vettore normale $(1;-1;-1)$: la diagonale è perpendicolare al piano. I punti di BH sono $(4-t;t;t)$; sostituendo, $4-3t=0$, $t=\frac{4}{3}$, e $K(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3})$. $BK = |(-\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3})| = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}31$ e $BH = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$: BK è un terzo di BH. Controllo: BK è anche la distanza di B dal piano, $\frac{|4-0-0|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. c) $M(2;2;2)$ e la sfera è $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$. La distanza di M dal piano è $\frac{|2-2-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$, minore del raggio 2: il piano è secante e la sezione ha raggio $\rho = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}63$. Il centro della sezione è il piede della perpendicolare condotta da M al piano: poiché M è il punto medio di BH, è proprio K.