CAPITOLO

12

Il metodo assiomatico, le geometrie non euclidee e i modelli

Per duemila anni si cercò di dimostrare il quinto postulato; la scoperta più grande fu capire che non si poteva. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Ricostruire la struttura degli *Elementi* e la concezione classica degli assiomi, e riconoscere le forme equivalenti del quinto postulato.
2. Descrivere il quadrilatero di Saccheri, le tre ipotesi e la nascita della geometria iperbolica.
3. Usare la sfera come modello di una geometria senza parallele e calcolare aree di fusi e di triangoli sferici e distanze lungo i cerchi massimi.
4. Spiegare che cosa prova un modello e distinguere coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi, anche su geometrie finite.
5. Confrontare il metodo assiomatico di Euclide con quello di Hilbert e collocare Peano, Dedekind, Russell e Gödel nella ricerca dei fondamenti.
6. Discutere il rapporto tra geometria e spazio fisico (Kant, Poincaré, relatività) e il significato di modello matematico.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Gli Elementi come modello 2
12.2 Dal quadrilatero di Saccheri alle geometrie non euclidee 3
12.3 Due modelli: la sfera e il disco 6
12.4 Il metodo assiomatico moderno 13
12.5 Rigore e fondamenti 16
12.6 Matematica, natura e modelli 17

Matematica 5 · Parte V · Probabilità, modelli e fondamenti · versione 1.0
Capitolo 12: Il metodo assiomatico, le geometrie non euclidee e i modelli · pagine 317–340 del volume completo · estratto per lo studio

Per più di duemila anni gli *Elementi* di Euclide sono stati il modello di ogni sapere certo: poche proposizioni accettate all'inizio e, da queste, una catena di dimostrazioni nella quale ogni anello regge il successivo. Chi voleva dare a una teoria la massima solidità la scriveva «alla maniera dei geometri»: lo fece anche Spinoza, la cui *Etica* è costruita con definizioni, assiomi e proposizioni dimostrate. Eppure nell'Ottocento proprio la geometria, la più sicura delle scienze, scoprì di poter essere fatta in più modi, tutti coerenti. In questo capitolo ripercorriamo quella scoperta: il quinto postulato, i tentativi di dimostrarlo, le geometrie non euclidee e i loro modelli, il metodo assiomatico di Hilbert, la crisi dei fondamenti e, infine, il significato che oggi diamo all'espressione «modello matematico». È il capitolo meno tecnico del volume, ma è quello in cui il rapporto tra matematica e filosofia diventa più stretto.

12.1 Gli *Elementi* come modello

12.1.1 Definizioni, postulati, nozioni comuni

Ricordiamo che cosa hai studiato in *Matematica 1* (cap. 8). Il primo libro degli *Elementi* si apre con 23 definizioni, 5 postulati e 5 nozioni comuni. Le definizioni descrivono gli oggetti di cui si parla: «punto è ciò che non ha parti», «linea è una lunghezza senza larghezza». I **postulati** sono richieste specifiche della geometria, accettate senza dimostrazione; le nozioni comuni, che Aristotele chiamava **assiomi** (ἀξιώματα, ciò che è degno di essere accettato), valgono per ogni scienza, come «il tutto è maggiore della parte». Seguono le proposizioni, ciascuna dimostrata usando soltanto ciò che la precede. Oggi «assioma» e «postulato» si usano come sinonimi.

I primi quattro postulati sono brevi: per due punti si può tracciare una retta; una retta terminata si può prolungare; con qualunque centro e raggio si può descrivere un cerchio; gli angoli retti sono tutti uguali. Il quinto è molto più lungo:

DA RICORDARE

Quinto postulato (Euclide). Se una retta, incontrando altre due rette, forma dalla stessa parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontrano da quella parte.

Non parla di oggetti che si possono costruire in un foglio, come gli altri, ma di ciò che accade «prolungando illimitatamente»: è un'affermazione sull'infinito, e per questo è sembrata a molti meno evidente.

12.1.2 La concezione classica degli assiomi

Per Aristotele le premesse di una scienza dimostrativa devono essere vere, prime e più note delle conclusioni: se lo sono, la dimostrazione trasmette la loro verità a ogni teorema. Euclide si muove in questo quadro. I suoi postulati non sono ipotesi tra le tante possibili, ma verità evidenti sullo spazio in cui viviamo; le definizioni dicono che cosa *sono* il punto e la retta. Nella **concezione classica** del metodo assiomatico la geometria è dunque la scienza dello spazio reale, e la sua certezza dipende dall'evidenza dei suoi principi. Era questa la ragione della sua autorità: anche Kant, come vedremo, ne fece l'esempio di una conoscenza necessaria e universale.

12.1.3 Le forme equivalenti del quinto postulato

In *Matematica 1* (cap. 10) hai usato il postulato delle parallele nella forma che porta il nome di John Playfair: per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela a quella retta. Accettati gli altri postulati, questa forma e quella di Euclide si dimostrano l'una dall'altra: si dicono **equivalenti**. Lo stesso vale per un enunciato che conosci bene, la somma degli angoli interni di un triangolo.

IN SINTESI

Forme equivalenti del quinto postulato. Ammessi gli altri postulati della geometria, i seguenti enunciati sono equivalenti:

1. il quinto postulato di Euclide;
2. (Playfair) per un punto esterno a una retta passa una sola parallela alla retta;
3. la somma degli angoli interni di ogni triangolo è un angolo piatto, cioè π.

Chi «dimostra» il quinto postulato usando, anche senza accorgersene, uno di questi enunciati, ha solo girato in tondo.

L'equivalenza spiega il destino di quasi tutti i tentativi di dimostrazione, come quello di Proclo nel V secolo d.C. e quelli dei secoli successivi: ciascuno nascondeva, in un passaggio che sembrava ovvio, una proposizione equivalente alla tesi. Per uscire dal circolo bisognava cambiare strategia.

12.2 Dal quadrilatero di Saccheri alle geometrie non euclidee

12.2.1 Il quadrilatero di Saccheri

Il gesuita Girolamo Saccheri, professore a Pavia, pubblicò nel 1733 *Euclides ab omni naevo vindicatus* («Euclide liberato da ogni macchia»). La sua idea era una dimostrazione per assurdo: ne-

gare il quinto postulato e ricavarne una contraddizione. Lo strumento fu un quadrilatero. Su un segmento AB si alzano, dalla stessa parte, due segmenti AD e BC perpendicolari ad AB e congruenti tra loro; si congiungono D e C. Il quadrilatero ABCD si chiama **quadrilatero di Saccheri**, AB è la base e DC il lato opposto (Figura 12.1).

Senza usare il quinto postulato si dimostra che gli angoli in D e in C sono congruenti. I triangoli DAB e CBA hanno AD ≅ BC, il lato AB in comune e gli angoli retti in A e in B: sono congruenti per il primo criterio, quindi BD ≅ AC. Allora i triangoli ADC e BCD hanno AD ≅ BC, DC in comune e AC ≅ BD: sono congruenti per il terzo criterio, e in particolare l'angolo ADC è congruente all'angolo BCD. c.v.d.

Che cosa si può dire di questi due angoli uguali? Con il quinto postulato ABCD è un rettangolo, e gli angoli in D e C sono retti. Senza di esso restano tre possibilità, che Saccheri chiamò **ipotesi dell'angolo retto**, **ipotesi dell'angolo ottuso** e **ipotesi dell'angolo acuto**. Saccheri dimostrò che se una delle tre vale per un quadrilatero vale per tutti, e che nei tre casi la somma degli angoli di ogni triangolo è rispettivamente uguale, maggiore o minore di due angoli retti.

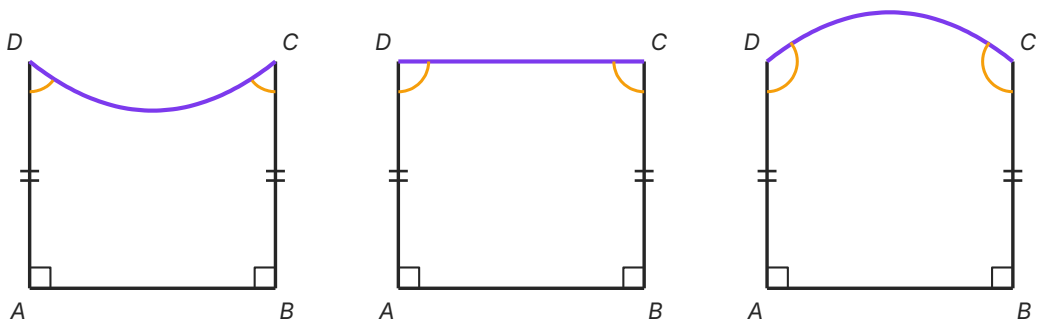

Figura 12.1 Il quadrilatero di Saccheri ABCD: angoli retti in A e B, lati AD e BC congruenti. Gli angoli in D e in C sono congruenti tra loro; le tre ipotesi dicono se sono acuti, retti o ottusi. Il lato DC è sempre un segmento di retta: nel foglio, che obbedisce alla geometria euclidea, i casi acuto e ottuso si possono suggerire soltanto incurvandolo.

12.2.2 Che cosa trovò Saccheri

L'ipotesi dell'angolo ottuso porta davvero a una contraddizione, purché si ammetta, come faceva Saccheri con Euclide, che la retta sia illimitata. Con l'ipotesi dell'angolo acuto, invece, Saccheri ricavò decine di teoremi, tutti coerenti tra loro: per esempio che esistono rette che, senza mai incontrarsi, si avvicinano indefinitamente l'una all'altra. Alla fine dichiarò l'ipotesi «contraria alla natura della linea retta», con un ragionamento che oggi sappiamo non valido. Senza sa-

perlo aveva sviluppato per primo una buona parte di una geometria diversa da quella di Euclide.

ERRORE FREQUENTE

«Un risultato strano è una contraddizione.» Falso. Una teoria è contraddittoria quando permette di dimostrare sia un enunciato sia la sua negazione. Che due rette si avvicinino senza incontrarsi contrasta con l'intuizione del foglio, che è euclidea, ma non con gli altri postulati. Saccheri scambiò un risultato lontano dall'intuizione per un assurdo; lo stesso errore porta a dire che le geometrie non euclidee siano «sbagliate».

12.2.3 Gauss, Bolyai e Lobačevskij

Nel primo Ottocento tre matematici capirono che la strada era un'altra: prendere sul serio la negazione del postulato. Carl Friedrich Gauss, come mostrano le sue lettere, era giunto a conclusioni simili, ma non le pubblicò. Il russo Nikolaj Lobačevskij le rese pubbliche nel 1829; l'ungherese János Bolyai, in modo indipendente, nel 1832, in un'appendice a un trattato del padre. Entrambi sostituirono il postulato di Playfair con il suo opposto: *per un punto esterno a una retta passano infinite rette che non la incontrano*. La geometria che ne nasce si chiama oggi **geometria iperbolica**; insieme a quella sferica, che vedremo tra poco, è una **geometria non euclidea**.

Nella geometria iperbolica, tra le rette per un punto P esterno a una retta r, due fanno da confine tra quelle che incontrano r e quelle che non la incontrano: sono le **parallele limite**. La somma degli angoli di un triangolo è minore di π, e la differenza tra π e quella somma cresce con l'area del triangolo: triangoli piccoli sono «quasi euclidei». Non esistono triangoli simili e non congruenti: gli angoli bastano a determinare il triangolo, anche nelle dimensioni. La Tabella 12.1 confronta le tre geometrie che incontrerai in questo capitolo.

Tabella 12.1 Tre geometrie del piano a confronto.

	euclidea	iperbolica	sferica (ellittica)
parallele a una retta per un punto esterno	una sola	infinite	nessuna
somma degli angoli di un triangolo	uguale a π	minore di π	maggiore di π
triangoli simili non congruenti	esistono	non esistono	non esistono
un modello	il piano del foglio	il disco di Poincaré	la superficie di una sfera
nomi legati	Euclide	Lobačevskij, Bolyai (Gauss)	Riemann

12.3 Due modelli: la sfera e il disco

12.3.1 Rette sulla sfera

Nel capitolo 1 hai visto che un piano passante per il centro di una sfera la taglia in un cerchio massimo. Su una sfera il cammino più breve tra due punti, restando sulla superficie, è il minore dei due archi del cerchio massimo che li contiene (lo accettiamo senza dimostrazione). Le linee di minima lunghezza su una superficie si chiamano **geodetiche**: sulla sfera sono i cerchi massimi, e sono loro a fare la parte delle rette. È la **geometria sferica**.

Due cerchi massimi stanno su due piani per il centro, che si tagliano in un diametro: si incontrano sempre, in due punti diametralmente opposti, detti **antipodali**. Sulla sfera, quindi, *non esistono parallele*. Non tutto però funziona come nel piano: per due punti antipodali, come i poli, passano infiniti cerchi massimi (tutti i meridiani), e una «retta» ha lunghezza finita $2\pi R$, anche se non ha estremi. Bernhard Riemann, nella sua lezione di abilitazione del 1854, propose una concezione generale della geometria, in cui la curvatura dello spazio può variare da punto a punto, e distinse uno spazio illimitato, senza bordi, da uno infinito: la superficie della sfera è illimitata ma finita; la variante in cui si identificano i punti antipodali, così che per due punti passi una sola retta, è la **geometria ellittica**.

12.3.2 Triangoli con tre angoli retti

Un triangolo sferico ha per lati tre archi di cerchio massimo. L'angolo tra due lati è l'angolo tra le rette tangenti ai due archi nel vertice, cioè l'ampiezza del diedro formato dai loro piani (*Matematica 4*, cap. 6). Prendiamo il polo Nord A e due punti B e C dell'equatore con longitudini che differiscono di 90° (Figura 12.2). I meridiani AB e AC tagliano l'equatore ad angolo retto, e in A formano l'angolo di 90° tra i loro piani: il triangolo ABC ha *tre* angoli retti, e la somma dei suoi angoli è $3\pi/2$.

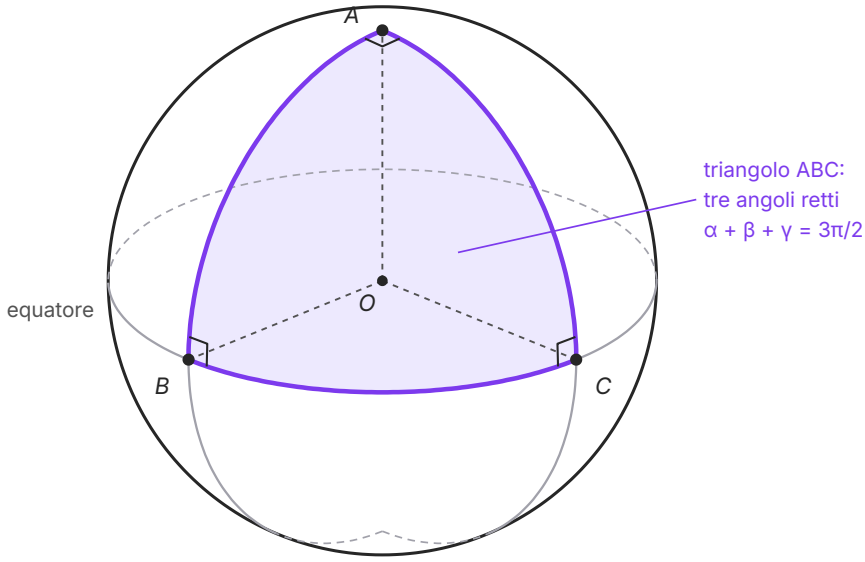

Figura 12.2 Un triangolo sferico con tre angoli retti (proiezione ortogonale; archi nascosti tratteggiati). A è il polo, B e C sono sull'equatore a 90° di longitudine l'uno dall'altro: il triangolo è un ottavo della superficie sferica.

12.3.3 Fusi e area di un triangolo sferico

Due semicirconferenze massime con gli stessi estremi N e S delimitano un **fuso sferico**; il suo angolo α è quello formato dai due semipiani che lo contengono (Figura 12.3). Fusi con angoli uguali si sovrappongono con una rotazione attorno all'asse NS, quindi l'area di un fuso è proporzionale al suo angolo: il fuso di angolo 2π è l'intera sfera, di area $4\pi R^2$ (capitolo 10), e con α in radianti

$$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2\alpha R^2.$$

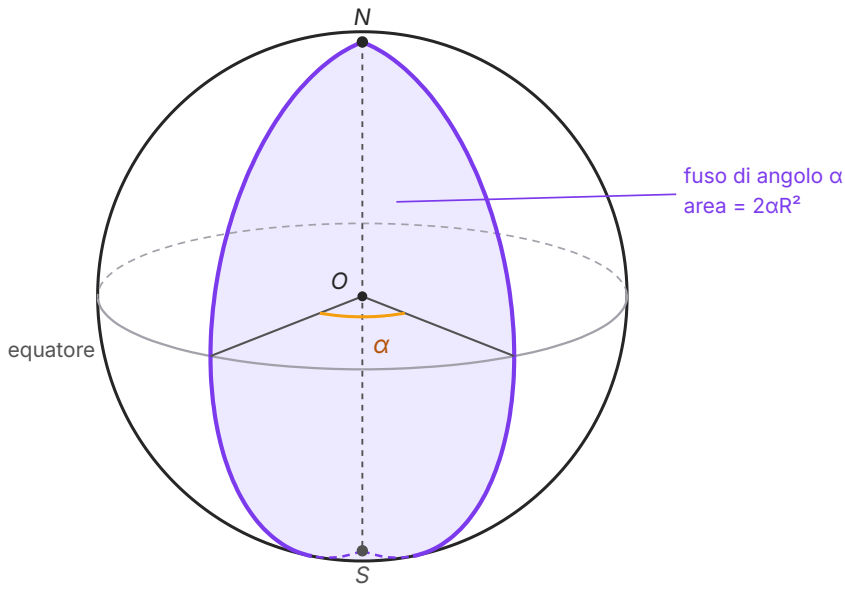

Figura 12.3 Un fuso sferico di angolo α: è la parte di superficie compresa tra due semicirconferenze massime con estremi N e S. La sua area è la frazione $\frac{\alpha}{2\pi}$ della superficie sferica, cioè $2\alpha R^2$.

Da qui segue un teorema sorprendente: l'area di un triangolo sferico dipende solo dai suoi angoli.

IN SINTESI

Teorema (Girard). Ipotesi: ABC è un triangolo sferico, su una sfera di raggio R, con angoli α, β, γ misurati in radianti. **Tesi:** la sua area è

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

La quantità $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ si chiama **eccesso sferico**. Poiché un'area è positiva, la somma degli angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di π. Gli angoli vanno in radianti: in gradi la formula dà un numero senza senso.

Dimostrazione. Prolunghiamo i lati del triangolo fino a ottenere tre cerchi massimi interi. I due cerchi che passano per A formano due fusi di angolo α, uno contenente il triangolo e l'altro, opposto, il triangolo antipodale A′B′C′; insieme hanno area $4\alpha R^2$. Lo stesso accade in B e in C. I sei fusi ricoprono l'intera sfera: ogni punto è coperto una volta sola, tranne quelli dei triangoli ABC e A′B′C′, che sono coperti tre volte. Detta A l'area del triangolo, che è anche quella del suo antipodale, la somma delle aree dei sei fusi supera quella della sfera di $2A + 2A$:

$$4R^2(\alpha+\beta+\gamma) = 4\pi R^2 + 4A, \text{ quindi } A = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi). \text{ c.v.d.}$$

Il teorema porta il nome di Albert Girard, che lo enunciò nel Seicento. Controlliamolo sul triangolo della Figura 12.2: $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \pi/2$, quindi l'area è $\pi R^2/2$, cioè un ottavo di $4\pi R^2$, come deve essere.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Considera la Terra come una sfera di raggio medio $R \approx 6371$ km. a) Calcola l'area del triangolo con un vertice al polo Nord e due sull'equatore, a 90° di longitudine l'uno dall'altro. b) Di quanto supera 180° la somma degli angoli di un triangolo sferico di area 10 000 km²?

Soluzione. a) Gli angoli sono tutti retti, quindi l'eccesso è $3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$ e

$$A = R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \approx 6371^2 \cdot 1{,}5708 \approx 63{,}8 \text{ milioni di km}^2,$$

un ottavo della superficie terrestre (circa 510 milioni di km²). b) Dalla formula di Girard l'eccesso in radianti è $\frac{A}{R^2} = \frac{10\,000}{6371^2} \approx 0{,}000\,246$ rad. In gradi: $0{,}000\,246 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 0{,}0141^\circ$, cioè circa 51 secondi d'arco.

Commento. Su un territorio grande come una provincia la somma degli angoli supera 180° di meno di un minuto d'arco: per questo, su piccola scala, la geometria euclidea descrive benissimo la superficie terrestre. Su scala di continente la differenza diventa grande.

12.3.4 La rotta più breve

Nel capitolo 1 abbiamo anticipato che la rotta più breve tra due località alla stessa latitudine non segue il parallelo, perché il parallelo (equatore escluso) non è un cerchio massimo. Ora possiamo calcolare quanto si risparmia, usando il prodotto scalare (Figura 12.4).

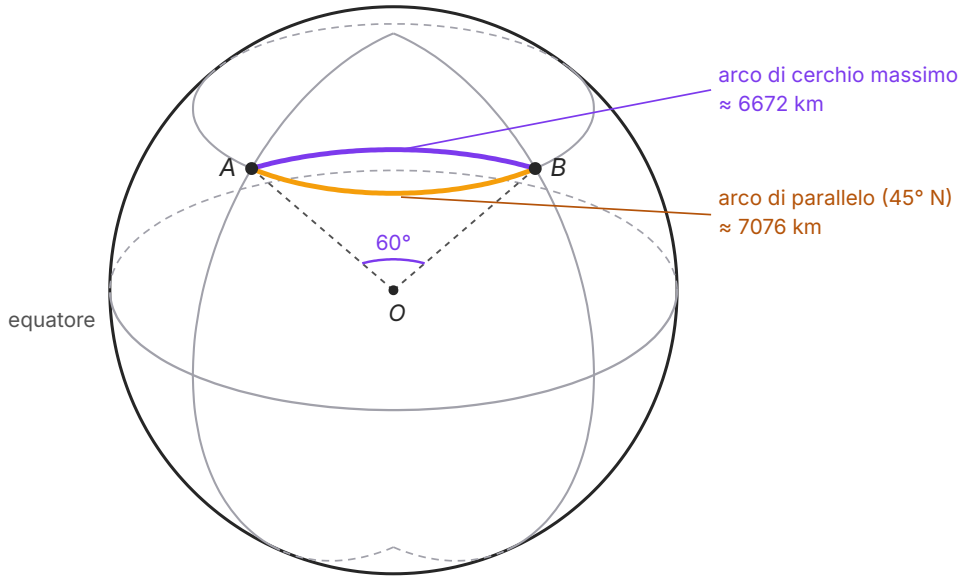

Figura 12.4 Due punti alla latitudine 45° N con longitudini 0° e 90° E: l'arco di cerchio massimo (in viola), che corrisponde all'angolo al centro di 60°, è più corto dell'arco di parallelo (in arancione) e passa più a nord. Proiezione ortogonale, archi nascosti tratteggiati.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. A e B si trovano entrambi alla latitudine 45° N, A sul meridiano di longitudine 0°, B su quello di longitudine 90° E. Confronta la lunghezza dell'arco di parallelo AB con quella dell'arco di cerchio massimo AB ($R \approx 6371$ km).

Soluzione. Origine nel centro della Terra, asse z verso il polo Nord, assi x e y verso i punti dell'equatore di longitudine 0° e 90° E. Proiettando OA e OB si trova

$$\mathrm{A}(R\cos 45°;\ 0;\ R\,\mathrm{sen}\,45°) \qquad \mathrm{B}(0;\ R\cos 45°;\ R\,\mathrm{sen}\,45°).$$

L'angolo $\theta = \mathrm{A\hat{O}B}$ si ottiene dal prodotto scalare (capitolo 1): $\cos\theta = \dfrac{OA \cdot OB}{R^2} = \mathrm{sen}^2\,45° = \dfrac{1}{2}$, quindi $\theta = 60° = \pi/3$. L'arco di cerchio massimo misura $R \cdot \dfrac{\pi}{3} \approx 6672$ km. Il parallelo a 45° N è una circonferenza di raggio $R\cos 45° \approx 4505$ km, e l'arco da A a B ne è un quarto: $\dfrac{\pi}{2} \cdot R\cos 45° \approx 7076$ km.

Risposta. Seguendo il cerchio massimo si percorrono circa 405 km in meno, quasi il 6% del percorso. La rotta più breve, partendo da A, piega verso nord e poi ridiscende (Figura 12.4); è il motivo per cui le rotte aeree a grande distanza, disegnate su una carta geografica piana, appaiono curve.

12.3.5 Il disco di Poincaré

La sfera è un modello di una geometria senza parallele. Per la geometria iperbolica, con infinite parallele, serve un altro modello. Il più famoso porta il nome di Henri Poincaré. I «punti» sono i punti interni di un cerchio, esclusa la circonferenza che lo delimita; le «rette» sono i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano il bordo ad angolo retto (Figura 12.5). Gli angoli si misurano come al solito, tra le tangenti; le distanze no: sono definite in modo che crescano sempre più avvicinandosi al bordo, che si trova così a distanza infinita. Una «retta» del disco è perciò illimitata, come quella di Euclide. In questo **disco di Poincaré** valgono tutti i postulati della geometria euclidea tranne quello delle parallele: per un punto P esterno a una retta r passano infinite rette che non incontrano r, e la somma degli angoli di ogni triangolo è minore di π.

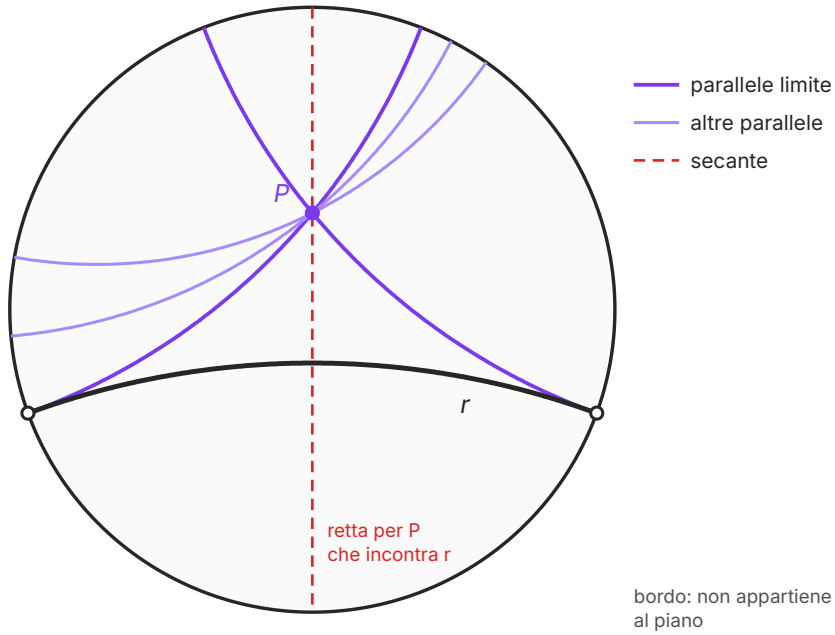

Figura 12.5 Il disco di Poincaré. Le «rette» sono i diametri e gli archi ortogonali al bordo. Per il punto P passano infinite rette che non incontrano la retta r: le due parallele limite (viola scuro) raggiungono r soltanto sul bordo, che non appartiene al piano. Archi calcolati come circonferenze ortogonali al bordo.

APPROFONDIMENTO · BELTRAMI E LA PSEUDOSFERA

Il primo modello concreto della geometria iperbolica fu dato dall'italiano Eugenio Beltrami nel *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868). Beltrami osservò che su certe superfici a curvatura negativa costante, come la *pseudosfera*, la superficie che si ottiene facendo ruotare attorno a un asse una curva detta trattrice, le geodetiche si comportano proprio come le rette di Lobačevskij e di Bolyai. La pseudosfera rappresenta soltanto una porzione del piano iperbolico, ma bastò a convincere i matematici che la nuova geometria aveva un significato concreto. Negli anni successivi Felix Klein e poi Poincaré descrissero modelli dell'intero piano iperbolico all'interno di un cerchio euclideo.

12.3.6 Che cosa dimostra un modello

Un **modello** di un sistema di assiomi è un'interpretazione dei suoi termini, «punto», «retta», «giacere su», in oggetti già noti, nella quale tutti gli assiomi risultano veri. Il disco di Poincaré è costruito con cerchi e archi della geometria euclidea. Se dagli assiomi della geometria iperbolica si potesse dedurre una contraddizione, traducendo la dimostrazione nel modello si otterrebbe una contraddizione su cerchi e archi euclidei. Quindi: *se la geometria euclidea è coerente, lo è*

anche quella iperbolica. È una **coerenza relativa**: non garantisce che nessuna delle due contenga contraddizioni, ma che l'una sta o cade con l'altra.

La conseguenza è storica. Il quinto postulato non si può dimostrare dagli altri: se si potesse, nel disco di Poincaré, dove gli altri valgono, varrebbe anche lui, mentre lì è falso. Duemila anni di tentativi erano destinati a fallire, non per mancanza di ingegno, ma perché ciò che cercavano non esiste.

12.4 Il metodo assiomatico moderno

12.4.1 Hilbert e i *Fondamenti della geometria*

Nel 1899 David Hilbert pubblicò i *Grundlagen der Geometrie* («Fondamenti della geometria»). Il libro comincia così: si pensano tre sistemi di oggetti, chiamati punti, rette e piani, e tra loro certe relazioni, espresse da parole come «giacere su», «tra», «congruente». Che cosa siano punti e rette non viene detto: sono **termini primitivi**, e il loro significato è fissato solo dagli assiomi, che li legano tra loro. Gli assiomi funzionano come **definizioni implicite**: è «retta» qualunque cosa li soddisfi. Secondo un aneddoto riferito da un suo biografo, Hilbert diceva che al posto di punti, rette e piani si sarebbe potuto parlare di tavoli, sedie e boccali di birra, purché valessero gli assiomi.

Gli assiomi di Hilbert sono divisi in cinque gruppi: appartenenza, ordine, congruenza, parallele, continuità. Sono gli stessi gruppi dei postulati di *Matematica 1*. Molti colmano lacune di Euclide, che usava fatti «visibili» nella figura senza averli postulati: già nella prima proposizione degli *Elementi*, la costruzione del triangolo equilatero, Euclide dà per scontato che due cerchi che si attraversano abbiano un punto in comune, cosa che i suoi postulati non garantiscono. Con Hilbert la figura resta un aiuto prezioso, ma nessun passaggio può più appoggiarsi su di essa.

Tabella 12.2 Il metodo assiomatico di Euclide e quello di Hilbert.

	Euclide (*Elementi*)	Hilbert (*Grundlagen*, 1899)
oggetti di base	descritti da definizioni («punto è ciò che non ha parti»)	termini primitivi, non definiti
assiomi	verità evidenti sullo spazio reale	ipotesi scelte; definiscono implicitamente i termini
ruolo della figura	guida il ragionamento, talvolta in modo implicito	solo un aiuto: ogni passaggio discende dagli assiomi
interpretazioni	una sola: lo spazio	molte: ogni modello degli assiomi
che cosa si chiede al sistema	la verità dei principi	coerenza, indipendenza, completezza

12.4.2 Coerenza, indipendenza, completezza

Se gli assiomi non sono più verità evidenti, le domande che si pongono su di essi diventano domande di logica. Sono tre.

IN SINTESI

Proprietà di un sistema di assiomi.

- È **coerente** (o non contraddittorio) se da esso non si può dedurre sia un enunciato sia la sua negazione. Si prova esibendo un modello.
- Un assioma è **indipendente** dagli altri se non si può dedurre da essi. Si prova esibendo un modello in cui gli altri assiomi sono veri e quello è falso.
- È **completo** se ogni enunciato formulato nel suo linguaggio si può dimostrare oppure confutare. Se esistono due modelli in cui lo stesso enunciato è vero nell'uno e falso nell'altro, il sistema non è completo.

La coerenza è indispensabile; l'indipendenza è una forma di economia; la completezza è una proprietà desiderabile, che molti sistemi importanti non hanno.

Le geometrie non euclidee forniscono gli esempi più importanti. Il quinto postulato è indipendente dagli altri, perché il disco di Poincaré è un modello in cui gli altri valgono e lui no. Per lo stesso motivo gli assiomi di Hilbert privati di quello delle parallele (la cosiddetta geometria assoluta) non formano un sistema completo: l'enunciato «la somma degli angoli di un triangolo è π» è vero nel piano euclideo e falso nel disco. I tre concetti si vedono bene anche su sistemi minuscoli, con un numero finito di punti (Figura 12.6).

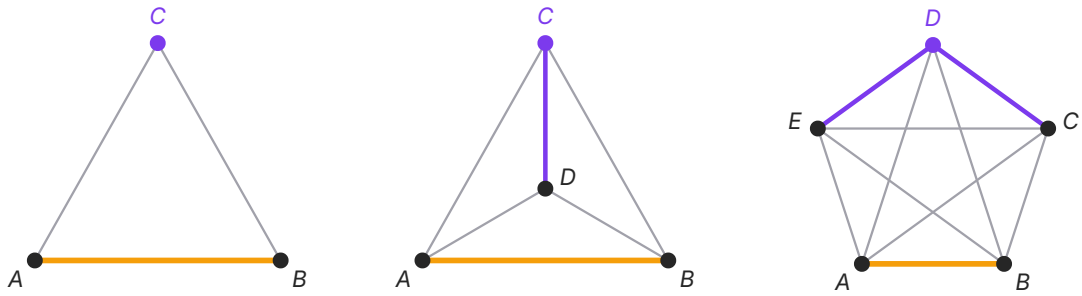

Figura 12.6 Tre geometrie finite, con 3, 4 e 5 punti, in cui le rette sono le coppie di punti. Per il punto viola, esterno alla retta AB, passano zero, una o due rette che non incontrano AB.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Considera gli assiomi: (A1) ogni retta contiene almeno due punti; (A2) per due punti distinti passa una e una sola retta; (A3) esistono tre punti non allineati; (A4) per un punto esterno a una retta passa una sola retta che non la incontra. a) Verifica che quattro punti A, B, C, D, con le sei rette formate dalle coppie di punti, sono un modello. b) Che cosa mostrano i modelli con 3 e con 5 punti della Figura 12.6, in cui ogni coppia di punti forma una retta?

Soluzione. a) Le rette sono AB, AC, AD, BC, BD, CD: ciascuna ha due punti (A1), e ogni coppia di punti sta su una sola retta (A2). A, B, C non sono allineati, perché nessuna retta li contiene tutti e tre (A3). Per A4 controlliamo una retta, per esempio AB: i punti esterni sono C e D, e l'unica retta per C che non contiene né A né B è CD; lo stesso per D. Lo stesso ragionamento vale per ogni retta: le sei rette si dividono in tre coppie di parallele, {AB, CD}, {AC, BD}, {AD, BC}. Gli assiomi sono quindi coerenti.

b) Con 3 punti valgono A1, A2, A3, ma per C non passa nessuna retta che non incontri AB: A4 è falso. Con 5 punti valgono ancora A1, A2, A3, ma per D passano due rette, DC e DE, che non incontrano AB: A4 è di nuovo falso. Ciascuno dei due modelli prova che A4 è *indipendente* da A1, A2, A3, proprio come il quinto postulato dagli altri: nel primo non ci sono parallele, come sulla sfera; nel secondo ce n'è più di una, come nel disco di Poincaré.

Il sistema A1–A4, infine, non è completo: l'enunciato «ci sono esattamente quattro punti» è vero nel modello a) ma falso in un altro modello degli stessi assiomi, con 9 punti, che incontrerai negli esercizi.

12.4.3 Gli assiomi di Peano

Il metodo assiomatico non riguarda solo la geometria. In *Matematica 4* (cap. 9) hai visto che nel 1889 Giuseppe Peano dedusse l'aritmetica da pochi assiomi, nei quali *numero*, *zero* e *successivo* sono termini primitivi. In forma moderna gli **assiomi di Peano** dicono: 0 è un numero naturale; ogni numero naturale ha un successivo, che è un numero naturale; 0 non è il successivo di alcun numero; numeri diversi hanno successivi diversi; se un insieme contiene 0 e, con ogni numero, il suo successivo, allora contiene tutti i numeri naturali. L'ultimo è il principio di induzione, che non è più un metodo di dimostrazione tra gli altri ma un assioma: è lui a dire che i numeri naturali sono «soltanto» quelli che si raggiungono partendo da 0. Attorno a Peano, a Torino, si formò una scuola che studiò i fondamenti della matematica, alla quale appartenne Mario Pieri, autore di sistemi di assiomi per la geometria.

12.5 Rigore e fondamenti

12.5.1 L'aritmetizzazione dell'analisi

Mentre la geometria perdeva l'evidenza come garanzia, anche l'analisi cercava fondamenti più sicuri. Nei capitoli 2, 3 e 4 hai visto come limiti e continuità, nati dalle intuizioni del Seicento sugli infinitesimi, furono resi rigorosi nell'Ottocento: con il *Cours d'analyse* di Cauchy (1821) e con il linguaggio ε–δ di Weierstrass. Restava una domanda: che cos'è un numero reale? Nel 1872 Richard Dedekind lo definì a partire dai razionali, con le sezioni che hai studiato in *Matematica 3* (cap. 4), e dimostrò la completezza di $\mathbb{R}$, cioè la proprietà su cui poggia, per esempio, la convergenza delle successioni monotone e limitate. I razionali, a loro volta, si costruiscono dagli interi e questi dai naturali, descritti dagli assiomi di Peano. Questo processo, che fa dipendere tutta l'analisi dai numeri naturali, si chiama **aritmetizzazione dell'analisi**.

12.5.2 Cantor e l'infinito attuale

Le sezioni di Dedekind sono insiemi infiniti di numeri razionali, trattati come oggetti compiuti. Georg Cantor, come hai visto in *Matematica 3* (cap. 4), aveva fatto dell'infinito attuale un oggetto di studio: insiemi infiniti confrontati tra loro, i naturali numerabili, i reali no. La teoria degli insiemi sembrava il terreno comune su cui fondare tutta la matematica. Hilbert, che la difese anche dopo la crisi di cui stiamo per parlare, affermò che nessuno avrebbe cacciato i matematici dal «paradiso» creato da Cantor. Quel paradiso, però, nascondeva un serpente.

12.5.3 Il paradosso di Russell

Il logico tedesco Gottlob Frege voleva derivare l'aritmetica dalla sola logica. Nel suo sistema, come nella teoria ingenua degli insiemi, ogni proprietà definisce un insieme: quello degli og-

getti che la hanno. Nel 1902 Bertrand Russell gli scrisse una lettera. Consideriamo la proprietà «essere un insieme che non appartiene a sé stesso» e l'insieme R degli insiemi che la hanno. R appartiene a sé stesso? Se sì, non ha la proprietà, quindi non appartiene a sé stesso; se no, ha la proprietà, quindi appartiene a sé stesso. Si ottiene

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R,$$

una contraddizione. È il **paradosso di Russell**. Frege riconobbe che il suo sistema era contraddittorio e lo scrisse in un'appendice al secondo volume della sua opera, allora in stampa.

Il paradosso viene spesso raccontato con un barbiere che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da sé: chi rade il barbiere? È una divulgazione, utile per capire la struttura del ragionamento, ma non equivalente all'originale: dalla storia del barbiere si conclude solo che un barbiere così non può esistere, e nessuno ci obbligava a supporlo. Nel caso di Russell, invece, l'esistenza di R era garantita da un principio del sistema, che quindi andava cambiato. La risposta fu una teoria degli insiemi assiomatica, nella quale non ogni proprietà definisce un insieme.

APPROFONDIMENTO · GÖDEL E I LIMITI DEL METODO ASSIOMATICO

Dopo i paradossi Hilbert propose un programma: scrivere tutta la matematica in sistemi di assiomi e dimostrare con mezzi elementari, «finiti», che questi sistemi sono coerenti. Nel 1931 Kurt Gödel dimostrò due teoremi che ne cambiarono il senso. Il primo dice che ogni sistema di assiomi coerente, con assiomi elencabili in modo meccanico e abbastanza ricco da contenere l'aritmetica dei numeri naturali, contiene enunciati che non si possono né dimostrare né confutare: non è completo. Il secondo dice che un tale sistema non può dimostrare la propria coerenza. Il metodo assiomatico resta lo strumento con cui la matematica organizza il suo sapere, ma nessun sistema di assiomi può contenere tutta la verità aritmetica, né garantire da solo la propria solidità.

12.6 Matematica, natura e modelli

12.6.1 Kant e lo spazio di Euclide

Nella *Critica della ragion pura* (1781) Kant sostiene che lo spazio non è una proprietà delle cose, ma una forma della nostra sensibilità, data prima di ogni esperienza; per questo la geometria può essere insieme universale e necessaria, e informarci sul mondo: i suoi giudizi sono sintetici a priori. La geometria che Kant aveva in mente era quella di Euclide. Dopo Lobačevskij, Bolyai e Riemann non si poteva più sostenere che solo quella fosse pensabile: le geometrie non euclidee sono coerenti quanto la sua. Restava però aperta una domanda: quale geometria descrive lo spazio fisico?

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA E LETTERATURA

La certezza degli *Elementi* ha segnato la filosofia moderna. Descartes vedeva nelle «lunghe catene di ragioni» dei geometri il modello del metodo (capitolo 1); Spinoza volle esporre l'*Etica* «in ordine geometrico», con definizioni, assiomi e dimostrazioni. Le geometrie non euclidee arrivarono anche nel romanzo: nei *Fratelli Karamazov* di Dostoevskij, Ivan dice di avere una mente «euclidea», fatta per le cose di questa terra, e cita chi immagina che le parallele possano incontrarsi all'infinito, per spiegare che non pretende di capire ciò che va oltre. Nel corso di filosofia di quest'anno ritroverai il problema con il positivismo e con la riflessione del Novecento sulla scienza.

12.6.2 Poincaré: geometrie e convenzioni

Henri Poincaré diede una risposta originale in *La science et l'hypothèse* (1902). Gli assiomi della geometria, sostiene, non sono giudizi sintetici a priori, come voleva Kant, e neppure fatti sperimentali, perché nessuna misura riguarda rette e punti ideali. Sono *convenzioni*: la scelta tra loro è libera, purché non si cada in contraddizione, ed è guidata dall'esperienza. Chiedersi se la geometria euclidea sia vera, scrive, ha tanto senso quanto chiedersi se il sistema metrico sia vero e le antiche unità di misura false: una geometria non è più vera di un'altra, può solo essere più comoda. Per Poincaré la più comoda era, e sarebbe rimasta, quella di Euclide. Questa posizione si chiama **convenzionalismo**.

12.6.3 Lo spazio curvo della fisica

COLLEGAMENTI · FISICA

Nella relatività generale, che Einstein completò nel 1915, la gravità non è più una forza nello spazio euclideo di Newton, ma la curvatura dello spazio-tempo prodotta dalle masse: i corpi in caduta libera e la luce seguono le geodetiche di questa geometria curva. Il linguaggio matematico di Einstein era la geometria di Riemann, con il calcolo differenziale assoluto sviluppato da Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita. Come sulla Terra un triangolo piccolo ha un eccesso sferico trascurabile, così in una regione piccola lo spazio della fisica è, con ottima approssimazione, euclideo; le differenze compaiono vicino a grandi masse e su scala astronomica.

La relatività non ha dato torto a Poincaré in modo semplice: ha mostrato che una geometria non euclidea può rendere la descrizione della natura, nel suo insieme, più semplice di quella euclidea. La scelta della geometria per lo spazio fisico è diventata una parte della teoria fisica, da giudicare insieme a essa con gli esperimenti.

12.6.4 Un fenomeno, più modelli

Questa storia illumina un'idea che hai incontrato in tutto il volume. Nella fisica classica sembrava che tra matematica e natura ci fosse una corrispondenza univoca: lo spazio *è* euclideo, il moto *è* descritto dalle leggi di Newton. Oggi parliamo piuttosto di **modelli**: rappresentazioni matematiche costruite a partire da ipotesi, valide entro certi limiti, che si possono confrontare e sostituire. Lo stesso fenomeno ammette modelli diversi: una popolazione si descrive con la crescita esponenziale o con la logistica (capitolo 8), il risultato di una misura con una distribuzione normale o con un'altra (capitolo 11), la superficie terrestre con il piano di una carta o con la sfera. Scegliere un modello vuol dire scegliere che cosa trascurare.

Le *Indicazioni nazionali* chiedono di riconoscere tre grandi momenti del pensiero matematico. Il primo è la matematica greca: Euclide e il metodo dimostrativo (*Matematica 1*), Zenone, Archimede e i primi problemi dell'infinito (*Matematica 3* e capitolo 2). Il secondo è il calcolo infinitesimale nato con la rivoluzione scientifica del Seicento, che ha permesso di matematizzare il mondo fisico: derivate e integrali, nelle parti III e IV di questo volume. Il terzo è la matematica moderna nata dall'Ottocento: il rigore dei limiti, gli assiomi, le geometrie non euclidee, i modelli probabilistici. Questo capitolo chiude il percorso proprio dove la matematica, interrogandosi sui propri fondamenti, ha cambiato il modo di intendere la conoscenza scientifica.

SINTESI

- Gli *Elementi* di Euclide partono da definizioni, postulati e nozioni comuni; nella concezione classica gli assiomi sono verità evidenti sullo spazio reale.
- Il quinto postulato, ammessi gli altri, equivale al postulato di Playfair (una sola parallela per un punto esterno) e all'enunciato «la somma degli angoli di ogni triangolo è π».
- Saccheri (1733) studiò il quadrilatero con due angoli retti alla base e lati congruenti: le ipotesi dell'angolo acuto, retto e ottuso; credette di confutare l'ipotesi dell'angolo acuto, ma il suo ragionamento non era valido.
- Lobačevskij (1829) e Bolyai (1832), come Gauss nei suoi scritti privati, svilupparono la geometria iperbolica: infinite parallele per un punto esterno, somma degli angoli di un triangolo minore di π.
- Sulla sfera le «rette» sono i cerchi massimi: non esistono parallele e la somma degli angoli di un triangolo supera π (Riemann, 1854).
- Un fuso di angolo α ha area $2\alpha R^2$; un triangolo sferico ha area $R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, con gli angoli in radianti (teorema di Girard).
- Nel disco di Poincaré le rette sono i diametri e gli archi ortogonali al bordo; Beltrami (1868) diede il primo modello concreto della geometria iperbolica.
- Un modello rende veri tutti gli assiomi: prova la coerenza relativa di un sistema e l'indipendenza di un assioma dagli altri; il quinto postulato non si può dimostrare.
- Con Hilbert (1899) punti, rette e piani sono termini primitivi e gli assiomi sono definizioni implicite; a un sistema di assiomi si chiedono coerenza, indipendenza e completezza.
- Peano (1889) assiomatizzò i numeri naturali; Dedekind (1872) costruì i reali dai razionali: l'aritmetizzazione dell'analisi.
- Il paradosso di Russell (1902) mostrò che non ogni proprietà definisce un insieme; Gödel (1931) provò che un sistema di assiomi coerente, abbastanza ricco da contenere l'aritmetica, non è completo.
- Per Kant la geometria euclidea era necessaria; per Poincaré (1902) gli assiomi sono convenzioni; la relatività generale descrive lo spazio-tempo con la geometria di Riemann. Uno stesso fenomeno ammette più modelli.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Nei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert, «punto», «retta» e «piano» sono:
   A. oggetti definiti come in Euclide («punto è ciò che non ha parti»)
   B. termini primitivi, il cui significato è fissato soltanto dagli assiomi
   C. i punti, le rette e i piani dello spazio fisico, che gli assiomi descrivono fedelmente
   D. parole che non si possono usare nelle dimostrazioni

2. ● Ammessi gli altri postulati, quale enunciato è equivalente al quinto postulato?
   A. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
   B. Per due punti distinti passa una sola retta.
   C. La somma degli angoli interni di ogni triangolo è un angolo piatto.
   D. Un segmento si può prolungare indefinitamente.

3. ● Sulla superficie di una sfera la somma degli angoli di un triangolo è:
   A. uguale a π, come nel piano
   B. minore di π
   C. sempre uguale a 3π/2
   D. maggiore di π, e l'eccesso è proporzionale all'area

4. ● Nel disco di Poincaré le «rette» sono:
   A. i diametri e gli archi di circonferenza ortogonali al bordo
   B. tutte le corde del disco
   C. le circonferenze contenute nel disco
   D. soltanto i diametri

5. ●● Il disco di Poincaré è costruito con cerchi e archi della geometria euclidea. Questo prova che:
   A. la geometria iperbolica è quella vera dello spazio fisico
   B. se la geometria euclidea è coerente, il quinto postulato non si può dimostrare dagli altri
   C. il quinto postulato è falso
   D. la geometria euclidea contiene una contraddizione

6. ● Il paradosso di Russell riguarda:
   A. l'insieme dei numeri reali, che non è numerabile
   B. la distinzione tra infinito potenziale e infinito attuale
   C. l'idea che ogni proprietà definisca un insieme
   D. il quinto postulato di Euclide

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Saccheri dimostrò correttamente che l'ipotesi dell'angolo acuto porta a una contraddizione.
   b) Due cerchi massimi di una sfera si incontrano sempre in due punti antipodali.
   c) Nella geometria iperbolica esistono triangoli simili e non congruenti.
   d) Lobačevskij e Bolyai pubblicarono i loro lavori indipendentemente l'uno dall'altro.
   e) La storia del barbiere è una formulazione rigorosa del paradosso di Russell.

8. ● Completa.
   a) I termini che un sistema di assiomi non definisce si chiamano _____ .
   b) Un sistema di assiomi da cui non si possono dedurre un enunciato e la sua negazione si dice _____ .
   c) Un assioma che non si può dedurre dagli altri si dice _____ ; per provarlo si costruisce un _____ in cui gli altri assiomi sono veri e quello è falso.
   d) Sulla sfera la quantità $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ si chiama _____ .

Calcolare

9. ● Calcola l'area di un fuso sferico di angolo 30° sulla Terra ($R \approx 6371$ km). Che frazione della superficie terrestre rappresenta?

10. ● Su una sfera di raggio 1 un triangolo ha angoli 90°, 90° e 60°. Calcola la sua area e descrivi un triangolo di questo tipo.

11. ●● Un triangolo sferico tracciato sulla Terra ha angoli di 80°, 75° e 50°. Calcolane l'area ($R \approx 6371$ km).

12. ●● Su un pallone sferico di raggio 10 cm è disegnato un triangolo di area 50 cm^2. Quanto vale la somma dei suoi angoli, in gradi?

13. ●● Un triangolo sferico ha tre angoli di 120°. Che frazione della superficie della sfera occupa?

14. ●● Due località immaginarie si trovano alla latitudine 30° N, sui meridiani di longitudine 0° e 90° E. Usa le coordinate P($R\cos\varphi\cos\lambda$; $R\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda$; $R\,\mathrm{sen}\,\varphi$), con φ latitudine e λ longitudine, e il prodotto scalare per calcolare la distanza lungo il cerchio massimo; confrontala con quella lungo il parallelo ($R \approx 6371$ km).

15. ●● Due punti si trovano alla latitudine 60° N, sui meridiani di longitudine 0° e 180°. Calcola la distanza lungo il parallelo e quella lungo il cerchio massimo. Per dove passa la rotta più breve?

16. ●● Un triangolo sferico sulla Terra ha area 10 000 km^2. Di quanti secondi d'arco la somma dei suoi angoli supera 180°? E se l'area fosse 100 000 km^2?

17. ●● Nella geometria di quattro punti A, B, C, D (le rette sono le sei coppie di punti) quante rette passano per ogni punto? Elenca, per ogni retta, la sua parallela e verifica che le rette si dividono in classi di rette parallele tra loro.

18. ●● I punti 1, …, 9 sono disposti in una griglia 3 × 3 (prima riga 1, 2, 3; seconda 4, 5, 6; terza 7, 8, 9). Le rette sono 12 terne: le tre righe, le tre colonne, {1, 5, 9}, {2, 6, 7}, {3, 4, 8}, {3, 5, 7}, {1, 6, 8}, {2, 4, 9}.
    a) Quante rette passano per il punto 1? Elencale.
    b) Trova la parallela per 1 alla retta {2, 5, 8} e verifica che è una sola.
    c) Spiega perché questo modello, insieme a quello con quattro punti, mostra che gli assiomi A1–A4 non formano un sistema completo.

19. ●● Un poligono sferico di n lati si divide, con diagonali di cerchio massimo, in $n - 2$ triangoli sferici. Mostra che la sua area è $R^2(S - (n - 2)\pi)$, dove S è la somma dei suoi angoli in radianti, e applica la formula a un quadrilatero con quattro angoli di 100° su una sfera di raggio 2.

Dimostrare e argomentare

20. ● Nel quadrilatero di Saccheri ABCD (angoli retti in A e B, AD ≅ BC) dimostra, senza usare il quinto postulato, che gli angoli in D e in C sono congruenti. Indica i criteri di congruenza che usi.

21. ●● Spiega perché l'area di un fuso sferico è proporzionale al suo angolo e ricava la formula $2\alpha R^2$. Controlla il risultato per $\alpha = \pi$ e per $\alpha = 2\pi$.

22. ●● Trova l'errore: «Saccheri ha negato il quinto postulato e ha trovato risultati assurdi, come rette che si avvicinano senza incontrarsi; quindi il quinto postulato è dimostrato.»

23. ●● Usa un modello per provare che l'assioma A3 («esistono tre punti non allineati») è indipendente dagli assiomi A1, A2, A4 della geometria di quattro punti.

24. ●● Spiega perché la storia del barbiere non è un vero paradosso, mentre quella dell'insieme di Russell lo era per il sistema di Frege.

Problemi

25. ● Due città immaginarie si trovano alla latitudine 40° N, sui meridiani di longitudine 10° E e 130° E. Calcola la distanza lungo il parallelo e quella lungo il cerchio massimo ($R \approx 6371$ km; usa le coordinate dell'esercizio sui punti alla latitudine 30° N).

26. ●● Un pilota parte da un punto dell'equatore, vola verso nord fino al polo, gira di 90° e scende lungo un altro meridiano fino all'equatore, poi torna al punto di partenza lungo l'equatore. Quanti chilometri ha percorso? Quanto vale la somma degli angoli del triangolo descritto, e quale area racchiude ($R \approx 6371$ km)?

27. ●● Un topografo misura gli angoli di un grande triangolo sulla superficie terrestre e trova che la loro somma supera 180° di 1 secondo d'arco. Quanto vale, approssimativamente, l'area del triangolo ($R \approx 6371$ km)?

28. ●●● Una geometria ha 7 punti, indicati con 1, …, 7, e 7 rette: {1, 2, 4}, {2, 3, 5}, {3, 4, 6}, {4, 5, 7}, {5, 6, 1}, {6, 7, 2}, {7, 1, 3} (porta il nome di Gino Fano).
a) Verifica che per due punti distinti passa una sola retta.
b) Verifica che due rette distinte hanno sempre esattamente un punto in comune.
c) A quale delle tre geometrie della Tabella 12.1 somiglia per quanto riguarda le parallele?

Verso l'esame

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Su un pallone sferico di raggio 11 cm è disegnato un triangolo con angoli di 90°, 90° e 45°. Quale delle seguenti è la sua area, arrotondata al cm^2?
A) 24 cm^2 B) 95 cm^2 C) 190 cm^2 D) 380 cm^2

30. ●● Nello stile delle prove nazionali. La tabella dà l'eccesso sferico di triangoli tracciati sulla Terra, in funzione della loro area (valori calcolati con $R = 6371$ km).
area (milioni di km^2): 10 · 20 · 40
eccesso (gradi): 14,1 · 28,2 · ?
a) Che relazione c'è tra le due grandezze? Completa la tabella.
b) Quale area ha un triangolo con eccesso 7,05°?

31. ●● Spunto per il colloquio. Henri Poincaré, in *La science et l'hypothèse* (1902), sostiene in sostanza che una geometria non può essere più vera di un'altra, ma soltanto più comoda. Spiega il senso di questa affermazione partendo dalla storia del quinto postulato, e collegala alla filosofia (Kant) e alla fisica del Novecento.

32. ●●● Sfida. Sulla Terra, considera il triangolo sferico con vertici nel polo Nord N e nei punti A e B alla latitudine 45° N, sui meridiani 0° e 90° E. L'angolo in N è 90°. Per calcolare l'angolo in A usa i vettori $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}$ e $\mathbf{t}_2 = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}$, tangenti in A ai lati AN e AB, dove $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ sono i vettori unitari che da O puntano verso A, B, N. Trova gli angoli del triangolo e la sua area ($R \approx 6371$ km).

PER APPROFONDIRE

- [BON] Bonola, *La geometria non-euclidea*: la storia del quinto postulato da Euclide a Saccheri, Lobačevskij, Bolyai e Riemann, raccontata da un matematico della scuola italiana.
- [EUC] Euclide, *Elementi*: il primo libro, con le definizioni, i postulati e le prime proposizioni, nelle quali si può cercare dove interviene il quinto postulato.
- [HIL] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*: i gruppi di assiomi e le prove di coerenza e di indipendenza costruite con modelli.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sulle geometrie non euclidee, sull'aritmetizzazione dell'analisi e sui fondamenti.

Glossario del capitolo

Aritmetizzazione dell'analisi
Il processo ottocentesco (Cauchy, Weierstrass, Dedekind) che fonda limiti, continuità e numeri reali sui numeri razionali e, in ultima analisi, sui naturali.

Assioma (postulato)
Proposizione accettata senza dimostrazione all'inizio di una teoria. Nella concezione classica era una verità evidente; oggi è un'ipotesi scelta che definisce implicitamente i termini primitivi.

Assiomi di Peano
Gli assiomi (1889) che caratterizzano i numeri naturali a partire da zero e dal successivo; l'ultimo è il principio di induzione.

Coerenza
Proprietà di un sistema di assiomi da cui non si possono dedurre un enunciato e la sua negazione. È relativa quando si prova costruendo un modello all'interno di un'altra teoria.

Completezza
Proprietà di un sistema di assiomi nel quale ogni enunciato del suo linguaggio si può dimostrare oppure confutare.

Convenzionalismo
La tesi di Poincaré secondo cui gli assiomi della geometria sono convenzioni, scelte liberamente ma guidate dall'esperienza: una geometria non è più vera di un'altra, solo più comoda.

Disco di Poincaré
Modello della geometria iperbolica: i punti sono quelli interni a un cerchio, le rette sono i diametri e gli archi di circonferenza ortogonali al bordo.

Eccesso sferico
La quantità $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ per un triangolo sferico; moltiplicata per R^2 dà l'area del triangolo (teorema di Girard).

Fuso sferico
Parte di superficie sferica compresa tra due semicirconferenze massime con gli stessi estremi; se il suo angolo è α (in radianti), ha area $2\alpha R^2$.

Geodetica
Linea di minima lunghezza tra due punti di una superficie; sulla sfera è un arco di cerchio massimo.

Geometria iperbolica
Geometria di Lobačevskij e Bolyai: per un punto esterno a una retta passano infinite parallele e la somma degli angoli di un triangolo è minore di π.

Geometria non euclidea
Geometria in cui vale la negazione del quinto postulato: la geometria iperbolica e quella sferica o ellittica.

Geometria sferica (ellittica)
Geometria sulla superficie di una sfera, con i cerchi massimi come rette: non esistono parallele e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di π. Nella geometria ellittica si identificano i punti antipodali.

Indipendenza
Un assioma è indipendente dagli altri se non si può dedurre da essi; lo si prova con un modello in cui gli altri sono veri e quello è falso.

Modello
Interpretazione dei termini primitivi di un sistema di assiomi in oggetti già noti, nella quale tutti gli assiomi sono veri. In senso più ampio, rappresentazione matematica di un fenomeno costruita a partire da ipotesi.

Paradosso di Russell
La contraddizione prodotta dall'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi (1902): mostra che non ogni proprietà definisce un insieme.

Quadrilatero di Saccheri
Quadrilatero ABCD con angoli retti in A e B e lati AD e BC congruenti; gli angoli in D e C sono congruenti, e possono essere retti, acuti od ottusi a seconda della geometria.

Quinto postulato
Il postulato delle parallele di Euclide; ammessi gli altri postulati, equivale al postulato di Playfair e all'enunciato «la somma degli angoli di ogni triangolo è π».

Termine primitivo
Termine che un sistema di assiomi non definisce (come punto, retta, piano in Hilbert): il suo significato è fissato soltanto dagli assiomi.

Soluzioni

1. B. Sono termini primitivi: gli assiomi li definiscono implicitamente.

2. C. A, B e D sono altri postulati (o loro conseguenze) e valgono anche nella geometria iperbolica.

3. D. Per il teorema di Girard $\alpha + \beta + \gamma - \pi = A/R^2 > 0$; $3\pi/2$ è solo il caso del triangolo con tre angoli retti.

4. A.

5. B. Il modello prova la coerenza relativa della geometria iperbolica e l'indipendenza del quinto postulato; non dice nulla su quale geometria valga nello spazio fisico.

6. C.

7. a) F: il suo ragionamento non era valido; l'ipotesi dell'angolo acuto è coerente quanto la geometria euclidea. b) V. c) F: gli angoli determinano il triangolo, quindi due triangoli simili sono congruenti. d) V. e) F: è una divulgazione; ne segue solo che un tale barbiere non esiste.

8. a) termini primitivi. b) coerente (non contraddittorio). c) indipendente; modello. d) eccesso sferico.

9. $30° = \pi/6$; $A = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 6371^2 \approx 42{,}5$ milioni di km^2. È $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{12}$ della superficie.

10. Eccesso: $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$; area $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$. È il triangolo con un vertice al polo e due sull'equatore, a 60° di longitudine l'uno dall'altro.

11. Somma 205°, eccesso $25° = \frac{5\pi}{36} \approx 0{,}436$ rad; $A \approx 6371^2 \cdot 0{,}436 \approx 17{,}7$ milioni di km^2.

12. Eccesso $\frac{50}{10^2} = 0{,}5$ rad $\approx 28{,}6°$; somma $\approx 180° + 28{,}6° = 208{,}6°$.

13. Eccesso $360° - 180° = \pi$; area πR^2, cioè un quarto di $4\pi R^2$.

14. A(R cos 30°; 0; R sen 30°), B(0; R cos 30°; R sen 30°); $\cos\theta = \text{sen}^2\, 30° = \frac{1}{4}$, $\theta \approx 75{,}52° \approx 1{,}318$ rad; arco ≈ 8398 km. Parallelo: $\frac{\pi}{2} \cdot R \cos 30° \approx 8667$ km. Si risparmiano circa 269 km.

15. Parallelo: metà di una circonferenza di raggio R cos 60° $= R/2$, cioè $\pi \cdot \frac{R}{2} \approx 10\,008$ km. I due punti stanno sullo stesso cerchio massimo (il meridiano 0°–180°), ciascuno a 30° dal polo: $\theta = 60°$, arco $R \cdot \frac{\pi}{3} \approx 6672$ km. La rotta più breve passa per il polo Nord.

16. Eccesso $\frac{10\,000}{6371^2} \approx 2{,}46 \cdot 10^{-4}$ rad $\approx 50{,}8'' \approx 51''$. L'eccesso è proporzionale all'area: con 100 000 km^2 è circa 508″, cioè circa 8,5′.

17. Per ogni punto passano 3 rette (una per ciascuno degli altri tre punti). Parallele: AB ∥ CD, AC ∥ BD, AD ∥ BC: tre classi di due rette ciascuna.

18. a) Quattro: {1, 2, 3}, {1, 4, 7}, {1, 5, 9}, {1, 6, 8}. b) Tra queste solo {1, 4, 7} non contiene 2, 5 o 8: è l'unica parallela. (Il controllo su tutte le coppie conferma che valgono A1–A4: ogni coppia di punti sta su una sola retta e per ogni punto esterno passa una sola parallela.) c) Entrambi sono modelli di A1–A4, ma l'enunciato «ci sono esattamente quattro punti» è vero nel primo e falso nel secondo: non si può né dimostrare né confutare a partire dagli assiomi.

19. Sommando le aree dei $n - 2$ triangoli, gli angoli dei triangoli ricompongono gli angoli del poligono: area $= R^2(S - (n-2)\pi)$. Quadrilatero: $S = 400° = \frac{20\pi}{9}$; $S - 2\pi = \frac{2\pi}{9}$; area $= 4 \cdot \frac{2\pi}{9} = \frac{8\pi}{9} \approx 2{,}79$.

20. DAB ≅ CBA per il primo criterio (AD ≅ BC, AB in comune, angoli retti in A e B), quindi BD ≅ AC. Poi ADC ≅ BCD per il terzo criterio (AD ≅ BC, DC in comune, AC ≅ BD), quindi ∠ADC ≅ ∠BCD. Nessun passaggio usa le parallele.

21. Due fusi di uguale angolo si sovrappongono con una rotazione attorno all'asse; un fuso di angolo $k\alpha$ è formato da k fusi di angolo α; quindi l'area è proporzionale all'angolo. Poiché $\alpha = 2\pi$ dà la sfera, $4\pi R^2$, la costante è $2R^2$. Per $\alpha = \pi$: $2\pi R^2$, un emisfero. Per $\alpha = 2\pi$: $4\pi R^2$.

22. Un risultato contrario all'intuizione non è una contraddizione: per una dimostrazione per assurdo occorre dedurre un enunciato e la sua negazione. L'ipotesi dell'angolo acuto non porta a contraddizioni (il disco di Poincaré ne è un modello), quindi il quinto postulato non è dimostrato, e non si può dimostrare.

23. Modello: due punti P e Q e una sola retta {P, Q}. A1 vale (la retta ha due punti), A2 vale (l'unica coppia sta sull'unica retta), A4 vale perché non c'è alcun punto esterno alla retta (l'assioma non chiede nulla), ma A3 è falso. Quindi A3 non si deduce da A1, A2, A4.

24. Dal barbiere si deduce soltanto che un barbiere con quella regola non esiste: nessuno ci obbligava a supporlo. Nel sistema di Frege, invece, ogni proprietà definiva un insieme, quindi l'esistenza di R era garantita da un principio del sistema, e la contraddizione $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ colpiva il sistema stesso, che andava cambiato.

25. Differenza di longitudine 120°. Parallelo: $\frac{2\pi}{3} \cdot R \cos 40° \approx 10\,222$ km. Cerchio massimo: $\cos\theta = \cos^2 40° \cdot \cos 120° + \operatorname{sen}^2 40° \approx 0{,}1198$, $\theta \approx 83{,}12° \approx 1{,}451$ rad; arco ≈ 9243 km. Si risparmiano circa 979 km.

26. Tre archi di un quarto di cerchio massimo: $3 \cdot \frac{\pi}{2} R \approx 30\,023$ km. Tre angoli retti: somma 270°. Area $\frac{\pi}{2} R^2 \approx 63{,}8$ milioni di km², un ottavo della superficie terrestre.

27. $1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \approx 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ rad; $A \approx 6371^2 \cdot 4{,}85 \cdot 10^{-6} \approx 197$ km².

28. a) Ogni retta contiene 3 coppie di punti; 7 rette danno 21 coppie, tante quante le coppie di 7 punti ($\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$); controllando l'elenco nessuna coppia compare due volte, quindi ogni coppia sta su una sola retta. b) Il controllo delle 21 coppie di rette mostra che ciascuna ha un solo punto in comune (per esempio {1, 2, 4} e {2, 3, 5} hanno in comune 2). c) Non esistono parallele: somiglia alla geometria ellittica (sferica).

29. B. Eccesso $\frac{\pi}{4}$; area $121 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 95{,}0$ cm².

30. a) Proporzionalità diretta (eccesso = A/R^2 in radianti): con area 40 milioni di km² l'eccesso è circa 56,5° (più precisamente 56,46°). b) La metà di 14,1°: circa 5 milioni di km².

31. Traccia: 1) il quinto postulato e i tentativi di dimostrarlo, fino a Saccheri (1733); 2) Lobačevskij (1829) e Bolyai (1832): una geometria coerente con infinite parallele; la sfera e Riemann (1854); 3) i modelli (Beltrami 1868, il disco di Poincaré) e la coerenza relativa: il postulato è indipendente; 4) Kant: lo spazio come forma a priori della sensibilità e la geometria euclidea come sapere sintetico a priori, messo in crisi dalla pluralità delle geometrie; 5) il convenzionalismo di Poincaré e l'analogia con il sistema metrico; con Hilbert (1899) gli assiomi diventano definizioni implicite; 6) la relatività generale (1915): una geometria curva descrive la gravità; il concetto di modello.

32. $\mathbf{a} = (\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{b} = (0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{n} = (0; 0; 1)$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2}$. $\mathbf{t}_1 = (-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, $\mathbf{t}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4})$. $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $|\mathbf{t}_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\mathbf{t}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$; il coseno dell'angolo in A è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi l'angolo misura circa 54,74°; per simmetria anche quello in B. Somma $\approx 199{,}47°$, eccesso $\approx 19{,}47° \approx 0{,}3398$ rad; area $\approx 6371^2 \cdot 0{,}3398 \approx 13{,}8$ milioni di km².