CAPITOLO

10

Primitive, aree e volumi

Una botte, una sfera, il lavoro di una molla: per misurarli basta tagliare a fette, sommare e passare al limite. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere l'integrale indefinito come insieme delle primitive e calcolare gli integrali immediati, verificandoli derivando.
2. Calcolare integrali quasi immediati riconoscendo la derivata di una funzione composta.
3. Calcolare l'area di una regione compresa tra una curva e l'asse x, o tra due curve, e ritrovare il teorema di Archimede sul segmento parabolico.
4. Calcolare volumi con il metodo delle sezioni e con la formula dei solidi di rotazione: piramide, cono, sfera.
5. Usare l'integrale in fisica: spostamento e distanza percorsa, lavoro di una forza variabile, carica elettrica.
6. Collegare il calcolo dei volumi alla sua storia, da Archimede a Cavalieri, e al problema filosofico dell'infinito.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 L'integrale indefinito 2
10.2 Il calcolo delle aree 8
10.3 Il calcolo dei volumi 12
10.4 L'integrale in fisica 17

Matematica 5 · Parte IV · Il calcolo integrale · versione 1.0
Capitolo 10: Primitive, aree e volumi · pagine 261–286 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 9 l'integrale definito è nato da un problema antico, l'area di una figura dal contorno curvo, e il teorema fondamentale del calcolo integrale ha mostrato che quel problema si risolve «al contrario» con le derivate: per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ basta trovare una funzione G con $G'(x) = f(x)$ e fare la differenza $G(b) - G(a)$. Tutto il lavoro si sposta allora su una domanda nuova: *data una funzione, quale funzione ha quella come derivata?*

In questo capitolo impariamo a rispondere nei casi semplici, quelli che le *Indicazioni nazionali* chiedono al liceo classico: i polinomi, le funzioni elementari e le loro composizioni più facili da riconoscere. Poi usiamo lo strumento per ciò per cui è nato: calcolare aree di figure piane, volumi di solidi (il cono, la piramide, la sfera di Archimede) e grandezze fisiche che si «accumulano» nel tempo o nello spazio, come lo spazio percorso, il lavoro di una forza variabile, la carica che attraversa un circuito. Il filo conduttore è sempre lo stesso: *tagliare a fette, sommare, passare al limite*.

10.1 L'integrale indefinito

10.1.1 Primitive

Ricordiamo la definizione data nel capitolo 9. Una funzione F è una **primitiva** di f in un intervallo I se è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Per esempio x^2 è una primitiva di $2x$, e $\operatorname{sen} x$ è una primitiva di $\cos x$. Una primitiva non è mai sola: anche $x^2 + 1$, $x^2 - 5$ e $x^2 + \pi$ hanno derivata $2x$, perché la derivata di una costante è zero.

Il capitolo 6 ci assicura che non ce ne sono altre. Se F e G sono due primitive di f nello stesso intervallo, la loro differenza ha derivata $F' - G' = f - f = 0$, e una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante (è una conseguenza del teorema di Lagrange). Quindi *due primitive della stessa funzione in un intervallo differiscono per una costante*, e trovata una primitiva F le abbiamo trovate tutte: sono le funzioni $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. I loro grafici si ottengono l'uno dall'altro con una traslazione verticale (Figura 10.1): in ogni punto di ascissa x hanno tangenti parallele, perché hanno la stessa derivata.

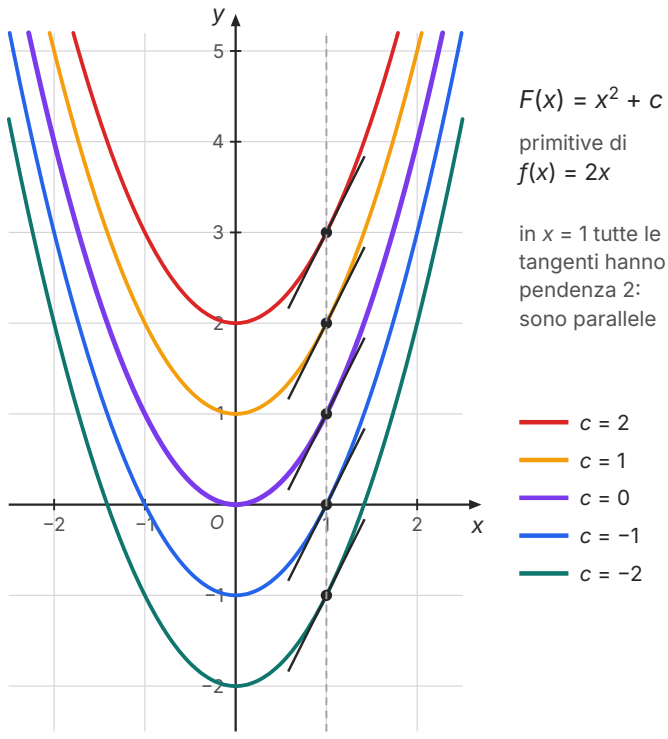

Figura 10.1 Le primitive di $f(x) = 2x$ sono le funzioni $F(x) = x^2 + c$: i loro grafici sono parabole traslate verticalmente l'una rispetto all'altra. Nel punto di ascissa 1 le tangenti hanno tutte pendenza $f(1) = 2$ e sono parallele. Curve calcolate dalle equazioni, scala uguale sui due assi.

L'insieme di tutte le primitive di f si chiama **integrale indefinito** di f e si scrive

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

La funzione f si chiama **funzione integranda**, c è la **costante di integrazione**. Il simbolo è lo stesso dell'integrale definito, ma senza estremi, e il significato è diverso: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è un *numero*, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ è un *insieme di funzioni*. Il legame tra i due è la formula di Newton–Leibniz: per calcolare il numero basta un elemento qualsiasi dell'insieme, perché nella differenza $[F(b) + c] - [F(a) + c]$ la costante si cancella.

IN SINTESI

Integrale indefinito. Se F è una primitiva di f nell'intervallo I, allora $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, e ogni primitiva di f in I è di questa forma.

Linearità. Per ogni coppia di numeri reali h e k:

$$\int [hf(x) + kg(x)]\,dx = h\int f(x)\,dx + k\int g(x)\,dx$$

Verifica. Un risultato $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ è giusto se e solo se $F'(x) = f(x)$: si controlla sempre derivando.

La linearità discende dalle regole di derivazione del capitolo 6: se $F' = f$ e $G' = g$, allora $(hF + kG)' = hf + kg$. Grazie a essa un polinomio si integra termine per termine. Attenzione però: non esiste una regola altrettanto semplice per il prodotto. La derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate, e allo stesso modo *l'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali*.

10.1.2 Gli integrali immediati

Ogni regola di derivazione, letta da destra a sinistra, dà un integrale. Quelli che si ottengono rovesciando direttamente le derivate delle funzioni elementari si chiamano **integrali immediati** e sono raccolti nella Tabella 10.1. Per le potenze, poiché la derivata di $x^{\alpha+1}$ è $(\alpha+1)\,x^{\alpha}$, basta dividere per $\alpha + 1$:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$

La formula vale per ogni esponente reale diverso da -1, quindi anche per le radici e per le potenze negative: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Per $\alpha = -1$ darebbe una divisione per zero, e infatti la primitiva di $\frac{1}{x}$ non è una potenza: è il logaritmo. Per $x > 0$ sappiamo che $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; per $x < 0$ la funzione $\ln(-x)$ è definita e, per la regola della funzione composta, ha derivata $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Le due formule si riassumono in una sola:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

che va letta in un intervallo che non contiene lo zero: $\frac{1}{x}$ non è definita in 0, e una sua primitiva riguarda o i numeri positivi o i negativi, non entrambi insieme.

Tabella 10.1 Integrali immediati. Ogni riga si verifica derivando la colonna di destra.

Integrale	Risultato	Derivata che si rovescia
$\int x^{\alpha}\,dx$, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\,x^{\alpha}$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x}$
$\int e^{x}\,dx$	$e^{x} + c$	$(e^{x})' = e^{x}$
$\int a^{x}\,dx$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$	$(a^{x})' = a^{x}\ln a$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$-\cos x + c$	$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
$\int \cos x\,dx$	$\operatorname{sen} x + c$	$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + c$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arctg} x + c$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

L'ultima riga mantiene una promessa del capitolo 6, dove avevamo trovato la derivata dell'arcotangente. Letta al contrario, con la formula di Newton–Leibniz, dice che l'area sotto il grafico di $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ tra 0 e 1 vale $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$: una curva razionale, senza alcun cerchio in vista, racchiude un'area legata a π.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola: a) $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$; b) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x}\right) dx$; c) $\int (e^x - 3\cos x)\,dx$; d) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$.

a) Per la linearità si integra termine per termine: $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + c = x^3 - 2x^2 + 5x + c$. Verifica: $(x^3 - 2x^2 + 5x)' = 3x^2 - 4x + 5$ ✓.

b) Scriviamo le funzioni come potenze: $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ e $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Allora $\int 2x^{-3}\,dx = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x^2}$ e $\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Risultato: $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$, per $x > 0$. Verifica: $(-x^{-2})' = 2x^{-3}$ e $\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = x^{1/2}$ ✓.

c) $\int e^x\,dx - 3\int \cos x\,dx = e^x - 3\,\mathrm{sen}\,x + c$.

d) La frazione non è nella tabella, ma si divide termine per termine: $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$. Quindi $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$. Verifica: $\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)' = x + \frac{1}{x}$ ✓.

Spesso, tra tutte le primitive, ne serve una sola: quella che in un punto assegnato assume un valore assegnato. È il caso della fisica, dove da una velocità $v(t)$ si vuole ricavare la posizione $s(t)$, sapendo dove si trovava il corpo all'istante iniziale. Per esempio, la primitiva di $f(x) = 6x - 2$ il cui grafico passa per $P(1; 4)$ si trova così: tutte le primitive sono $F(x) = 3x^2 - 2x + c$; la condizione $F(1) = 4$ dà $3 - 2 + c = 4$, cioè $c = 3$, e la funzione cercata è $F(x) = 3x^2 - 2x + 3$. Fra le parabole traslate della Figura 10.1, la condizione iniziale sceglie quella che passa per il punto dato.

ERRORE FREQUENTE

Tre errori da evitare.

- Applicare la formula delle potenze con $\alpha = -1$: «$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0}$» non ha senso. La primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x|$.
- Integrare un prodotto come prodotto di integrali: $\int x \cdot x\,dx$ non è $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$, ma $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$. Derivando $\frac{x^4}{4}$ si ottiene x^3, non x^2: la verifica smaschera subito l'errore.
- Dimenticare la costante: $\int 2x\,dx = x^2$ è incompleto. Si scrive $x^2 + c$, perché la risposta è un insieme di funzioni, non una sola.

10.1.3 Gli integrali quasi immediati

La regola della catena (capitolo 6) dice che $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Letta al contrario: se l'integranda è il prodotto di una funzione «esterna» calcolata in $f(x)$ e della derivata $f'(x)$ della funzione «interna», allora l'integrale si scrive subito. Questi integrali si chiamano **integrali quasi immediati**: non sono nella tabella, ma ci si arriva riconoscendo in essi la derivata di una funzione composta.

IN SINTESI

Integrali quasi immediati. Se f è derivabile:

- $\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \neq -1)$;
- $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$;
- $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$;
- $\int \cos(kx)\,dx = \dfrac{1}{k}\operatorname{sen}(kx) + c$ e $\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) + c$ $(k \neq 0)$.

Quando la derivata della funzione interna manca solo di un fattore costante, si moltiplica e si divide per quel fattore. Se manca un fattore che dipende da x, l'integrale *non* è quasi immediato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola: a) $\int 2x\,(x^2+1)^4\,dx$; b) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$; c) $\int 3x^2\,e^{x^3}\,dx$; d) $\int \cos(3x)\,dx$; e) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

a) La funzione interna è $f(x) = x^2 + 1$, e $2x$ è proprio $f'(x)$: l'integranda è $[f(x)]^4 f'(x)$. Risultato: $\frac{(x^2+1)^5}{5} + c$. Verifica: $[\frac{(x^2+1)^5}{5}]' = (x^2+1)^4 \cdot 2x$ ✓.

b) Il denominatore ha derivata $2x$; al numeratore c'è x, cioè metà della derivata. Moltiplichiamo e dividiamo per 2: $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c$. Il valore assoluto non serve, perché $x^2 + 3 > 0$.

c) $3x^2$ è la derivata dell'esponente x^3: $\int 3x^2\,e^{x^3}\,dx = e^{x^3} + c$.

d) $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + c$. Verifica: $[\frac{1}{3}\,\text{sen}(3x)]' = \frac{1}{3} \cdot \cos(3x) \cdot 3 = \cos(3x)$ ✓. Il fattore $\frac{1}{3}$ compensa il 3 che la regola della catena fa comparire.

e) $\sqrt{2x+1} = (2x+1)^{1/2}$ e la derivata della funzione interna è 2, una costante: $\int (2x+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + c$.

Non ogni funzione elementare ha una primitiva elementare. Il capitolo 9 ha già incontrato e^{-x^2}: la sua primitiva esiste (il teorema fondamentale lo garantisce, perché la funzione è continua), ma non si può scrivere con un numero finito di polinomi, esponenziali, logaritmi e funzioni goniometriche, e per i suoi integrali definiti si usano i metodi approssimati. Al contrario, $\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c$ è quasi immediato: il fattore x è, a meno di una costante, la derivata dell'esponente. Basta un fattore x per trasformare un integrale impossibile in uno di una riga; per questo, prima di integrare, conviene sempre chiedersi *di quale funzione composta questa può essere la derivata*.

10.2 Il calcolo delle aree

10.2.1 Area tra una curva e l'asse x

Nel capitolo 9 l'integrale definito è stato introdotto come *area con segno*: le parti di piano sopra l'asse x contano positivamente, quelle sotto negativamente. Se vogliamo l'area vera, cioè un numero positivo che misura la regione, dobbiamo prima capire dove la funzione cambia segno e poi integrare separatamente sugli intervalli in cui il segno è costante, prendendo il valore assoluto dei risultati. In formula, l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x in $[a; b]$ è

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx$ e l'area della regione compresa tra il grafico di $f(x) = x^2 - 2x$, l'asse x e la retta $x = 3$ (Figura 10.2).

1. Il segno. $f(x) = x(x - 2)$ è negativa in $]0; 2[$ e positiva per $x > 2$.

2. Una primitiva. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$.

3. I due pezzi. $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = \dfrac{8}{3} - 4 = -\dfrac{4}{3}$ e $\int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = 0 - \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$.

4. Conclusione. L'integrale su $[0; 3]$ è $-\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = 0$: le due parti si compensano esattamente. L'area invece è $\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

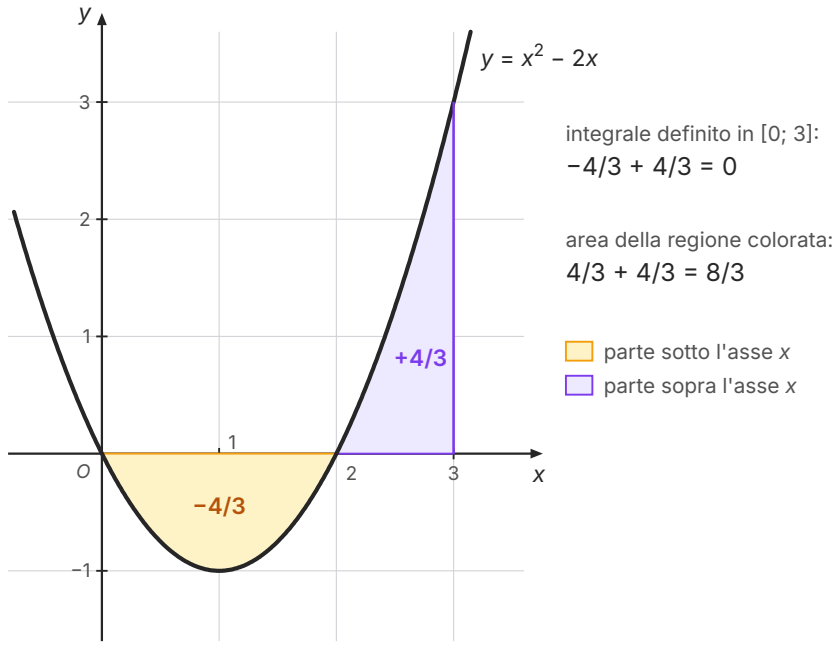

Figura 10.2 La regione tra $y = x^2 - 2x$ e l'asse x in $[0; 3]$. La parte sotto l'asse (arancio) ha integrale $-\dfrac{4}{3}$, quella sopra (viola) $+\dfrac{4}{3}$: l'integrale definito su $[0; 3]$ è zero, ma l'area della regione è $\dfrac{8}{3}$. Scala uguale sui due assi.

L'esempio mostra perché un integrale nullo non significa una funzione nulla, né una regione senza area: significa soltanto che le parti sopra e sotto l'asse hanno la stessa misura. Lo stesso accade per sen x su $[0; 2\pi]$, come si è visto nel capitolo 9.

10.2.2 Area tra due curve

Supponiamo che in $[a; b]$ i grafici di due funzioni continue f e g non si incrocino e che sia $f(x) \geq g(x)$. La regione compresa tra i due grafici e le rette $x = a$ e $x = b$ si può tagliare in strisce verticali sottilissime: quella di ascissa x è alta $f(x) - g(x)$, qualunque sia la posizione dei due grafici rispetto all'asse x. Sommando le strisce e passando al limite, come nel capitolo 9, si ottiene la formula dell'**area tra due curve**:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (f(x) \geq g(x) \text{ in } [a; b])$$

Spesso gli estremi a e b non sono dati: sono le ascisse dei punti in cui le due curve si incontrano, e si trovano risolvendo l'equazione $f(x) = g(x)$. Se le curve si incrociano più volte, si divide l'intervallo nei punti di intersezione e in ogni pezzo si sottrae la funzione che sta sotto da quella che sta sopra.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = x^2 - 2x$ e dalla retta $y = x + 4$ (Figura 10.3).

1. Intersezioni. $x^2 - 2x = x + 4$ dà $x^2 - 3x - 4 = 0$, cioè $(x + 1)(x - 4) = 0$: $x = -1$ e $x = 4$. I punti comuni sono $A(-1; 3)$ e $B(4; 8)$.

2. Chi sta sopra. In $x = 0$ la retta vale 4 e la parabola 0: tra -1 e 4 la retta sta sopra.

3. L'integrale. $A = \int_{-1}^{4} [(x + 4) - (x^2 - 2x)]\,dx = \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{4}$. Il valore in 4 è $-\frac{64}{3} + 24 + 16 = \frac{56}{3}$, quello in -1 è $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 = -\frac{13}{6}$. Quindi $A = \frac{56}{3} + \frac{13}{6} = \frac{125}{6}$.

4. Il controllo di Archimede. Il punto C della parabola in cui la tangente è parallela ad AB ha ascissa $\frac{3}{2}$, punto medio di -1 e 4 (lì la pendenza della parabola, $2x - 2$, vale 1 come quella della retta): $C(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4})$. Il segmento verticale da C alla retta è lungo $\frac{11}{2} + \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$ e divide il triangolo ABC in due triangoli con questa base comune e altezze orizzontali che sommate danno 5: l'area di ABC è $\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot 5 = \frac{125}{8}$. E $\frac{125}{6} : \frac{125}{8} = \frac{4}{3}$ ✓.

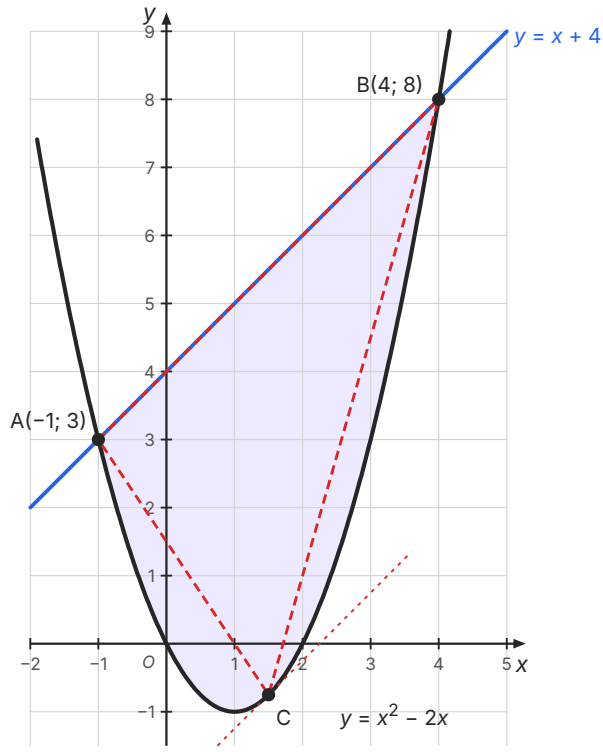

Figura 10.3 Il segmento parabolico tra $y = x^2 - 2x$ e $y = x + 4$ (viola) ha area $\frac{125}{6}$; il triangolo *ABC* di Archimede (tratteggiato in rosso), con *C* nel punto in cui la tangente è parallela alla corda *AB*, ha area $\frac{125}{8}$. Il rapporto è $\frac{4}{3}$. Scala uguale sui due assi.

Il controllo dell'ultimo passo non è un caso. In *Matematica 3* (cap. 6) abbiamo enunciato il teorema di Archimede: ogni segmento parabolico è i $\frac{4}{3}$ del triangolo inscritto che ha per vertice il punto in cui la tangente è parallela alla corda; nel capitolo 9 lo abbiamo ritrovato con una serie geometrica. Con l'integrale la dimostrazione sta in una riga. Se la parabola $y = ax^2 + bx + c$ (con $a > 0$) e la retta si incontrano nei punti di ascisse $x_1 < x_2$, la differenza tra retta e parabola è un polinomio di secondo grado che si annulla in x_1 e in x_2 e ha coefficiente direttivo $-a$, cioè $a(x - x_1)(x_2 - x)$. Traslando la figura in modo che $x_1 = 0$ (una traslazione non cambia le aree) e posto $d = x_2 - x_1$:

$$A = a \int_0^d t(d - t)\,\mathrm{d}t = a\left[\frac{d\,t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^d = \frac{a\,d^3}{6}$$

Il triangolo di Archimede ha il vertice nel punto di ascissa media $\frac{x_1 + x_2}{2}$, dove la distanza verticale tra retta e parabola vale $a \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{a\,d^2}{4}$; come nell'esempio, la sua area è $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\,d^2}{4} \cdot d = \frac{a\,d^3}{8}$. Il rapporto è $\frac{a\,d^3}{6} : \frac{a\,d^3}{8} = \frac{4}{3}$, qualunque sia la parabola. Ciò che ad Archimede costò un trattato, l'integrale lo dà con un calcolo; ma il risultato è suo, ottenuto più di diciotto secoli prima del teorema fondamentale.

Lo stesso metodo vale per due parabole. Le parabole $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$ si incontrano dove $2x^2 = 8$, cioè in $x = \pm 2$; tra i due punti la seconda sta sopra (in $x = 0$ vale 8), e l'area della regione racchiusa è $\int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$.

Anche l'area dell'ellisse di semiassi a e b, trovata in *Matematica 4* (cap. 2) con una dilatazione, ha ora una giustificazione rigorosa. La semiellisse superiore è il grafico di $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, cioè della semicirconferenza di raggio a moltiplicata per il fattore costante $\frac{b}{a}$. Per la linearità, l'integrale viene moltiplicato per lo stesso fattore: l'area dell'ellisse è $\frac{b}{a}$ volte l'area del cerchio di raggio a, cioè $\frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$. L'argomento «per strisce» di *Matematica 4* era proprio questo: ogni striscia verticale del cerchio viene allungata o accorciata dello stesso fattore.

DA RICORDARE

Area = integrale solo se la funzione è positiva. L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è un'area con segno; l'area di una regione è $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Prima di calcolare un'area: 1) trova dove la funzione (o la differenza tra le due funzioni) si annulla; 2) stabilisci il segno in ogni intervallo; 3) integra sopra meno sotto; 4) controlla che il risultato sia positivo e, se puoi, confrontalo con una figura nota (un triangolo, un rettangolo).

10.3 Il calcolo dei volumi

10.3.1 Il metodo delle sezioni

In *Matematica 4* (cap. 6) abbiamo studiato le posizioni di rette e piani nello spazio e i solidi principali, ma non abbiamo dimostrato le formule dei loro volumi. Ora abbiamo lo strumento per farlo. L'idea è quella che nel Seicento Bonaventura Cavalieri chiamava degli *indivisibili* (capitolo 9): un solido si pensa come una pila di fette sottilissime, come un libro è una pila di pagine.

Fissiamo un asse x e supponiamo che il solido stia tra i piani perpendicolari all'asse nei punti a e b. Il piano perpendicolare all'asse nel punto x taglia il solido in una figura piana, la **sezione**, di area $S(x)$. Dividiamo $[a; b]$ in n parti uguali di ampiezza Δx: il solido si spezza in n fette,

e la fetta che parte da x_i è quasi un cilindro di base $S(x_i)$ e altezza Δx, con volume circa $S(x_i) \cdot \Delta x$. La somma $S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \ldots + S(x_n)\Delta x$ è una somma del tipo studiato nel capitolo 9, e quando $n \to +\infty$, se S è continua, tende all'integrale. Così si ottiene il **metodo delle sezioni**:

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

Una conseguenza è immediata. Se due solidi, compresi tra gli stessi due piani paralleli, hanno sezioni di area uguale a ogni altezza, le due funzioni $S(x)$ coincidono e quindi anche i due integrali: i solidi hanno lo stesso volume. È il **principio di Cavalieri**, pubblicato nella *Geometria indivisibilibus* del 1635, che ora non è più un principio ma un teorema. Per esempio, una pila di monete dritta e la stessa pila spinta di lato, obliqua, hanno lo stesso volume: a ogni altezza la sezione è una moneta. Qualche anno prima, nella *Nova stereometria* del 1615, Keplero aveva calcolato i volumi delle botti di vino immaginandole scomposte in infinite parti sottilissime.

IN SINTESI

Metodo delle sezioni. Se un solido è compreso tra i piani perpendicolari all'asse x in a e in b, e la sua sezione nel punto x ha area $S(x)$, funzione continua, allora $V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Principio di Cavalieri. Due solidi compresi tra due piani paralleli, che ogni piano parallelo a quelli taglia in sezioni di area uguale, hanno volume uguale.

Il volume della piramide. Prendiamo una piramide di base B e altezza h, con il vertice V nell'origine e l'asse x perpendicolare alla base (Figura 10.4). La sezione a distanza x dal vertice è un poligono simile alla base, con i lati ridotti nel rapporto $\frac{x}{h}$ (per il teorema di Talete). Le aree di figure simili stanno come i quadrati dei lati, quindi $S(x) = B \cdot \frac{x^2}{h^2}$, e

$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Bh$$

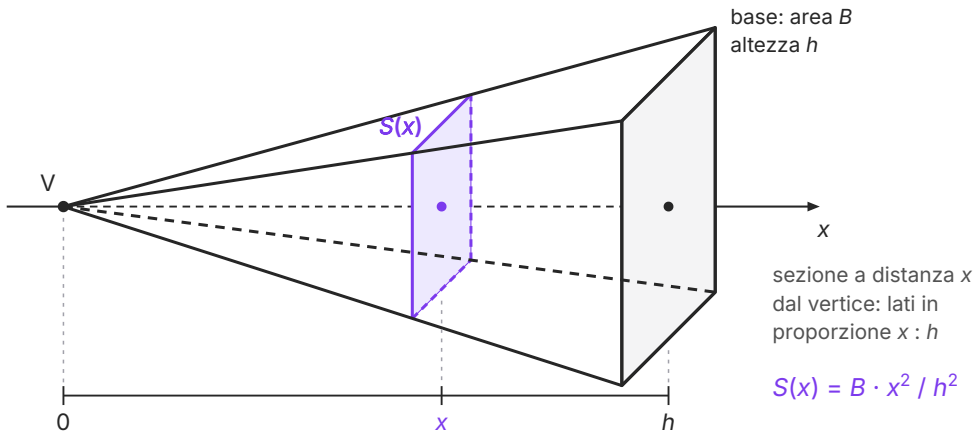

Figura 10.4 Il metodo delle sezioni per una piramide a base quadrata di area B e altezza h, con l'asse x perpendicolare alla base e il vertice V nell'origine. La sezione a distanza x da V (viola) è un quadrato simile alla base, di area $S(x) = B \cdot \frac{x^2}{h^2}$. Proiezione cavaliera (45°, rapporto ½); spigoli e segmenti nascosti tratteggiati.

Il fattore $\frac{1}{3}$, che a scuola si impara a memoria, viene dall'integrale di x^2: è lo stesso $\frac{1}{3}$ dell'area sotto la parabola del capitolo 9. Euclide lo aveva dimostrato con il metodo di esaustione, in modo molto più laborioso. E il risultato non dipende dalla forma della base né dalla posizione del vertice: due piramidi con basi equivalenti e la stessa altezza hanno sezioni equivalenti a ogni altezza, quindi, per il principio di Cavalieri, lo stesso volume.

10.3.2 I solidi di rotazione

Facciamo ruotare di un giro completo attorno all'asse x la regione compresa tra il grafico di una funzione continua f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$. Si ottiene un **solido di rotazione**: un vaso, una trottola, una botte. Ogni sezione perpendicolare all'asse è un cerchio, descritto dal punto $(x; f(x))$, il cui raggio è $|f(x)|$: la sua area è $S(x) = \pi[f(x)]^2$. Il metodo delle sezioni dà

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Ogni fetta è un cilindretto, un disco di raggio $f(x)$ e spessore dx, di volume $\pi[f(x)]^2\,dx$: la formula non fa che sommarli (Figura 10.5). Le due applicazioni classiche sono il cono e la sfera.

Il cono. Il segmento di equazione $y = \frac{r}{h}\,x$, con $0 \le x \le h$, ruotando attorno all'asse x descrive un cono di altezza h e raggio di base r. Allora $V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}\,x^2\,dx = \pi\,\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} =$

$\frac{1}{3}\,\pi\, r^2 h$: il cono è un terzo del cilindro con la stessa base e la stessa altezza, come la piramide lo è del prisma.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che il volume della sfera di raggio r è $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$.

1. Il solido di rotazione. La sfera si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x la semicirconferenza superiore di centro O e raggio r, grafico di $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ in $[-r; r]$ (Figura 10.5, a destra).

2. Le sezioni. $[f(x)]^2 = r^2 - x^2$: la radice scompare, ed è per questo che il calcolo è facile. La sezione nel punto x è un cerchio di area $\pi(r^2 - x^2)$, che è anche, per il teorema di Pitagora, l'area del cerchio tagliato dal piano a distanza $|x|$ dal centro.

3. L'integrale. $V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\,[r^2 x - \frac{x^3}{3}]_{-r}^{r} = \pi\,[(r^3 - \frac{r^3}{3}) - (-r^3 + \frac{r^3}{3})] = \pi \cdot \frac{4r^3}{3}$.

4. Controllo. La sfera sta dentro il cilindro di raggio r e altezza $2r$, di volume $2\pi r^3$, e contiene il cubo inscritto, di spigolo $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ e volume circa $1{,}54\ r^3$: il risultato, $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}19\ r^3$, è compreso tra $1{,}54\ r^3$ e $2\pi r^3 \approx 6{,}28\ r^3$ ✓.

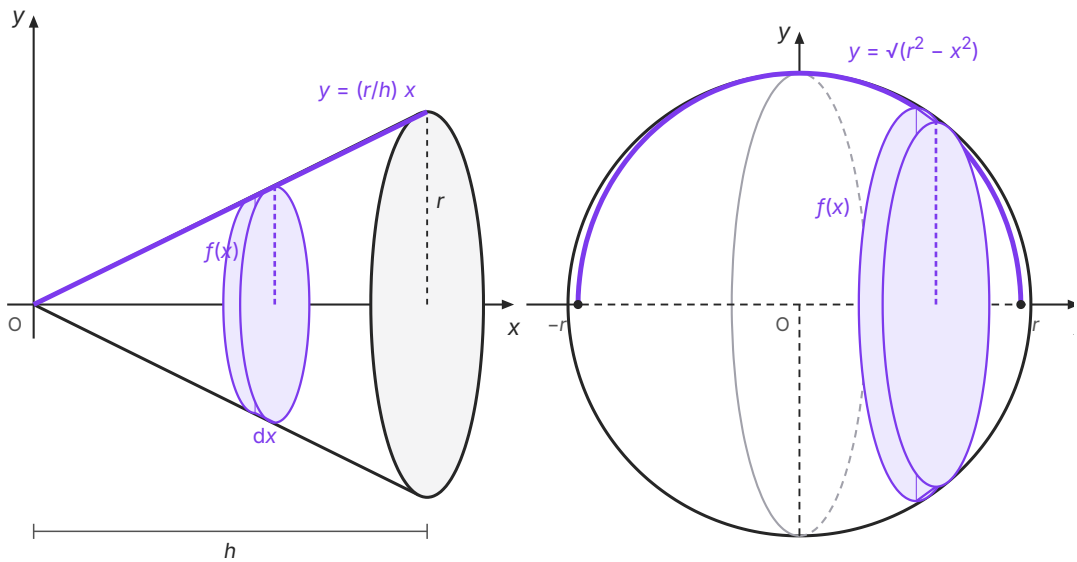

Figura 10.5 Due solidi di rotazione attorno all'asse x. A sinistra il cono generato dal segmento $y = \frac{r}{h}\,x$, $0 \le x \le h$; a destra la sfera generata dalla semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. In viola la linea che ruota e una fetta di spessore dx, un disco di raggio $f(x)$ e volume $\pi[f(x)]^2\,dx$. Proiezione ortogonale; linee nascoste tratteggiate.

Il paraboloide. Facendo ruotare il ramo di parabola $y = r\sqrt{x/h}$, con $0 \le x \le h$, si ottiene un paraboloide, la forma di una coppa o di un'antenna parabolica, di altezza h e raggio di apertura r. Qui $[f(x)]^2 = \dfrac{r^2}{h}\,x$ e $V = \pi\,\dfrac{r^2}{h} \cdot \dfrac{h^2}{2} = \dfrac{1}{2}\,\pi\,r^2\,h$: il paraboloide è *metà* del cilindro circoscritto, mentre il cono ne è un terzo.

ERRORE FREQUENTE

Il quadrato al posto sbagliato. La formula è $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$: si eleva al quadrato la funzione, poi si integra. Non è $\pi \int f(x)\,dx$ e non è $(\pi \int f(x)\,dx)^2$. Per il cono generato da $y = x$ in $[0; 3]$ la formula giusta dà $\pi \int_0^3 x^2\,dx = 9\pi$, mentre $\pi \int_0^3 x\,dx = \dfrac{9}{2}\pi$ è sbagliato. Un controllo rapido sono le unità di misura: se x e $f(x)$ sono lunghezze, $[f(x)]^2\,dx$ è una lunghezza al cubo, cioè un volume; $f(x)\,dx$ è un'area, e $(\int f\,dx)^2$ una lunghezza alla quarta.

APPROFONDIMENTO · LA SFERA E IL CILINDRO DI ARCHIMEDE

Nell'opera *Sulla sfera e il cilindro* Archimede dimostrò che la sfera è i $\dfrac{2}{3}$ del cilindro circoscritto, cioè del cilindro di raggio r e altezza $2r$, sia nel volume sia nella superficie, se si contano anche le due basi. Oggi la verifica richiede due righe: il cilindro ha volume $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, e $\dfrac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \dfrac{2}{3}$; la sua superficie totale è $2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$, e la superficie della sfera, $4\pi r^2$, ne è i $\dfrac{2}{3}$.

Aggiungendo il cono che ha per base una base del cilindro e per vertice il centro dell'altra, il suo volume è $\dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \dfrac{2}{3}\pi r^3$. Cono, sfera e cilindro della stessa larghezza e della stessa altezza stanno dunque come $1 : 2 : 3$ (Figura 10.6). Secondo la tradizione Archimede considerava questo il suo risultato più bello e volle sulla propria tomba una sfera inscritta in un cilindro; Cicerone, nelle *Tusculanae disputationes*, racconta di averla ritrovata, abbandonata tra i rovi, durante il suo soggiorno in Sicilia.

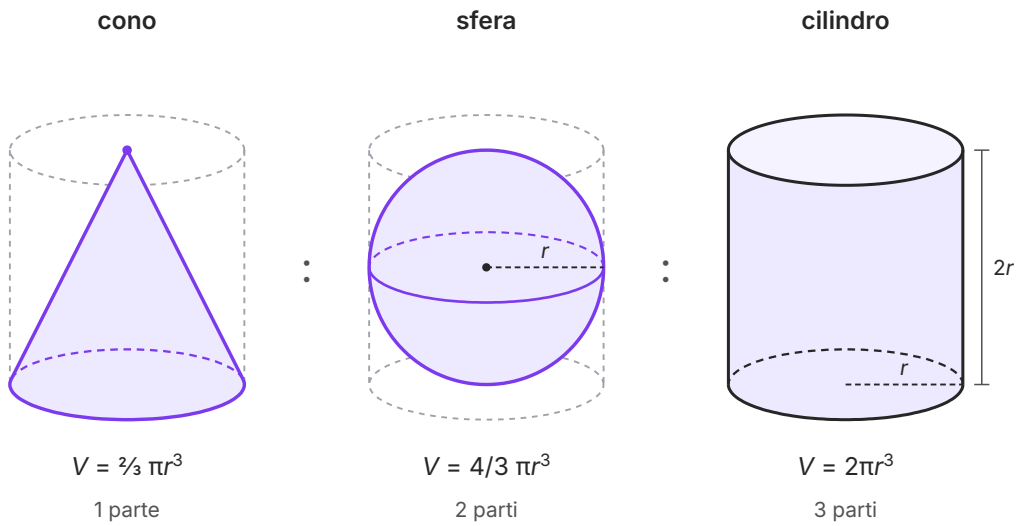

Figura 10.6 Cono, sfera e cilindro con lo stesso raggio r e la stessa altezza $2r$: i volumi $\frac{2}{3}\pi r^3$, $\frac{4}{3}\pi r^3$ e $2\pi r^3$ stanno come $1 : 2 : 3$. Il cilindro circoscritto è tratteggiato attorno al cono e alla sfera. Proiezione ortogonale; linee nascoste tratteggiate.

10.4 L'integrale in fisica

10.4.1 Spostamento e spazio percorso

Nel capitolo 9 abbiamo visto che, per un corpo che si muove lungo una retta, l'area sotto il grafico velocità–tempo è lo spazio percorso. Ora possiamo essere più precisi. Se $s(t)$ è la posizione e $v(t) = s'(t)$ la velocità, s è una primitiva di v, e la formula di Newton–Leibniz dà

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(t_2) - s(t_1)$$

Il risultato è lo **spostamento**, cioè la differenza tra la posizione finale e quella iniziale. Se la velocità cambia segno, cioè il corpo torna indietro, lo spostamento non coincide con la strada fatta: i tratti percorsi all'indietro contano con il segno meno. La **distanza percorsa**, ciò che misurerebbe il contachilometri, è invece $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$, come l'area è l'integrale del valore assoluto.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un carrello si muove lungo una rotaia con velocità $v(t) = 6 - 2t$, in m/s, per $0 \le t \le 5$ s (dati inventati). Calcola lo spostamento e la distanza percorsa nei 5 secondi (Figura 10.7).

1. Il segno della velocità. $v(t) = 0$ per $t = 3$: fino a 3 s il carrello avanza, poi torna indietro.

2. Lo spostamento. $\int_0^5 (6 - 2t)\,dt = [6t - t^2]_0^5 = 30 - 25 = 5$ m.

3. I due tratti. $\int_0^3 (6 - 2t)\,dt = 18 - 9 = 9$ m in avanti; $\int_3^5 (6 - 2t)\,dt = (30 - 25) - (18 - 9) = -4$ m, cioè 4 m all'indietro.

4. La distanza percorsa. $9 + 4 = 13$ m. Il carrello ha fatto 13 m di strada, ma alla fine si trova solo 5 m più avanti del punto di partenza.

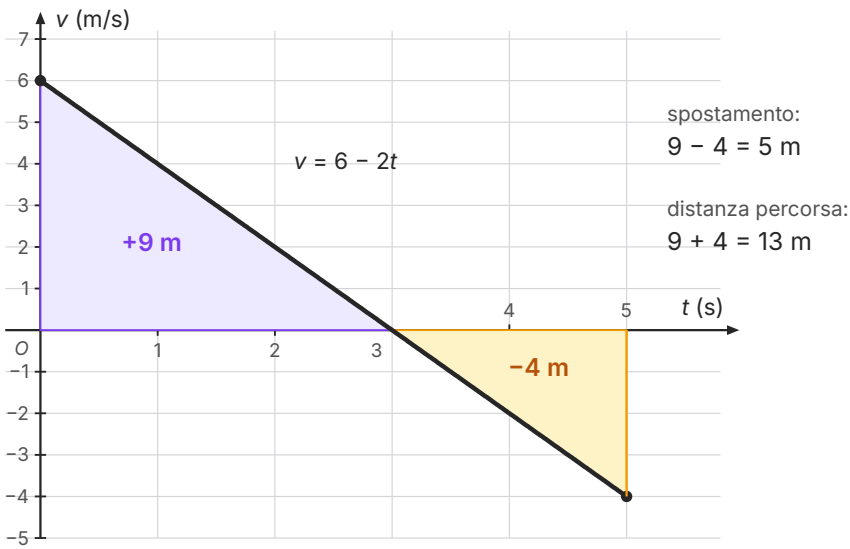

Figura 10.7 Il grafico velocità–tempo $v = 6 - 2t$ del carrello. L'area viola (9 m) è il tratto percorso in avanti, quella arancio (4 m) il ritorno: l'integrale su [0; 5] è lo spostamento, 9 − 4 = 5 m; la somma delle aree è la distanza percorsa, 13 m. Scale diverse sui due assi.

Il *valore medio* del capitolo 9 ha qui un significato fisico familiare: la velocità media in un intervallo è lo spostamento diviso per il tempo, $\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. Per il carrello, nei primi 3 secondi vale $\frac{9}{3} = 3$ m/s.

10.4.2 Il lavoro di una forza variabile

Il lavoro di una forza costante F che sposta il suo punto di applicazione di un tratto s nella sua stessa direzione è $W = F \cdot s$ (*Matematica 4*, cap. 5): nel piano $(x; F)$ è l'area di un rettangolo. Se la

forza cambia da punto a punto, si divide lo spostamento in tratti piccoli, in ciascuno dei quali la forza è quasi costante, si sommano i lavori $F(x)\,\Delta x$ e si passa al limite. Si ottiene così il **lavoro di una forza variabile**: se la forza, diretta lungo l'asse x, vale $F(x)$ e il suo punto di applicazione va da a a b, il lavoro è

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

L'esempio più semplice è la molla. Per la legge di Hooke, per tenere una molla allungata di x rispetto alla posizione di riposo occorre una forza $F(x) = kx$, dove k è la costante elastica. Il lavoro per allungarla da 0 a x_1 è $W = \int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,k\,x_1^2$, l'area del triangolo della Figura 10.8. Per una molla con $k = 200$ N/m allungata di 15 cm: $W = \dfrac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}15^2 = 2{,}25$ J. L'energia potenziale elastica $\dfrac{1}{2}kx^2$, che si incontra in fisica, è proprio questo lavoro, immagazzinato nella molla.

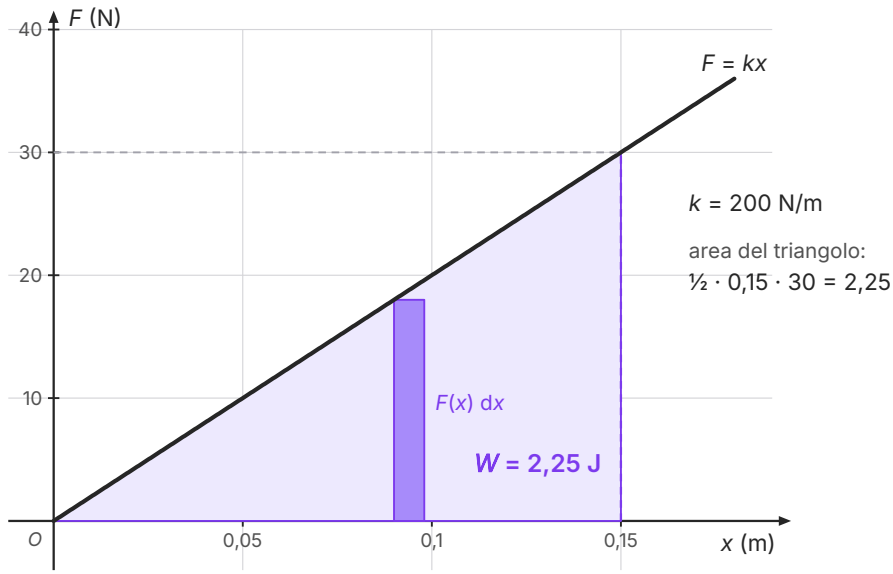

Figura 10.8 Il lavoro per allungare una molla di costante $k = 200$ N/m da 0 a 0,15 m è l'area sotto il grafico di $F = kx$: un triangolo di area $\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 30 = 2{,}25$ J. La striscia scura rappresenta il lavoro $F(x)\,\mathrm{d}x$ in un piccolo spostamento. Scale diverse sui due assi.

APPROFONDIMENTO · IL LAVORO CONTRO LA GRAVITÀ LONTANO DALLA TERRA

Vicino al suolo il peso è costante, mg, e il lavoro per sollevare un corpo di massa m di un'altezza h è mgh. Lontano dalla Terra non è più così: per la legge di gravitazione di Newton la forza diminuisce con il quadrato della distanza x dal centro della Terra, e vale $F(x) = mg\,\frac{R^2}{x^2}$, dove $R \approx 6371$ km è il raggio medio terrestre (per $x = R$ si ritrova mg). Il lavoro per portare il corpo dalla superficie fino alla quota h è

$$W = \int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = mgR^2\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{R+h} = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgRh}{R+h}$$

Se h è piccola rispetto a R, il denominatore è quasi R e si ritrova mgh. Ma per portare una massa di 1000 kg a una quota pari al raggio terrestre, $h = R$, il lavoro è $\frac{mgR}{2} \approx 3{,}12 \cdot 10^{10}$ J, la metà di quanto direbbe la formula mgh. E se h cresce senza limite, W tende a $mgR \approx 6{,}24 \cdot 10^{10}$ J: un lavoro *finito* basta per allontanare il corpo indefinitamente. È il principio della velocità di fuga, che si studia in fisica.

10.4.3 Carica e corrente

Nel capitolo 5 l'intensità di corrente è stata definita come derivata della carica che attraversa una sezione del conduttore: $i(t) = q'(t)$. Rovesciando, la carica che passa tra gli istanti t_1 e t_2 è l'integrale della corrente, $\Delta q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,\mathrm{d}t$. Per esempio, nella scarica di un condensatore attraverso un resistore la corrente diminuisce in modo esponenziale; con i dati inventati $i(t) = 0{,}03\,e^{-2t}$ (ampere, t in secondi), la carica passata nel primo secondo è

$$\Delta q = \int_0^1 0{,}03\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0{,}03\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = 0{,}015\,(1 - e^{-2}) \approx 0{,}0130\ \mathrm{C}$$

L'integrale è quasi immediato: la derivata dell'esponente è la costante -2. Al passare del tempo la carica totale tende a 0,015 C, la carica iniziale del condensatore: dopo il primo secondo ne è già passato circa l'86%.

APPROFONDIMENTO · IL VALORE EFFICACE DI UNA CORRENTE ALTERNATA

Nella corrente alternata l'intensità oscilla come una sinusoide, $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, e il suo valore medio su un periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ è zero. Ma il calore prodotto in un resistore R dipende dalla potenza $R\,i^2$, che non è mai negativa. Il **valore efficace** I_{eff} è l'intensità della corrente continua che in un periodo produce lo stesso calore, cioè quella per cui $I_{\text{eff}}^{\,2}$ è il valore medio di i^2.

Con la formula di duplicazione $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ (*Matematica 4*, cap. 4) l'integrale diventa quasi immediato: $\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t)\,dt = \left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^T = \dfrac{T}{2}$, perché $\operatorname{sen}(2\omega T) = \operatorname{sen}(4\pi) = 0$. Il valore medio di $\operatorname{sen}^2(\omega t)$ è quindi $\dfrac{1}{2}$, e $I_{\text{eff}}^{\,2} = \dfrac{I_0^{\,2}}{2}$:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\, I_0$$

È la formula che si usa in fisica: la tensione indicata sulle prese di casa è un valore efficace, non il valore massimo.

APPROFONDIMENTO · UN SOLIDO INFINITO CON VOLUME FINITO

Che cosa succede se uno degli estremi di integrazione diventa infinito? Si integra fino a b e si fa tendere b a $+\infty$: se il limite esiste finito, si dice che l'**integrale improprio** converge. Per esempio $\int_1^b \dfrac{1}{x^2}\,dx = 1 - \dfrac{1}{b}$ tende a 1, mentre $\int_1^b \dfrac{1}{x}\,dx = \ln b$ tende a $+\infty$: due curve che scendono entrambe verso l'asse x racchiudono, l'una, un'area finita, l'altra un'area infinita.

Facendo ruotare attorno all'asse x il ramo di iperbole $y = \dfrac{1}{x}$ per $x \geq 1$ si ottiene un solido illimitato, a forma di imbuto sempre più sottile: la **tromba di Torricelli**, studiata da Evangelista Torricelli nella prima metà del Seicento. Il suo volume è $\pi \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx = \pi$, finito; si dimostra invece che la sua superficie è infinita. Una tromba che si potrebbe riempire con una quantità finita di vernice, ma non dipingere.

Il risultato colpì i contemporanei, perché toccava un tema antico della filosofia: Aristotele ammetteva l'infinito solo *in potenza*, come possibilità di procedere sempre oltre, non come grandezza compiuta (capitolo 2). Un solido infinitamente lungo che ha un volume compiuto e finito sembrava trattare l'infinito come una cosa data. Il calcolo infinitesimale del Seicento usava queste idee con successo prima di saperle fondare; il rigore arriverà nell'Ottocento, con la definizione di limite.

SINTESI

- Una primitiva di f in un intervallo è una funzione F con $F' = f$; due primitive differiscono per una costante.
- L'integrale indefinito $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ è l'insieme delle primitive; è lineare, e ogni risultato si verifica derivando.
- Integrali immediati: $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ per $\alpha \neq -1$; $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$; $\int e^x\,dx = e^x + c$; $\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + c$; $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + c$.
- Integrali quasi immediati: si riconosce la derivata di una funzione composta, $[f(x)]^\alpha f'(x)$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $e^{f(x)} f'(x)$; l'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali.
- L'area tra una curva e l'asse x è $\int_a^b |f(x)|\,dx$: si divide l'intervallo dove f cambia segno.
- L'area tra due curve, con $f \geq g$ in $[a; b]$, è $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$; gli estremi sono spesso le ascisse dei punti di intersezione.
- Il segmento parabolico è i $\dfrac{4}{3}$ del triangolo di Archimede; la sua area è $\dfrac{|a|\,d^3}{6}$, con d distanza tra le ascisse delle intersezioni.
- Metodo delle sezioni: $V = \int_a^b S(x)\,dx$; ne segue il principio di Cavalieri. La piramide ha volume $\dfrac{1}{3}Bh$.
- Solidi di rotazione attorno all'asse x: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$. Cono $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, sfera $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, paraboloide metà del cilindro.
- Cono, sfera e cilindro di raggio r e altezza $2r$ stanno come $1 : 2 : 3$ (Archimede).
- In fisica: $\int v(t)\,dt$ è lo spostamento, $\int |v(t)|\,dt$ la distanza percorsa; $W = \int F(x)\,dx$ è il lavoro (molla: $\dfrac{1}{2}kx^2$); $\Delta q = \int i(t)\,dt$ è la carica.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● $\int x^4\,dx$ è uguale a:

   A. $4x^3 + c$

   B. $\dfrac{x^5}{5} + c$

   C. $x^5 + c$

   D. $\dfrac{x^5}{4} + c$

2. ● Nell'intervallo $]-\infty; 0[$ una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ è:

   A. $\ln x$
   B. $-\ln x$
   C. $\ln(-x)$
   D. $-\frac{1}{x^2}$

3. ● Se f è continua in $[a; b]$ e cambia segno, l'area della regione compresa tra il suo grafico e l'asse x è:

   A. $\int_a^b |f(x)|\, dx$
   B. $\int_a^b f(x)\, dx$
   C. $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$
   D. $\int_a^b [f(x)]^2\, dx$

4. ●● Il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del grafico di f, per $a \le x \le b$, è:

   A. $\pi \int_a^b f(x)\, dx$
   B. $(\pi \int_a^b f(x)\, dx)^2$
   C. $2\pi \int_a^b f(x)\, dx$
   D. $\pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$

5. ●● $\int \cos(4x)\, dx$ è uguale a:

   A. $4\,\text{sen}(4x) + c$
   B. $\frac{1}{4}\,\text{sen}(4x) + c$
   C. $-\frac{1}{4}\,\text{sen}(4x) + c$
   D. $\text{sen}(4x) + c$

6. ●● Il rapporto tra il volume di una sfera e il volume del cilindro circoscritto è:

   A. $\frac{2}{3}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\frac{3}{4}$
   D. $\frac{4}{3}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$.

   b) $\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0} + c$.

   c) Due primitive della stessa funzione in un intervallo differiscono per una costante.

   d) $\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$.

   e) Se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0$ in tutto $[a; b]$.

8. ● Completa. Una funzione F è una primitiva di f nell'intervallo I se _____ per ogni $x \in I$. L'insieme di tutte le primitive di f si chiama _____ e si indica con _____. Per il principio di Cavalieri, due solidi compresi tra due piani paralleli che hanno _____ a ogni altezza hanno lo stesso volume.

Calcolare

9. ● Calcola gli integrali e verifica il risultato derivando.

   a) $\int (4x^3 - 6x + 1)\,dx$; b) $\int (x^2 - \frac{1}{x^2})\,dx$; c) $\int (5e^x + 2\,\text{sen}\,x)\,dx$; d) $\int \frac{3}{x}\,dx$; e) $\int 2^x\,dx$; f) $\int \frac{x^3 - 4x}{x^2}\,dx$.

10. ●● Calcola gli integrali quasi immediati.

    a) $\int 3x^2\,(x^3 - 2)^5\,dx$; b) $\int \frac{2x}{x^2 + 5}\,dx$; c) $\int e^{2x}\,dx$; d) $\int \text{sen}(5x)\,dx$; e) $\int x\,e^{x^2}\,dx$; f) $\int \text{tg}\,x\,dx$ (suggerimento: $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$).

11. ●● Trova la primitiva di $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ il cui grafico passa per il punto $P(1; 4)$.

12. ●● Calcola con la formula di Newton–Leibniz.

    a) $\int_0^1 x\,(x^2 + 1)^3\,dx$; b) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx$; c) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx$; d) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

13. ● Calcola l'area della regione compresa tra la parabola $y = -x^2 + 4x$ e l'asse x, e verifica il risultato con la formula $\frac{|a|\,d^3}{6}$.

14. ●● Calcola $\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\,dx$ e l'area della regione compresa tra il grafico di $y = x^3 - 4x$ e l'asse x in $[-2; 2]$. Perché i due numeri sono diversi?

15. ●● Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e dalla retta $y = x - 1$.

16. ●● Calcola l'area della regione racchiusa tra le parabole $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

17. ●● Calcola l'area della regione compresa tra i grafici di $y = \text{sen}\,x$ e $y = \cos x$ nell'intervallo $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.

18. ●● Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del grafico di: a) $y = \sqrt{x}$, con $0 \le x \le 4$; b) $y = x^2$, con $0 \le x \le 1$; c) $y = 2$, con $0 \le x \le 3$ (che solido è?).

19. ●● Il segmento di equazione $y = x + 1$, con $0 \le x \le 3$, ruota attorno all'asse x. Che solido descrive? Calcolane il volume con l'integrale e controlla il risultato con la formula del tronco di cono $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Dimostrare e argomentare

20. ● Verifica derivando che $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$ (per $x > 0$). Perché questo integrale non si trova con le regole di questo capitolo, mentre la verifica sì?

21. ●● La retta $y = k$ ($k > 0$) taglia la parabola $y = x^2$ in due punti A e B. Dimostra con un integrale che l'area del segmento parabolico è $\frac{4}{3}\, k\sqrt{k}$ e che è i $\frac{4}{3}$ del triangolo AOB.

22. ●● Trova l'errore. «$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = [-\frac{1}{x}]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$.» Perché il risultato è sicuramente sbagliato, anche senza rifare il calcolo? Quale ipotesi della formula di Newton–Leibniz non è soddisfatta?

23. ●● Spiega perché il principio di Cavalieri è una conseguenza della formula $V = \int_a^b S(x)\, dx$, e usalo per dimostrare che un cilindro obliquo ha lo stesso volume del cilindro retto con la stessa base e la stessa altezza.

Problemi

24. ●● Un'automobile frena con velocità $v(t) = 20 - 4t$ (in m/s, t in secondi) fino a fermarsi. Dopo quanto tempo si ferma? Quanti metri percorre in frenata? Qual è la sua velocità media durante la frenata?

25. ●● Una molla ha costante elastica $k = 400$ N/m. Calcola il lavoro necessario per allungarla da 5 cm a 15 cm rispetto alla posizione di riposo, e rappresentalo come un'area nel piano $(x; F)$.

26. ●●● Una calotta sferica di altezza a è la parte di una sfera di raggio r tagliata da un piano a distanza $r - a$ dal centro. a) Dimostra, facendo ruotare la semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ per $r - a \le x \le r$, che il suo volume è $V = \pi a^2 (r - \frac{a}{3})$. b) Una ciotola emisferica di raggio interno 10 cm contiene acqua fino a 4 cm di profondità. Quanti litri di acqua contiene?

27. ●● In un circuito la corrente varia secondo $i(t) = 0{,}5 - 0{,}1\, t$ (in ampere, t in secondi), per $0 \le t \le 5$ s (dati inventati). Calcola la carica che attraversa una sezione del conduttore nei 5 secondi e l'intensità media della corrente.

28. ●● Un bicchiere ha la forma di un paraboloide di rotazione, alto 8 cm, con l'apertura di raggio 4 cm. Scegli un sistema di riferimento, scrivi l'equazione della parabola che ruota e calcola il volume del bicchiere in cm^3. Confrontalo con quello del cilindro circoscritto.

Verso l'esame

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un ciclista parte da fermo, accelera in modo uniforme per 10 s fino a 8 m/s, procede a velocità costante per 30 s e poi frena in modo uniforme, fermandosi in 6 s.
    a) Disegna il grafico velocità–tempo.
    b) Quanti metri percorre in tutto?
    c) Qual è la sua velocità media sull'intero tragitto?

30. ●● Nello stile delle prove nazionali. Il grafico di una funzione f continua in $[0; 6]$ è la spezzata che unisce, nell'ordine, i punti $(0; 2)$, $(2; 2)$, $(4; -2)$ e $(6; 0)$.
    a) Quanto vale $\int_0^6 f(x)\,dx$?
    b) Quanto vale l'area della regione compresa tra il grafico e l'asse x?
    c) Qual è il valore medio di f in $[0; 6]$?

31. ●● Spunto per il colloquio. Secondo la tradizione, Archimede volle sulla propria tomba una sfera inscritta in un cilindro, e Cicerone racconta di averla ritrovata in Sicilia. Spiega quale risultato quella figura ricordava, dimostralo con gli integrali e racconta come il problema dei volumi è stato affrontato da Archimede, da Cavalieri e da Newton e Leibniz.

32. ●●● Sfida. Dimostra che il solido generato dalla rotazione completa dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ attorno all'asse x (un *ellissoide di rotazione*) ha volume $\frac{4}{3}\pi a b^2$. Che cosa si ottiene per $a = b$? Che cosa si ottiene facendo ruotare la stessa ellisse attorno all'asse y?

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con l'integrale, le primitive e le loro applicazioni geometriche.
- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: il metodo di esaustione di Archimede, gli indivisibili di Cavalieri e di Torricelli, il teorema fondamentale di Newton e Leibniz.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Archimede e sui precursori del calcolo nel Seicento, da Keplero a Cavalieri.

Glossario del capitolo

Area tra due curve
L'area della regione compresa tra i grafici di f e g in $[a; b]$, con $f \geq g$: $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Costante di integrazione
La costante arbitraria c che compare nell'integrale indefinito: le primitive di una funzione differiscono per una costante.

Distanza percorsa
La lunghezza del cammino di un corpo che si muove lungo una retta: $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Funzione integranda
La funzione f che compare sotto il segno di integrale, in $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o in $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Integrale immediato
Un integrale che si ottiene rovesciando direttamente la derivata di una funzione elementare.

Integrale improprio
Un integrale con un estremo infinito, definito come limite: $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se il limite esiste finito.

Integrale indefinito
L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.

Integrale quasi immediato
Un integrale in cui si riconosce la derivata di una funzione composta, come $\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Lavoro di una forza variabile
Il lavoro di una forza $F(x)$ diretta lungo l'asse x quando il punto di applicazione va da a a b: $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

Metodo delle sezioni
Il calcolo del volume di un solido come integrale dell'area delle sue sezioni: $V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Principio di Cavalieri
Due solidi compresi tra due piani paralleli, con sezioni di area uguale a ogni altezza, hanno lo stesso volume.

Sezione
La figura piana ottenuta tagliando un solido con un piano; nel metodo delle sezioni, con un piano perpendicolare all'asse x.

Solido di rotazione
Il solido descritto da una regione piana che compie un giro completo attorno a una retta; attorno all'asse x ha volume $\pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Spostamento
La differenza tra la posizione finale e quella iniziale di un corpo: $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Tromba di Torricelli
Il solido illimitato generato dalla rotazione di $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, attorno all'asse x: ha volume finito, π, e superficie infinita.

Valore efficace
Per una corrente alternata, l'intensità della corrente continua che produce lo stesso calore: $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ per una corrente sinusoidale.

Soluzioni

1. B. $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$.

2. C. Per $x < 0$, $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$; $\ln x$ non è definito per $x < 0$.

3. A. L'integrale di f è un'area con segno; l'area si ottiene integrando $|f|$.

4. D. Le sezioni sono cerchi di raggio $|f(x)|$, di area $\pi[f(x)]^2$.

5. B. $\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\right]' = \frac{1}{4} \cdot 4\cos(4x) = \cos(4x)$.

6. A. $\frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{2}{3}$.

7. a) Vero. b) Falso: la formula delle potenze non vale per $\alpha = -1$; $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$. c) Vero (conseguenza del teorema di Lagrange). d) Falso: per esempio $\int x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3} + c$, mentre $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}$. e) Falso: $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx = 0$, ma la funzione non è nulla.

8. $F'(x) = f(x)$; integrale indefinito di f; $\int f(x)\,dx$; sezioni di area uguale (sezioni equivalenti).

9. a) $x^4 - 3x^2 + x + c$. b) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + c$. c) $5e^x - 2\cos x + c$. d) $3\ln|x| + c$. e) $\frac{2^x}{\ln 2} + c$. f) $\frac{x^3 - 4x}{x^2} = x - \frac{4}{x}$, quindi $\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + c$.

10. a) $\frac{(x^3-2)^6}{6} + c$. b) $\ln(x^2 + 5) + c$. c) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$. d) $-\frac{1}{5}\cos(5x) + c$. e) $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$. f) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$.

11. Le primitive sono $F(x) = x^3 - x^2 + x + c$; $F(1) = 1 + c = 4$ dà $c = 3$: $F(x) = x^3 - x^2 + x + 3$.

12. a) $\left[\frac{(x^2+1)^4}{8}\right]_0^1 = \frac{16-1}{8} = \frac{15}{8}$. b) $\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$. c) $[\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}693$. d) $\ln e - \ln 1 = 1$.

13. La parabola taglia l'asse x in 0 e 4 e sta sopra l'asse tra i due punti: $A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$. Controllo: $\frac{1 \cdot 4^3}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ ✓.

14. $\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = 0$ (la funzione è dispari). $f(x) = x(x-2)(x+2)$ è positiva in $]-2; 0[$ e negativa in $]0; 2[$; $\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4 - 8 = -4$, e per simmetria la parte in $[-2; 0]$ vale $+4$. Area $= 4 + 4 = 8$. I due numeri sono diversi perché l'integrale conta negativamente la parte sotto l'asse.

15. $x^2 - 4x + 3 = x - 1$ dà $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x = 1$ e $x = 4$; tra i due la retta sta sopra. $A = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2}$. Controllo: $\frac{1 \cdot 3^3}{6} = \frac{9}{2}$ ✓.

16. $x^2 = 4x - x^2$ dà $x = 0$ e $x = 2$; tra i due sta sopra $y = 4x - x^2$. $A = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$.

17. Nell'intervallo $\operatorname{sen} x \geq \cos x$ (le curve si incontrano negli estremi). $A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

18. a) $\pi\int_0^4 x\,dx = 8\pi$ (un paraboloide). b) $\pi\int_0^1 x^4\,dx = \frac{\pi}{5}$. c) $\pi\int_0^3 4\,dx = 12\pi$: è un cilindro di raggio 2 e altezza 3, e infatti $\pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$.

19. Un tronco di cono di altezza 3 e raggi delle basi 1 e 4. $V = \pi \int_0^3 (x+1)^2\,dx = \pi\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^3 = \pi\ \frac{64-1}{3} = 21\pi \approx 66{,}0$. Formula: $\frac{3\pi}{3}(16+4+1) = 21\pi$ ✓.

20. $(x \ln x - x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ ✓. L'integranda $\ln x$ non è nella tabella e non è la derivata di una funzione composta riconoscibile: per trovarla serve l'integrazione per parti, che non fa parte del programma. Ma per verificare un risultato basta derivare, e le regole di derivazione le conosciamo tutte.

21. Le intersezioni sono $A(-\sqrt{k};\, k)$ e $B(\sqrt{k};\, k)$. Area $= \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (k - x^2)\,dx = \left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = 2\left(k\sqrt{k} - \frac{k\sqrt{k}}{3}\right) = \frac{4}{3}\,k\sqrt{k}$. Il triangolo AOB ha base $2\sqrt{k}$ e altezza k: area $k\sqrt{k}$. Rapporto $\frac{4}{3}$ ✓ (il vertice O è il punto in cui la tangente è parallela alla corda AB).

22. L'integranda $\frac{1}{x^2}$ è positiva, quindi un suo integrale non può essere negativo. La formula di Newton–Leibniz richiede che f sia continua in tutto $[a;\, b]$, mentre $\frac{1}{x^2}$ non è definita in $x = 0$, che sta in $[-1;\, 1]$ (e vicino a 0 cresce illimitatamente). Il calcolo non ha senso; con gli integrali impropri si vede che l'area è infinita.

23. Se due solidi tra due piani paralleli hanno a ogni altezza sezioni di area uguale, le funzioni $S_1(x)$ e $S_2(x)$ coincidono, quindi $\int_a^b S_1(x)\,dx = \int_a^b S_2(x)\,dx$. Ogni piano parallelo alle basi taglia un cilindro obliquo in un cerchio uguale alla base (come una pila di monete spostate di lato), cioè nella stessa sezione del cilindro retto con la stessa base: i volumi sono uguali, $V = \pi r^2 h$.

24. Si ferma per $v = 0$, cioè dopo 5 s. Spazio di frenata $\int_0^5 (20 - 4t)\,dt = [20t - 2t^2]_0^5 = 100 - 50 = 50$ m. Velocità media $\frac{50}{5} = 10$ m/s.

25. $W = \int_{0{,}05}^{0{,}15} 400x\,dx = 200\,(0{,}15^2 - 0{,}05^2) = 200 \cdot 0{,}02 = 4$ J: è l'area del trapezio sotto la retta $F = 400x$ tra 0,05 m e 0,15 m (basi 20 N e 60 N, altezza 0,10 m).

26. a) $V = \pi \int_{r-a}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-a}^{r}$; sviluppando $(r-a)^3 = r^3 - 3r^2 a + 3ra^2 - a^3$ si ottiene $\pi\left(ra^2 - \frac{a^3}{3}\right) = \pi a^2\left(r - \frac{a}{3}\right)$. b) $r = 10$ cm, $a = 4$ cm: $V = \pi \cdot 16 \cdot \left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{416\pi}{3} \approx 435{,}6$ cm$^3 \approx 0{,}44$ litri.

27. $\Delta q = \int_0^5 (0{,}5 - 0{,}1\,t)\,dt = [0{,}5\,t - 0{,}05\,t^2]_0^5 = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25$ C. Intensità media $\frac{1{,}25}{5} = 0{,}25$ A.

28. Con l'asse x lungo l'asse del bicchiere e il fondo in O, la parabola che ruota è $y = 4\sqrt{x/8}$, cioè $y^2 = 2x$, per $0 \le x \le 8$. $V = \pi \int_0^8 2x\,dx = \pi\,[x^2]_0^8 = 64\pi \approx 201$ cm^3. Il cilindro circoscritto ha volume $\pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\pi$: il bicchiere ne è la metà.

29. a) Un trapezio: segmento da (0; 0) a (10; 8), orizzontale fino a (40; 8), segmento fino a (46; 0). b) Area: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 + 30 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 40 + 240 + 24 = 304$ m. c) $\frac{304}{46} \approx 6{,}6$ m/s.

30. a) In $[0;\, 2]$ un rettangolo di area 4; in $[2;\, 4]$ il grafico scende da 2 a −2 e taglia l'asse in $x = 3$: due triangoli di area 1, uno sopra e uno sotto, contributo 0; in $[4;\, 6]$ un triangolo sotto l'asse di area 2, contributo −2. $\int_0^6 f(x)\,dx = 4 + 0 - 2 = 2$. b) Area $= 4 + 1 + 1 + 2 = 8$. c) Valore medio $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

31. Traccia: 1) la figura ricorda che la sfera è i $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto, in volume e in superficie (con le basi); 2) dimostrazione: $V_{\text{sfera}} = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_{\text{cilindro}} = 2\pi r^3$, e con il cono $\frac{2}{3}\pi r^3$ il rapporto 1 : 2 : 3; 3) Archimede: metodo di esaustione, l'opera *Sulla sfera e il cilindro*; 4) Cavalieri e gli indivisibili (1635), il principio delle sezioni; 5) Newton e Leibniz: il teorema fondamentale trasforma il calcolo dei volumi in una ricerca di primitive; 6) collegamenti: Cicerone, *Tusculanae disputationes* (latino), il problema filosofico dell'infinito attuale e potenziale.

32. La semiellisse superiore è $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, quindi $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. $V = \pi \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\,[x -$

$\frac{x^3}{3a^2}]_{-a}^{a} = \pi b^2 (2a - \frac{2a}{3}) = \frac{4}{3}\pi a b^2$. Per $a = b = r$ si ottiene la sfera, $\frac{4}{3}\pi r^3$. Ruotando attorno all'asse y i ruoli di a e b si scambiano: $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.