CAPITOLO

9

L'integrale definito

Per misurare una figura curva basta saper misurare i rettangoli, e saper passare al limite. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere il problema delle aree e quello dello spazio percorso come lo stesso problema, e seguire il metodo di esaustione di Archimede.
2. Calcolare somme inferiori e superiori e il loro limite in casi semplici.
3. Definire l'integrale definito, interpretarlo come area con segno e usarne le proprietà.
4. Enunciare e dimostrare il teorema della media e calcolare il valore medio di una funzione.
5. Comprendere il teorema fondamentale del calcolo integrale e calcolare integrali con la formula di Newton–Leibniz.
6. Approssimare un integrale con i metodi dei rettangoli e dei trapezi.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Il problema delle aree 2
9.2 Somme inferiori e superiori 6
9.3 L'integrale definito 9
9.4 Il teorema della media 11
9.5 Il teorema fondamentale del calcolo 14
9.6 Il calcolo approssimato di un integrale 19

Matematica 5 · Parte IV · Il calcolo integrale · versione 1.0
Capitolo 9: L'integrale definito · pagine 235–260 del volume completo · estratto per lo studio

Quanto misura la superficie di un lago dalla riva irregolare? Quanta strada percorre un'automobile la cui velocità cambia di continuo? Quanta acqua è passata sotto un ponte in un giorno di piena, se la portata del fiume cresce e poi cala? Sono domande diverse con la stessa struttura: una grandezza che si *accumula* a partire da un'altra che varia. Finché la seconda è costante basta una moltiplicazione (base per altezza, velocità per tempo, portata per durata); quando varia, la moltiplicazione non basta più.

Il calcolo differenziale dei capitoli 5–8 rispondeva alla domanda «con quale rapidità cambia una grandezza?». Il calcolo integrale risponde alla domanda inversa: «conoscendo la rapidità di cambiamento in ogni istante, quanto si è accumulato in tutto?». Partiremo dal problema più antico, l'area di una figura curva, che Archimede affrontò più di duemila anni fa; lo risolveremo con le somme e i limiti del capitolo 2, e scopriremo alla fine, con il *teorema fondamentale*, che i due problemi del calcolo infinitesimale sono l'uno l'inverso dell'altro.

9.1 Il problema delle aree

9.1.1 Figure con un lato curvo

Sappiamo calcolare l'area di ogni poligono: si scompone in triangoli. Per il cerchio abbiamo dovuto fare di più: in *Matematica 3* (cap. 4) l'area πr^2 è stata ottenuta stringendo il cerchio tra poligoni regolari inscritti e circoscritti con un numero di lati sempre maggiore, con il metodo di Archimede. Questo capitolo generalizza quel procedimento a una figura molto comune nell'analisi.

Sia f una funzione continua e non negativa sull'intervallo $[a; b]$. La regione del piano delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ si chiama **trapezoide** (o rettangoloide) di f su $[a; b]$: è un «trapezio» che ha per lato superiore un arco di curva. Se f è costante il trapezoide è un rettangolo, se f è lineare è un trapezio vero e proprio; in tutti gli altri casi la geometria elementare non ne dà l'area. Il nostro obiettivo è definire e calcolare l'area del trapezoide per ogni funzione continua.

9.1.2 Il metodo di esaustione di Archimede

Il primo a calcolare esattamente l'area di una figura delimitata da un arco di parabola fu Archimede di Siracusa (III secolo a.C.). In *Matematica 3* (cap. 6) abbiamo enunciato il suo teorema: il segmento parabolico vale i $\frac{4}{3}$ del triangolo che ha per base la corda e per vertice il punto in cui la tangente è parallela alla corda. Ora possiamo seguire il suo ragionamento fino in fondo, con la serie geometrica del capitolo 2.

Prendiamo il segmento della parabola $y = 4 - x^2$ tagliato dall'asse x, tra $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$ (Figura 9.1). Il triangolo ABC con $C(0; 4)$ ha area $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Restano scoperti due piccoli segmenti parabolici, sulle corde AC e CB; in ciascuno Archimede inscrive un triangolo con lo stesso criterio: il vertice è il punto dell'arco in cui la tangente è parallela alla corda, cioè $D(-1; 3)$ ed $E(1; 3)$. I due nuovi triangoli hanno area 1 ciascuno, in tutto 2: *un quarto* di 8. Archimede dimostrò che questo accade a ogni passo: i triangoli aggiunti a un passo hanno, insieme, un quarto dell'area di quelli del passo precedente. Al terzo passo si aggiungono quattro triangoli di area totale $\frac{1}{2}$, poi otto di area $\frac{1}{8}$, e così via.

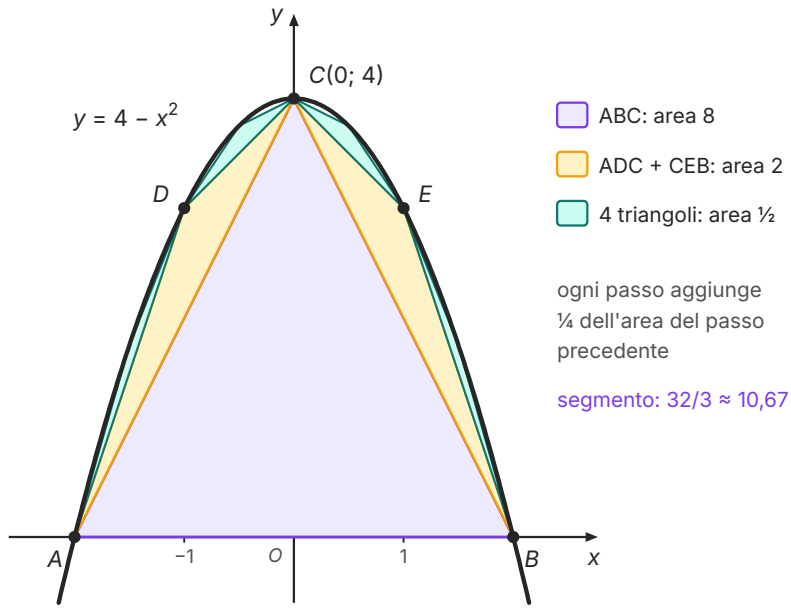


Figura 9.1 Il metodo di esaustione sul segmento parabolico di $y = 4 - x^2$ tagliato dall'asse x (unità uguali sui due assi). Al triangolo ABC (area 8) si aggiungono i triangoli ADC e CEB (area totale 2), poi quattro triangoli costruiti allo stesso modo sulle corde AD, DC, CE, EB (area totale $\frac{1}{2}$): i poligoni inscritti «esauriscono» il segmento.

I poligoni inscritti hanno quindi aree 8, $8 + 2$, $8 + 2 + \frac{1}{2}$, … , cioè le somme parziali della serie geometrica di primo termine 8 e ragione $\frac{1}{4}$. Poiché $|q| < 1$, la serie converge (capitolo 2):

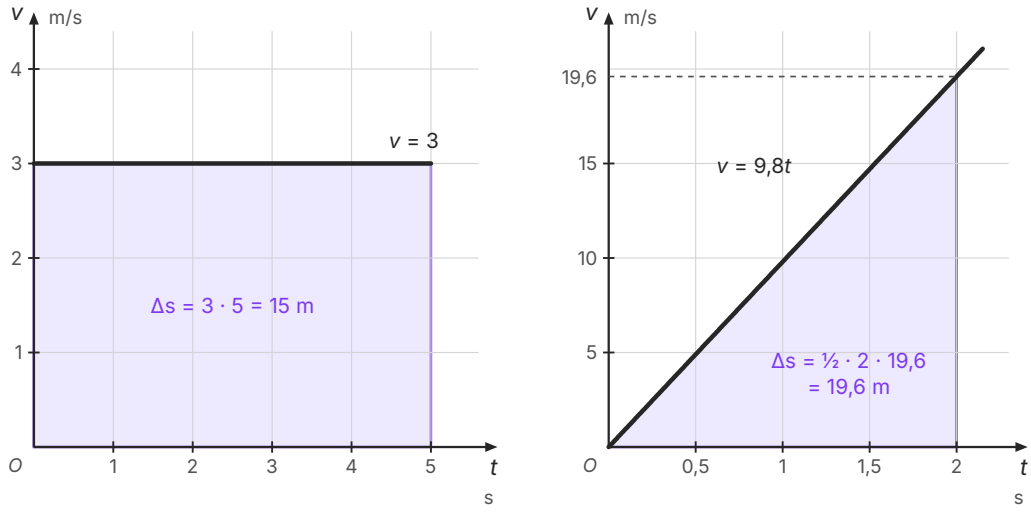
$$8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$$

Archimede non disponeva della nozione di limite, e il suo modo di concludere fu diverso: dimostrò con una doppia riduzione all'assurdo che l'area non può essere né maggiore né minore di $\frac{4}{3}$ del triangolo. Il nome di **metodo di esaustione**, dato in età moderna, ricorda che i poligoni inscritti «esauriscono» la figura, ne coprono cioè una parte che differisce dal tutto meno di qualunque quantità assegnata. È la stessa idea che, in un linguaggio diverso, sta sotto la definizione di limite.

9.1.3 Dalla velocità allo spazio percorso

Il problema delle aree ha un gemello in fisica. Se un'automobile procede alla velocità costante di 3 m/s per 5 s, percorre $3 \cdot 5 = 15$ m. Sul grafico velocità–tempo questo prodotto è l'area del rettangolo che ha per base l'intervallo di tempo e per altezza la velocità (Figura 9.2 a). Lo stesso vale, intervallo per intervallo, per una velocità costante a tratti: lo spazio percorso è la somma delle aree dei rettangoli.

Che cosa accade se la velocità cambia di continuo? Un corpo che cade da fermo ha velocità $v = gt$, con $g = 9{,}8$ m/s^2. Nel capitolo 5 abbiamo ricavato v derivando la legge oraria $s = \frac{1}{2}gt^2$; ora percorriamo la strada inversa. Dividiamo l'intervallo $[0; t]$ in tanti piccoli intervalli: su ciascuno la velocità varia poco, e lo spazio percorso è circa la velocità per la durata. Sommando, otteniamo l'area di una «scala» di rettangoli che, al crescere del loro numero, si confonde con il triangolo sotto la retta $v = gt$. Quell'area è $\frac{1}{2} \cdot t \cdot gt = \frac{1}{2}gt^2$: proprio la legge oraria del moto uniformemente accelerato, che Galileo aveva ottenuto con un ragionamento geometrico di questo tipo. In 2 s il corpo percorre $\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 2^2 = 19{,}6$ m (Figura 9.2 b).



a) moto uniforme: $v = 3$

b) caduta libera: $v = 9{,}8t$

Figura 9.2 Lo spazio percorso è l'area sotto il grafico velocità–tempo. a) Velocità costante $v = 3$ m/s per 5 s: rettangolo di area 15 m. b) Caduta libera da fermo, $v = 9{,}8t$ (in m/s) per 2 s: triangolo di area 19,6 m, cioè $\frac{1}{2}gt^2$ con $t = 2$ s. Scale diverse sui due assi, indicate dalle tacche.

APPROFONDIMENTO · ARCHIMEDE, CAVALIERI E GLI INDIVISIBILI

Il metodo di esaustione serve a *dimostrare* un'area già nota, non a trovarla. Come avesse trovato i suoi risultati, Archimede lo spiegò in un'opera, il *Metodo*, scritta per Eratostene: vi immaginava una figura come formata da infiniti segmenti paralleli e la «pesava», segmento per segmento, su una leva. Per lui era un procedimento di scoperta, non una dimostrazione. Il testo era perduto: lo ha riconosciuto nel 1906 il filologo danese Johan Ludvig Heiberg in un palinsesto, una pergamena medievale raschiata e riscritta con preghiere.

Senza conoscere il *Metodo*, nel Seicento Bonaventura Cavalieri, allievo di Galileo, sviluppò un'idea simile nella *Geometria indivisibilibus* (1635): una figura piana è pensata come l'insieme delle sue corde parallele, gli **indivisibili**, e due figure le cui corde alla stessa altezza sono sempre uguali hanno la stessa area (è il *principio di Cavalieri*, che useremo per i volumi nel capitolo 10). Il metodo era efficace ma sollevava una difficoltà filosofica antica: come può una superficie, che ha un'estensione, essere composta di linee, che non ne hanno? È la stessa obiezione che Aristotele aveva rivolto a chi componeva il tempo di istanti, e che ritroviamo nei paradossi di Zenone (capitolo 2). Il calcolo integrale ottocentesco la aggira: non somma infiniti indivisibili, ma prende il limite di somme finite di rettangoli, ciascuno con una sua base.

9.2 Somme inferiori e superiori

9.2.1 Rettangoli inscritti e circoscritti

Generalizziamo l'idea del moto in caduta. Sia f continua e non negativa su $[a; b]$. Fissato un numero naturale $n \geq 1$, dividiamo $[a; b]$ in n intervalli di uguale ampiezza

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

con i punti $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, ... , $x_n = b$: è una **partizione** di $[a; b]$. Su ogni intervallo $[x_{k-1}; x_k]$ la funzione, continua su un intervallo chiuso e limitato, ha un minimo m_k e un massimo M_k (teorema di Weierstrass, capitolo 4). Il rettangolo di base $[x_{k-1}; x_k]$ e altezza m_k sta tutto nel trapezoide; quello di altezza M_k lo contiene. Sommando, definiamo la **somma inferiore** e la **somma superiore**

$$s_n = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) \cdot \Delta x \qquad S_n = (M_1 + M_2 + \ldots + M_n) \cdot \Delta x$$

Qualunque sia l'area del trapezoide, deve valere $s_n \leq \text{area} \leq S_n$. Con il simbolo di sommatoria, $s_n = \Sigma_{k=1}^{\,n}\, m_k\, \Delta x$ e $S_n = \Sigma_{k=1}^{\,n}\, M_k\, \Delta x$. Se f è crescente il minimo su ogni intervallo è all'estremo sinistro e il massimo all'estremo destro; se è decrescente, il contrario.

9.2.2 Il caso di $y = x^2$ su $[0; 1]$

Calcoliamo le somme per $f(x) = x^2$, crescente su $[0; 1]$. Con $n = 4$ si ha $\Delta x = \frac{1}{4}$ e i punti 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1. I rettangoli inscritti hanno altezze 0, $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{9}{16}$, quelli circoscritti $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{9}{16}$, 1 (Figura 9.3):

$$s_4 = \frac{0+1+4+9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{14}{64} = 0{,}21875 \qquad S_4 = \frac{1+4+9+16}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{30}{64} = 0{,}46875$$

Con $n = 8$ si trova $s_8 = \frac{140}{512} \approx 0{,}2734$ e $S_8 = \frac{204}{512} \approx 0{,}3984$: la forbice si è stretta. In generale, con $\Delta x = \frac{1}{n}$ le altezze dei rettangoli circoscritti sono $\frac{k^2}{n^2}$ per $k = 1, 2, \ldots, n$, e quelle degli inscritti le stesse con $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Quindi

$$S_n = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} \qquad s_n = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$$

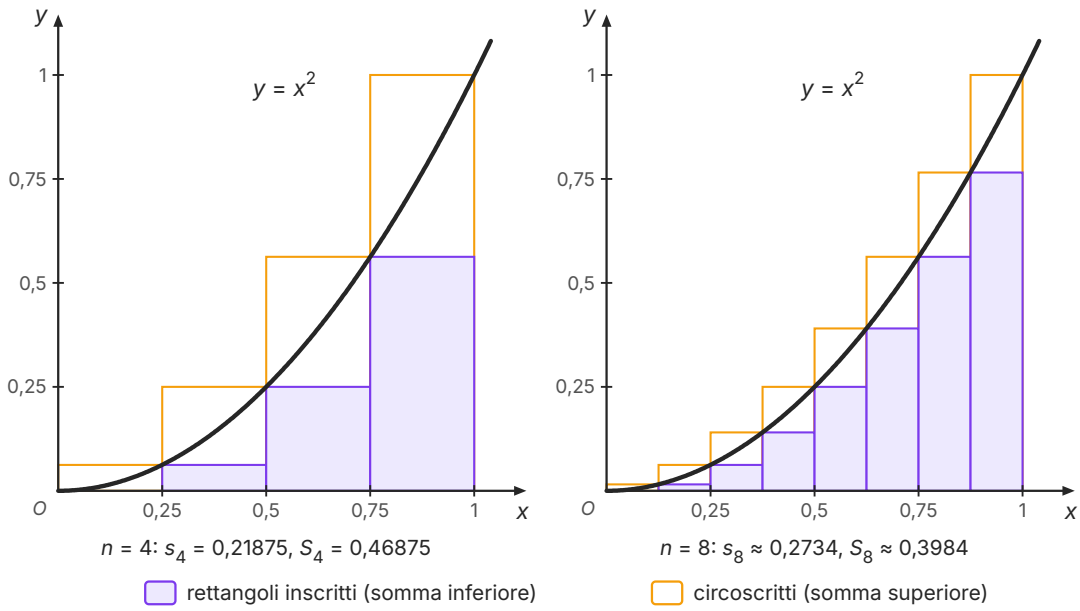


Figura 9.3 Somme inferiori e superiori per $f(x) = x^2$ su $[0; 1]$ (unità uguali sui due assi). I rettangoli inscritti (viola) hanno per altezza il valore di f all'estremo sinistro di ciascun intervallo, quelli circoscritti (bordo arancio) il valore all'estremo destro. Passando da $n = 4$ a $n = 8$ la differenza $S_n - s_n$ si dimezza, da $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{8}$.

Per andare avanti serve una formula per la somma dei primi n quadrati, che si dimostra per induzione come la somma dei primi n naturali in *Matematica 4* (cap. 9).

IN SINTESI

Teorema (somma dei primi n quadrati). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passo base. Per $n = 1$ il primo membro vale 1 e il secondo $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

Passo induttivo. Supponiamo la formula vera per n e aggiungiamo $(n+1)^2$ ai due membri:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

e poiché $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, il risultato è $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, cioè la formula scritta per $n+1$. Per il principio di induzione la formula vale per ogni $n \geq 1$. c.v.d.

Ora le somme si calcolano esattamente. Per S_n basta la formula; per s_n la si applica con $n-1$ al posto di n:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \qquad s_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Per $n \to +\infty$ i termini $\frac{1}{n}$ tendono a 0 e *entrambe* le successioni tendono a $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$. Poiché l'area cercata sta sempre tra s_n e S_n, per il teorema del confronto (capitolo 2) non può che essere $\frac{1}{3}$. La Tabella 9.1 mostra la convergenza: la differenza $S_n - s_n$ vale esattamente $\frac{1}{n}$, perché è l'area dell'ultimo rettangolo circoscritto, di altezza $f(1)-f(0)=1$ e base $\frac{1}{n}$, una volta impilati tutti i «gradini» che separano le due scale.

Tabella 9.1 Somme inferiori e superiori per $f(x)=x^2$ su $[0;1]$ (valori esatti, scritti in forma decimale).

n	s_n	S_n	$S_n - s_n$
4	0,21875	0,46875	0,25
8	0,2734375	0,3984375	0,125
10	0,285	0,385	0,1
100	0,32835	0,33835	0,01
1000	0,3328335	0,3338335	0,001

Lo stesso calcolo su $[0;b]$, con $\Delta x = \frac{b}{n}$, porta il fattore $\frac{b^3}{n^3}$ al posto di $\frac{1}{n^3}$ e dà $\frac{b^3}{3}$: il trapezoide di $y=x^2$ su $[0;b]$ è un terzo del rettangolo di lati b e b^2 che lo contiene.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola con le somme inferiori e superiori l'area del trapezoide di $f(x) = x$ su $[0; b]$, con $b > 0$, e controlla il risultato con la geometria elementare.

Soluzione. Con $\Delta x = \frac{b}{n}$ i punti della partizione sono $x_k = \frac{kb}{n}$. La funzione è crescente: le altezze dei rettangoli circoscritti sono $\frac{kb}{n}$ con $k = 1, \dots, n$, quelle degli inscritti le stesse con $k = 0, \dots, n-1$. Usando $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$S_n = \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad s_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Entrambe tendono a $\frac{b^2}{2}$. **Controllo.** Il trapezoide è il triangolo rettangolo di cateti b e $f(b) = b$, di area $\frac{b^2}{2}$. Con $b = 2t$ e $f(x) = gx$ si ritrova il triangolo della caduta libera.

9.3 L'integrale definito

9.3.1 La definizione

Nell'esempio di x^2 le somme inferiori e superiori hanno lo stesso limite. Non è un caso fortunato: si dimostra che per ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato accade la stessa cosa. Lo enunciamo senza dimostrazione.

IN SINTESI

Teorema (integrabilità delle funzioni continue). **Ipotesi:** f è continua su $[a; b]$. **Tesi:** le successioni s_n e S_n delle somme inferiori e superiori convergono allo stesso numero.

Questo limite comune si chiama **integrale definito** di f da a a b e si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx». I numeri a e b sono gli **estremi di integrazione**, f è la **funzione integranda**. Una funzione per cui le somme hanno lo stesso limite si dice **integrabile**: le funzioni continue lo sono tutte. La definizione non richiede più che f sia positiva: le somme s_n e S_n si calcolano con i minimi e i massimi qualunque sia il loro segno.

Il simbolo è dovuto a Leibniz: $\int$ è una S allungata, iniziale di *summa*, e $f(x)\,\mathrm{d}x$ ricorda l'area di un rettangolo di altezza $f(x)$ e base «infinitamente piccola» dx. Oggi la notazione è un'abbrevia-

zione del limite di somme, ma conserva l'idea da cui è nata. La lettera x è una **variabile di integrazione** muta: $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_0^1 t^2\,dt$ e $\int_0^1 u^2\,du$ indicano lo stesso numero, $\frac{1}{3}$.

9.3.2 L'area con segno

Se $f \geq 0$ su $[a; b]$, l'integrale è l'area del trapezoide. Se $f \leq 0$, i minimi e i massimi sono negativi, e l'integrale è l'*opposto* dell'area della regione compresa tra il grafico e l'asse x. Se f cambia segno, le parti sopra l'asse contano positivamente e quelle sotto negativamente: l'integrale è un'**area con segno**. Per $f(x) = \text{sen } x$ su $[0; 2\pi]$ le due «gobbe» hanno la stessa area, 2 (lo verificheremo con la formula di Newton–Leibniz), e si compensano: l'integrale è 0 (Figura 9.4).

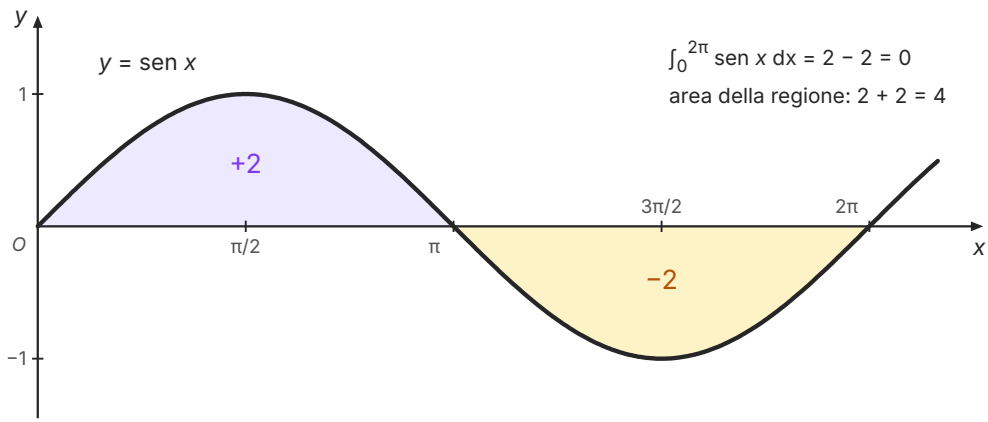


Figura 9.4 L'integrale come area con segno per $y = \text{sen } x$ su $[0; 2\pi]$ (unità uguali sui due assi). La parte sopra l'asse x (viola) conta +2, quella sotto (arancio) conta −2: l'integrale vale 0, mentre l'area della regione colorata è 4.

ERRORE FREQUENTE

Integrale e area non sono la stessa cosa. «L'area compresa tra il grafico di sen x e l'asse x su $[0; 2\pi]$ è $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = 0$» è falso: una regione non vuota ha area positiva. L'area è $\int_0^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx = 2 + 2 = 4$. Per calcolare un'area si individuano i punti in cui f cambia segno, si spezza l'intervallo e si sommano i valori assoluti degli integrali sui singoli tratti.

9.3.3 Le proprietà dell'integrale

Dalla definizione come limite di somme discendono alcune proprietà, che corrispondono a fatti evidenti sulle aree. La più usata è l'**additività** rispetto all'intervallo: l'area di un trapezoide diviso in due da una retta verticale è la somma delle aree delle due parti. Conviene inoltre

estendere il simbolo al caso di estremi uguali o scambiati, in modo che l'additività valga sempre.

IN SINTESI

- **Estremi uguali:** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- **Estremi scambiati:** $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- **Linearità:** $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Additività:** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (per c interno all'intervallo e, con le due convenzioni precedenti, per ogni c).
- **Confronto:** se $f(x) \le g(x)$ su $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
- **Costanti:** $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$.

Attenzione a ciò che *non* vale: l'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali. Per esempio $\int_0^1 x \cdot x\,dx = \frac{1}{3}$, mentre $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Sapendo che $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$ e $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$, calcola a) $\int_0^1 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$; b) $\int_1^3 x\,dx$; c) $\int_{-1}^1 x^3\,dx$.

Soluzione. a) Per la linearità: $6 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 2 - 2 + 5 = 5$.

b) Per l'additività $\int_0^3 x\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 x\,dx$, quindi $\int_1^3 x\,dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. Controllo: è il trapezio di basi 1 e 3 e altezza 2, di area $\frac{(1+3)\cdot 2}{2} = 4$.

c) $y = x^3$ è dispari: il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine, e la parte su $[-1; 0]$, sotto l'asse, è congruente a quella su $[0; 1]$, sopra l'asse. Le due aree con segno sono opposte e l'integrale vale 0. Lo stesso vale per ogni funzione dispari integrata su un intervallo simmetrico $[-a; a]$.

9.4 Il teorema della media

Un treno percorre 300 km in 2 ore: la sua velocità media è 150 km/h, anche se in nessun tratto ha viaggiato esattamente a quella velocità costante. La velocità media è la velocità costante che, nello stesso tempo, avrebbe fatto percorrere la stessa strada. Sul grafico velocità–tempo: è l'altezza del rettangolo che ha la stessa base e la stessa area del trapezoide. L'idea si estende a ogni funzione continua.

IN SINTESI

Teorema della media integrale. Ipotesi: f è continua su $[a; b]$. **Tesi:** esiste almeno un punto $c \in [a; b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass f ha su $[a; b]$ un minimo m e un massimo M: $m \le f(x) \le M$ per ogni x dell'intervallo. Per la proprietà del confronto, integrando i tre membri,

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a) \qquad \text{cioè} \qquad m \le \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Il numero centrale è dunque compreso tra il minimo e il massimo di f. Per il teorema dei valori intermedi (capitolo 4) una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo: esiste quindi $c \in [a; b]$ in cui $f(c)$ è uguale a quel numero. Moltiplicando per $b - a$ si ottiene la tesi. c.v.d.

Il numero

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

si chiama **valore medio** di f su $[a; b]$. È la generalizzazione della media aritmetica: la media di n numeri è la loro somma divisa per n; il valore medio di una funzione è la sua «somma continua», l'integrale, divisa per la lunghezza dell'intervallo. Il teorema dice che una funzione continua assume il suo valore medio in almeno un punto. Geometricamente (Figura 9.5), il rettangolo di base $[a; b]$ e altezza $\bar{f}$ ha la stessa area del trapezoide: la parte del rettangolo che sporge sopra il grafico compensa esattamente la parte del trapezoide che sporge sopra il rettangolo.

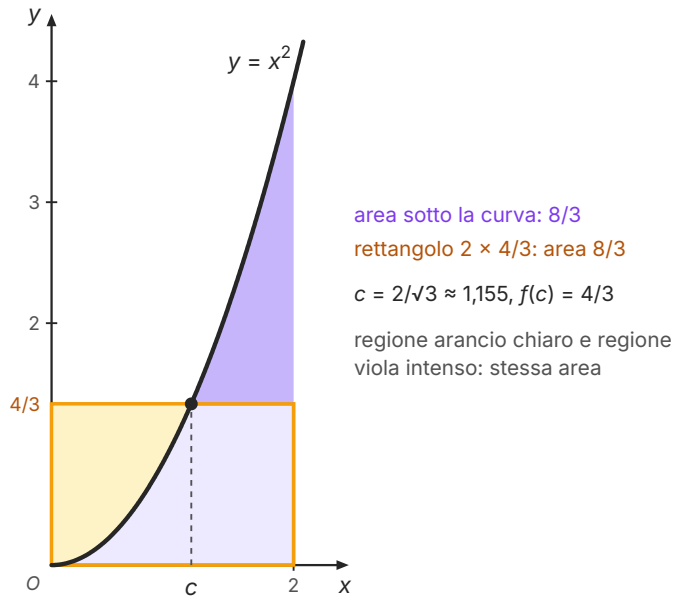


Figura 9.5 Il teorema della media per $f(x) = x^2$ su $[0; 2]$ (unità uguali sui due assi). Il trapezoide ha area $\frac{8}{3}$, il valore medio è $\frac{8}{3} : 2 = \frac{4}{3}$ e viene assunto in $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$. Il rettangolo di base 2 e altezza $\frac{4}{3}$ (bordo arancio) ha la stessa area del trapezoide: la parte del rettangolo sopra la curva, a sinistra di c (arancio chiaro), ha la stessa area della parte del trapezoide sopra il rettangolo, a destra di c (viola intenso).

Nell'esempio della figura $\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, il valore medio è $\frac{4}{3}$ e il punto c risolve $c^2 = \frac{4}{3}$ con $c \in [0; 2]$: $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$. Il teorema garantisce l'esistenza di c, non la sua unicità: per $f(x) = \text{sen}\, x$ su $[0; 2\pi]$ il valore medio è 0 e viene assunto in tre punti, 0, π e 2π.

COLLEGAMENTI

Fisica: le medie nel tempo. Se $v(t)$ è la velocità di un corpo che si muove sempre nello stesso verso, $\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$ è lo spazio percorso e il valore medio di v è lo spazio diviso per il tempo: la velocità media della cinematica. Il teorema della media aggiunge che, se la velocità varia con continuità, in almeno un istante il tachimetro ha segnato proprio la velocità media: è la stessa conclusione a cui si arriva con il teorema di Lagrange (capitolo 6) applicato alla legge oraria. Allo stesso modo l'area sotto il grafico dell'intensità di corrente $i(t)$ è la carica che ha attraversato il conduttore, e l'area sotto il grafico di una forza in funzione dello spostamento è il lavoro: le vedremo nel capitolo 10.

9.5 Il teorema fondamentale del calcolo

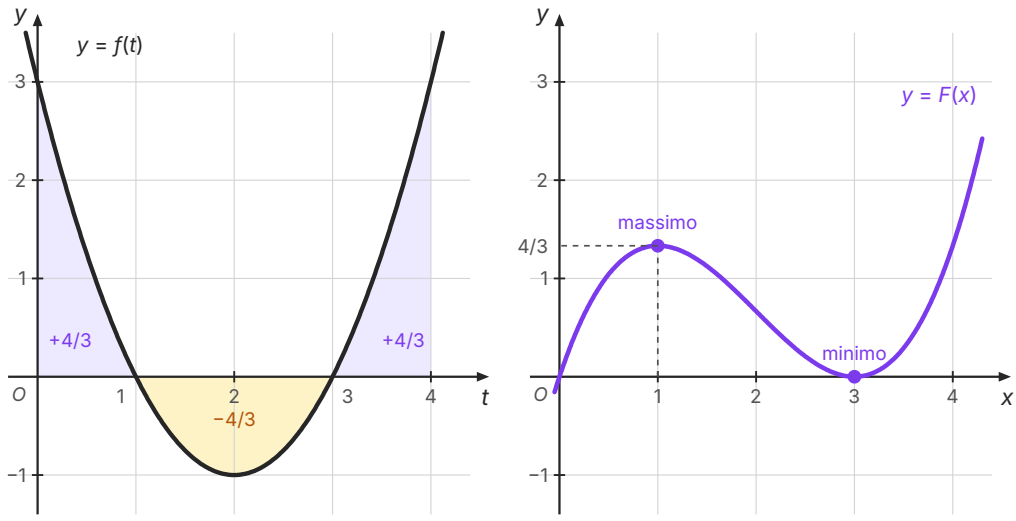
9.5.1 La funzione integrale

Finora l'intervallo di integrazione era fisso. Lasciamo ora variabile l'estremo destro: per una funzione f continua su un intervallo I e un punto $a \in I$, poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La variabile di integrazione è stata chiamata t per non confonderla con l'estremo x. F è la **funzione integrale** di f con punto iniziale a: a ogni x associa l'area con segno «accumulata» da a fino a x. Pensando a f come a una velocità, $F(x)$ è la posizione raggiunta all'istante x partendo all'istante a.

Il grafico di F si può leggere su quello di f (Figura 9.6). Per $f(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ e $a = 0$: finché f è positiva, cioè per $0 < x < 1$, l'area accumulata cresce e F è crescente; tra 1 e 3 la funzione f è negativa e l'area con segno diminuisce, quindi F decresce; dopo 3 torna a crescere. In $x = 1$, dove f passa da positiva a negativa, F ha un massimo; in $x = 3$ un minimo. La parte negativa su $[1; 3]$ ha la stessa area di quella positiva su $[0; 1]$, cioè $\frac{4}{3}$: per questo $F(3) = 0$.



a) $f(t) = t^2 - 4t + 3$ b) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Figura 9.6 a) La funzione $f(t) = t^2 - 4t + 3$ con le aree con segno accumulate a partire da $t = 0$: $+\frac{4}{3}$ su $[0; 1]$, $-\frac{4}{3}$ su $[1; 3]$, $+\frac{4}{3}$ su $[3; 4]$. b) La funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$: cresce dove $f > 0$, decresce dove $f < 0$, ha il massimo $\frac{4}{3}$ in $x = 1$ e il minimo 0 in $x = 3$. Unità uguali sui due assi in entrambi i grafici.

La lettura ricorda qualcosa: F cresce dove $f > 0$ e decresce dove $f < 0$, ha un massimo dove f passa da positiva a negativa. È esattamente il rapporto che, nei capitoli 6 e 7, abbiamo trovato tra una funzione e la sua derivata. Il sospetto che f sia la derivata di F è giusto, ed è il contenuto del teorema più importante dell'analisi.

9.5.2 Il teorema

IN SINTESI

Teorema fondamentale del calcolo integrale (di Torricelli–Barrow). **Ipotesi:** f è continua su un intervallo I, $a \in I$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. **Tesi:** F è derivabile in ogni punto di I e

$$F'(x) = f(x)$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in I$ e un incremento $h \neq 0$ con $x + h \in I$. Per l'additività, $F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Per il teorema della media esiste un punto c_h tra x e $x + h$

tale che questo integrale vale $f(c_h)\cdot h$. Quindi il rapporto incrementale è

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(c_h)$$

Quando $h\to 0$, il punto c_h, stretto tra x e $x+h$, tende a x; poiché f è continua, $f(c_h)$ tende a $f(x)$. Il limite del rapporto incrementale esiste e vale $f(x)$: F è derivabile in x e $F'(x)=f(x)$. c.v.d.

Il significato è semplice: se si sposta il bordo destro del trapezoide da x a $x+h$, l'area aumenta di una striscia sottile, quasi un rettangolo di base h e altezza $f(x)$. L'area cresce, in quel punto, con velocità $f(x)$.

9.5.3 Le primitive

Una funzione G derivabile su un intervallo I si dice una **primitiva** di f su I se $G'(x)=f(x)$ per ogni $x\in I$. Per esempio $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2, e lo sono anche $\frac{x^3}{3}+5$ e $\frac{x^3}{3}-\pi$, perché la derivata di una costante è 0. Il teorema fondamentale dice che *ogni funzione continua su un intervallo ha una primitiva*: la sua funzione integrale. Viceversa, per un corollario del teorema di Lagrange (capitolo 6), due funzioni con la stessa derivata su un intervallo differiscono per una costante: le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $G(x)+c$, con $c\in\mathbb{R}$.

Leggendo al contrario la tabella delle derivate fondamentali (capitolo 5) si ottengono le primitive delle funzioni che ci servono; per la linearità della derivata, la primitiva di un polinomio si ottiene termine per termine.

Tabella 9.2 Primitive delle funzioni fondamentali, ottenute rovesciando la tabella delle derivate. Ogni riga si controlla derivando la seconda colonna.

funzione $f(x)$	una primitiva $G(x)$	condizioni
k (costante)	kx	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n\neq -1$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	
e^x	e^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x>0$

9.5.4 La formula di Newton–Leibniz

Dal teorema fondamentale segue il modo pratico di calcolare un integrale. Sia G una qualunque primitiva di f, continua su $[a;b]$. Anche la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva,

quindi $F(x) = G(x) + c$ per una costante c. Per $x = a$ si ha $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, da cui $c = -G(a)$; per $x = b$ si ottiene

IN SINTESI

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Formula di Newton–Leibniz (o formula fondamentale del calcolo integrale): per calcolare l'integrale di una funzione continua basta trovarne una primitiva G e farne la differenza tra il valore nell'estremo superiore e quello nell'estremo inferiore. La scrittura $[G(x)]_a^b$ abbrevia $G(b) - G(a)$.

L'area $\frac{1}{3}$ che ci era costata una dimostrazione per induzione e un limite si ottiene ora in una riga: $\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Si può scegliere qualunque primitiva: con $\frac{x^3}{3} + 5$ la costante 5 compare in $G(b)$ e in $G(a)$ e si cancella.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$; b) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$; c) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

Soluzione. a) Una primitiva è $x^3 - x^2 + x$ (controllo: la derivata è $3x^2 - 2x + 1$). Quindi $[x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$.

b) Una primitiva di $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$: $[-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$. È l'area di una «gobba» della sinusoide nella Figura 9.4: un numero intero, anche se l'estremo dell'intervallo è π.

c) Su $[1; e]$ si ha $x > 0$ e una primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\ln x$: $[\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$. L'area sotto l'iperbole $y = \frac{1}{x}$ tra 1 ed e è 1: è un altro modo di caratterizzare il numero e.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In una giornata di primavera (dati inventati) la temperatura in una città, dalle 6 alle 18, è descritta dal modello $T(t) = 10 + 3t - \frac{t^2}{8}$, in °C, dove t è il numero di ore trascorse dalle 6. Calcola la temperatura media in quelle 12 ore e trova a che ora la temperatura è uguale alla media.

Soluzione. Una primitiva di T è $10t + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{24}$. Quindi

$$\int_0^{12} T(t)\,\mathrm{d}t = 120 + 216 - 72 = 264 \qquad \overline{T} = \frac{264}{12} = 22\ °\mathrm{C}$$

L'equazione $10 + 3t - \frac{t^2}{8} = 22$ equivale a $t^2 - 24t + 96 = 0$, con soluzioni $t = 12 \pm 4\sqrt{3}$. Nell'intervallo $[0; 12]$ è accettabile solo $t = 12 - 4\sqrt{3} \approx 5{,}07$: la temperatura è uguale alla media circa alle 11:04. Si noti che la media non è $\frac{T(0) + T(12)}{2} = \frac{10 + 28}{2} = 19$ °C: la temperatura sale in fretta nelle prime ore e poi sempre più lentamente, il grafico sta sopra la corda che ne unisce gli estremi, e la media integrale, che tiene conto di tutti gli istanti, è più alta.

ERRORE FREQUENTE

La formula di Newton–Leibniz richiede che f sia continua su tutto $[a; b]$. Applicandola alla cieca a $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, con la primitiva $-\frac{1}{x}$, si otterrebbe $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$: un numero negativo come «integrale» di una funzione sempre positiva. L'errore è che $\frac{1}{x^2}$ non è definita in 0 e non è limitata vicino a 0: l'integrale definito di questo capitolo non esiste. Prima di applicare la formula, controlla che l'intervallo non contenga punti esclusi dal dominio.

APPROFONDIMENTO · TORRICELLI, BARROW E IL LEGAME TRA TANGENTI E AREE

Il teorema porta il nome di Torricelli e Barrow perché entrambi, a metà del Seicento, videro con metodi geometrici che il problema delle tangenti e quello delle aree sono inversi l'uno dell'altro. Evangelista Torricelli, allievo di Galileo come Cavalieri, ne ottenne casi particolari studiando le curve. Isaac Barrow, primo titolare della cattedra lucasiana di matematica a Cambridge e maestro di Newton, ne diede una formulazione geometrica generale. Fu però con Newton e Leibniz (capitolo 5) che la relazione divenne un *metodo di calcolo*: per trovare un'area basta trovare una primitiva, e una tabella di derivate letta al contrario risolve problemi che ad Archimede avevano richiesto un ingegno straordinario.

È per questo che le *Indicazioni nazionali* mettono insieme la velocità istantanea, la tangente a una curva e il calcolo di aree e volumi: sono facce di un'unica teoria. La derivata misura la rapidità con cui una grandezza cambia; l'integrale ricostruisce la grandezza dalla sua rapidità di cambiamento. Lo spazio percorso è l'integrale della velocità, e la velocità è la derivata dello spazio percorso.

9.6 Il calcolo approssimato di un integrale

La formula di Newton–Leibniz richiede una primitiva scritta con le funzioni che conosciamo, e non sempre esiste. La funzione e^{-x^2}, il cui grafico è la «curva a campana» incontrata nel capitolo 7 e che ritroveremo nel capitolo 11, è continua e quindi ha una primitiva, la sua funzione integrale; ma si dimostra che questa primitiva non si può esprimere con un numero finito di somme, prodotti, quozienti e composizioni di polinomi, esponenziali, logaritmi e funzioni circolari. Per calcolare $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ si torna allora alle somme, che danno un valore approssimato con la precisione che si desidera.

9.6.1 Il metodo dei rettangoli

La funzione e^{-x^2} è decrescente su $[0; 1]$: la somma superiore usa i valori agli estremi sinistri degli intervalli, quella inferiore i valori agli estremi destri. Con $n = 4$ e $\Delta x = 0{,}25$ i valori necessari sono $f(0) = 1$, $f(0{,}25) \approx 0{,}9394$, $f(0{,}5) \approx 0{,}7788$, $f(0{,}75) \approx 0{,}5698$, $f(1) \approx 0{,}3679$. Quindi

$$S_4 = 0{,}25 \cdot (1 + 0{,}9394 + 0{,}7788 + 0{,}5698) \approx 0{,}8220 \qquad s_4 = 0{,}25 \cdot (0{,}9394 + 0{,}7788 + 0{,}5698 + 0{,}3679) \approx 0{,}6640$$

Il **metodo dei rettangoli** assicura che $0{,}6640 \le I \le 0{,}8220$ (Figura 9.7 a): una forbice ancora larga, $S_4 - s_4 = 0{,}25 \cdot (f(0) - f(1)) \approx 0{,}158$. Per una funzione monotona la forbice è sempre $\dfrac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)|$: per dimezzarla bisogna raddoppiare n.

9.6.2 Il metodo dei trapezi

Si fa molto meglio sostituendo ogni rettangolo con il trapezio che ha per lati obliqui la corda del grafico (Figura 9.7 b). L'area del trapezio sull'intervallo $[x_{k-1};\, x_k]$ è $\dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta x$, e sommando si ottiene la formula del **metodo dei trapezi**:

$$T_n = \Delta x \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

cioè la media aritmetica tra la somma con gli estremi sinistri e quella con gli estremi destri. Per $n = 4$: $T_4 = \dfrac{0{,}8220 + 0{,}6640}{2} \approx 0{,}7430$.

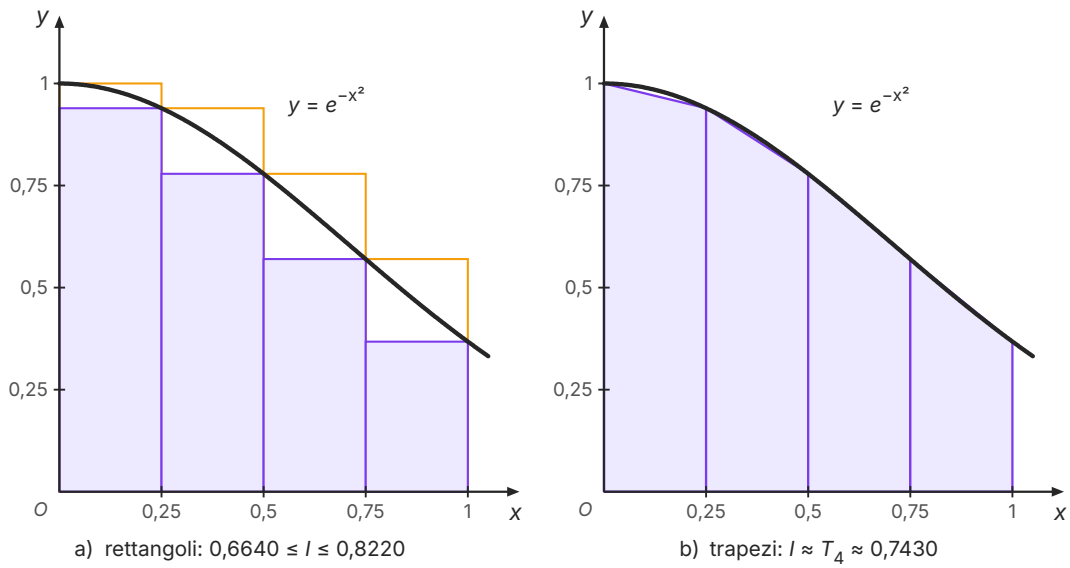


Figura 9.7 Calcolo approssimato di $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con $n = 4$ (unità uguali sui due assi). a) Rettangoli circoscritti (bordo arancio, valori agli estremi sinistri) e inscritti (viola, valori agli estremi destri): $0{,}6640 \le I \le 0{,}8220$. b) Trapezi: i lati superiori sono corde del grafico e quasi lo ricalcano; $T_4 \approx 0{,}7430$ contro il valore $I \approx 0{,}7468$.

Tabella 9.3 Approssimazioni di $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}746824$ (valori arrotondati alla quarta cifra decimale; l'ultimo errore alla sesta).

n	estremi destri (s_n)	estremi sinistri (S_n)	trapezi T_n	errore di T_n
1	0,3679	1	0,6839	−0,0629
2	0,5733	0,8894	0,7314	−0,0155
4	0,6640	0,8220	0,7430	−0,0038
8	0,7064	0,7854	0,7459	−0,0010
100	0,7437	0,7500	0,7468	−0,000006

La Tabella 9.3 confronta i metodi. Con i trapezi l'errore si riduce di circa quattro volte ogni volta che n raddoppia, mentre la forbice dei rettangoli solo della metà: con $n = 8$ il valore 0,7459 è già corretto a meno di un millesimo. Con $n = 100$ si ottengono quattro cifre decimali esatte, 0,7468 (il valore più preciso è 0,746824…).

Il calcolo integrale ha dunque due volti. Quello **esatto** passa per una primitiva e la formula di Newton–Leibniz, e funziona quando la primitiva si scrive con funzioni note. Quello **numerico** torna alla definizione, somme di rettangoli o di trapezi, e funziona per ogni funzione continua, anche quando la funzione è nota solo per punti, da una tabella di misure. Le calcolatrici e i programmi che restituiscono il valore di un integrale definito usano metodi numerici di questo tipo, più raffinati.

SINTESI

- Il trapezoide di una funzione continua $f \geq 0$ su $[a; b]$ è la regione compresa tra il grafico, l'asse x e le rette $x = a$, $x = b$; la geometria elementare non ne dà l'area.
- Archimede calcolò il segmento parabolico con il metodo di esaustione: triangoli inscritti le cui aree formano la serie geometrica $8 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots = \frac{32}{3}$ nel caso di $y = 4 - x^2$.
- Lo spazio percorso è l'area sotto il grafico velocità–tempo; per la caduta libera il triangolo dà $\frac{1}{2} g t^2$.
- Divisa $[a; b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x = \frac{b - a}{n}$, le somme inferiore s_n e superiore S_n usano il minimo e il massimo di f su ogni intervallo; l'area sta tra di esse.
- Per $y = x^2$ su $[0; 1]$, con $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (dimostrata per induzione), entrambe le somme tendono a $\frac{1}{3}$.
- Per f continua le somme hanno lo stesso limite, l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$: un'area con segno, in cui le parti sotto l'asse x contano negativamente. L'area della regione è $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- Proprietà: $\int_a^a = 0$, $\int_b^a = -\int_a^b$, linearità, additività rispetto all'intervallo, confronto. L'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali.
- Teorema della media: se f è continua su $[a; b]$, esiste c con $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a)$; il valore medio è $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ accumula l'area con segno: cresce dove $f > 0$ e decresce dove $f < 0$.
- Teorema fondamentale: se f è continua, $F'(x) = f(x)$. Le primitive di f su un intervallo sono le funzioni $G(x) + c$.
- Formula di Newton–Leibniz: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$, con G primitiva di f; vale solo se f è continua su tutto $[a; b]$.
- Quando la primitiva non si scrive con funzioni elementari, come per e^{-x^2}, si usano i metodi numerici dei rettangoli e dei trapezi.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se f è continua su $[a; b]$, la somma inferiore s_n e la somma superiore S_n:
   A. sono uguali per ogni n
   B. verificano $s_n \le S_n$ e hanno lo stesso limite per $n \to +\infty$
   C. hanno limiti diversi, e l'integrale è la media dei due limiti
   D. hanno lo stesso limite solo se f è crescente

2. ● $\int_{-2}^{2} x\,dx$ vale:
   A. 4
   B. 2
   C. 0
   D. −4

3. ● Se $F(x) = \int_{1}^{x} (t^2 + 1)\,dt$, allora $F'(2)$ vale:
   A. 5
   B. 3
   C. $\frac{10}{3}$
   D. 0

4. ● Quale funzione è una primitiva di $\cos x$?
   A. $-\text{sen } x$
   B. $-\cos x$
   C. $\cos x + 1$
   D. $\text{sen } x + 7$

5. ● Il valore medio di $f(x) = 2x$ sull'intervallo $[0; 3]$ è:
   A. 3
   B. 9
   C. 6
   D. $\frac{3}{2}$

6. ●● Quale uguaglianza è **falsa** in generale, per f e g continue?
   A. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
   B. $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$
   C. $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx$
   D. $\int_0^1 [2f(x) + g(x)]\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a; b]$.
   b) Se f è continua e $f(x) \geq 0$ su $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
   c) Due primitive della stessa funzione su un intervallo differiscono per una costante.
   d) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$.
   e) Il teorema della media garantisce che il punto c in cui $f(c)$ è uguale al valore medio è unico.

8. ● Completa.
   a) Per una funzione continua su $[a; b]$, l'integrale definito è il limite comune delle successioni delle _____ e delle _____ .
   b) G è una primitiva di f sull'intervallo I se _____ per ogni $x \in I$.
   c) Formula di Newton–Leibniz: $\int_a^b f(x)\,dx =$ _____ , dove G è _____ .
   d) Il valore medio di f su $[a; b]$ è _____ .

Calcolare

9. ● Per $f(x) = x + 1$ su $[0; 2]$, con $n = 4$, calcola la somma inferiore s_4 e la somma superiore S_4. Calcola poi l'area del trapezoide con la geometria elementare e verifica che sta tra le due somme.

10. ●● Per $f(x) = 4 - x^2$ su $[0; 2]$ calcola s_4 e S_4 (attenzione: la funzione è decrescente) e confrontale con il valore esatto $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$, ottenuto con la formula di Newton–Leibniz.

11. ● Calcola senza cercare primitive, usando la geometria elementare o le simmetrie: a) $\int_0^3 (2x + 1)\,dx$; b) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$; c) $\int_{-3}^{3} (x^3 - 5x)\,dx$; d) $\int_0^4 |x - 2|\,dx$.

12. ● Trova una primitiva e controllala derivando: a) $5x^4 - 3x^2 + 2$; b) $4x^3 + \frac{1}{x}$, per $x > 0$; c) $3\cos x - 2\operatorname{sen} x$; d) $2e^x - \frac{1}{x^2}$, per $x > 0$.

13. ● Calcola con la formula di Newton–Leibniz: a) $\int_1^3 (x^2 - 2x)\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; c) $\int_0^1 (e^x + 1)\,dx$; d) $\int_{-1}^{2} (x^3 - x)\,dx$.

14. ●● Per $f(x) = x^2 - 1$ su $[0; 2]$ calcola a) l'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$; b) l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = 0$ e $x = 2$. Spiega perché i due numeri sono diversi.

15. ●● Calcola il valore medio della funzione sull'intervallo indicato e trova i punti in cui la funzione lo assume: a) $f(x) = x^3$ su $[0; 2]$; b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ su $[0; \pi]$.

16. ●● Sia $F(x) = \int_0^x (2t - 4)\,dt$. a) Scrivi $F(x)$ con la formula di Newton–Leibniz. b) Verifica che $F'(x) = 2x - 4$, come prevede il teorema fondamentale. c) In quale intervallo F decresce? Qual è il suo minimo? d) Calcola $F(4)$ e interpreta il risultato in termini di aree.

17. ●● a) Trova $k > 0$ tale che $\int_0^k (2x + 3)\,dx = 10$. b) Trova il numero reale a tale che $\int_0^2 (x^2 + a)\,dx = 4$.

18. ●● Calcola $\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\,dx$ e l'area della regione compresa tra il grafico di $y = x^3 - 4x$ e l'asse x su $[-2; 2]$.

Dimostrare e argomentare

19. ●● a) Dimostra per induzione che, per ogni $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. b) Usa la formula per calcolare la somma superiore S_n di $f(x) = x^3$ su $[0; 1]$ e il suo limite. c) Controlla il risultato con la formula di Newton–Leibniz.

20. ●● Sia $f(x) = 0$ per $0 \leq x < 1$ e $f(x) = 1$ per $1 \leq x \leq 2$. a) Spiega perché l'area del trapezoide di f su $[0; 2]$ è 1 e il «valore medio» è $\frac{1}{2}$. b) Il valore $\frac{1}{2}$ è assunto da f? c) Quale ipotesi del teorema della media manca?

21. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 e^x\,dx = \frac{1}{2}(e - 1)$». Spiega dove sbaglia, verifica che $G(x) = (x - 1)e^x$ è una primitiva di $x\,e^x$ e calcola il valore corretto.

22. ●● Spiega perché, se f è continua e $f(x) > 0$ su $[a; b]$, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente su $[a; b]$. Deduci che $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ è crescente e, usando la Tabella 9.3, stima $G(1)$.

Problemi

23. ●● Un'automobile accelera e la sua velocità, in m/s, è $v(t) = 4 + 2t$ per $0 \leq t \leq 6$ (secondi). a) Calcola lo spazio percorso con un integrale e controlla il risultato con l'area di un trapezio. b) Calcola la velocità media. c) In quale istante la velocità è uguale alla velocità media?

24. ●● Durante un temporale (dati inventati) l'acqua entra in una vasca di raccolta con una portata $r(t) = 6t - t^2$, in m^3/h, per $0 \leq t \leq 6$ (ore). a) Quanta acqua entra in tutto? b) Quando la portata è massima, e quanto vale? c) Qual è la portata media?

25. ●● Una palla è lanciata verso l'alto e la sua velocità, in m/s, è $v(t) = 14{,}7 - 9{,}8t$ per $0 \leq t \leq 3$ (secondi, con il verso positivo verso l'alto). a) Calcola $\int_0^3 v(t)\,dt$ e spiega che cosa rappresenta. b) Calcola la strada effettivamente percorsa dalla palla. c) Qual è la quota massima raggiunta rispetto al punto di lancio?

26. ●● In un conduttore (dati inventati) l'intensità di corrente, in ampere, cala secondo la legge $i(t) = 3 - 0{,}5t$ per $0 \leq t \leq 6$ (secondi). Poiché $i = \frac{dq}{dt}$, la carica che attraversa una sezione del conduttore è l'integrale dell'intensità. a) Calcola la carica, in coulomb, passata nei 6 s. b) Qual è l'intensità media?

Con il computer

27. ●● Si può dimostrare che $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$. Con un foglio di calcolo, metti in una colonna i punti $x_k = \frac{k}{n}$, nella colonna accanto i valori $\frac{4}{1+x_k^2}$, e calcola la somma dei trapezi T_n per $n = 4$, 10, 100. a) Qual è l'errore $T_n - \pi$ in ciascun caso? b) Come cambia l'errore quando n passa da 10 a 100?

Verso l'esame

28. ●● Nello stile delle prove nazionali. Durante una piena (dati inventati) si misura ogni ora la portata d'acqua che esce da uno scolmatore: t (ore): $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; portata ($m^3$/h): $0 \cdot 40 \cdot 70 \cdot 60 \cdot 30$. Con il metodo dei trapezi, il volume d'acqua uscito nelle 4 ore è circa:

A. 170 m^3
B. 185 m^3
C. 200 m^3
D. 260 m^3

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Una funzione continua f è positiva su $]0; 2[$ e negativa su $]2; 5[$; inoltre $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ e $\int_2^5 f(x)\,dx = -5$. Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ per $x \in [0; 5]$. a) Quanto vale $F(5)$? b) In quale punto F ha il massimo, e quanto vale? c) Quanto vale $\int_5^0 f(x)\,dx$?

30. ●● Spunto per il colloquio. Documento: la Figura 9.1 (i triangoli con cui Archimede «esaurisce» il segmento parabolico) accanto alla formula $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$. Spiega come il problema dell'area è stato risolto da Archimede e come lo risolvono il teorema fondamentale e la formula di Newton–Leibniz; collega il tema alla filosofia (l'infinito potenziale e attuale, Zenone, gli indivisibili di Cavalieri), alla fisica (lo spazio percorso come area sotto il grafico velocità–tempo) e alla storia della rivoluzione scientifica.

31. ●●● Sfida. Calcola $\int_0^1 e^x\,dx$ con le somme, senza usare primitive. a) Mostra che la somma superiore con n intervalli è $S_n = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}}\right)$ e che è la somma di una progressione geometrica di ragione $e^{\frac{1}{n}}$. b) Deduci che $S_n = e^{\frac{1}{n}}\,(e-1)\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$. c) Usa il limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ per calcolare $\lim_{n\to+\infty} S_n$ e confronta con la formula di Newton–Leibniz.

PER APPROFONDIRE

- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: dal metodo di esaustione agli indivisibili di Cavalieri, fino a Barrow, Newton e Leibniz.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con l'integrale come limite di somme e il teorema fondamentale.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Archimede e sul Seicento.

Glossario del capitolo

Additività
La proprietà $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Area con segno
Il significato geometrico dell'integrale: le parti del trapezoide sopra l'asse x contano positivamente, quelle sotto negativamente.

Estremi di integrazione
I numeri a e b in $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; la funzione f è la funzione integranda.

Formula di Newton–Leibniz
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$, con G primitiva della funzione continua f.

Funzione integrabile
Una funzione per cui le somme inferiori e superiori hanno lo stesso limite; ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato lo è.

Funzione integrale
La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, che a ogni x associa l'area con segno accumulata da a a x.

Indivisibili
Per Cavalieri, le corde parallele di cui una figura piana è pensata composta; due figure con corde uguali alla stessa altezza hanno la stessa area.

Integrale definito
Il limite comune delle somme inferiori e superiori di una funzione continua su $[a; b]$; si scrive $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Metodo dei trapezi
L'approssimazione di un integrale con la somma delle aree dei trapezi che hanno per lati obliqui le corde del grafico.

Metodo di esaustione
Il procedimento dei matematici greci che determina un'area avvicinandola con poligoni inscritti (e circoscritti) e dimostrando per assurdo che non può essere né maggiore né minore di un valore dato.

Partizione
La divisione di $[a; b]$ in intervalli mediante i punti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; qui sempre in n parti uguali.

Primitiva
Una funzione G tale che $G'(x) = f(x)$ su un intervallo; due primitive della stessa funzione differiscono per una costante.

Somma inferiore
La somma s_n delle aree dei rettangoli che hanno per altezza il minimo di f su ciascun intervallo della partizione.

Somma superiore
La somma S_n delle aree dei rettangoli che hanno per altezza il massimo di f su ciascun intervallo della partizione.

Teorema della media
Se f è continua su $[a; b]$, esiste $c \in [a; b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a)$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Se f è continua su un intervallo, la sua funzione integrale è derivabile e $F'(x) = f(x)$ (teorema di Torricelli–Barrow).

Trapezoide
La regione compresa tra il grafico di una funzione continua non negativa su $[a; b]$, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$.

Valore medio
Il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, altezza del rettangolo di base $[a; b]$ con la stessa area del trapezoide.

Soluzioni

1. B. Per ogni n vale $s_n \le S_n$, e per una funzione continua le due successioni convergono allo stesso numero, l'integrale.

2. C. La funzione è dispari e l'intervallo simmetrico: le aree con segno −2 e +2 si compensano.

3. A. Per il teorema fondamentale $F'(x) = x^2 + 1$, quindi $F'(2) = 5$.

4. D. $(\text{sen } x + 7)' = \cos x$; le altre hanno derivata $-\cos x$, $\text{sen } x$, $-\text{sen } x$.

5. A. $\int_0^3 2x\,dx = [x^2]_0^3 = 9$ e $\frac{9}{3} = 3$.

6. C. L'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali: con $f(x) = g(x) = x$ si ottiene $\frac{1}{3}$ a sinistra e $\frac{1}{4}$ a destra.

7. a) Falso: le aree con segno possono compensarsi; per esempio $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = 0$. b) Vero, per la proprietà del confronto con la funzione nulla. c) Vero (corollario del teorema di Lagrange). d) Falso: $\frac{1}{x^2}$ non è definita in 0, la formula di Newton–Leibniz non si applica e l'integrale definito di questo capitolo non esiste. e) Falso: il teorema afferma l'esistenza di c, non l'unicità; $\text{sen } x$ su $[0; 2\pi]$ assume il valore medio 0 in tre punti.

8. a) somme inferiori; somme superiori. b) $G'(x) = f(x)$. c) $G(b) - G(a)$; una qualunque primitiva di f su $[a; b]$. d) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

9. $\Delta x = 0{,}5$; f crescente. $s_4 = 0{,}5 \cdot (1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5) = 3{,}5$; $S_4 = 0{,}5 \cdot (1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3) = 4{,}5$. Il trapezoide è un trapezio di basi 1 e 3 e altezza 2: area $\frac{(1+3)\cdot 2}{2} = 4$, e $3{,}5 \le 4 \le 4{,}5$.

10. $\Delta x = 0{,}5$; valori $f(0) = 4$, $f(0{,}5) = 3{,}75$, $f(1) = 3$, $f(1{,}5) = 1{,}75$, $f(2) = 0$. Funzione decrescente: $S_4 = 0{,}5 \cdot (4 + 3{,}75 + 3 + 1{,}75) = 6{,}25$, $s_4 = 0{,}5 \cdot (3{,}75 + 3 + 1{,}75 + 0) = 4{,}25$. Valore esatto: $[4x - \frac{x^3}{3}]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$, compreso tra le due somme.

11. a) Trapezio di basi $f(0) = 1$ e $f(3) = 7$, altezza 3: 12. b) Semicerchio di raggio 2: $\frac{\pi \cdot 4}{2} = 2\pi$. c) Funzione dispari su intervallo simmetrico: 0. d) Due triangoli di base 2 e altezza 2: $2 + 2 = 4$.

12. a) $x^5 - x^3 + 2x$. b) $x^4 + \ln x$. c) $3\,\text{sen } x + 2\cos x$ (infatti $(2\cos x)' = -2\,\text{sen } x$). d) $2e^x + \frac{1}{x}$ (infatti $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$). A ciascuna si può aggiungere una costante.

13. a) $[\frac{x^3}{3} - x^2]_1^3 = (9 - 9) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{2}{3}$. b) $[\text{sen } x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. c) $[e^x + x]_0^1 = (e + 1) - 1 = e$. d) $[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^2 = (4 - 2) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.

14. a) $[\frac{x^3}{3} - x]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$. b) $f < 0$ su $[0; 1[$ e $f > 0$ su $]1; 2]$: $\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$ e $\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \frac{4}{3}$; l'area è $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$. L'integrale è un'area con segno: la parte sotto l'asse ($\frac{2}{3}$) viene sottratta, $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

15. a) $\int_0^2 x^3\,dx = [\frac{x^4}{4}]_0^2 = 4$, valore medio $\frac{4}{2} = 2$, assunto in $c = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. b) $\int_0^\pi \text{sen } x\,dx = 2$, valore medio $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$; $\text{sen } c = \frac{2}{\pi}$ ha in $[0; \pi]$ due soluzioni, $c = \arcsen \frac{2}{\pi} \approx 0{,}690$ e $c = \pi - 0{,}690 \approx 2{,}451$.

16. a) $F(x) = [t^2 - 4t]_0^x = x^2 - 4x$. b) $F'(x) = 2x - 4$, che è l'integranda calcolata in x. c) $F' < 0$ per $x < 2$: F decresce su $]-\infty; 2]$ e cresce dopo; il minimo è $F(2) = -4$. d) $F(4) = 0$: l'area sotto l'asse su $[0; 2]$ (trian-

golo di area 4) e quella sopra l'asse su [2; 4] (area 4) si compensano.

17. a) $[x^2 + 3x]_0^k = k^2 + 3k = 10$, cioè $k^2 + 3k - 10 = 0$: $k = 2$ (la soluzione -5 non è accettabile). b) $\frac{8}{3} + 2a = 4$, quindi $a = \frac{2}{3}$.

18. La funzione è dispari: l'integrale su $[-2; 2]$ è 0. Per l'area: $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ è positiva su $]-2; 0[$ e negativa su $]0; 2[$; per simmetria l'area è $2\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2[2x^2 - \frac{x^4}{4}]_0^2 = 2 \cdot (8 - 4) = 8$.

19. a) **Passo base:** $1 = (\frac{1 \cdot 2}{2})^2$. **Passo induttivo:** $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, la formula per $n+1$. b) f è crescente, quindi $S_n = \frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{n})^2 \to \frac{1}{4}$. c) $[\frac{x^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4}$.

20. a) Il trapezoide è il quadrato di lato 1 su $[1; 2]$ (su $[0; 1[$ l'altezza è 0): area 1; diviso per la lunghezza 2 dell'intervallo dà $\frac{1}{2}$. (Anche le somme s_n e S_n tendono a 1: differiscono al più per i due rettangoli vicini a $x = 1$, di area totale al più $2 \cdot \frac{2}{n}$.) b) No: f assume solo i valori 0 e 1. c) La continuità: f ha un salto in $x = 1$, e senza continuità il teorema dei valori intermedi non si applica.

21. L'integrale di un prodotto non è il prodotto degli integrali. $G'(x) = e^x + (x-1)e^x = x\,e^x$, quindi $\int_0^1 x\,e^x\,dx = G(1) - G(0) = 0 - (-1) = 1$, mentre $\frac{1}{2}(e - 1) \approx 0{,}859$.

22. Per il teorema fondamentale $F'(x) = f(x) > 0$, e una funzione con derivata positiva su un intervallo è crescente (corollario del teorema di Lagrange). Oppure: se $x_1 < x_2$, $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt > 0$, area di un trapezoide non vuoto. Poiché $e^{-t^2} > 0$ per ogni t, G è crescente; $G(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \approx 0{,}7468$.

23. a) $\int_0^6 (4 + 2t)\,dt = [4t + t^2]_0^6 = 24 + 36 = 60$ m; controllo: trapezio di basi $v(0) = 4$ e $v(6) = 16$, altezza 6: $\frac{(4+16) \cdot 6}{2} = 60$. b) $\frac{60}{6} = 10$ m/s. c) $4 + 2t = 10$ per $t = 3$ s.

24. a) $\int_0^6 (6t - t^2)\,dt = [3t^2 - \frac{t^3}{3}]_0^6 = 108 - 72 = 36$ m³. b) La parabola ha il vertice in $t = 3$: portata massima $r(3) = 9$ m³/h. c) $\frac{36}{6} = 6$ m³/h.

25. a) $[14{,}7t - 4{,}9t^2]_0^3 = 44{,}1 - 44{,}1 = 0$: è lo spostamento complessivo; dopo 3 s la palla è tornata al punto di lancio. b) $v > 0$ per $t < 1{,}5$ e $v < 0$ dopo: la strada percorsa è $\int_0^{1,5} v\,dt + |\int_{1,5}^3 v\,dt| = 11{,}025 + 11{,}025 = 22{,}05$ m. c) La quota massima è raggiunta per $t = 1{,}5$ s: $\int_0^{1,5} v\,dt = 14{,}7 \cdot 1{,}5 - 4{,}9 \cdot 1{,}5^2 = 22{,}05 - 11{,}025 = 11{,}025$ m ≈ 11 m.

26. a) $q = \int_0^6 (3 - 0{,}5t)\,dt = [3t - 0{,}25t^2]_0^6 = 18 - 9 = 9$ C (è anche l'area del triangolo di base 6 e altezza 3). b) $\frac{9}{6} = 1{,}5$ A.

27. a) $T_4 \approx 3{,}1312$, errore circa $-0{,}0104$; $T_{10} \approx 3{,}1399$, errore circa $-0{,}0017$; $T_{100} \approx 3{,}141576$, errore circa $-0{,}000017$: coincide con $\pi = 3{,}14159\ldots$ nelle prime quattro cifre decimali. b) Passando da 10 a 100 l'errore si divide circa per 100: nel metodo dei trapezi l'errore è circa proporzionale a $\frac{1}{n^2}$.

28. B. $1 \cdot (\frac{0}{2} + 40 + 70 + 60 + \frac{30}{2}) = 185$ m³.

29. a) $F(5) = 3 + (-5) = -2$. b) F cresce dove $f > 0$ e decresce dove $f < 0$: il massimo è in $x = 2$, con $F(2) = 3$. c) $\int_5^0 f(x)\,dx = -\int_0^5 f(x)\,dx = -(-2) = 2$.

30. Traccia: 1) il problema delle figure curve, il trapezoide; 2) Archimede: triangoli inscritti, ogni passo un quarto del precedente, l'area $\frac{4}{3}$ del triangolo dimostrata per doppio assurdo, senza infinito attuale (infinito potenziale di Aristotele); oggi la somma della serie geometrica; 3) Cavalieri e gli indivisibili: efficaci ma esposti all'obiezione di comporre il continuo con elementi senza estensione (Zenone); 4) l'integrale come limite di somme finite (Cauchy, Riemann) e il teorema fondamentale: l'area si calcola con una primitiva, il problema delle aree è l'inverso di quello delle tangenti (Torricelli, Barrow, Newton, Leibniz); 5) fisica: lo spazio come area sotto il grafico v–t, la caduta dei gravi di Galileo; 6) storia: il calcolo come strumento della rivo-

luzione scientifica e della matematizzazione della natura.

31. a) $f(x) = e^x$ è crescente: S_n usa gli estremi destri $\frac{k}{n}$, $k = 1, \dots, n$, e $e^{\frac{k}{n}} = (e^{\frac{1}{n}})^k$: progressione geometrica di primo termine $e^{\frac{1}{n}}$ e ragione $q = e^{\frac{1}{n}}$. b) $e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}} = e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$, e moltiplicando per $\frac{1}{n}$ si ha la formula. c) Con $h = \frac{1}{n} \to 0$: $\frac{h}{e^h - 1} \to 1$ e $e^h \to 1$, quindi $S_n \to e - 1 \approx 1{,}718$. Con Newton–Leibniz: $[e^x]_0^1 = e - 1$.