CAPITOLO

8

Ottimizzazione e modelli

Ogni problema di massimo e di minimo è una domanda su ciò che conviene: la derivata non dà la risposta, ma dice dove cercarla. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Tradurre un problema di massimo o di minimo in una funzione obiettivo, con i suoi vincoli e il suo dominio.
2. Risolvere problemi di ottimizzazione con la derivata, controllando i punti stazionari e gli estremi del dominio.
3. Risolvere problemi geometrici classici: la scatola, la lattina, il cilindro inscritto, la distanza minima da una curva.
4. Ricavare le leggi della riflessione e della rifrazione dal principio di Fermat, e risolvere problemi di fisica come la gittata massima e la massima potenza.
5. Applicare il metodo a problemi di economia e di medicina: profitto massimo, costo medio minimo, concentrazione massima.
6. Leggere la derivata come tasso di variazione nei modelli di crescita e confrontare il modello esponenziale con quello logistico.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 L'idea di ottimizzazione 2
8.2 Problemi geometrici 4
8.3 Ottimizzazione in fisica 9
8.4 Ottimizzazione in economia e in altre discipline 13
8.5 Modelli e calcolo 15

Matematica 5 · Parte III · Il calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 8: Ottimizzazione e modelli · pagine 205–228 del volume completo · estratto per lo studio

Quale forma deve avere una lattina perché serva meno alluminio? Dove deve entrare in acqua un bagnino che corre sulla sabbia per raggiungere al più presto chi chiede aiuto? Quanti pezzi conviene produrre a un'azienda che vuole guadagnare il più possibile? Sono domande di tipo diverso, ma hanno la stessa struttura: c'è una grandezza da rendere *massima* o *minima*, e c'è qualcosa che possiamo scegliere. Il calcolo differenziale offre per tutte un unico metodo.

Nel capitolo 7 abbiamo imparato a studiare una funzione: il segno della derivata dice dove cresce e dove decresce, e quindi dove ha i massimi e i minimi. In questo capitolo usiamo quello strumento per risolvere problemi. Il lavoro nuovo sta quasi tutto prima della derivata: tradurre un problema in una funzione, cioè costruire un *modello*. Per questo il capitolo si chiude con una riflessione su che cosa sia un modello matematico, e sul perché lo stesso fenomeno si possa descrivere con modelli diversi.

8.1 L'idea di ottimizzazione

8.1.1 Che cosa sappiamo già

Un primo incontro con i problemi di massimo e di minimo è avvenuto in *Matematica 3* (cap. 2): quando la grandezza da ottimizzare è una funzione di secondo grado, il suo grafico è una parabola e il massimo o il minimo si trova nel vertice, di ascissa $-\dfrac{b}{2a}$. Il metodo è elegante ma vale solo per le funzioni di secondo grado. Già il volume di una scatola, che è di terzo grado, sfugge al vertice. La derivata, invece, funziona per qualunque funzione derivabile: è il metodo generale.

8.1.2 Un orto da recintare

Riprendiamo un problema classico per confrontare i due metodi. Con 40 m di rete si vuole recintare un orto rettangolare: quali dimensioni danno l'area massima?

ESEMPIO SVOLTO

Il modello. Chiamiamo x un lato, in metri. Il perimetro è 40 m, quindi la somma di due lati consecutivi è 20 m e l'altro lato è $20 - x$. L'area è

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Il **dominio** del problema è $0 < x < 20$: un lato non può essere negativo né nullo, e non può superare 20 m. Agli estremi l'orto «degenera» in un segmento di area nulla.

La derivata. $A'(x) = 20 - 2x$, che è positiva per $x < 10$, nulla per $x = 10$, negativa per $x > 10$. L'area cresce fino a $x = 10$ e poi decresce: in $x = 10$ c'è il massimo assoluto, $A(10) = 100\ \text{m}^2$.

La risposta. L'orto di area massima è il quadrato di lato 10 m, con $100\ \text{m}^2$. Il vertice della parabola $y = -x^2 + 20x$ dà lo stesso risultato: $x = -\dfrac{20}{-2} = 10$. Stessa risposta, ma la derivata si potrà applicare anche dove il vertice non c'è.

8.1.3 Il metodo

Un problema di **ottimizzazione** chiede di trovare il valore massimo o minimo di una grandezza, al variare di qualcosa che si può scegliere. La grandezza da ottimizzare, scritta come funzione, si chiama **funzione obiettivo**. Le condizioni che il problema impone, come i 40 m di rete, sono i **vincoli**: servono a esprimere tutto con una sola variabile. Infine il **dominio del problema** (o insieme dei valori ammissibili) è l'insieme dei valori della variabile che hanno senso concreto. È più piccolo del dominio naturale della funzione: la formula $x(20 - x)$ ha senso per ogni x reale, l'orto solo per $0 < x < 20$.

IN SINTESI

Come si risolve un problema di ottimizzazione

1) **Modello.** Si sceglie la variabile, con la sua unità di misura, e si scrive la funzione obiettivo usando i vincoli.

2) **Dominio.** Si stabiliscono i valori ammissibili della variabile, estremi compresi o esclusi.

3) **Derivata.** Si calcola $f'(x)$ e se ne studia il segno nel dominio; si trovano i punti stazionari e i punti in cui f non è derivabile.

4) **Confronto.** Si confrontano i valori nei punti trovati con quelli agli estremi del dominio (o con i limiti agli estremi, se sono esclusi).

5) **Risposta.** Si risponde alla domanda a parole, con le unità di misura, e si controlla che il risultato sia ragionevole.

Due risultati del capitolo 4 e del capitolo 7 garantiscono che il metodo funzioni. Se il dominio è un intervallo chiuso $[a; b]$ e la funzione è continua, il **teorema di Weierstrass** assicura che massimo e minimo assoluti esistono; e un estremo interno, se f è derivabile, è un punto stazionario (teorema di Fermat, capitolo 6). Basta allora confrontare i valori nei punti stazionari e agli estremi. Se il dominio è aperto, come per l'orto, Weierstrass non si applica e serve lo studio del segno: quando la derivata è positiva a sinistra dell'unico punto stazionario e negativa a destra, quel punto è il massimo assoluto nel dominio.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare gli estremi del dominio. Cerchiamo il massimo di $f(x) = x^3 - 3x$ nell'intervallo $[-2; 3]$. La derivata $f'(x) = 3x^2 - 3$ si annulla in $x = -1$ e $x = 1$; $f(-1) = 2$ è un massimo *relativo*. Ma non è il massimo assoluto: $f(3) = 27 - 9 = 18$. Agli estremi f' non deve annullarsi, perché la funzione può continuare a crescere fino al bordo.

Confrontando tutti i valori, $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$: il massimo assoluto è 18, in $x = 3$; il minimo assoluto è -2, raggiunto in due punti, $x = -2$ e $x = 1$.

8.2 Problemi geometrici

8.2.1 La scatola senza coperchio

Da un foglio di cartone quadrato di lato 30 cm si vuole ricavare una scatola senza coperchio: si tagliano ai quattro angoli quattro quadrati uguali di lato x e si ripiegano i lembi verso l'alto (Figura 8.1). Quanto deve misurare x perché la scatola abbia il volume massimo?

Il fondo è un quadrato di lato $30 - 2x$ e l'altezza è x, quindi il volume, in cm^3, è

$$V(x) = x(30 - 2x)^2, \quad 0 < x < 15$$

Se x è piccolo la scatola è bassa; se x si avvicina a 15 cm il fondo si riduce a un punto. Tra i due estremi c'è un compromesso migliore. Con la regola del prodotto e la regola della funzione composta,

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \cdot 2(30 - 2x)(-2) = (30 - 2x)(30 - 6x) = 12(x - 5)(x - 15)$$

Nel dominio il fattore $x - 15$ è negativo; quindi $V'(x) > 0$ per $0 < x < 5$ e $V'(x) < 0$ per $5 < x < 15$. Il volume cresce fino a $x = 5$ e poi decresce: il massimo è $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000\ \text{cm}^3$, due litri. Lo stesso calcolo, con un foglio di lato l, dà $V'(x) = (l - 2x)(l - 6x)$: il taglio migliore è sempre $x = \dfrac{l}{6}$, e il volume massimo è $\dfrac{2l^3}{27}$.

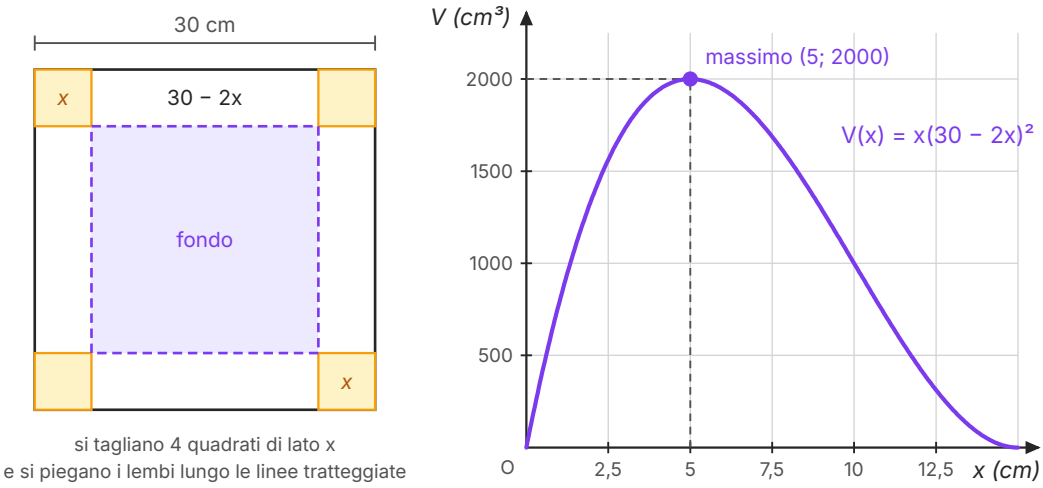

Figura 8.1 A sinistra, il foglio di lato 30 cm con i quattro quadrati di lato x da tagliare; il tratteggio indica le pieghe. A destra, il grafico di $V(x) = x(30 - 2x)^2$ per $0 < x < 15$ (scale diverse sui due assi), calcolato dall'equazione: il massimo è nel punto (5; 2000).

8.2.2 La lattina più economica

Un'azienda deve produrre lattine cilindriche chiuse da un litro, cioè da 1000 cm^3, e vuole usare meno metallo possibile. Il volume è fissato; la grandezza da rendere minima è la superficie totale. È il problema che in fisica e in ingegneria si incontra di continuo: ottenere una prestazione data con la minima spesa.

La superficie totale si può scrivere in funzione del solo raggio r, e il grafico della Figura 8.2 mostra come nasce il compromesso: la superficie delle basi cresce come r^2, quella della parete laterale decresce come $\dfrac{1}{r}$, e la somma ha un minimo dove le due tendenze si bilanciano. Vediamo i conti.

ESEMPIO SVOLTO

Il modello. Siano r il raggio di base e h l'altezza, in centimetri. Il vincolo è il volume: $\pi r^2 h = 1000$, quindi $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$. La superficie è formata dalle due basi e dalla parete laterale:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0$$

Il dominio. Ogni raggio positivo è ammissibile: un raggio piccolissimo dà una lattina sottile e altissima, un raggio grande una lattina larga e piatta. In entrambi i casi la superficie diventa enorme: $S(r) \to +\infty$ sia per $r \to 0^+$ sia per $r \to +\infty$.

La derivata. $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$, che si annulla per $r^3 = \dfrac{500}{\pi}$, cioè $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ cm. Il numeratore è negativo prima e positivo dopo: S decresce e poi cresce, e quel punto è il minimo assoluto.

La risposta. $h = \dfrac{1000}{\pi r^2} \approx 10{,}84$ cm, e $S \approx 553{,}6$ cm². Per confronto, con $r = 3$ cm servono circa 723 cm² e con $r = 10$ cm circa 828 cm².

Controllo. L'altezza è il doppio del raggio, cioè uguale al diametro. Non è un caso: con un volume V qualsiasi, $S'(r) = 0$ dà $2\pi r^3 = V$, e allora $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$. La lattina più economica ha la sezione assiale quadrata, qualunque sia il suo volume.

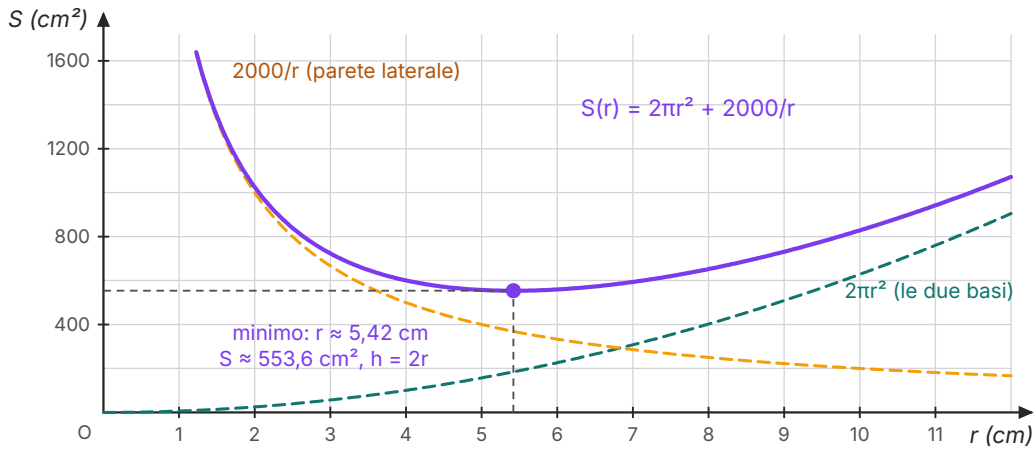

Figura 8.2 La superficie totale $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$ di una lattina da 1000 cm³ (in viola), somma dell'area delle due basi (verde, tratteggiata) e dell'area laterale (arancio, tratteggiata). Minimo per $r \approx 5{,}42$ cm, dove $h = 2r$; scale diverse sui due assi.

Le lattine vere spesso non hanno questa forma, perché nel loro progetto contano anche altri fattori, come lo spessore diverso del fondo e della parete o la comodità della presa: il modello calcola solo il metallo.

8.2.3 Un cilindro dentro una sfera

In una sfera di raggio R si inscrive un cilindro: quale ha il volume massimo? Prendiamo come variabile l'altezza h del cilindro. Una sezione passante per l'asse mostra un rettangolo inscritto in un cerchio di raggio R: metà altezza, raggio di base r e raggio della sfera formano un triangolo rettangolo, quindi per il teorema di Pitagora $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Il volume è

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right), \quad 0 < h < 2R$$

La derivata $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$ si annulla per $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, è positiva prima e negativa dopo. Il cilindro migliore ha altezza $h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\ R$, raggio $r = R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82\ R$ e volume $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$: circa il 57,7% del volume della sfera, perché il rapporto è $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Si noti che anche qui gli estremi del dominio danno volume nullo: un cilindro schiacciato in un disco o assottigliato in un segmento.

8.2.4 La distanza minima da una curva

La distanza di un punto da una retta si calcola con una formula (*Matematica 3*); la distanza da una curva è invece un problema di minimo: tra tutti i punti della curva, si cerca quello più vicino. Un'osservazione semplifica i conti: la distanza d e il suo quadrato d^2 sono minimi nello stesso punto, perché $t \to t^2$ è crescente per $t \geq 0$. Si minimizza d^2, che non contiene radici.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova il punto della parabola $y = x^2$ più vicino al punto A(3; 0) e calcola la distanza.

Il modello. Il generico punto della parabola è P(x; x^2), quindi $AP^2 = (x-3)^2 + x^4$, per ogni x reale.

La derivata. $\frac{d}{dx}\left[(x-3)^2 + x^4\right] = 2(x-3) + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 6$. Il valore $x = 1$ la annulla, e con Ruffini $4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$. Il trinomio $2x^2 + 2x + 3$ ha discriminante $4 - 24 < 0$ ed è sempre positivo: la derivata è negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$.

La risposta. Il punto più vicino è P(1; 1), e la distanza minima è $\sqrt{(1-3)^2 + 1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Controllo geometrico. La tangente alla parabola in P ha pendenza $2x = 2$; la retta AP ha pendenza $\frac{1-0}{1-3} = -\frac{1}{2}$. Il prodotto delle pendenze è -1: il segmento più corto è perpendicolare alla curva, come quello da un punto a una retta.

APPROFONDIMENTO · KEPLERO E LE BOTTI DI VINO

Nel 1613, quando si risposò, Giovanni Keplero comprò alcune botti di vino e osservò il modo in cui il mercante ne misurava il contenuto: infilava un'asta graduata nel foro di riempimento, a metà altezza, fino allo spigolo opposto del fondo, e leggeva un'unica misura. Keplero si chiese se una sola lunghezza potesse davvero dire il volume di botti di forme diverse. Ne nacque la *Nova stereometria doliorum vinariorum*, pubblicata nel 1615, in cui calcola i volumi di molti solidi di rotazione con un metodo che anticipa gli indivisibili del capitolo 9.

Keplero notò che le botti austriache avevano proporzioni vicine a quelle che, per una misura data dell'asta, rendono massimo il volume; e osservò che vicino al massimo il volume cambia pochissimo al variare delle proporzioni. È l'idea che oggi esprimiamo dicendo che nel punto di massimo la derivata è nulla: una variazione piccola della variabile produce una variazione ancora più piccola della funzione. (La sfida alla fine degli esercizi riprende il problema con un modello semplificato.)

APPROFONDIMENTO · DIDONE E LE CELLE DELLE API

Uno dei più antichi problemi di ottimizzazione della letteratura occidentale è nel primo libro dell'*Eneide*. Venere racconta a Enea che Didone, fuggita da Tiro, giunse in Africa e i suoi compagni «comprarono il suolo, Birsa dal nome dell'impresa, quanto ne potessero circondare con una pelle di toro» (*mercatique solum, facti de nomine Byrsam, / taurino quantum possent circumdare tergo*, I, 367–368; traduzione nostra). La tradizione aggiunge che la regina tagliò la pelle in strisce sottilissime e le dispose in modo da racchiudere la terra più vasta possibile.

Il problema matematico che ne nasce si chiama **problema isoperimetrico**: tra tutte le figure piane con lo stesso perimetro, quale ha l'area massima? La risposta è il cerchio (se la terra è chiusa su un lato da una costa rettilinea, il semicerchio). Con 40 m di rete il quadrato racchiude 100 m², il cerchio $\frac{1600}{4\pi} \approx 127$ m². Il fatto era noto ai Greci, ma una dimostrazione completa arrivò solo nell'Ottocento: le funzioni di una variabile non bastano, perché la «variabile» è una curva intera.

Un problema vicino fu discusso da Pappo di Alessandria (IV secolo d.C.), nel quinto libro della sua *Collezione*: le api costruiscono celle esagonali. Tra i poligoni regolari che possono ricoprire il piano senza lasciare spazi, cioè triangolo, quadrato ed esagono, a parità di area l'esagono ha il perimetro minore: per un'area di 1 cm² servono circa 4,56 cm di contorno con il triangolo, 4 cm con il quadrato, 3,72 cm con l'esagono. Che l'esagono sia il modo migliore di dividere il piano in regioni di area uguale con il minimo contorno, anche ammettendo forme irregolari, fu dimostrato solo nel 1999 dal matematico Thomas Hales. Che cosa «sappiano» le api resta un'altra questione.

8.3 Ottimizzazione in fisica

8.3.1 La riflessione: il problema di Erone

In *Matematica 3* (cap. 5) abbiamo risolto in modo sintetico il problema di Erone di Alessandria: due punti A e B stanno dalla stessa parte di uno specchio rettilineo; per quale punto P dello specchio passa il percorso più breve da A a B che tocca lo specchio? Ricordiamo l'idea. Sia A′ il simmetrico di A rispetto allo specchio: per ogni punto Q dello specchio $AQ = A'Q$, quindi $AQ + QB = A'Q + QB$, e per la disuguaglianza triangolare questa somma è minima quando Q sta sul segmento A′B (Figura 8.3). Nel punto P così trovato i due tratti formano angoli uguali con lo specchio, e quindi anche con la normale: è la legge della riflessione.

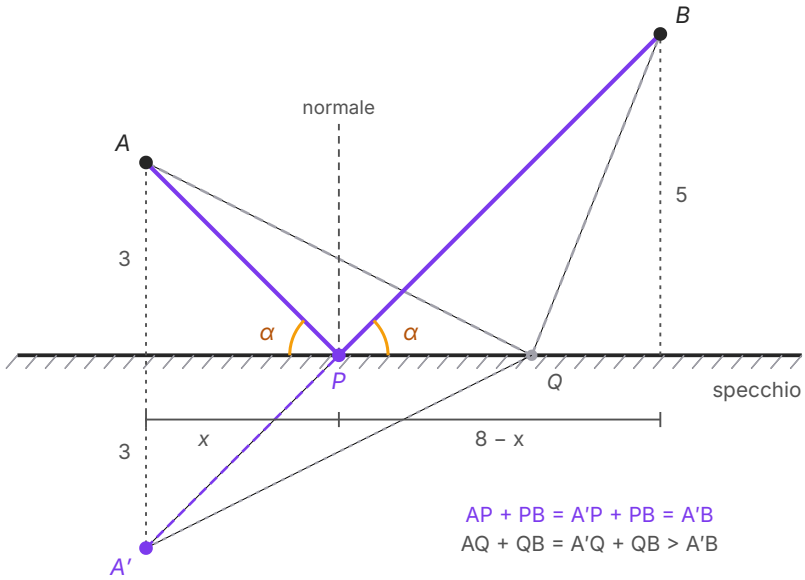

Figura 8.3 Il problema di Erone con A(0; 3) e B(8; 5) e lo specchio sull'asse *x* (unità uguali sui due assi). Il percorso minimo passa per P(3; 0), dove la retta A′B taglia lo specchio, e forma angoli uguali α con lo specchio; ogni altro punto Q dà un percorso più lungo.

Ora risolviamo lo stesso problema con la derivata, su un caso numerico. Mettiamo lo specchio sull'asse x, A(0; 3) e B(8; 5), e chiamiamo x l'ascissa del punto P(x; 0). La lunghezza del percorso è

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(8 - x)^2 + 25}, \quad 0 \le x \le 8$$

Con la regola della funzione composta,

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2+25}}$$

Le due frazioni hanno un significato geometrico: la prima è il coseno dell'angolo che AP forma con lo specchio, la seconda il coseno dell'angolo che PB forma con lo specchio. $L'(x) = 0$ significa quindi che i due angoli sono uguali, e la legge della riflessione è proprio la condizione di punto stazionario. Nel caso numerico gli angoli uguali rendono simili i due triangoli rettangoli di cateti 3, x e 5, $8 - x$: $\frac{x}{3} = \frac{8-x}{5}$, da cui $x = 3$. La lunghezza minima è $L(3) = \sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$, che coincide con $A'B = \sqrt{8^2 + 8^2}$. Il metodo sintetico è più breve; quello con la derivata ha il vantaggio di funzionare anche quando non c'è nessun simmetrico da costruire, come nel problema che segue.

8.3.2 La rifrazione e il principio di Fermat

Un bagnino si trova sulla spiaggia nel punto A, a 30 m dalla riva; una persona chiede aiuto nel punto B, in mare, a 40 m dalla riva, spostata di 60 m lungo la riva rispetto al bagnino. Il bagnino corre sulla sabbia a 5 m/s e nuota a 2 m/s (dati inventati). Dove gli conviene entrare in acqua? La linea retta da A a B è il percorso più corto, ma non il più rapido: fa nuotare troppo. Correre fino al punto della riva di fronte a B fa nuotare il meno possibile, ma allunga la corsa. La soluzione migliore sta in mezzo.

Mettiamo la riva sull'asse x, con A(0; 30) e B(60; −40), e sia P(x; 0) il punto in cui il bagnino entra in acqua. Il tempo totale, in secondi, è la somma del tempo di corsa e del tempo di nuoto:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+900}}{5} + \frac{\sqrt{(60-x)^2+1600}}{2}, \quad 0 \le x \le 60$$

$$T'(x) = \frac{x}{5\sqrt{x^2+900}} - \frac{60-x}{2\sqrt{(60-x)^2+1600}}$$

Ancora una volta le frazioni hanno un significato geometrico. Siano θ_1 e θ_2 gli angoli che i due tratti formano con la *normale* alla riva in P (Figura 8.4). Nel triangolo rettangolo di ipotenusa AP il cateto opposto a θ_1 è lungo x, e in quello di ipotenusa PB il cateto opposto a θ_2 è lungo $60 - x$; quindi

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+900}} = \operatorname{sen}\theta_1, \quad \frac{60-x}{\sqrt{(60-x)^2+1600}} = \operatorname{sen}\theta_2$$

e la condizione $T'(x) = 0$ diventa

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$$

con $v_1 = 5$ m/s e $v_2 = 2$ m/s. L'equazione $T'(x) = 0$ non si risolve con l'algebra elementare, ma si risolve numericamente (per esempio dimezzando l'intervallo, come nel teorema degli zeri del ca-

pitolo 4): $x \approx 45{,}8$ m, con $T \approx 32{,}2$ s. Prima T' è negativa, dopo positiva, quindi è il minimo. Per confronto, il percorso rettilineo richiede circa 34,2 s, correre fino al punto di fronte a B circa 33,4 s, tuffarsi subito nel punto della riva più vicino ($x = 0$) circa 42,1 s. Nel punto ottimale $\theta_1 \approx 56{,}8°$ e $\theta_2 \approx 19{,}5°$: nel mezzo più lento il percorso è più vicino alla normale.

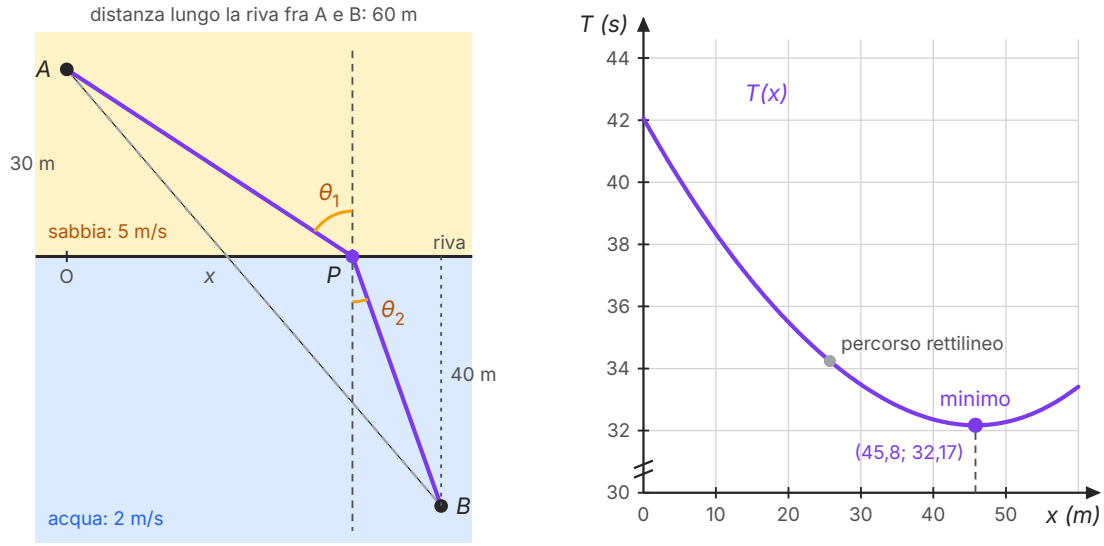

Figura 8.4 Il problema del bagnino. A sinistra il percorso più rapido A → P → B (in viola, unità uguali sui due assi) confrontato con il segmento AB (grigio, tratteggiato); θ_1 e θ_2 sono misurati dalla normale alla riva. A destra il tempo $T(x)$, calcolato dall'equazione, con il minimo per $x \approx 45{,}8$ m, $T \approx 32{,}17$ s; l'asse verticale parte da 30 s.

È esattamente la **legge di Snell** della rifrazione, che il libro di fisica scrive $\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Il bagnino si comporta come un raggio di luce che passa dall'aria all'acqua. Intorno al 1660 Pierre de Fermat ricavò la legge della rifrazione da un principio generale: fra tutti i percorsi possibili tra due punti, la luce segue quello che richiede il *tempo* minimo. È il **principio di Fermat**. Nella riflessione, dove la velocità è la stessa lungo tutto il percorso, tempo minimo e lunghezza minima coincidono, e si ritrova Erone.

IN SINTESI

Principio di Fermat. Tra due punti la luce percorre il cammino che richiede il tempo minimo (più precisamente, un cammino in cui il tempo è stazionario).

Riflessione (stesso mezzo): tempo minimo = cammino minimo ⇒ angolo di incidenza = angolo di riflessione.

Rifrazione (velocità v_1 e v_2): $T'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$, con gli angoli misurati dalla normale. Se $v_2 < v_1$, allora $\theta_2 < \theta_1$.

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA: LA NATURA SCEGLIE IL MEGLIO?

Il principio di Fermat suscitò subito un'obiezione filosofica: come fa la luce a «sapere» in anticipo quale percorso sarà il più rapido? Una legge che parla di ciò che accade in un punto, come la legge di Snell, sembra una causa; un principio di minimo sembra un fine. Nel Settecento Pierre-Louis Moreau de Maupertuis propose (1744) un *principio di minima azione* per tutta la meccanica e lo presentò come la prova di una saggezza nella natura, che realizza i suoi effetti con la minima spesa.

Sono gli anni in cui si discute l'ottimismo di Leibniz, per il quale il nostro è «il migliore dei mondi possibili» (*Saggi di teodicea*, 1710), e che Voltaire mette alla berlina nel *Candido* (1759) con il personaggio di Pangloss. La fisica successiva ha conservato i principi di minimo, ma come formulazioni matematiche equivalenti alle leggi locali, senza leggervi un fine: anzi, il cammino della luce non sempre rende il tempo minimo, ma sempre stazionario, cioè con «derivata nulla». Il calcolo ha preso il posto della teleologia; la domanda filosofica resta aperta.

8.3.3 La gittata massima

Un corpo lanciato da terra con velocità v_0 e angolo α sull'orizzontale, trascurando l'aria, ha componenti della velocità $v_0 \cos\alpha$ e $v_0 \operatorname{sen}\alpha$ (*Matematica 4*, cap. 5). Il moto verticale è uniformemente accelerato, con accelerazione $-g$ (il corpo rallenta salendo e accelera scendendo), e il corpo ricade dopo il tempo $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$; nel frattempo avanza di moto uniforme. La **gittata**, la distanza orizzontale tra il punto di lancio e quello di caduta, è

$$R(\alpha) = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

dove si è usata la formula di duplicazione $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$ (*Matematica 4*, cap. 4). La derivata è $R'(\alpha) = \dfrac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g}$, positiva per $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ e negativa dopo: la gittata massima si ottiene con un lancio a 45° e vale $\dfrac{v_0^2}{g}$. Con $v_0 = 14$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s² si ottiene $\dfrac{196}{9{,}8} = 20$ m, la gittata del

pallone calciato a 45° in *Matematica 3* (cap. 6). Ora sappiamo perché 45° è l'angolo migliore. Poiché $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)$, due angoli complementari, come 30° e 60°, danno la stessa gittata.

8.3.4 La potenza massima

Un generatore reale ha una forza elettromotrice f_{em} e una resistenza interna r; collegato a un utilizzatore di resistenza R, fa circolare la corrente $I = \dfrac{f_{em}}{R + r}$, e la potenza trasferita all'utilizzatore è $P = R\,I^2$ (f_{em} è la f.e.m. che abbiamo già incontrato nel capitolo 6). Quale resistenza riceve la potenza maggiore?

ESEMPIO SVOLTO

Il modello. $P(R) = \dfrac{f_{em}^{\,2}\,R}{(R + r)^2}$, con $R > 0$; f_{em} e r sono costanti positive.

La derivata. Con la regola del quoziente,

$$P'(R) = f_{em}^{\,2} \cdot \frac{(R + r)^2 - R \cdot 2(R + r)}{(R + r)^4} = f_{em}^{\,2} \cdot \frac{r - R}{(R + r)^3}$$

Il segno è quello di $r - R$: positivo per $R < r$, negativo per $R > r$. La potenza è massima per $R = r$, e vale $P_{max} = \dfrac{f_{em}^{\,2}\,r}{(2r)^2} = \dfrac{f_{em}^{\,2}}{4r}$.

Un caso numerico. Con $f_{em} = 12$ V e $r = 2\ \Omega$: il massimo si ha con $R = 2\ \Omega$, e $P = \dfrac{144}{8} = 18$ W. Con $R = 1\ \Omega$ si ottengono $\dfrac{144}{9} = 16$ W, con $R = 4\ \Omega$ ancora $\dfrac{144 \cdot 4}{36} = 16$ W.

Che cosa significa. Agli estremi la potenza si annulla: con R piccolissimo (cortocircuito) la corrente è massima ma l'utilizzatore non dissipa quasi nulla, con R grandissimo la corrente è quasi nulla. Si noti che con $R = r$ metà della potenza si dissipa dentro il generatore: massimo trasferimento non vuol dire massimo rendimento.

8.4 Ottimizzazione in economia e in altre discipline

8.4.1 Costi, ricavi, profitto

Un laboratorio produce un articolo e lo vende a 80 € l'uno; può produrne al massimo 120 alla settimana. Il **costo totale** di x pezzi, in euro, è $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}6x^2 + 17x + 500$ (dati inventati): 500 € sono spese fisse, che si pagano anche senza produrre nulla. Il **ricavo** è $R(x) = 80x$, e il **profitto** è la differenza

$$U(x) = R(x) - C(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}6x^2 + 63x - 500, \quad 0 \le x \le 120$$

La derivata è $U'(x) = -0{,}03x^2 + 1{,}2x + 63 = -0{,}03(x - 70)(x + 30)$. Nel dominio il fattore $x + 30$ è positivo, quindi U' è positiva per $x < 70$ e negativa per $x > 70$. Il profitto massimo è $U(70) = 3420$ € alla settimana. Agli estremi $U(0) = -500$ € (si pagano le spese fisse) e $U(120) = -1580$ €: produrre al massimo della capacità sarebbe in perdita.

La Figura 8.5 mostra il significato economico del risultato. La derivata del costo, $C'(x)$, si chiama **costo marginale**: è, approssimativamente, quanto costa produrre un pezzo in più. La condizione $U'(x) = 0$ equivale a $C'(x) = R'(x)$, cioè costo marginale uguale al prezzo: finché un pezzo in più costa meno di quanto rende conviene produrlo, quando costa di più no. Infatti $C'(70) = 0{,}03 \cdot 4900 - 1{,}2 \cdot 70 + 17 = 80$. Nel grafico, in $x = 70$ la tangente alla curva dei costi è parallela alla retta dei ricavi, e il segmento verticale tra le due curve, che misura il profitto, è il più lungo.

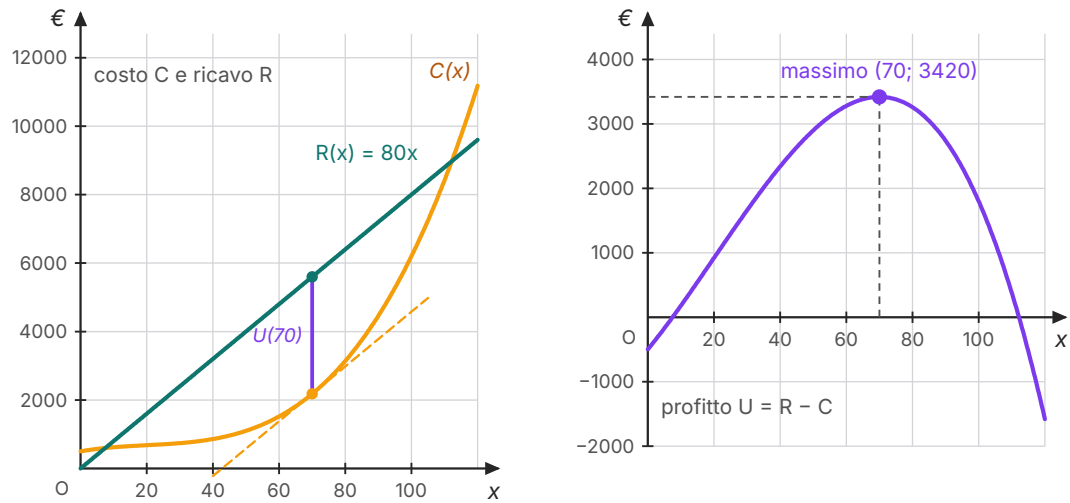

Figura 8.5 A sinistra il costo $C(x)$ (arancio) e il ricavo $R(x) = 80x$ (verde): in $x = 70$ la tangente a C (tratteggiata) è parallela a R e la distanza verticale, il profitto, è massima. A destra il profitto $U(x) = R(x) - C(x)$ con il massimo (70; 3420). Curve calcolate dalle equazioni, dati inventati.

8.4.2 Il costo medio minimo

In *Matematica 4* (cap. 1) il **costo medio** $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, cioè il costo per pezzo, decresceva sempre, perché il costo di ogni copia era fisso. In un modello più realistico, oltre una certa produzione ogni pezzo in più costa di più (straordinari, macchine sovraccariche), e il costo medio ha un minimo.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un'officina ha un costo giornaliero $C(x) = 0{,}02x^2 + 10x + 800$ euro per x pezzi (dati inventati). Quanti pezzi al giorno rendono minimo il costo medio?

Il modello. $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0{,}02x + 10 + \dfrac{800}{x}$, con $x > 0$.

La derivata. $c'(x) = 0{,}02 - \dfrac{800}{x^2} = \dfrac{0{,}02x^2 - 800}{x^2}$, che si annulla per $x^2 = 40\,000$, cioè $x = 200$. È negativa prima e positiva dopo: minimo assoluto.

La risposta. Il costo medio minimo si ha con 200 pezzi al giorno e vale $c(200) = 4 + 10 + 4 = 18$ € al pezzo. Con 100 pezzi sarebbe 20 €, con 400 pezzi 20 €.

Un'osservazione. Il costo marginale in quel punto è $C'(200) = 0{,}04 \cdot 200 + 10 = 18$ €, uguale al costo medio. Non è una coincidenza: $c'(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$ si annulla esattamente quando $C'(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Se un pezzo in più costa meno della media, abbassa la media; se costa di più, la alza.

8.4.3 Un modello dalla medicina

Dopo l'assunzione di un farmaco per bocca, la sua concentrazione nel sangue prima sale, mentre il farmaco viene assorbito, poi scende, mentre viene eliminato. Un modello semplice di questo andamento è $c(t) = a\,t\,e^{-bt}$, con a e b costanti positive. Prendiamo $c(t) = 8t\,e^{-t/4}$, con c in mg/L e t in ore (dati simulati).

Con la regola del prodotto, $c'(t) = 8e^{-t/4} - 2t\,e^{-t/4} = 8e^{-t/4}\left(1 - \dfrac{t}{4}\right)$. L'esponenziale è sempre positivo, quindi $c'(t) > 0$ per $t < 4$ e $c'(t) < 0$ per $t > 4$: la concentrazione è massima dopo 4 ore e vale $c(4) = 32e^{-1} \approx 11{,}8$ mg/L. In generale il massimo di $a\,t\,e^{-bt}$ cade in $t = \dfrac{1}{b}$. Derivando ancora si trova che $c''(t)$ cambia segno in $t = 8$: è il flesso, l'istante in cui la concentrazione scende più rapidamente. Per $t \to +\infty$ la concentrazione tende a 0, perché l'esponenziale «vince» sulla potenza (capitolo 3). Un medico che conosce questo andamento sa quando la dose agisce di più e quando conviene somministrarne un'altra.

8.5 Modelli e calcolo

8.5.1 Che cos'è un modello

In tutti i problemi di questo capitolo la parte decisiva è stata la costruzione di una funzione a partire da ipotesi: la lattina è un cilindro perfetto, il bagnino corre a velocità costante, il costo segue una certa formula. Un **modello matematico** è proprio questo: una descrizione di un fe-

nomeno mediante oggetti matematici (funzioni, equazioni), costruita a partire da ipotesi esplicite e semplificatrici. Il modello non è il fenomeno: trascura molto, e le sue conclusioni valgono solo se valgono le ipotesi. Ma permette di calcolare, di prevedere e di confrontare scelte diverse.

8.5.2 La derivata come velocità di crescita

La derivata entra nei modelli anche in un altro modo: come **tasso di variazione**. Se $N(t)$ è il numero di individui di una popolazione al tempo t, la derivata $N'(t)$ è la velocità con cui la popolazione cresce. L'ipotesi più semplice è che ogni individuo dia origine, nell'unità di tempo, allo stesso numero medio di nuovi individui: allora la velocità di crescita è proporzionale alla popolazione,

$$N'(t) = kN(t)$$

con $k > 0$ costante. Conosciamo una funzione con questa proprietà: $N(t) = N_0\, e^{kt}$. Infatti, con la regola della funzione composta, $N'(t) = N_0\, e^{kt} \cdot k = k\, N(t)$, e per $t = 0$ si ha $N(0) = N_0$, la popolazione iniziale. È la **crescita esponenziale** di *Matematica 4* (cap. 7), che ora riconosciamo come conseguenza di un'ipotesi sul tasso di crescita. La stessa relazione, con $k < 0$, descrive il decadimento radioattivo: il numero di nuclei che decadono nell'unità di tempo è proporzionale al numero di nuclei presenti.

APPROFONDIMENTO · LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Una relazione come $N'(t) = k\, N(t)$ è un'**equazione differenziale**: un'equazione in cui l'incognita non è un numero ma una funzione, e in cui compare la sua derivata. Risolverla significa trovare tutte le funzioni che la soddisfano. Noi non abbiamo risolto l'equazione: abbiamo soltanto verificato che $N_0\, e^{kt}$ è una soluzione. Si dimostra che è l'unica con il valore iniziale $N(0) = N_0$; la teoria che lo garantisce va oltre questo corso.

Le leggi della fisica classica sono quasi tutte equazioni differenziali: il secondo principio della dinamica, $F = ma$, lega la forza alla derivata seconda della posizione. Conoscendo la posizione e la velocità iniziali, la soluzione è unica, e il moto è determinato per sempre. È la radice matematica del determinismo di cui si parlerà nel capitolo 11, a proposito di Laplace.

8.5.3 Crescita limitata: la curva logistica

Il modello esponenziale prevede una crescita senza fine, che nessun ambiente può sostenere: cibo e spazio sono limitati. In *Matematica 4* (cap. 7) abbiamo incontrato la **curva logistica**, proposta nell'Ottocento da Pierre-François Verhulst. Il suo tasso di crescita è

$$N'(t) = kN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

dove K è la **capacità portante**, il numero massimo di individui che l'ambiente può sostenere. Quando N è piccolo rispetto a K, il fattore tra parentesi è quasi 1 e la crescita è quasi esponenziale; quando N si avvicina a K, il fattore tende a 0 e la crescita si arresta. La funzione che soddisfa questa relazione (lo si può verificare derivando) è

$$N(t) = \frac{K}{1 + A\,e^{-kt}}, \quad A = \frac{K - N_0}{N_0}$$

Consideriamo una popolazione di moscerini in un contenitore, con $N_0 = 10$, $K = 1000$ e $k = 0{,}5$ al giorno (dati simulati): allora $A = 99$. La Tabella 8.1 e la Figura 8.6 confrontano il modello logistico con quello esponenziale con gli stessi N_0 e k. Nei primi giorni i due modelli quasi coincidono; poi l'esponenziale esplode, mentre la logistica si piega e si avvicina all'asintoto orizzontale $N = 1000$.

Tabella 8.1 Una popolazione (dati simulati) secondo il modello esponenziale $N = 10e^{0{,}5t}$ e secondo il modello logistico $N = \frac{1000}{1 + 99e^{-0{,}5t}}$, con t in giorni. Valori arrotondati a un decimale.

t (giorni)	Esponenziale	Logistico
0	10,0	10,0
2	27,2	26,7
4	73,9	69,5
6	200,9	168,7
8	546,0	355,5
10	1484,1	599,9
12	4034,3	803,0
14	10 966,3	917,2

Dove cresce più in fretta la popolazione logistica? La velocità di crescita N' è massima nel punto di flesso del grafico, dove la concavità passa da verso l'alto a verso il basso. Il tasso $kN(1 - \frac{N}{K})$, visto come funzione di N, è una parabola con il vertice in $N = \frac{K}{2}$: la crescita è più rapida quando la popolazione ha raggiunto metà della capacità portante. Nel nostro esempio questo accade quando $1 + 99e^{-0{,}5t} = 2$, cioè $t = \frac{\ln 99}{0{,}5} \approx 9{,}19$ giorni, con 500 moscerini e una velocità di crescita di $0{,}5 \cdot 500 \cdot \frac{1}{2} = 125$ moscerini al giorno. Dopo il flesso la popolazione continua a crescere, ma sempre più lentamente.

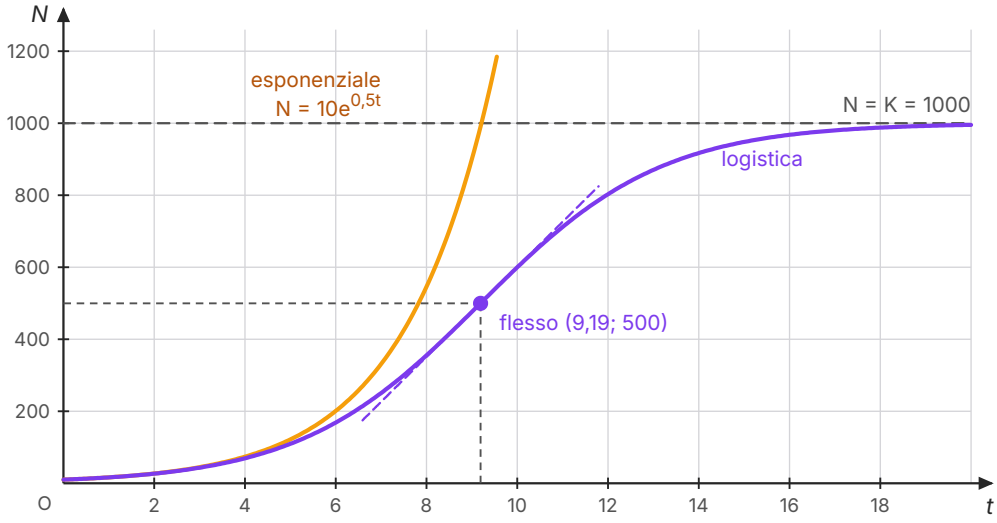

Figura 8.6 La crescita esponenziale $N = 10e^{0,5t}$ (arancio) e la crescita logistica $N = \dfrac{1000}{1 + 99e^{-0,5t}}$ (viola), calcolate dalle equazioni. La logistica ha l'asintoto orizzontale $N = 1000$ e il flesso in (9,19; 500), dove la tangente (tratteggiata) è più ripida: è l'istante di crescita più rapida. Scale diverse sui due assi.

8.5.4 Un fenomeno, molti modelli

Quale dei due modelli è quello «vero»? La domanda è mal posta. L'esponenziale descrive bene l'inizio e non la fine; la logistica descrive meglio l'insieme, ma ignora a sua volta molte cose (le stagioni, i predatori, l'età degli individui), e un biologo potrebbe preferire un terzo modello, magari discreto, a seconda di ciò che vuole sapere. Questo è il punto di vista della **modellistica**: lo stesso fenomeno si può rappresentare con approcci diversi, ciascuno valido entro certi limiti e per certi scopi, e un modello si giudica per quanto è utile, non per quanto è «vero».

Le *Indicazioni nazionali* invitano a confrontare questo atteggiamento con quello della fisica classica. Da Newton in poi, la legge di gravitazione è stata intesa come la descrizione del mondo: una corrispondenza univoca tra un'equazione e la natura, che non ammette alternative. La matematizzazione dei fenomeni biologici, economici e sociali, avviata soprattutto dall'Ottocento, ha invece abituato a convivere con modelli diversi dello stesso fenomeno. E anche la fisica del Novecento ha imparato che le sue leggi valgono entro domini precisi: la meccanica di Newton resta un modello eccellente per le velocità piccole rispetto a quella della luce. Ne riparleremo nel capitolo 12, a proposito del metodo assiomatico e del significato di un modello.

SINTESI

- Un problema di ottimizzazione chiede il massimo o il minimo di una funzione obiettivo; i vincoli permettono di esprimerla con una sola variabile, che varia nel dominio del problema.
- Il metodo: modello, dominio, derivata e suo segno, confronto con i valori agli estremi, risposta a parole con le unità di misura.
- In un intervallo chiuso una funzione continua ha massimo e minimo assoluti (Weierstrass): vanno cercati tra i punti stazionari interni, i punti di non derivabilità e gli estremi. Un punto stazionario non è necessariamente un estremo, e un estremo relativo non è necessariamente assoluto.
- Il vertice della parabola risolve solo i problemi di secondo grado; la derivata risolve anche gli altri.
- Scatola da un foglio quadrato di lato l: taglio $x = \frac{l}{6}$. Lattina chiusa di volume dato con superficie minima: $h = 2r$. Cilindro inscritto in una sfera: $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, volume $\frac{1}{\sqrt{3}}$ di quello della sfera.
- Per la distanza minima da una curva conviene minimizzare d^2; il segmento minimo è perpendicolare alla tangente.
- Principio di Fermat: la luce segue il cammino di tempo minimo (stazionario). Ne seguono la legge della riflessione (Erone) e la legge di Snell $\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$.
- Gittata $R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$, massima a 45°. Un generatore trasferisce la potenza massima $\frac{f_{em}^2}{4r}$ a un carico $R = r$.
- Profitto $U = R - C$: è massimo dove il costo marginale C' eguaglia il ricavo marginale. Il costo medio $\frac{C(x)}{x}$ è minimo dove eguaglia il costo marginale.
- La funzione $a\,t\,e^{-bt}$ (concentrazione di un farmaco) ha il massimo in $t = \frac{1}{b}$.
- La derivata è un tasso di variazione: $N' = kN$ è soddisfatta da $N_0\,e^{kt}$ (crescita esponenziale). La logistica, con capacità portante K, cresce più rapidamente nel flesso, quando $N = \frac{K}{2}$.
- Un modello nasce da ipotesi semplificatrici; lo stesso fenomeno ammette modelli diversi, ciascuno valido entro certi limiti (modellistica), a differenza della corrispondenza univoca cercata dalla fisica classica.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Con 24 m di rete si recinta un'aiuola rettangolare. L'area massima che si può ottenere è
   A. 20 m²
   B. 36 m²
   C. 32 m²
   D. 144 m²

2. ● Sia f continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$. Quale affermazione è *sempre* vera?
   A. Il massimo assoluto di f è in un punto in cui $f'(x) = 0$.
   B. Ogni punto in cui $f'(x) = 0$ è un punto di massimo o di minimo.
   C. Il massimo assoluto esiste e si trova in un estremo dell'intervallo oppure in un punto stazionario interno.
   D. Il massimo assoluto si trova sempre in un estremo dell'intervallo.

3. ● Da un foglio quadrato di lato 24 cm si ricava una scatola senza coperchio tagliando quattro quadrati di lato x agli angoli. Il volume è massimo per
   A. $x = 4$ cm
   B. $x = 6$ cm
   C. $x = 3$ cm
   D. $x = 8$ cm

4. ● Un raggio di luce passa dall'aria all'acqua, dove la luce è più lenta. Per il principio di Fermat, detti θ_1 e θ_2 gli angoli con la normale in aria e in acqua,
   A. $\theta_2 > \theta_1$
   B. $\theta_2 = \theta_1$
   C. $\theta_2 = 90° - \theta_1$
   D. $\theta_2 < \theta_1$

5. ● Un generatore con resistenza interna r trasferisce a un utilizzatore di resistenza R la potenza massima quando
   A. $R = 0$
   B. $R = r$
   C. $R = 2r$
   D. R è il più grande possibile

6. ● In una crescita logistica con capacità portante K, la popolazione cresce più rapidamente quando vale

   A. $\frac{K}{4}$

   B. K

   C. $\frac{K}{2}$

   D. pochi individui, all'inizio

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Una funzione continua in $]0; 1[$ ha sempre un massimo assoluto. b) Il minimo assoluto di una funzione continua in $[a; b]$ può trovarsi in un estremo dell'intervallo. c) Se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo. d) La lattina chiusa di superficie minima ha altezza uguale al diametro, qualunque sia il volume.

8. ● Completa. In un problema di ottimizzazione la grandezza da rendere massima o minima, scritta come funzione, si chiama _____ ; le condizioni imposte dal problema, che permettono di esprimere tutto con una sola variabile, si chiamano _____ ; l'insieme dei valori della variabile che hanno senso concreto è il _____ . Il massimo va cercato tra i punti _____ interni e gli _____ del dominio.

Calcolare

9. ● Trova il massimo e il minimo assoluti di $f(x) = x^3 - 3x + 1$ nell'intervallo $[0; 2]$.

10. ● Trova il massimo e il minimo assoluti di $f(x) = x^4 - 2x^2$ nell'intervallo $[-2; 1]$.

11. ● Due numeri non negativi hanno somma 12. Trova quelli per cui il prodotto del quadrato del primo per il secondo è massimo.

12. ●● In una sfera di raggio 9 cm si inscrive un cono circolare retto. Detta h l'altezza del cono, mostra che il quadrato del raggio di base è $r^2 = h(18 - h)$ e trova il cono di volume massimo. Che frazione del volume della sfera occupa?

13. ●● Da un cartoncino rettangolare di 16 cm × 10 cm si ricava una scatola senza coperchio tagliando agli angoli quattro quadrati di lato x. Trova x che rende massimo il volume.

14. ●● Trova i punti della parabola $y = x^2 - 2$ più vicini all'origine e la distanza minima.

15. ●● Un recipiente cilindrico *aperto* (senza coperchio) deve contenere 343π cm^3. Trova le dimensioni che richiedono meno materiale.

16. ●● In un cono di raggio di base 6 cm e altezza 12 cm si inscrive un cilindro con la base sulla base del cono. Mostra che, detto r il raggio del cilindro, la sua altezza è $12 - 2r$, e trova il cilindro di volume massimo.

17. ●● Un pallone viene calciato da terra con velocità 20 m/s ($g = 9{,}8$ m/s^2, aria trascurata). a) Qual è la gittata massima? b) Con quali angoli il pallone cade a 30 m?

18. ●● Un generatore ha $f_{em} = 9$ V e resistenza interna $r = 1{,}5\ \Omega$. a) Quale resistenza di carico riceve la potenza massima, e quanto vale? b) Per quali valori di R la potenza è 12 W?

19. ●● La concentrazione di un farmaco nel sangue (dati simulati) è $c(t) = 20t\,e^{-t/2}$, in mg/L, con t in ore. Trova l'istante di concentrazione massima, il valore massimo e l'istante in cui la concentrazione diminuisce più rapidamente.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che a) fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$ il quadrato ha l'area massima; b) fra tutti i rettangoli di area A il quadrato ha il perimetro minimo.

21. ●● Trova l'errore. «Per trovare il massimo di $f(x) = x^3 - 12x$ in $[-3; 5]$ pongo $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$, cioè $x = \pm 2$. Poiché $f(-2) = 16$ e $f(2) = -16$, il massimo assoluto è 16, in $x = -2$.»

22. ●● Nel problema del bagnino, supponi che la velocità sulla sabbia e quella in acqua siano uguali. Mostra che la condizione $T'(x) = 0$ dà $\theta_1 = \theta_2$ e spiega perché, in questo caso, il percorso più rapido è il segmento AB.

23. ●● Dimostra che, per $a > 0$ e $b > 0$, la funzione $c(t) = a\,t\,e^{-bt}$, con $t \geq 0$, ha il massimo assoluto in $t = \dfrac{1}{b}$, e calcolalo.

Problemi

24. ●● Una palestra ha 500 iscritti con un abbonamento mensile di 40 € (dati inventati). Un'indagine indica che ogni aumento di 2 € fa perdere 10 iscritti. Quale prezzo rende massimo l'incasso mensile?

25. ●● Un filo lungo 1 m viene tagliato in due pezzi: con il primo, lungo x, si forma un quadrato, con il secondo un cerchio. Come va tagliato perché la somma delle due aree sia minima? E massima?

26. ●● Un bagnino è sulla spiaggia a 20 m dalla riva; un nuotatore in difficoltà è in mare a 30 m dalla riva, spostato di 50 m lungo la riva. Il bagnino corre a 6 m/s e nuota a 1,5 m/s (dati inventati). a) Scrivi il tempo $T(x)$, dove x è la distanza lungo la riva tra il punto di fronte al bagnino e il punto in cui entra in acqua. b) Con una calcolatrice compila una tabella di $T(x)$ per $x = 20, 30, 40, 44, 46, 48, 50$ e individua approssimativamente il minimo. c) Verifica che nel punto trovato il rapporto $\dfrac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2}$ è vicino a 4.

27. ●● Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio, il cui diametro è la base del rettangolo. Il contorno totale misura 6 m. Quali dimensioni lasciano entrare più luce, cioè rendono massima l'area?

28. ●●● Un'azienda (dati inventati) ha costo totale $C(x) = 0{,}5x^2 + 20x + 450$ euro per x pezzi e vende ogni pezzo a 80 €. a) Per quale produzione il costo medio è minimo? Quanto vale? b) Per quale produzione il profitto è massimo? Quanto vale? c) Spiega perché le due risposte sono diverse.

Verso l'esame

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. La funzione $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x$ è definita nell'intervallo $[0; 8]$, e $f'(x) = (x - 2)(x - 6)$. In quali punti f assume il suo massimo assoluto?

    A. Solo in $x = 2$

    B. Solo in $x = 6$

    C. Solo in $x = 8$

    D. In $x = 2$ e in $x = 8$, dove assume lo stesso valore

30. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un laboratorio (dati inventati) stima il costo medio di produzione, in euro al pezzo, con $c(x) = 0{,}05x + 12 + \frac{500}{x}$, dove x è il numero di pezzi al giorno. a) Calcola $c(50)$, $c(100)$, $c(150)$, $c(200)$. b) In base alla tabella, dove ti aspetti il minimo? c) Verificalo con la derivata.

31. ●● Spunto per il colloquio. «La luce, per andare da un punto a un altro, sceglie il cammino che richiede il tempo minimo» (parafrasi del principio di Fermat, intorno al 1660). Spiega come da questo principio si ricava la legge della rifrazione, e collega il tema alla fisica, alla filosofia del Seicento e del Settecento e alla letteratura.

32. ●●● Sfida. Il problema di Keplero, in un modello semplificato: una botte è un cilindro di raggio r e altezza h; un'asta infilata nel foro a metà altezza della parete raggiunge lo spigolo opposto del fondo, e la sua lunghezza misura d. a) Mostra che $d^2 = 4r^2 + \frac{h^2}{4}$. b) Per d fissato, trova h e r che rendono massimo il volume e mostra che allora $\frac{h}{2r} = \sqrt{2}$. c) Calcola il volume massimo per $d = 8$ dm.

PER APPROFONDIRE

- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si costruisce il modello di un problema e come si controlla la soluzione, con esempi di massimi e minimi.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sui massimi e minimi, con il problema di Erone, il principio di Fermat e il problema isoperimetrico.
- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: Keplero, Fermat e il metodo dei massimi e minimi prima di Newton e Leibniz.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Erone, Pappo e la matematica alessandrina; i capitoli sul Seicento.

Glossario del capitolo

Capacità portante
Il numero massimo di individui che un ambiente può sostenere; nel modello logistico è l'asintoto orizzontale $N = K$.

Costo marginale
La derivata $C'(x)$ del costo totale: approssima il costo di un'unità prodotta in più.

Costo medio
Il costo per unità prodotta, $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$; nel suo minimo è uguale al costo marginale.

Crescita esponenziale
Crescita con tasso proporzionale alla grandezza stessa, $N' = kN$, descritta da $N(t) = N_0\, e^{kt}$.

Curva logistica
Il grafico di $N(t) = \dfrac{K}{1 + A\, e^{-kt}}$, modello di crescita limitata dalla capacità portante K; ha un flesso in $N = \dfrac{K}{2}$.

Dominio del problema
L'insieme dei valori della variabile che hanno senso concreto nel problema; è in generale più piccolo del dominio della funzione.

Equazione differenziale
Un'equazione in cui l'incognita è una funzione e compare la sua derivata, come $N' = kN$.

Funzione obiettivo
La grandezza da rendere massima o minima, espressa come funzione della variabile scelta.

Gittata
La distanza orizzontale tra il punto di lancio e il punto di caduta di un proiettile; su terreno piano è $\dfrac{v_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$.

Legge di Snell
La legge della rifrazione: $\dfrac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$, con gli angoli misurati dalla normale alla superficie di separazione.

Modellistica
Il punto di vista per cui uno stesso fenomeno si può rappresentare con modelli diversi, ciascuno valido entro certi limiti e per certi scopi.

Modello matematico
Una descrizione di un fenomeno mediante funzioni o equazioni, costruita a partire da ipotesi esplicite e semplificatrici.

Ottimizzazione
La ricerca del valore massimo o minimo di una grandezza al variare delle scelte possibili, nel rispetto dei vincoli.

Principio di Fermat
Tra due punti la luce segue il cammino che richiede il tempo minimo (più precisamente stazionario).

Problema isoperimetrico
Trovare, tra le figure piane di perimetro dato, quella di area massima: la risposta è il cerchio.

Profitto
La differenza tra ricavo e costo, $U(x) = R(x) - C(x)$.

Vincolo
Una condizione imposta dal problema, che lega tra loro le grandezze e permette di ridurre la funzione obiettivo a una sola variabile.

Soluzioni

1. B. Il massimo si ha con il quadrato di lato 6 m: $6^2 = 36$ m^2.

2. C. L'esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass; un massimo interno è stazionario (Fermat). A è falsa (il massimo può essere in un estremo), B è falsa (x^3 in 0), D è falsa (l'orto da recintare).

3. A. Il taglio ottimale è $x = \frac{l}{6} = \frac{24}{6} = 4$ cm (volume $4 \cdot 16^2 = 1024$ cm^3).

4. D. Da $\frac{\text{sen}\,\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\,\theta_2}{v_2}$ con $v_2 < v_1$ segue sen $\theta_2 <$ sen θ_1, cioè $\theta_2 < \theta_1$: il raggio si avvicina alla normale.

5. B. $P'(R)$ ha il segno di $r - R$: massimo per $R = r$, con $P = \frac{f_{em}^{\ 2}}{4r}$.

6. C. Il tasso $kN(1 - \frac{N}{K})$ è una parabola in N con vertice in $N = \frac{K}{2}$; è il flesso della curva logistica.

7. a) Falso: $f(x) = x$ in $]0; 1[$ non ha massimo (Weierstrass richiede un intervallo chiuso). b) Vero (per esempio $f(x) = x$ in $[0; 1]$, minimo in 0). c) Falso: $f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ma in 0 c'è un flesso. d) Vero: $S'(r) = 0$ dà $2\pi r^3 = V$, quindi $h = 2r$.

8. funzione obiettivo; vincoli; dominio del problema (insieme dei valori ammissibili); stazionari (o di non derivabilità); estremi.

9. $f'(x) = 3x^2 - 3$, nullo in $x = 1$ (l'altro zero, -1, è fuori). $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$: massimo 3 in $x = 2$, minimo -1 in $x = 1$.

10. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$, nulla in -1, 0, 1. $f(-2) = 8$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$: massimo 8 in $x = -2$; minimo -1, raggiunto in $x = -1$ e in $x = 1$.

11. $f(x) = x^2(12 - x)$, $0 \le x \le 12$;
$f'(x) = 24x - 3x^2 = 3x(8 - x)$: cresce fino a 8 e poi decresce. I numeri sono 8 e 4, con $64 \cdot 4 = 256$; agli estremi $f = 0$.

12. Il vertice è in un polo; il centro di base dista $h - 9$ dal centro della sfera, quindi $r^2 = 81 - (h - 9)^2 = h(18 - h)$. $V(h) = \frac{\pi}{3} h^2(18 - h)$, $0 < h < 18$; $V'(h) = \frac{\pi}{3}(36h - 3h^2) = \pi h(12 - h)$: massimo per $h = 12$ cm, $r^2 = 72$, $V = 288\pi \approx 904{,}8$ cm^3. La sfera ha 972π cm^3: la frazione è $\frac{288}{972} = \frac{8}{27} \approx 0{,}30$.

13. $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$, $0 < x < 5$.
$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(x - 2)(3x - 20)$; $x = \frac{20}{3}$ è fuori dal dominio. $V' > 0$ per $x < 2$, < 0 per $2 < x < 5$: $x = 2$ cm, $V = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$ cm^3.

14. $d^2 = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$; la derivata $4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$ si annulla in 0 e in $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. d^2 decresce in $]-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}]$, cresce fino a 0, decresce fino a $\sqrt{\frac{3}{2}}$, poi cresce. Minimo $d^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$: i punti sono $(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{1}{2})$ e la distanza minima è $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}32$. In $x = 0$, punto $(0; -2)$, c'è un massimo relativo della distanza (vale 2).

15. $h = \frac{343}{r^2}$; $S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\, h = \pi r^2 + \frac{686\pi}{r}$, $r > 0$.
$S'(r) = 2\pi r - \frac{686\pi}{r^2}$, nulla per $r^3 = 343$, $r = 7$ cm; negativa prima, positiva dopo. $h = 7$ cm: senza coperchio l'altezza è uguale al raggio.
$S = 49\pi + 98\pi = 147\pi \approx 461{,}8$ cm^2.

16. Per la similitudine dei triangoli nella sezione assiale $\frac{h}{12} = \frac{6 - r}{6}$, cioè $h = 12 - 2r$.
$V(r) = \pi r^2(12 - 2r)$, $0 < r < 6$;
$V'(r) = \pi(24r - 6r^2) = 6\pi r(4 - r)$: massimo per $r = 4$ cm, $h = 4$ cm, $V = 64\pi \approx 201{,}1$ cm^3 (i $\frac{4}{9}$ del cono, che ha 144π cm^3).

17. a) $R_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400}{9{,}8} \approx 40{,}8$ m, con $\alpha = 45°$. b) $\text{sen } 2\alpha = \frac{30 \cdot 9{,}8}{400} = 0{,}735$, quindi $2\alpha \approx 47{,}3°$ oppure $2\alpha \approx 132{,}7°$: $\alpha \approx 23{,}7°$ oppure $\alpha \approx 66{,}3°$, angoli complementari.

18. a) $R = r = 1{,}5\ \Omega$; $P = \frac{81}{4 \cdot 1{,}5} = 13{,}5$ W. b) $\frac{81R}{(R+1{,}5)^2} = 12 \Leftrightarrow 12R^2 - 45R + 27 = 0 \Leftrightarrow 4R^2 - 15R + 9 = 0$: $R = 0{,}75\ \Omega$ oppure $R = 3\ \Omega$ (si noti: il prodotto è r^2).

19. $c'(t) = 20e^{-t/2}(1 - \frac{t}{2})$: massimo in $t = 2$ h, $c(2) = 40e^{-1} \approx 14{,}7$ mg/L. $c''(t) = 20e^{-t/2}(\frac{t}{4} - 1)$ cambia segno in $t = 4$ h: lì la discesa è più rapida ($c(4) = 80e^{-2} \approx 10{,}8$ mg/L).

20. a) $S(x) = x(p - x)$, $0 < x < p$; $S'(x) = p - 2x$, positiva per $x < \frac{p}{2}$ e negativa dopo: massimo per $x = \frac{p}{2}$, l'altro lato è $\frac{p}{2}$. b) il perimetro è $P(x) = 2x + \frac{2A}{x}$, $x > 0$; la derivata $2 - \frac{2A}{x^2}$ è negativa per $x < \sqrt{A}$ e positiva dopo: minimo per $x = \sqrt{A}$, e l'altro lato è $\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

21. Lo studente non ha considerato gli estremi dell'intervallo. $f(-3) = -27 + 36 = 9$ e $f(5) = 125 - 60 = 65$. Il massimo assoluto è 65, in $x = 5$; $x = -2$ è solo un massimo relativo. Il minimo assoluto è -16, in $x = 2$.

22. Con $v_1 = v_2 = v$, $T(x) = \frac{L(x)}{v}$ dove L è la lunghezza del percorso: tempo minimo e lunghezza minima coincidono. $T'(x) = 0$ dà $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2$, e con angoli acuti $\theta_1 = \theta_2$: i due tratti sono allineati (angoli opposti al vertice rispetto alla normale), cioè formano il segmento AB, il cammino più corto tra due punti.

23. $c'(t) = a\,e^{-bt} - ab\,t\,e^{-bt} = a\,e^{-bt}(1 - bt)$. Poiché $a\,e^{-bt} > 0$, $c' > 0$ per $t < \frac{1}{b}$ e $c' < 0$ per $t > \frac{1}{b}$: massimo assoluto in $t = \frac{1}{b}$, con $c(\frac{1}{b}) = \frac{a}{b}e^{-1} = \frac{a}{be}$. Inoltre $c(0) = 0$ e $c(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

24. Con k aumenti: $I(k) = (500 - 10k)(40 + 2k)$, $0 \le k \le 50$. $I'(k) = -10(40 + 2k) + 2(500 - 10k) = 600 - 40k$, nulla per $k = 15$, positiva prima e negativa dopo. Prezzo 70 €, 350 iscritti, incasso 24 500 € (contro 20 000 € attuali).

25. Lato del quadrato $\frac{x}{4}$, raggio del cerchio $\frac{1-x}{2\pi}$: $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$, $0 \le x \le 1$. $A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{1-x}{2\pi} = 0$ per $x = \frac{4}{\pi + 4} \approx 0{,}560$ m; A' cresce, quindi è un minimo: $A \approx 0{,}0350$ m². Agli estremi $A(0) = \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}0796$ m² e $A(1) = 0{,}0625$ m²: il massimo si ha senza tagliare, usando tutto il filo per il cerchio (come vuole il problema isoperimetrico).

26. a) $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{6} + \frac{\sqrt{(50-x)^2 + 900}}{1{,}5}$, $0 \le x \le 50$. b) $T \approx 33{,}00$; 30,05; 28,54; 28,45; 28,54; 28,71; 28,98 s: il minimo è vicino a $x = 44$ m (più precisamente $x \approx 43{,}0$ m, $T \approx 28{,}44$ s). c) Con $x = 43$: $\text{sen } \theta_1 = \frac{43}{\sqrt{43^2 + 400}} \approx 0{,}907$, $\text{sen } \theta_2 = \frac{7}{\sqrt{49 + 900}} \approx 0{,}227$, rapporto $\approx 4{,}0 = \frac{6}{1{,}5}$, come vuole la legge di Snell.

27. Con r raggio del semicerchio e h altezza del rettangolo: $2r + 2h + \pi r = 6$, $h = \frac{6 - (2+\pi)r}{2}$. $A(r) = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = 6r - (2 + \frac{\pi}{2})r^2$, una parabola: $A'(r) = 6 - (4 + \pi)r = 0$ per $r = \frac{6}{4 + \pi} \approx 0{,}84$ m. Allora $h \approx 0{,}84$ m (uguale al raggio), base $\approx 1{,}68$ m, area $\frac{18}{4 + \pi} \approx 2{,}52$ m².

28. a) $c(x) = 0{,}5x + 20 + \frac{450}{x}$; $c'(x) = 0{,}5 - \frac{450}{x^2} = 0$ per $x = 30$: costo medio minimo 50 €. b) $U(x) = 80x - C(x) = -0{,}5x^2 + 60x - 450$; $U'(x) = 60 - x = 0$ per $x = 60$, $U(60) = 1350$ €. c) Il costo medio minimo rende minimo il costo per pezzo; il profitto massimo si ha dove il costo marginale $C'(x) = x + 20$ eguaglia il prezzo 80. Tra 30 e 60 pezzi ogni pezzo in più costa più della media ma meno del prezzo: conviene produrlo anche se fa salire il costo medio.

29. D. $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{8}{3} - 16 + 24 = \frac{32}{3}$, $f(6) = 72 - 144 + 72 = 0$, $f(8) = \frac{512}{3} - 256 + 96 = \frac{32}{3}$. Il massimo $\frac{32}{3}$ è raggiunto in due punti: in 2 (massimo relativo) e nell'estremo 8. In $x = 6$ c'è un minimo relativo.

30. a) 24,50; 22,00; 22,83; 24,50 €. b) Vicino a 100 pezzi (i valori scendono e poi risalgono; 50 e 200 danno lo stesso valore). c) $c'(x) = 0{,}05 - \frac{500}{x^2} = 0$ per $x^2 = 10\,000$, $x = 100$; negativa prima e positiva dopo: minimo 22 € al pezzo.

31. Traccia: 1) il modello del bagnino: tempo $T(x)$ come somma di due tempi, $T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\,\theta_2}{v_2}$, la legge di Snell; 2) nella riflessione tempo minimo e cammino minimo coincidono: Erone; 3) in fisica: indice di rifrazione $n = \frac{c}{v}$, il raggio si avvicina alla normale nel mezzo più lento; 4) l'obiezione filosofica: un principio di minimo sembra attribuire alla natura uno scopo (cause finali contro cause efficienti); 5) Maupertuis e la minima azione (1744), l'ottimismo di Leibniz e la satira del *Candido* di Voltaire (1759); 6) oggi: principi di minimo e leggi locali come formulazioni equivalenti; il tempo è stazionario, non sempre minimo.

32. a) Nella sezione assiale l'asta è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti $2r$ (il diametro) e $\frac{h}{2}$. b) $r^2 = \frac{1}{4}\left(d^2 - \frac{h^2}{4}\right)$, $V(h) = \frac{\pi}{4}\left(d^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$, $0 < h < 2d$; $V'(h) = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0$ per $h = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ (massimo: V' positiva prima, negativa dopo). Allora $r^2 = \frac{1}{4}\left(d^2 - \frac{d^2}{3}\right) = \frac{d^2}{6}$, $r = \frac{d}{\sqrt{6}}$, e $\frac{h}{2r} = \frac{2d/\sqrt{3}}{2d/\sqrt{6}} = \sqrt{2}$. c) $V = \frac{\pi d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{512\pi}{3\sqrt{3}} \approx 309{,}6$ dm^3, cioè circa 310 litri ($h \approx 9{,}24$ dm, $r \approx 3{,}27$ dm).