CAPITOLO

7

Lo studio di una funzione

Una formula dice tutto di una curva, ma lo dice a bassa voce: la derivata è l'orecchio che lo sente. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Usare il segno della derivata prima per trovare gli intervalli di monotonia e gli estremi relativi.
2. Distinguere punti stazionari, estremi e flessi, e cercare gli estremi anche dove la derivata non esiste.
3. Trovare massimo e minimo assoluti di una funzione continua su un intervallo chiuso.
4. Studiare concavità e flessi con il segno della derivata seconda.
5. Condurre lo studio completo di polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmiche e goniometriche semplici.
6. Leggere su un grafico le proprietà di f' e f'' e contare le soluzioni di un'equazione $f(x) = k$.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Crescenza, decrescenza, massimi e minimi 2
7.2 Concavità e flessi 5
7.3 Lo studio di una funzione 8
7.4 Dal grafico di f a quello di f′ 13
7.5 Equazioni e grafici 15

Matematica 5 · Parte III · Il calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 7: Lo studio di una funzione · pagine 183–204 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 4 abbiamo imparato a disegnare il *grafico probabile* di una funzione: dominio, simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti agli estremi del dominio e asintoti. Il risultato era uno schizzo onesto ma incompleto: sapevamo dove la curva sta sopra o sotto l'asse x e come si comporta «ai bordi», ma non dove sale, dove scende, dove raggiunge il punto più alto. Due curve molto diverse possono avere lo stesso grafico probabile.

Ora abbiamo uno strumento in più: la derivata. Nel capitolo 5 abbiamo visto che $f'(x_0)$ è la pendenza della tangente in x_0, e nel capitolo 6 il teorema di Lagrange ci ha detto che il segno della derivata decide se una funzione cresce o decresce. In questo capitolo mettiamo insieme tutto: il segno di f' ci darà la monotonia e i massimi e i minimi, il segno di f'' la concavità e i flessi, e lo *studio di funzione* diventerà un procedimento completo. Lo useremo anche al contrario, per leggere su un grafico le proprietà della derivata, e per contare le soluzioni di un'equazione che non sappiamo risolvere. Il capitolo 8 lo applicherà ai problemi di ottimizzazione.

7.1 Crescenza, decrescenza, massimi e minimi

7.1.1 Che cosa sappiamo già

Una funzione f è **crescente** in un intervallo I se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ di I si ha $f(x_1) < f(x_2)$, **decrescente** se $f(x_1) > f(x_2)$ (*Matematica 4*, cap. 1). Dal teorema di Lagrange (capitolo 6) abbiamo ricavato un criterio che non richiede di confrontare infinite coppie di punti: basta il segno della derivata. Ricordiamo il ragionamento, perché è il cuore di tutto il capitolo. Se $x_1 < x_2$ sono in I, esiste c tra i due con

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

Il fattore $x_2 - x_1$ è positivo; quindi, se f' è positiva in tutto I, anche $f(x_2) - f(x_1)$ è positivo: la funzione cresce. Se f' è negativa, decresce.

IN SINTESI

Teorema (criterio di monotonia). *Ipotesi:* f è continua nell'intervallo I e derivabile nei punti interni di I. *Tesi:* se $f'(x) > 0$ in ogni punto interno, f è crescente in I; se $f'(x) < 0$, f è decrescente in I.

Il criterio vale su un **intervallo**: su un insieme fatto di più intervalli separati va applicato a ciascuno separatamente. Resta vero anche se f' si annulla in punti isolati: $y = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ed è crescente in tutto $\mathbb{R}$.

In pratica si scompone $f'(x)$ in fattori, si studia il segno di ogni fattore e si riassume il risultato in uno **schema dei segni** di f': una riga con i punti in cui f' si annulla o non esiste, il segno + o − in ogni intervallo e, sotto, una freccia che sale o che scende. Per $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, positiva per $x < 0$ e per $x > 2$, negativa per $0 < x < 2$: la funzione sale fino a $x = 0$, scende fino a $x = 2$, poi risale (Figura 7.1).

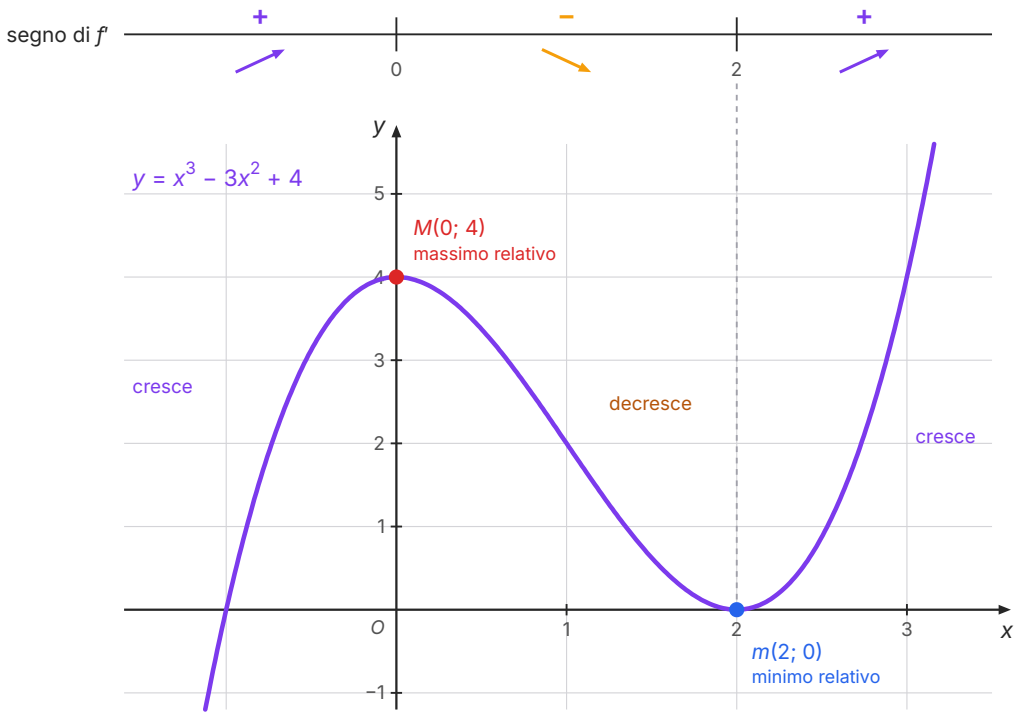


Figura 7.1 Lo schema dei segni di $f'(x) = 3x(x - 2)$ e il grafico di $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$: dove $f' > 0$ la curva sale, dove $f' < 0$ scende. Nei punti in cui f' cambia segno ci sono un massimo e un minimo relativo (scale diverse sugli assi).

7.1.2 Massimi e minimi relativi e assoluti

Nel grafico della Figura 7.1 il punto $M(0; 4)$ non è il più alto della curva, che a destra sale senza limite; ma è più alto di tutti i punti *vicini*. Diciamo che x_0 è un punto di **massimo relativo** per f se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) \le f(x_0)$ per ogni x del dominio; di **minimo relativo** se $f(x) \ge f(x_0)$. Il valore $f(x_0)$ si chiama massimo (o minimo) relativo, e i due casi insieme **estremi relativi**. Se la disuguaglianza vale in tutto il dominio, si parla di **massimo assoluto** o **minimo assoluto**. La funzione della figura ha un massimo relativo in $x = 0$ e un minimo relativo in $x = 2$, ma nessun estremo assoluto: per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$, per $x \to -\infty$ a $-\infty$.

Il teorema di Fermat (capitolo 6) dice dove cercare: in un punto *interno* al dominio in cui f è derivabile e ha un estremo relativo, la tangente è orizzontale, cioè $f'(x_0) = 0$. I punti in cui

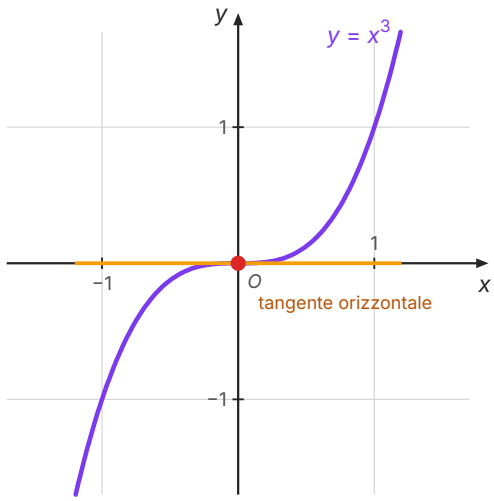
$f'(x_0) = 0$ si chiamano **punti stazionari**. Ma un punto stazionario non è sempre un estremo: decide il segno di f' attorno al punto.

IN SINTESI

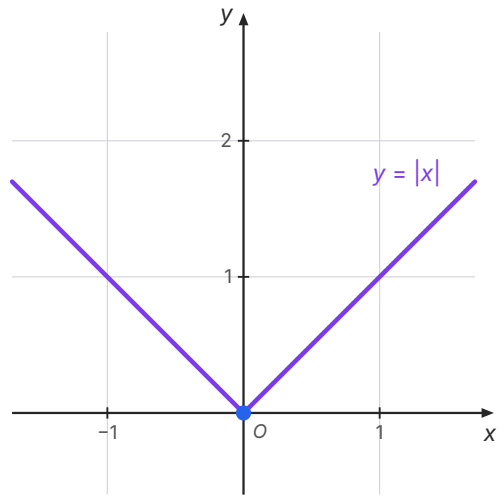
Criterio per gli estremi relativi. Sia f continua in un intorno di x_0 e derivabile in quell'intorno, salvo al più in x_0.

- se $f' > 0$ a sinistra di x_0 e $f' < 0$ a destra, x_0 è un punto di massimo relativo;
- se $f' < 0$ a sinistra e $f' > 0$ a destra, x_0 è un punto di minimo relativo;
- se f' ha lo stesso segno dalle due parti, x_0 non è un estremo.

Due esempi mostrano che il criterio va applicato con attenzione (Figura 7.2). Per $f(x) = x^3$ si ha $f'(x) = 3x^2$, che si annulla in 0 ma è positiva da entrambe le parti: l'origine è un punto stazionario, la tangente è l'asse x, eppure la funzione cresce sempre e 0 non è un estremo. Per $f(x) = |x|$, invece, 0 è un punto di minimo assoluto, ma la derivata in 0 non esiste: a sinistra vale −1, a destra +1 (è il *punto angoloso* del capitolo 5). Gli estremi vanno dunque cercati tra i punti stazionari **e** tra i punti in cui f non è derivabile.



a) $f'(0) = 0$, ma 0 non è un estremo



b) minimo in 0, dove f' non esiste

Figura 7.2 a) $y = x^3$: in O la tangente è orizzontale, ma la funzione cresce a sinistra e a destra, e O non è un estremo. b) $y = |x|$: O è un punto di minimo, ma la derivata non esiste (punto angoloso).

ERRORE FREQUENTE

«$f'(x_0) = 0$, quindi x_0 è un massimo o un minimo.» Falso: la condizione $f'(x_0) = 0$ è *necessaria* per un estremo interno di una funzione derivabile, ma non *sufficiente*, come mostra x^3 in 0. E non è nemmeno necessaria se f non è derivabile in x_0, come mostra $|x|$. Dopo aver risolto $f'(x) = 0$ bisogna sempre studiare il segno di f' a sinistra e a destra di ogni soluzione.

7.1.3 Massimo e minimo assoluti su un intervallo chiuso

Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, il teorema di Weierstrass (capitolo 4) garantisce che il massimo e il minimo assoluti esistono. Non dice dove si trovano, ma ora lo sappiamo: o in un punto interno, e allora in un punto stazionario o in un punto in cui f non è derivabile, oppure in uno degli estremi a e b, dove la tangente non deve essere orizzontale. Basta quindi calcolare f in tutti questi punti «candidati» e confrontare i valori: il più grande è il massimo assoluto, il più piccolo il minimo assoluto.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova il massimo e il minimo assoluti di $f(x) = x^3 - 12x$ nell'intervallo $[-3; 5]$.

1. Esistenza. f è un polinomio, continua in $[-3; 5]$: per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluti esistono.

2. Candidati interni. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ si annulla in $x = -2$ e $x = 2$, entrambi interni all'intervallo. La funzione è derivabile ovunque, quindi non ci sono altri candidati interni.

3. Valori. $f(-3) = -27 + 36 = 9$; $f(-2) = -8 + 24 = 16$; $f(2) = 8 - 24 = -16$; $f(5) = 125 - 60 = 65$.

4. Conclusione. Il massimo assoluto è 65, raggiunto nell'estremo $x = 5$; il minimo assoluto è -16, in $x = 2$. Il punto $x = -2$ è un massimo relativo (lì f' passa da + a −), ma non assoluto: il valore 16 è superato in fondo all'intervallo. È un errore comune fermarsi ai punti stazionari e dimenticare gli estremi.

7.2 Concavità e flessi

7.2.1 La concavità di una curva

Due funzioni possono essere entrambe crescenti e avere grafici molto diversi: $y = x^2$ per $x > 0$ sale sempre più ripida, $y = \sqrt{x}$ sale sempre più adagio. La differenza è nella *curvatura*. Diciamo che il grafico di f ha la **concavità verso l'alto** in un intervallo se in ogni punto dell'intervallo la curva sta sopra la retta tangente in quel punto (almeno vicino al punto di tangenza); ha la **concavità verso il basso** se sta sotto. La parabola $y = x^2$ volge la concavità verso l'alto in tutto $\mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$ verso il basso.

Se la concavità è verso l'alto, procedendo da sinistra a destra le tangenti ruotano in senso antiorario: le loro pendenze $f'(x)$ aumentano. Dunque f' è crescente, e per il criterio di monotonia applicato a f' questo accade quando la sua derivata, la derivata seconda f'', è positiva. Accettiamo senza dimostrazione il criterio completo.

IN SINTESI

Criterio per la concavità. Sia f derivabile due volte in un intervallo I. Se $f''(x) > 0$ in I, il grafico volge la concavità verso l'alto; se $f''(x) < 0$, verso il basso.

Flesso. Un punto del grafico in cui f è continua, esiste la tangente e la concavità cambia verso si chiama punto di flesso. Se f' esiste attorno a x_0, nei punti di flesso $f''(x_0) = 0$, e f'' cambia segno attraversando x_0.

7.2.2 I punti di flesso

Un **punto di flesso** è un punto in cui la curva passa da una concavità all'altra. In un flesso succede una cosa che nei punti ordinari non succede: la tangente *attraversa* la curva, perché da una parte la curva stava sopra le tangenti e dall'altra sotto. Secondo la pendenza della tangente si parla di **flesso a tangente orizzontale** ($f'(x_0) = 0$, come per x^3 nell'origine), di **flesso a tangente obliqua** o di **flesso a tangente verticale** (come per $\sqrt[3]{x}$ nell'origine, capitolo 5).

Come per gli estremi, la condizione $f''(x_0) = 0$ da sola non basta: $f(x) = x^4$ ha $f''(x) = 12x^2$, nulla in 0, ma sempre positiva altrove; la concavità non cambia e l'origine è un minimo, non un flesso. Occorre controllare che f'' cambi segno.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Studia la concavità di $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, trova il flesso e scrivi l'equazione della tangente nel flesso.

Derivata seconda. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, quindi $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. È negativa per $x < 1$ (concavità verso il basso) e positiva per $x > 1$ (concavità verso l'alto).

Flesso. f'' cambia segno in $x = 1$, dove $f(1) = 1 - 3 + 4 = 2$: il punto $F(1; 2)$ è un flesso. La pendenza della tangente è $f'(1) = 3 - 6 = -3$, quindi il flesso è a tangente obliqua.

Tangente. $y - 2 = -3(x - 1)$, cioè $y = -3x + 5$. Nella Figura 7.3 si vede che la retta passa da sotto a sopra la curva proprio in F. Il flesso cade a metà strada tra il massimo $(0; 4)$ e il minimo $(2; 0)$ della Figura 7.1: non è un caso, e l'esercizio di sfida chiede di dimostrarlo per ogni funzione di terzo grado.

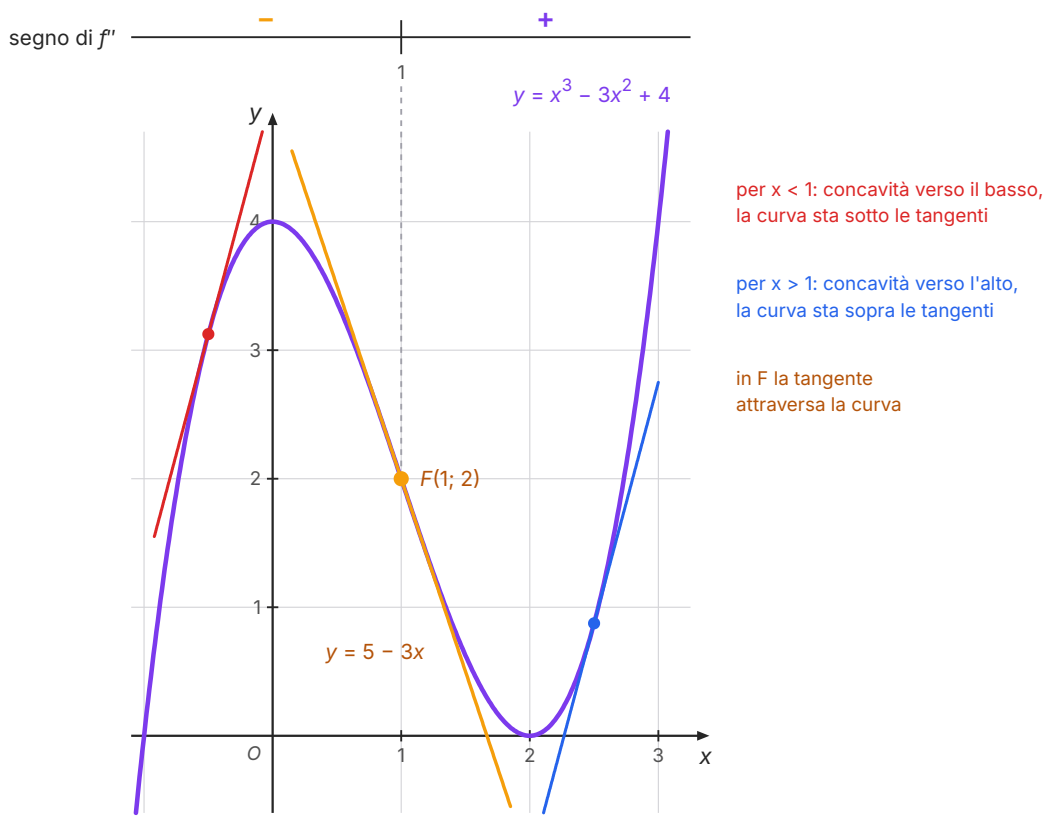


Figura 7.3 Concavità di $y = x^3 - 3x^2 + 4$: a sinistra di $x = 1$ la curva sta sotto le sue tangenti (in rosso una di esse), a destra sta sopra (in blu). Nel flesso $F(1; 2)$ la tangente $y = -3x + 5$ attraversa la curva (scale uguali sugli assi).

COLLEGAMENTI · FISICA: IL MOTO LETTO SUL GRAFICO

Un carrello si muove lungo una rotaia secondo la legge $s(t) = -t^3 + 6t^2$ (in metri, t in secondi, $0 \le t \le 4$; dati inventati). La velocità è $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$ e l'accelerazione $a(t) = v'(t) = 12 - 6t$. Lo studio di s racconta il moto:

- $s' = 3t(4 - t) \ge 0$ in $[0; 4]$: il carrello avanza sempre, e si ferma in $t = 4$ s, in $s(4) = 32$ m, il massimo di s: è l'istante in cui, se il moto continuasse, il carrello invertirebbe la marcia;
- $s'' = a(t)$ cambia segno in $t = 2$ s: il grafico di s ha lì un flesso, in $s(2) = 16$ m;
- nel flesso la velocità è massima: $v(2) = 12$ m/s. Prima il carrello accelera, dopo frena.

In un grafico spazio-tempo, quindi, i massimi e i minimi segnano gli istanti di arresto e i flessi gli istanti di velocità massima o minima. Lo stesso linguaggio vale per una popolazione che cresce: il flesso della curva è il momento in cui la crescita è più rapida (capitolo 8).

7.3 Lo studio di una funzione

7.3.1 Lo schema

Con le derivate il grafico probabile del capitolo 4 diventa uno **studio di funzione** completo. Le informazioni vanno raccolte in un ordine preciso, perché ognuna controlla le altre (lo schema è riassunto qui sotto): un massimo trovato con la derivata, per esempio, deve essere compatibile con il segno e con i limiti già noti. Se non lo è, c'è un errore da qualche parte.

1. **Dominio** (C.E.: condizioni di esistenza).
2. **Simmetrie**: f pari se $f(-x) = f(x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse y), dispari se $f(-x) = -f(x)$ (simmetrico rispetto all'origine); eventuale periodicità.
3. **Intersezioni** con gli assi e **segno** di f.
4. **Limiti** agli estremi del dominio e **asintoti** (verticali, orizzontali, obliqui).
5. **Derivata prima**: segno di f', intervalli di monotonia, estremi relativi; punti di non derivabilità.
6. **Derivata seconda** (quando il calcolo è semplice): segno di f'', concavità, flessi e tangenti nei flessi.
7. **Grafico**: si riportano asintoti, punti notevoli e frecce, e si traccia la curva.

Nelle pagine che seguono applichiamo lo schema a funzioni di tipo diverso. Non serve una tecnica sofisticata: le derivate sono quelle del capitolo 6, i limiti quelli dei capitoli 3 e 4. Serve ordine.

7.3.2 Un polinomio

Applichiamo lo schema a $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Dominio e simmetrie. C.E.: $\mathbb{R}$. Poiché $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = f(x)$, la funzione è pari: basta studiarla per $x \geq 0$ e ribaltare il grafico rispetto all'asse y.

Intersezioni e segno. $f(x) = x^2(x^2 - 2)$: si annulla in $x = 0$ (radice doppia) e in $x = \pm\sqrt{2}$. È negativa per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $x \neq 0$, positiva per $|x| > \sqrt{2}$. Per $x \to \pm\infty$ conta il termine di grado massimo: $f(x) \to +\infty$; un polinomio non ha asintoti.

Derivata prima. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$. Lo schema dei segni dà $-$ per $x < -1$, $+$ tra -1 e 0, $-$ tra 0 e 1, $+$ per $x > 1$. Quindi: minimi relativi in $x = \pm 1$, con $f(\pm 1) = -1$, che sono anche minimi assoluti; massimo relativo in $x = 0$, con $f(0) = 0$.

Derivata seconda. $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$, nulla per $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0{,}577$, positiva fuori dall'intervallo delle radici e negativa dentro. I due punti sono flessi, con ordinata $\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{5}{9} \approx -0{,}56$.

Grafico. La curva scende da $+\infty$ al minimo $(-1; -1)$, sale al massimo $O(0; 0)$, scende al minimo $(1; -1)$ e risale verso $+\infty$: ha la forma di una «W», visibile nella Figura 7.8.

7.3.3 Una funzione razionale

Nel capitolo 4 abbiamo disegnato il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$: asintoto verticale $x = 1$, asintoto obliquo $y = x + 1$, funzione negativa a sinistra di 1 e positiva a destra. Restava aperta la domanda più naturale: la curva tra i due asintoti ha un «gomito», ma dove esattamente? Ora possiamo rispondere.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Completa lo studio di $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Quanto già sappiamo. C.E.: $x \neq 1$. Non ci sono simmetrie né zeri ($x^2 + 1 > 0$); il grafico taglia l'asse y in $(0; -1)$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Dividendo, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$, e l'ultimo termine tende a 0 per $x \to \pm\infty$: l'asintoto obliquo è $y = x + 1$.

Derivata prima. Con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Il denominatore è positivo nel dominio; il numeratore si annulla in $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ed è positivo all'esterno delle radici. Quindi f cresce per $x < 1 - \sqrt{2}$, decresce tra $1 - \sqrt{2}$ e 1 e tra 1 e $1 + \sqrt{2}$, cresce per $x > 1 + \sqrt{2}$. C'è un massimo relativo in $x = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41$, con $f = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0{,}83$, e un minimo relativo in $x = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$, con $f = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$.

Derivata seconda. Dalla forma $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$ si ricava subito $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$: negativa per $x < 1$, positiva per $x > 1$. Il ramo sinistro volge la concavità verso il basso, il destro verso l'alto; non ci sono flessi, perché in $x = 1$ la funzione non è definita.

Grafico. È quello della Figura 7.4. Si noti la curiosità: il massimo relativo $(-0{,}83)$ è minore del minimo relativo $(4{,}83)$. Non c'è contraddizione: «relativo» significa che il confronto si fa solo con i punti vicini, e i due punti stanno su rami diversi.

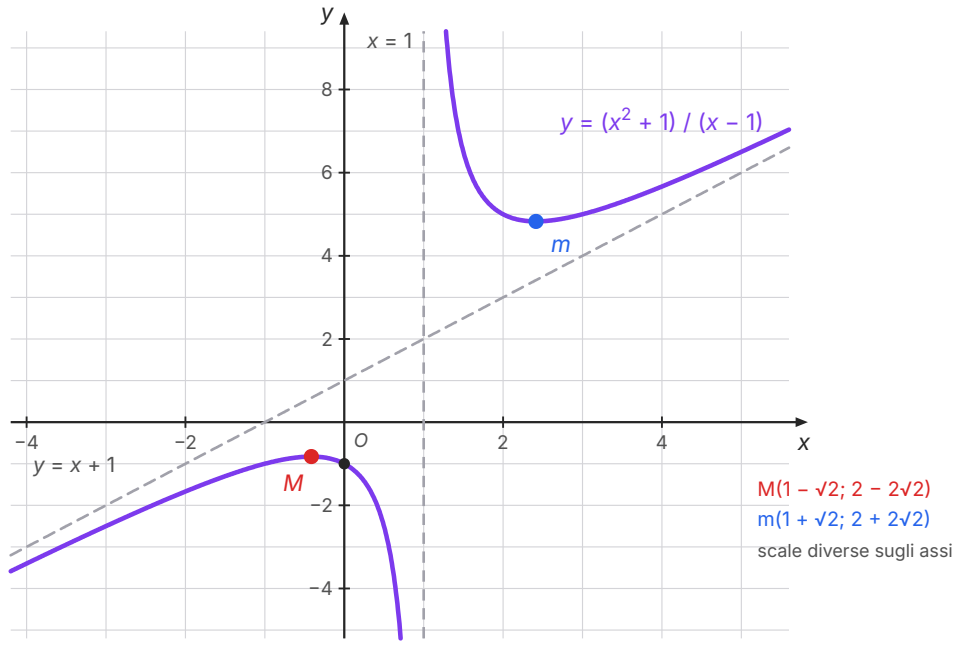


Figura 7.4 Studio completo di $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$: asintoto verticale $x = 1$ e asintoto obliquo $y = x + 1$ (tratteggiati), massimo relativo M e minimo relativo m. Scale diverse sugli assi.

7.3.4 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Con l'esponenziale entra in gioco la gerarchia degli infiniti del capitolo 3. Studiamo $f(x) = x\,e^{-x}$, che compare in molti modelli: nel capitolo 8, con costanti opportune, descriverà in modo semplificato la concentrazione di un farmaco nel sangue dopo una dose. C.E.: $\mathbb{R}$; nessuna simmetria; $f(0) = 0$ ed è l'unico zero, perché $e^{-x} > 0$; il segno di f è quello di x. Per $x \to -\infty$ il prodotto $x \cdot e^{-x}$ è del tipo $(-\infty)\cdot(+\infty)$ e tende a $-\infty$; per $x \to +\infty$ si ha $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \to 0$, perché l'esponenziale «vince» sulla potenza: l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

La derivata è $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)e^{-x}$, con il segno di $1 - x$: la funzione cresce per $x < 1$ e decresce per $x > 1$. Il punto $M\left(1;\ \dfrac{1}{e}\right)$, con $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$, è il massimo assoluto. Derivando ancora, $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$: concavità verso il basso per $x < 2$, verso l'alto per $x > 2$, e flesso in $F\left(2;\ \dfrac{2}{e^2}\right)$, con $\dfrac{2}{e^2} \approx 0{,}271$ (Figura 7.5). Nel flesso la funzione decresce nel modo più rapido: la pendenza è $f'(2) = -\dfrac{1}{e^2} \approx -0{,}135$.

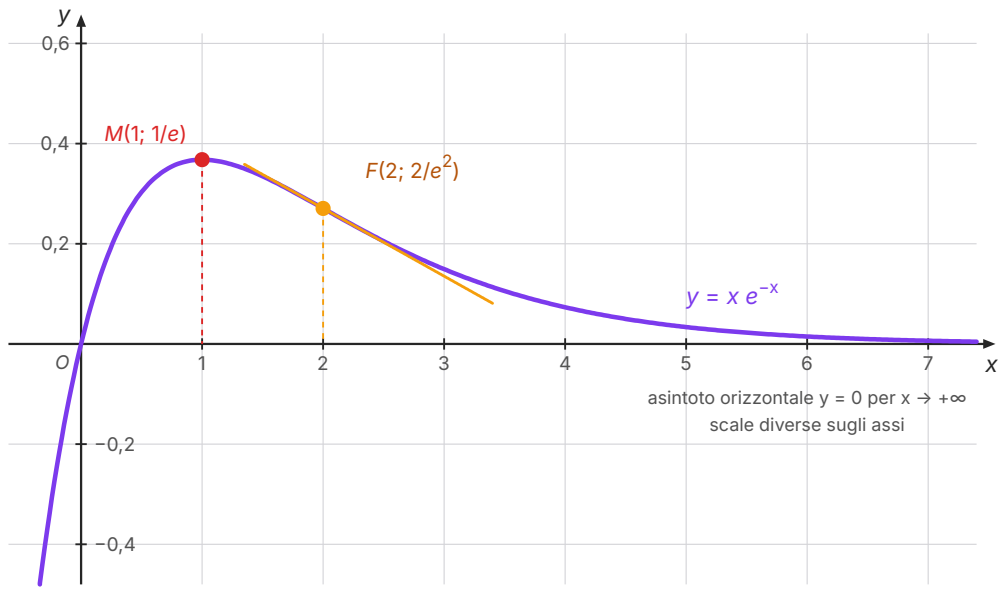


Figura 7.5 Il grafico di $y = x\,e^{-x}$: massimo assoluto $M(1;\ \frac{1}{e})$, flesso $F(2;\ \frac{2}{e^2})$ con la sua tangente, asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Scale diverse sugli assi.

Una seconda funzione ci servirà nel capitolo 11, dove sarà la protagonista: $f(x) = e^{-x^2}$. È pari e sempre positiva, vale 1 in 0 e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. La derivata $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$ è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$: $(0;\ 1)$ è il massimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

e cambia segno in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}71$, dove la funzione vale $e^{-1/2} \approx 0{,}61$. Il grafico è la celebre **curva a campana** o curva di Gauss (Figura 7.6): concava verso il basso nella parte centrale, verso l'alto nelle «code», con due flessi simmetrici. Nel capitolo 11 la ritroveremo, opportunamente dilatata, come densità della distribuzione normale; i suoi flessi segneranno la distanza tipica dal valore medio.

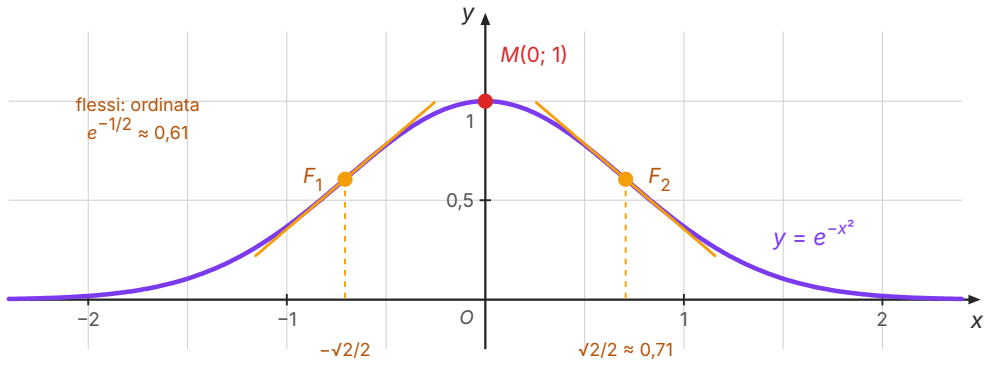


Figura 7.6 La curva a campana $y = e^{-x^2}$: massimo $M(0; 1)$ e flessi F_1, F_2 in $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, con le tangenti di flesso (scale uguali sugli assi).

Nelle funzioni con il logaritmo la prima cosa da curare è il dominio. Per esempio $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ esiste solo per $x > 0$; per $x \to 0^+$ tende a $-\infty$ (il numeratore tende a $-\infty$, il denominatore a 0^+), per $x \to +\infty$ tende a 0 per la gerarchia degli infiniti. La derivata $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ si annulla per $\ln x = 1$, cioè in $x = e$: lì la funzione ha il massimo assoluto $\frac{1}{e}$. Lo studio completo è proposto negli esercizi.

7.3.5 Una funzione goniometrica

Una funzione periodica si studia su un periodo. Consideriamo $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$ in $[0; 2\pi]$. La derivata $f'(x) = \cos x - \text{sen}\, x$ si annulla dove $\text{tg}\, x = 1$, cioè in $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$. Calcolando i valori, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, mentre agli estremi $f(0) = f(2\pi) = 1$: il massimo assoluto è $\sqrt{2}$, il minimo assoluto $-\sqrt{2}$. Poi $f''(x) = -\text{sen}\, x - \cos x = -f(x)$: la derivata seconda ha il segno opposto a quello della funzione, e i flessi cadono dove la curva taglia l'asse x, in $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$. Il risultato non sorprende: con la formula di addizione (*Matematica 4*, cap. 4) $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}\, \text{sen}(x + \frac{\pi}{4})$, una sinusoide di ampiezza $\sqrt{2}$, i cui massimi e flessi conoscevamo già. Lo studio con le derivate conferma, per un'altra via, ciò che la goniometria aveva mostrato.

ERRORE FREQUENTE

«$\frac{1}{x}$ è decrescente, quindi $f(-1) > f(1)$.» La derivata $-\frac{1}{x^2}$ è negativa in tutto il dominio, ma il dominio è formato da due intervalli separati, e il criterio di monotonia vale su ciascuno: $\frac{1}{x}$ è decrescente in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$, ma non nell'unione, perché $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. Nello schema dei segni, i punti esclusi dal dominio vanno sempre segnati, e le frecce non si possono «saldare» attraverso di essi.

7.4 Dal grafico di f a quello di f'

7.4.1 Leggere la derivata su un grafico

Spesso non si ha la formula di una funzione, ma solo il suo grafico: una registrazione, una curva sperimentale, un diagramma in un articolo. Anche così si possono dire molte cose sulla derivata, perché $f'(x)$ è la pendenza della curva. Il dizionario è semplice:

- dove f cresce, f' è positiva (il grafico di f' sta sopra l'asse x); dove f decresce, f' è negativa;
- nei massimi e nei minimi di f con tangente orizzontale, f' si annulla e cambia segno: il grafico di f' taglia l'asse x;
- nei flessi di f la pendenza è massima o minima: f' ha un estremo relativo;
- dove f volge la concavità verso l'alto, f' è crescente; dove la volge verso il basso, f' è decrescente.

Con queste regole si può disegnare a mano un grafico qualitativo di f', partendo da quello di f: si segnano sull'asse x le ascisse dei punti a tangente orizzontale (zeri di f') e dei flessi (estremi di f'), poi si stabilisce il segno in ogni intervallo. Il procedimento si può anche rovesciare: dal grafico di f' si deduce dove f cresce e dove ha massimi, minimi e flessi, anche se non la sua «altezza», perché funzioni che differiscono per una costante hanno la stessa derivata (capitolo 6).

In breve: gli **zeri** di f' (con cambio di segno) corrispondono agli **estremi** di f; gli **estremi** di f' corrispondono ai **flessi** di f. Lo stesso legame unisce f' e f'': gli zeri di f'' sono gli estremi di f'. Ogni volta che si deriva, si «scende di un gradino»: un polinomio di grado n ha per derivata un polinomio di grado $n - 1$.

7.4.2 Riconoscere f, f' e f''

Un esercizio tipico chiede di riconoscere, tra tre grafici disegnati, quale rappresenta f, quale f' e quale f''. Il criterio è il dizionario precedente, usato come una catena: il grafico di f ha i suoi estremi dove quello di f' taglia l'asse x, e così via.

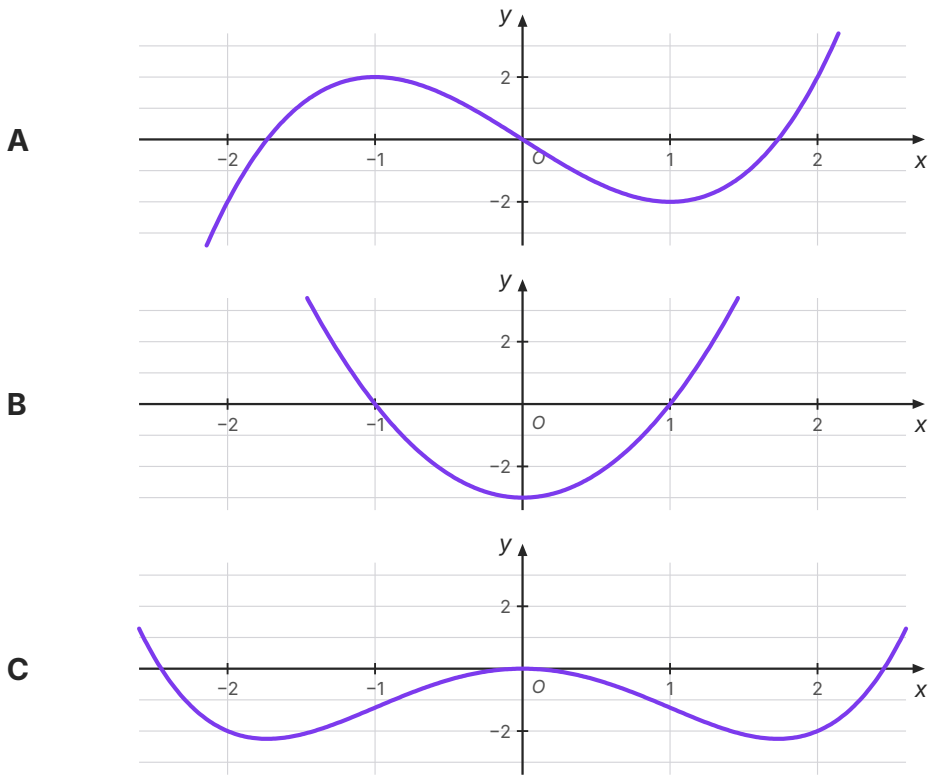


Figura 7.7 Tre grafici: uno rappresenta una funzione f, uno la sua derivata f', uno la derivata seconda f''. Quale è quale? (Scale diverse sugli assi; stessa scala orizzontale nei tre riquadri.)

Vediamolo sui tre grafici della Figura 7.7. **Si contano gli estremi.** Il grafico C ha tre punti a tangente orizzontale (due minimi e un massimo), il grafico A ne ha due (un massimo e un minimo), il grafico B uno solo (un minimo). Il numero degli estremi scende di uno da C ad A e da A a B, come accade derivando un polinomio di quarto grado e poi la sua derivata: l'ordine plausibile è C → A → B. Ma è solo un indizio, non una regola (x^3 non ha estremi, la sua derivata x^2 ne ha uno), e va controllato.

Si controlla. Gli zeri di A sono in $x = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$, in 0 e in $\sqrt{3}$: proprio le ascisse dei minimi e del massimo di C. A è negativa a sinistra di $-\sqrt{3}$, dove C scende, e positiva tra $-\sqrt{3}$ e 0, dove C sale. Gli zeri di B, in $x = \pm 1$, cadono negli estremi di A e nei flessi di C. Dunque f = C, f' = A, f'' = B.

Infatti i grafici sono stati disegnati con $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2$, $f'(x) = x^3 - 3x$, $f''(x) = 3x^2 - 3$.

Si noti che nessun «indizio» da solo bastava: il controllo incrociato è ciò che rende sicura la risposta.

7.5 Equazioni e grafici

7.5.1 Quante soluzioni ha un'equazione?

Molte equazioni non si sanno risolvere con formule: $x^3 - 3x + 1 = 0$, $e^x = 3x$, $\cos x = x$. Lo studio di funzione permette almeno di rispondere a una domanda più modesta, ma spesso decisiva: *quante* soluzioni ci sono, e dove si trovano. Le soluzioni di $f(x) = k$ sono le ascisse dei punti in cui il grafico di f incontra la retta orizzontale $y = k$. Se il grafico è noto, basta immaginare quella retta che sale o scende e contare le intersezioni.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Al variare del numero reale k, quante soluzioni reali ha l'equazione $x^4 - 2x^2 = k$?

Il grafico. Abbiamo già studiato $f(x) = x^4 - 2x^2$: minimi assoluti $(\pm 1; -1)$, massimo relativo $(0; 0)$, limite $+\infty$ agli estremi. Tracciamo le rette $y = k$ (Figura 7.8).

Il conteggio.

- $k < -1$: la retta passa sotto i minimi, nessuna soluzione;
- $k = -1$: la retta tocca i due minimi, due soluzioni ($x = \pm 1$);
- $-1 < k < 0$: la retta taglia ciascuna delle due «valli» in due punti, quattro soluzioni;
- $k = 0$: tre soluzioni ($x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$);
- $k > 0$: la retta passa sopra il massimo relativo e taglia solo i rami esterni, due soluzioni.

Verifica algebrica. L'equazione è biquadratica: con $t = x^2$ diventa $t^2 - 2t - k = 0$. Per $k = -\frac{1}{2}$, per esempio, $t = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, due valori positivi, e quindi quattro valori di x: il conteggio grafico è confermato.

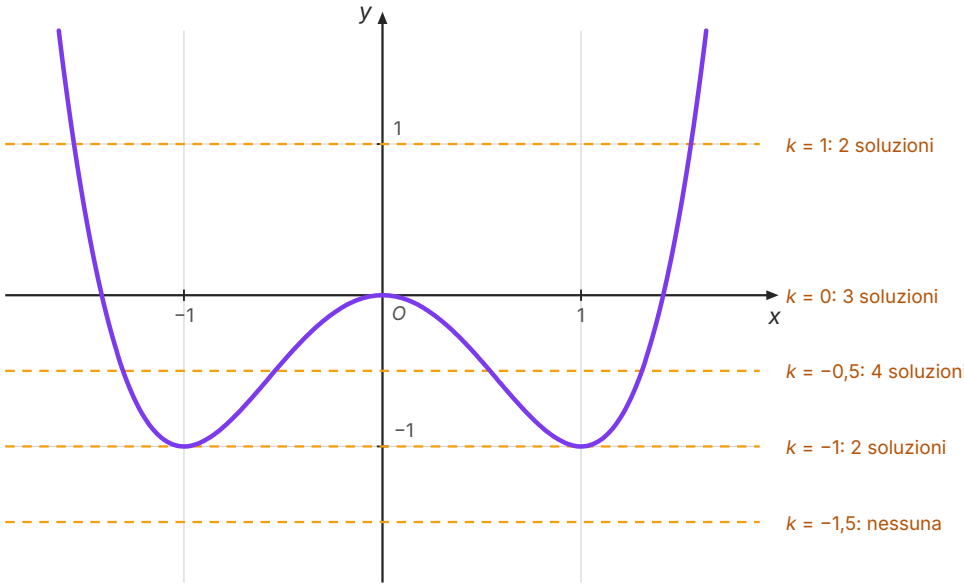


Figura 7.8 Le soluzioni di $x^4 - 2x^2 = k$ sono le ascisse delle intersezioni del grafico di $y = x^4 - 2x^2$ con la retta orizzontale $y = k$: il loro numero cambia quando la retta passa per un estremo relativo (scale diverse sugli assi).

7.5.2 Esistenza, unicità e approssimazione

Per localizzare le soluzioni si combinano due risultati. Il **teorema degli zeri** (capitolo 4) garantisce l'esistenza: se f è continua in $[a; b]$ e $f(a), f(b)$ hanno segni opposti, c'è almeno una soluzione di $f(x) = 0$ in $]a; b[$. La **monotonia** garantisce l'unicità: se f è strettamente crescente o decrescente in $[a; b]$, la soluzione è una sola.

In un esercizio di *Matematica 4* (cap. 1) hai trovato con la bisezione una soluzione approssimata di $x^3 + x - 1 = 0$ nell'intervallo $[0; 1]$. Ora possiamo dire di più. La funzione $f(x) = x^3 + x - 1$ ha derivata $f'(x) = 3x^2 + 1$, sempre positiva: è crescente in tutto $\mathbb{R}$ e quindi incontra l'asse x una volta sola. La soluzione trovata allora, $x \approx 0{,}6823$, è l'*unica* soluzione reale. Allo stesso modo, $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ha un massimo relativo in $x = -1$, dove $f(-1) = 3 > 0$, e un minimo relativo in $x = 1$, dove $f(1) = -1 < 0$: il grafico attraversa l'asse una volta prima del massimo, una tra massimo e minimo, una dopo il minimo. Le soluzioni sono esattamente tre, e ognuna può essere approssimata con un foglio di calcolo, con la bisezione o leggendo il grafico tracciato da un software (si veda l'esercizio della sezione «Con il computer»).

APPROFONDIMENTO · MASSIMI, MINIMI E IL MIGLIORE DEI MONDI

Il primo articolo a stampa sul calcolo differenziale, pubblicato da Leibniz negli *Acta Eruditorum* nel 1684, ha un titolo che è già un programma: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus*, cioè «Nuovo metodo per i massimi e i minimi, e per le tangenti». Trovare i punti più alti e più bassi di una curva era uno dei problemi da cui il calcolo era nato: prima di Leibniz e di Newton, Fermat aveva elaborato un procedimento per i massimi e i minimi che, letto oggi, equivale a imporre che la tangente sia orizzontale. Nell'articolo di Leibniz la regola diventa un algoritmo: si eguaglia a zero il differenziale. Vi compare anche il segno del differenziale secondo per distinguere le concavità, e vi si parla dei punti di flesso.

L'idea di massimo ebbe in Leibniz anche una vita filosofica. Nei suoi scritti, e in particolare nei *Saggi di teodicea*, egli sostenne che il mondo creato è il «migliore dei mondi possibili»: tra infinite possibilità ne è stata scelta una che rende massima la perfezione complessiva. Voltaire, nel *Candido*, mise in ridicolo questa tesi davanti ai disastri del suo tempo. Il dibattito tra i filosofi non riguarda la matematica; ma è significativo che il linguaggio dei massimi e dei minimi sia passato, nello stesso autore, dalla geometria delle curve alla descrizione del mondo. Nel capitolo 8 vedremo come i principi di minimo siano entrati anche nella fisica.

SINTESI

- Se f è continua in un intervallo e $f' > 0$ nei punti interni, f è crescente; se $f' < 0$, è decrescente (corollario del teorema di Lagrange). Il criterio vale su ogni intervallo separatamente.
- x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo se $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) in un intorno di x_0; assoluto se la disuguaglianza vale in tutto il dominio.
- I punti stazionari sono gli zeri di f'. Un punto stazionario è un estremo se f' cambia segno: da + a − massimo, da − a + minimo. x^3 in 0 è stazionario ma non è un estremo.
- Gli estremi vanno cercati anche dove f non è derivabile ($|x|$ in 0) e, su un intervallo chiuso, negli estremi dell'intervallo.
- Su $[a; b]$, con f continua, massimo e minimo assoluti esistono (Weierstrass): si confrontano i valori nei punti stazionari, nei punti di non derivabilità e in a e b.
- Se $f'' > 0$ il grafico volge la concavità verso l'alto (sta sopra le tangenti), se $f'' < 0$ verso il basso.
- Un flesso è un punto in cui la concavità cambia; lì la tangente attraversa la curva e, se esiste, f'' cambia segno. $f'' = 0$ non basta: x^4 in 0 ha un minimo.
- Schema dello studio: dominio, simmetrie, intersezioni e segno, limiti e asintoti, f' (monotonia ed estremi), f'' (concavità e flessi), grafico.
- $x\,e^{-x}$ ha massimo $(1; \frac{1}{e})$ e flesso $(2; \frac{2}{e^2})$; la curva a campana e^{-x^2} ha massimo (0; 1) e flessi in $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Zeri di f' con cambio di segno ↔ estremi di f; estremi di f' ↔ flessi di f. Così si riconoscono f, f' e f'' tra più grafici.
- Le soluzioni di $f(x) = k$ sono le intersezioni del grafico con la retta $y = k$; il loro numero cambia quando la retta passa per un estremo relativo.
- Teorema degli zeri (esistenza) + monotonia (unicità) localizzano le soluzioni, che si approssimano con la bisezione o con il computer.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Una funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) > 0$ per ogni x dell'intervallo $]2; 5[$. Allora:

   A. $f(x) > 0$ in $]2; 5[$

   B. f è crescente in $]2; 5[$

   C. f ha un massimo in $x = 5$

   D. $f''(x) > 0$ in $]2; 5[$

2. ● Se f è derivabile e $f'(x_0) = 0$, si può concludere con certezza che:

   A. x_0 è un punto di massimo o di minimo

   B. $f(x_0) = 0$

   C. $f''(x_0) = 0$

   D. la tangente al grafico in x_0 è orizzontale

3. ● Per la funzione $f(x) = x^3$ il punto $O(0; 0)$ è:

   A. un flesso a tangente orizzontale

   B. un punto di minimo relativo

   C. un punto di massimo relativo

   D. un punto angoloso

4. ● Se $f''(x) = 6(x - 2)$, il grafico di f:

   A. volge la concavità verso l'alto in tutto $\mathbb{R}$

   B. ha un massimo relativo in $x = 2$

   C. volge la concavità verso l'alto per $x > 2$ e ha un flesso in $x = 2$

   D. è decrescente per $x < 2$

5. ●● La derivata di una funzione f, derivabile in $\mathbb{R}$, è $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$. Allora:

   A. $x = -2$ è un punto di massimo e $x = 1$ di minimo

   B. $x = -2$ e $x = 1$ sono entrambi punti di minimo

   C. $x = 1$ è un punto di massimo e $x = -2$ non è un estremo

   D. $x = -2$ è un punto di minimo e $x = 1$ non è un estremo

6. ●● Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^4 - 2x^2 + 1 = \frac{1}{4}$? (Riconducila a una retta orizzontale della Figura 7.8.)

   A. 4

   B. 2

   C. 3

   D. nessuna

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Una funzione continua in $[a; b]$ ha sempre massimo e minimo assoluti.

   b) Se $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è l'ascissa di un punto di flesso.

   c) In un punto di flesso la tangente attraversa il grafico.

   d) Il massimo assoluto di una funzione su $[a; b]$ si trova sempre in un punto stazionario.

8. ● Completa.
a) x_0 è un punto di _____ relativo per f se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni x del dominio.
b) I punti in cui $f'(x) = 0$ si chiamano punti _____ .
c) Se $f''(x) < 0$ in un intervallo, il grafico volge la concavità verso _____ e sta _____ le sue tangenti.
d) Gli zeri di f' in cui f' cambia segno corrispondono agli _____ di f; gli estremi di f' corrispondono ai _____ di f.

Calcolare

9. ● Trova gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e i suoi estremi relativi.
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; b) $f(x) = x^4 - 4x^3$; c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

10. ●● Trova gli intervalli di monotonia e gli estremi relativi di a) $f(x) = x\,e^x$; b) $f(x) = x^2\,e^{-x}$.

11. ●● Trova il massimo e il minimo assoluti nell'intervallo indicato.
a) $f(x) = x^3 - 3x$ in $[-2; 3]$; b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ in $[1; 4]$; c) $f(x) = e^{-x^2}$ in $[-1; 2]$.

12. ●● Studia la concavità e trova i flessi; per a) scrivi anche l'equazione della tangente nel flesso.
a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $f(x) = x^4 - 6x^2$; c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

13. ●● Studia la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ e tracciane il grafico.

14. ●● Studia la funzione $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ e tracciane il grafico.

15. ●● Studia la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ e tracciane il grafico. Per la derivata seconda usa $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$.

16. ●● Studia la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ (dominio, simmetrie, zeri, segno, asintoti, monotonia, concavità sapendo che $f''(x) = -\dfrac{6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$) e tracciane il grafico.

17. ●●● Studia la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ e tracciane il grafico.

18. ●●● Studia la funzione $f(x) = x + 2\cos x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$: estremi relativi e assoluti, flessi, grafico.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che il grafico di una funzione di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, ha sempre uno e un solo punto di flesso, e trova la sua ascissa.

20. ●● Trova l'errore in ciascun ragionamento e correggilo.
a) «$f(x) = x^4$ ha $f''(0) = 0$, quindi l'origine è un flesso.»
b) «$f(x) = x^3 - 3x$ ha un massimo relativo in $x = -1$, quindi $f(x) \le f(-1) = 2$ per ogni x.»

21. ●● Dimostra che $f(x) = x - \text{sen } x$ è crescente in $\mathbb{R}$ e deduci che $\text{sen } x < x$ per ogni $x > 0$.

22. ●●● La funzione $f(x) = \text{tg } x$ ha $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$ in tutto il suo dominio. È vero che f è iniettiva? Spiega che cosa insegna questo esempio sul criterio di monotonia.

Problemi

23. ●● Un punto si muove su una retta secondo la legge $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (s in metri, t in secondi, $0 \le t \le 6$; dati inventati).
a) In quali intervalli di tempo il punto avanza e in quali torna indietro?
b) Qual è la posizione più lontana dall'origine raggiunta nei primi 4 s? Quale spazio complessivo percorre in 6 s?
c) In quale istante l'accelerazione è nulla, e quanto vale lì la velocità?

24. ●● La concentrazione di un farmaco nel sangue (dati simulati) è $c(t) = \dfrac{20t}{t^2 + 4}$ mg/L, con t in ore dalla somministrazione.
a) Quando la concentrazione è massima e quanto vale?
b) Sapendo che $c''(t) = \dfrac{40t(t^2 - 12)}{(t^2 + 4)^3}$, in quale istante la concentrazione diminuisce più rapidamente? Con quale velocità?
c) Che cosa accade per $t \to +\infty$?

25. ●● Il costo totale per produrre x quintali di un prodotto (dati inventati) è $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 500$ euro, per $0 \le x \le 25$.
a) Mostra che C è sempre crescente.
b) Trova il flesso di C e interpreta il risultato in termini di costo marginale, cioè della derivata $C'(x)$, che misura approssimativamente quanto costa produrre un quintale in più.

26. ●●● Il profilo di una collina (dati inventati) è descritto da $y = 100\, e^{-x^2/2}$, con x in centinaia di metri (distanza orizzontale dalla cima) e y in metri. Sapendo che $y'' = 100(x^2 - 1)e^{-x^2/2}$, trova i punti in cui il pendio è più ripido e la pendenza in quei punti.

Con il computer

27. ●● Con un software di grafici traccia $y = x^3 - 3x + 1$.
a) Spiega con lo studio della derivata perché l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ha esattamente tre soluzioni reali.
b) Per ciascuna trova un intervallo di ampiezza 1 con estremi interi che la contiene.
c) Con un foglio di calcolo, usando la bisezione, approssima le tre soluzioni a meno di 0,01 e confrontale con quelle lette sul grafico.

Verso l'esame

28. ●● Nello stile delle prove nazionali. Di una funzione f derivabile in $\mathbb{R}$ si sa che il grafico della sua derivata f' è una parabola con la concavità verso l'alto che taglia l'asse x nei punti di ascissa -1 e 3.
a) In quali intervalli f è crescente?
b) Quali sono le ascisse dei punti di massimo e di minimo relativo di f?
c) Il grafico di f ha un flesso? Dove?

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Una funzione polinomiale di quarto grado può avere al massimo quanti punti stazionari? E quanti flessi? Può non avere flessi? Giustifica le risposte e fai un esempio per ciascun caso.

30. ●● Spunto per il colloquio. Il primo articolo di Leibniz sul calcolo differenziale (1684) si intitola «Nuovo metodo per i massimi e i minimi, e per le tangenti». Spiega perché massimi, minimi e tangenti sono un unico problema, mostra il metodo su un esempio e collega l'idea di massimo alla filosofia di Leibniz e a un'applicazione fisica.

31. ●●● Sfida. Dimostra che il grafico di ogni funzione di terzo grado è simmetrico rispetto al suo punto di flesso. Suggerimento: verificalo prima per $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, mostrando che $f(1 + t) + f(1 - t) = 4$ per ogni t; poi generalizza con $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo differenziale, con i massimi e i minimi e il significato della derivata seconda.
- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: il metodo di Fermat per i massimi e i minimi e la *Nova methodus* di Leibniz.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Fermat, Newton e Leibniz.

Glossario del capitolo

Concavità
Il verso in cui si incurva un grafico: verso l'alto se la curva sta sopra le sue tangenti ($f'' > 0$), verso il basso se sta sotto ($f'' < 0$).

Criterio di monotonia
Se $f' > 0$ nei punti interni di un intervallo, f vi è crescente; se $f' < 0$, decrescente.

Curva a campana
Il grafico di $y = e^{-x^2}$ (curva di Gauss): massimo in $(0; 1)$, flessi in $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, asintoto $y = 0$.

Estremi relativi
I punti di massimo e di minimo relativo di una funzione.

Flesso
Punto del grafico in cui la concavità cambia verso e la tangente attraversa la curva.

Flesso a tangente orizzontale
Flesso in cui $f'(x_0) = 0$, come l'origine per $y = x^3$.

Funzione crescente
In un intervallo: $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Funzione decrescente
In un intervallo: $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.

Punto stazionario
Punto in cui $f'(x_0) = 0$: la tangente è orizzontale. Può essere un massimo, un minimo o un flesso.

Schema dei segni
Diagramma che riassume il segno di f' (o di f'') negli intervalli del dominio, con le frecce di crescenza e decrescenza.

Studio di funzione
Procedimento ordinato (dominio, simmetrie, segno, limiti e asintoti, f', f'') per tracciare il grafico di una funzione.

Soluzioni

1. B.

2. D.

3. A.

4. C.

5. D. f' ha il segno di $x + 2$ (il fattore $(x - 1)^2$ è positivo per $x \neq 1$): − per $x < -2$, + per $x > -2$. In $x = -2$ c'è un minimo; in $x = 1$ f' si annulla senza cambiare segno: flesso a tangente orizzontale.

6. A. L'equazione equivale a $x^4 - 2x^2 = -\frac{3}{4}$: la retta $y = -\frac{3}{4}$ sta tra il minimo −1 e il massimo relativo 0. (Controllo: $(x^2 - 1)^2 = \frac{1}{4}$ dà $x^2 = \frac{1}{2}$ o $x^2 = \frac{3}{2}$, quattro valori di x.)

7. a) Vero (teorema di Weierstrass). b) Falso: occorre che f'' cambi segno; x^4 ha $f''(0) = 0$ e in 0 un minimo. c) Vero. d) Falso: può trovarsi in un estremo dell'intervallo o in un punto di non derivabilità; per esempio x in $[0; 1]$ ha il massimo in 1, dove $f' = 1$.

8. a) minimo; b) stazionari; c) il basso, sotto; d) estremi, flessi.

9. a) $f' = 6(x + 1)(x - 2)$: crescente per $x < -1$ e $x > 2$, decrescente in $]-1; 2[$; massimo relativo $(-1; 8)$, minimo relativo $(2; -19)$. b) $f' = 4x^2(x - 3)$: decrescente per $x < 3$, crescente per $x > 3$; minimo $(3; -27)$; in $x = 0$ f' non cambia segno (flesso a tangente orizzontale). c) $f' = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$: decrescente per $x < -2$ e $x > 2$, crescente in $]-2; 2[$; minimo $(-2; -\frac{1}{4})$, massimo $(2; \frac{1}{4})$ (anche assoluti).

10. a) $f' = (x + 1)e^x$: decrescente per $x < -1$, crescente per $x > -1$; minimo assoluto $(-1; -\frac{1}{e}) \approx (-1; -0{,}37)$. b) $f' = x(2 - x)e^{-x}$: decrescente per $x < 0$ e $x > 2$, crescente in $]0; 2[$; minimo $(0; 0)$ (assoluto), massimo relativo $(2; \frac{4}{e^2}) \approx (2; 0{,}54)$.

11. a) Candidati: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$; massimo 18 in $x = 3$, minimo −2 in $x = -2$ e in $x = 1$. b) $f' = 1 - \frac{4}{x^2}$, nulla in $x = 2$: $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(4) = 5$; massimo 5 in $x = 1$ e $x = 4$, minimo 4 in $x = 2$. c) $f' = -2x\,e^{-x^2}$, nulla in 0: $f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$, $f(0) = 1$, $f(2) = e^{-4} \approx 0{,}018$; massimo 1 in $x = 0$, minimo e^{-4} in $x = 2$.

12. a) $f'' = 6(x - 2)$: verso il basso per $x < 2$, verso l'alto per $x > 2$; flesso $(2; 2)$, $f'(2) = -3$, tangente $y = -3x + 8$. b) $f'' = 12(x^2 - 1)$: verso l'alto per $|x| > 1$, verso il basso in $]-1; 1[$; flessi $(\pm 1; -5)$. c) $f'' = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$: verso l'alto in $]-1; 1[$, verso il basso per $|x| > 1$; flessi $(\pm 1; \ln 2) \approx (\pm 1; 0{,}69)$.

13. C.E. $\mathbb{R}$, nessuna simmetria; $f = x^2(x - 3)$: zeri 0 (doppio) e 3, negativa per $x < 3$ ($x \neq 0$), positiva per $x > 3$; limiti $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. $f' = 3x(x - 2)$: massimo relativo $(0; 0)$, minimo relativo $(2; -4)$. $f'' = 6(x - 1)$: flesso $(1; -2)$ con tangente $y = -3x + 1$. Nessun estremo assoluto.

14. C.E. $\mathbb{R}$, pari. $f = (x^2 - 1)(x^2 - 3)$: zeri ± 1, $\pm\sqrt{3}$; positiva per $|x| < 1$ e $|x| > \sqrt{3}$; limite $+\infty$ agli estremi. $f' = 4x(x^2 - 2)$: massimo relativo $(0; 3)$, minimi assoluti $(\pm\sqrt{2}; -1)$. $f'' = 4(3x^2 - 2)$: flessi in $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \approx \pm 0{,}82$, con $f = \frac{7}{9}$. Grafico a «W».

15. C.E. $\mathbb{R}$, dispari; unico zero in O; positiva per $x > 0$. Per $x \to \pm\infty$, $f \to 0$: asintoto orizzontale $y = 0$. $f' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$: minimo assoluto $(-1; -\frac{1}{2})$, massimo assoluto $(1; \frac{1}{2})$. f'' si annulla e cambia segno in 0 e in $\pm\sqrt{3}$: flessi $O(0; 0)$ (tangente $y = x$) e $(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{4}) \approx (\pm 1{,}73; \pm 0{,}43)$.

16. C.E. $x \neq \pm 1$; pari. Zeri ± 2; $f(0) = 4$. Segno: positiva per $|x| < 1$ e $|x| > 2$, negativa per $1 < |x| < 2$. Asintoti: $x = \pm 1$ ($\lim_{x \to 1^-} f = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f = -\infty$, e simmetricamente in -1) e $y = 1$. $f' = \dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$: decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$ ($x \neq \pm 1$); minimo relativo $(0; 4)$. $f'' > 0$ in $]-1; 1[$, $f'' < 0$ per $|x| > 1$: nessun flesso. Il ramo centrale è un «pozzo» con minimo in $(0; 4)$; i rami esterni partono da $-\infty$ accanto agli asintoti verticali e si avvicinano all'asintoto $y = 1$ restando sotto di esso.

17. C.E. $x > 0$. Zero in $x = 1$; negativa in $]0; 1[$, positiva per $x > 1$. $\lim_{x \to 0^+} f = -\infty$ (asintoto $x = 0$), $\lim_{x \to +\infty} f = 0$ (asintoto $y = 0$). $f' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$: crescente in $]0; e[$, decrescente per $x > e$; massimo assoluto $(e; \dfrac{1}{e}) \approx (2{,}72; 0{,}37)$. $f'' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$: flesso in $x = e^{3/2} \approx 4{,}48$, con $f = \dfrac{3}{2e^{3/2}} \approx 0{,}33$.

18. $f' = 1 - 2\operatorname{sen} x$, nulla per $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$: $x = \dfrac{\pi}{6}$ (massimo relativo, $f = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2{,}26$) e $x = \dfrac{5\pi}{6}$ (minimo relativo, $f = \dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 0{,}89$). Agli estremi $f(0) = 2$, $f(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8{,}28$: massimo assoluto $2 + 2\pi$ in $x = 2\pi$, minimo assoluto $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ in $x = \dfrac{5\pi}{6}$. $f'' = -2\cos x$: flessi in $(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ e $(\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2})$.

19. $f''(x) = 6ax + 2b$ è un polinomio di primo grado (perché $a \neq 0$): si annulla in un solo punto, $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$, e cambia segno attraversandolo. Quindi la concavità cambia una e una sola volta: un solo flesso, di ascissa $-\dfrac{b}{3a}$.

20. a) $f'' = 12x^2$ non cambia segno: in 0 la concavità resta verso l'alto e l'origine è il minimo assoluto, non un flesso. b) Il massimo è solo relativo: per $x \to +\infty$ $f \to +\infty$; per esempio $f(3) = 18 > 2$.

21. $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, e si annulla solo nei punti isolati $x = 2k\pi$; in ogni intervallo limitato f è quindi crescente (vedi il caso di x^3). Allora per $x > 0$ si ha $f(x) > f(0) = 0$, cioè $x - \operatorname{sen} x > 0$.

22. No: $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0$. Il dominio non è un intervallo ma un'unione di intervalli separati dagli asintoti; il criterio di monotonia dice che tg x è crescente su ciascuno di essi, non sul dominio intero.

23. $v = s' = 3(t-2)(t-4)$. a) Avanza in $[0; 2[$ e in $]4; 6]$, torna indietro in $]2; 4[$. b) $s(2) = 20$ m (in $[0; 4]$ si ha $s(4) = 16$): la posizione più lontana è 20 m. Spazio percorso: $20 + (20 - 16) + (36 - 16) = 44$ m. c) $a = s'' = 6t - 18 = 0$ per $t = 3$ s, dove $v(3) = -3$ m/s: è la velocità minima (il punto torna indietro alla massima rapidità).

24. a) $c' = \dfrac{20(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}$, nulla in $t = 2$: massimo $c(2) = 5$ mg/L dopo 2 ore. b) c'' cambia segno in $t = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ h (flesso), dove $c \approx 4{,}33$ mg/L e $c' = -\dfrac{5}{8} \approx -0{,}63$ mg/L all'ora. c) $c \to 0$: il farmaco viene eliminato.

25. a) $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ ha discriminante $3600 - 4800 < 0$: è sempre positivo, quindi C è crescente. b) $C'' = 6(x - 10)$: flesso in $x = 10$, $C(10) = 2500$ euro. Lì il costo marginale C' è minimo: $C'(10) = 100$ euro per quintale; prima i costi crescono sempre più lentamente, dopo sempre più rapidamente.

26. La pendenza è massima in valore assoluto dove y' ha un estremo, cioè nei flessi: $y'' = 0$ per $x = \pm 1$ (cioè a 100 m dalla cima, da ciascun lato), dove $y = 100e^{-1/2} \approx 60{,}7$ m. $y' = -100x\, e^{-x^2/2}$, quindi $|y'(\pm 1)| = 100e^{-1/2} \approx 60{,}7$ metri di dislivello per ogni 100 m in orizzontale: una pendenza di circa il 61%.

27. a) $f' = 3(x^2 - 1)$: massimo relativo $f(-1) = 3 > 0$, minimo relativo $f(1) = -1 < 0$; poiché $f \to -\infty$ per $x \to -\infty$ e $f \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e f è monotona in ciascuno dei tre intervalli, il grafico taglia l'asse una volta in ognuno: tre soluzioni. b) $]-2; -1[$, $]0; 1[$, $]1; 2[$. c) $x \approx -1{,}88$; $0{,}35$; $1{,}53$ (più precisamente $-1{,}8794$; $0{,}3473$; $1{,}5321$).

28. a) $f' > 0$ fuori dalle radici: f crescente per $x < -1$ e per $x > 3$. b) Massimo relativo in $x = -1$ (f' da + a −), minimo relativo in $x = 3$. c) Sì: f' ha il minimo nel vertice della parabola, $x = 1$, quindi f ha un flesso in $x = 1$.

29. f' ha grado 3, quindi al più 3 zeri: al massimo 3 punti stazionari (es. $x^4 - 2x^2$). f'' ha grado 2: al massi-

mo 2 flessi (es. $x^4 - 2x^2$, flessi in $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$). Può non avere flessi: x^4 ha $f'' = 12x^2 \geq 0$.

30. Traccia: 1) nei massimi e nei minimi di una curva derivabile la tangente è orizzontale, quindi trovare gli estremi significa trovare dove la pendenza della tangente è zero; 2) esempio: $f(x) = x^3 - 12x$, $f' = 3x^2 - 12 = 0$ per $x = \pm 2$, poi il segno di f'; 3) Fermat aveva anticipato l'idea; Leibniz la rese un algoritmo con il differenziale; 4) Leibniz e il «migliore dei mondi possibili», la satira di Voltaire nel *Candido*; 5) in fisica: istanti di arresto ($v = 0$) come estremi della posizione, e i principi di minimo (capitolo 8: Erone, Fermat e la rifrazione); 6) il calcolo come linguaggio comune di geometria e fisica nel Seicento.

31. Per $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$: $f(1 + t) + f(1 - t) = 4$ per ogni t (sviluppando, i termini in t e t^3 si elidono e quelli in t^2 pure), cioè i punti di ascissa $1 + t$ e $1 - t$ sono simmetrici rispetto a $F(1; 2)$. In generale, posto $x_0 = -\frac{b}{3a}$, $f(x_0 + t) + f(x_0 - t) = 2f(x_0) + 2(3ax_0 + b)t^2 = 2f(x_0)$, perché i termini dispari in t si elidono e $3ax_0 + b = 0$. Quindi il punto medio di ogni coppia di punti del grafico simmetrici rispetto a x_0 è il flesso: il grafico è simmetrico rispetto a esso.