CAPITOLO

6

Regole di derivazione e teoremi del calcolo differenziale

Quattro regole bastano a derivare quasi tutto; tre teoremi dicono che cosa la derivata sa della funzione intera. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Derivare somme, prodotti, quozienti e funzioni composte delle funzioni elementari, e derivare la funzione inversa nei casi semplici.
2. Calcolare le derivate successive e interpretare la derivata seconda come accelerazione, anche nel moto armonico.
3. Usare la derivata per descrivere grandezze fisiche: velocità, accelerazione, intensità di corrente, forza elettromotrice indotta.
4. Scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale e usare il differenziale per approssimare una funzione.
5. Enunciare e interpretare i teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange, riconoscendo il ruolo di ciascuna ipotesi.
6. Collegare le leggi del moto all'idea di determinismo della filosofia dell'Ottocento.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Le regole di derivazione 2

6.2 La funzione composta e la funzione inversa 4

6.3 Derivate successive e applicazioni alla fisica 9

6.4 Tangente, normale e approssimazione lineare 13

6.5 I teoremi del calcolo differenziale 16

Matematica 5 · Parte III · Il calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 6: Regole di derivazione e teoremi del calcolo differenziale · pagine 157–182 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 5 abbiamo calcolato le derivate di poche funzioni, una alla volta, partendo dalla definizione: le costanti, le potenze, $\sqrt{x}$, sen x, cos x, e^x, ln x. Ogni calcolo chiedeva un limite e un'idea. Ma le funzioni che descrivono i fenomeni sono quasi sempre *costruite* a partire da quelle: la posizione di una massa appesa a una molla è un coseno di un multiplo del tempo, la carica di un condensatore è una costante per una differenza con un esponenziale, la temperatura di una tazza di caffè è una somma di una costante e di un esponenziale con l'esponente negativo. Rifare ogni volta il limite del rapporto incrementale sarebbe lungo e inutile.

In questo capitolo impariamo le **regole di derivazione**, che dicono come si deriva una somma, un prodotto, un quoziente e una funzione composta conoscendo le derivate dei pezzi. Con le derivate del capitolo 5 e queste quattro regole si derivano tutte le funzioni che le *Indicazioni nazionali* chiedono di saper trattare. Poi useremo le derivate per descrivere il moto, la corrente elettrica e l'induzione elettromagnetica, per scrivere le rette tangenti e normali e per approssimare una funzione vicino a un punto. Nell'ultima sezione incontreremo i **teoremi del calcolo differenziale** (Fermat, Rolle, Lagrange): dicono che cosa la derivata rivela del comportamento globale di una funzione e preparano lo studio di funzione del capitolo 7 e le primitive del capitolo 10.

6.1 Le regole di derivazione

6.1.1 Somma e prodotto per una costante

Siano f e g due funzioni derivabili in x. Il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali:

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Per $h \to 0$ i due addendi tendono a $f'(x)$ e $g'(x)$ e, per il teorema sul limite di una somma (capitolo 3), il primo membro tende a $f'(x)+g'(x)$. Quindi $(f+g)'=f'+g'$: **la derivata di una somma è la somma delle derivate**. Allo stesso modo, se k è una costante, il rapporto incrementale di $k\cdot f$ è k volte quello di f, e $(k\cdot f)'=k\cdot f'$: una costante moltiplicativa «esce» dalla derivata. c.v.d.

Le due regole insieme dicono che la derivazione è un'operazione **lineare**, e bastano per derivare qualunque polinomio termine per termine: per esempio $(4x^3-5x^2+7x-2)'=12x^2-10x+7$, perché la derivata di x^n è nx^{n-1} e quella di una costante è zero.

6.1.2 Il prodotto

Per il prodotto la regola non è quella che ci si aspetterebbe. Prendiamo $f(x) = x$ e $g(x) = x$: il prodotto è x^2, la cui derivata è $2x$, mentre il prodotto delle derivate è $1 \cdot 1 = 1$. La derivata di un prodotto **non** è il prodotto delle derivate. Per trovare quella giusta scriviamo l'incremento del prodotto aggiungendo e togliendo la stessa quantità $f(x)g(x+h)$:

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = [f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]$$

Dividiamo per h e passiamo al limite per $h \to 0$. Il primo rapporto tende a $f'(x)$, il secondo a $g'(x)$; inoltre $g(x+h) \to g(x)$, perché una funzione derivabile è continua (capitolo 5). Si ottiene la **regola del prodotto**:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

c.v.d. A parole: si deriva un fattore alla volta lasciando l'altro com'è, e si sommano i due risultati. Il controllo su $x \cdot x$ funziona: $1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$. La regola si estende a tre fattori applicandola due volte: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

6.1.3 Il quoziente

Per il quoziente $\frac{f}{g}$, nei punti in cui $g(x) \neq 0$, vale la **regola del quoziente**, che enunciamo senza dimostrazione:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

È facile capire da dove viene, se si ammette che il quoziente $q = \frac{f}{g}$ sia derivabile. Da $f = q \cdot g$, con la regola del prodotto, $f' = q'g + qg'$, cioè $q'g = f' - \frac{f}{g}g'$; dividendo per g e riducendo allo stesso denominatore si trova proprio la formula. Attenzione all'**ordine** del numeratore: a differenza del prodotto, qui c'è una sottrazione, e scambiare i due termini cambia il segno del risultato.

Due controlli. Con $f = 1$ e $g = x$ la regola dà $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, lo stesso risultato ottenuto con la definizione nel capitolo 5. Con $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ otteniamo invece una derivata nuova:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e, dividendo termine a termine la frazione centrale, anche $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Le due forme sono equivalenti per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dove la tangente è definita; la derivata è sempre positiva, come

conferma il grafico sempre crescente di $y = \operatorname{tg} x$ in ogni suo ramo (*Matematica 4*, cap. 4).

ESEMPIO SVOLTO

Deriva: a) $y = x^2 \operatorname{sen} x$; b) $y = x\,e^x$; c) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; d) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

a) Regola del prodotto con $f = x^2$ e $g = \operatorname{sen} x$: $y' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$.

b) $y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$. Raccogliere il fattore comune serve: il segno di y' si legge subito, perché $e^x > 0$; la derivata è negativa per $x < -1$ e positiva per $x > -1$.

c) Regola del quoziente, per $x \neq 1$: $y' = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

d) Per $x \neq 0$: $y' = \dfrac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Controllo. Ogni risultato è stato confrontato con un rapporto incrementale calcolato con h piccolo: per esempio in c), per $x = 2$, la formula dà -1, e $\dfrac{f(2{,}001) - f(1{,}999)}{0{,}002} \approx -1{,}000$.

6.2 La funzione composta e la funzione inversa

6.2.1 La regola della catena

Molte funzioni si ottengono mettendo una funzione «dentro» un'altra (*Matematica 4*, cap. 1). In $y = \operatorname{sen}(2x)$ si calcola prima $u = 2x$, la **funzione interna**, e poi $y = \operatorname{sen} u$, la **funzione esterna**. Come varia y quando varia x? Ragioniamo con gli incrementi. Se x aumenta di Δx, la funzione interna aumenta di Δu e quella esterna di Δy; quando $\Delta u \neq 0$ possiamo scrivere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta u \to 0$, perché la funzione interna è continua; il primo rapporto tende allora alla derivata della funzione esterna e il secondo a quella della funzione interna. Nella notazione di Leibniz il risultato ha l'aspetto di una semplificazione fra frazioni, ed è questa la ragione per cui la notazione $\dfrac{dy}{dx}$ ha avuto tanto successo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ cioè } [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

È la **regola della catena** (o regola di derivazione della **funzione composta**): **si deriva la funzione esterna, lasciando invariato il suo argomento, e si moltiplica per la derivata della funzione interna**. Il ragionamento appena fatto non è una dimostrazione completa, perché Δu potrebbe annullarsi anche per $\Delta x \neq 0$ e allora non si può dividere; una dimostrazione rigorosa aggira l'ostacolo, ma la regola è vera senza eccezioni quando f è derivabile in x e g è derivabile in $f(x)$.

Un'interpretazione concreta: se u cresce 3 volte più in fretta di x e y cresce 2 volte più in fretta di u, allora y cresce $2 \cdot 3 = 6$ volte più in fretta di x. Le velocità di variazione lungo la catena si moltiplicano, come i rapporti di trasmissione di una serie di ingranaggi.

ESEMPIO SVOLTO

Deriva: a) $y = (3x - 1)^5$; b) $y = \text{sen}(2x)$; c) $y = e^{-x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; e) $y = \ln(x^2 + 1)$.

a) Esterna u^5, interna $u = 3x - 1$: $y' = 5(3x - 1)^4 \cdot 3 = 15(3x - 1)^4$. Sviluppare la quinta potenza e derivare termine a termine darebbe lo stesso risultato con molta più fatica.

b) $y' = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$. La funzione $\text{sen}(2x)$ ha periodo π: oscilla due volte più in fretta di $\text{sen}\, x$, e la sua pendenza massima è doppia.

c) Esterna e^u, interna $u = -x^2$: $y' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$. La derivata è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$: la curva sale fino a $x = 0$ e poi scende. È la forma a campana che ritroveremo nel capitolo 11.

d) $y = (x^2 + 1)^{1/2}$, quindi $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

e) $y' = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. In generale $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$: la derivata del logaritmo di una funzione è la derivata della funzione divisa per la funzione stessa.

6.2.2 Esponenziali e logaritmi in base qualsiasi

Con la regola della catena possiamo finalmente derivare a^x con $a > 0$, $a \neq 1$. Poiché $a = e^{\ln a}$, si ha $a^x = e^{x \ln a}$: un esponenziale di base e con la funzione interna $x \ln a$, la cui derivata è la costante $\ln a$. Quindi

$$(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Per esempio $(2^x)' = 2^x \ln 2 \approx 0{,}693 \cdot 2^x$ e $(10^x)' = 10^x \ln 10 \approx 2{,}303 \cdot 10^x$. Solo per $a = e$ il fattore $\ln a$ vale 1: è la ragione, già vista nel capitolo 5, per cui e è la base «naturale» dell'analisi. Per il logaritmo in base a basta la formula del cambiamento di base (*Matematica 4*, cap. 8): $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, e $\dfrac{1}{\ln a}$ è una costante, quindi $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

6.2.3 La derivata della funzione inversa

Nel capitolo 5 abbiamo ricavato $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ dalla definizione, con il limite notevole di $\dfrac{\ln(1 + t)}{t}$. Ora possiamo ritrovarlo per un'altra via, usando il legame fra il logaritmo e l'esponenziale, che sono l'una l'inversa dell'altra (*Matematica 4*, cap. 8). Se $y = \ln x$, allora $x = e^y$ per

ogni $x > 0$. Deriviamo i due membri rispetto a x, ricordando che y è funzione di x e usando la regola della catena a destra: $1 = e^y \cdot y'$. Quindi $y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

Il risultato ha un significato geometrico semplice (Figura 6.1). I grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$; la simmetria scambia ascisse e ordinate, quindi trasforma una retta di pendenza m in una retta di pendenza $\frac{1}{m}$. La tangente a $y = e^x$ nel punto $P(1; e)$ ha pendenza e; la sua simmetrica è la tangente a $y = \ln x$ in $Q(e; 1)$, che ha pendenza $\frac{1}{e}$, proprio il valore di $\frac{1}{x}$ per $x = e$. In generale, se f è invertibile e derivabile con $f'(x_0) \neq 0$, la derivata dell'inversa nel punto corrispondente è il reciproco $\frac{1}{f'(x_0)}$.

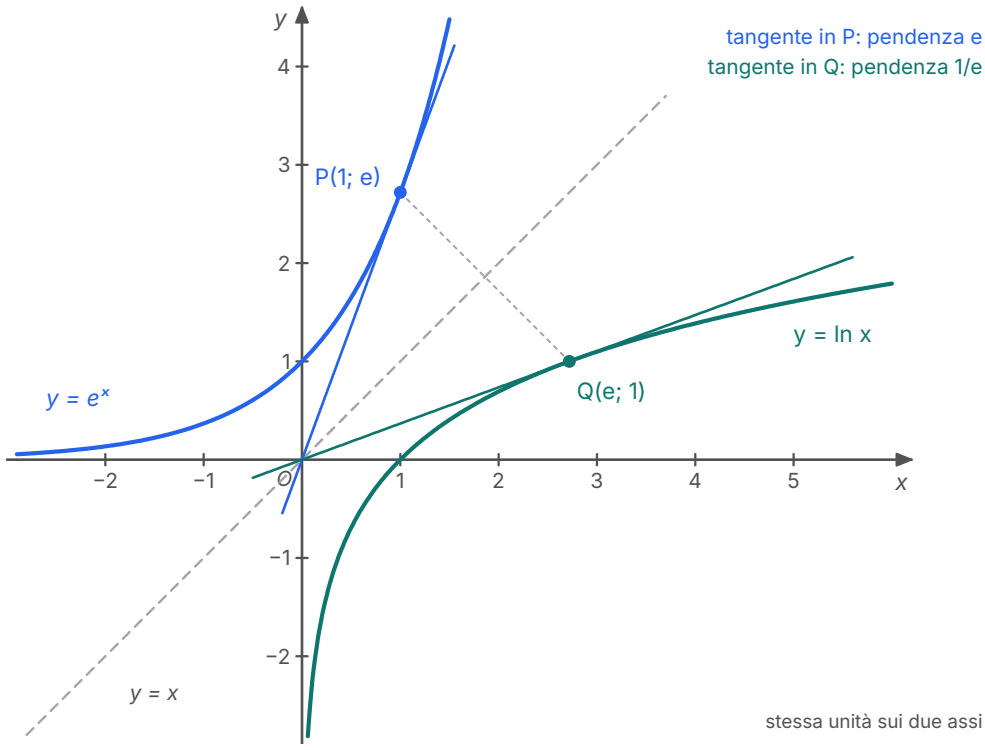

Figura 6.1 Le funzioni $y = e^x$ e $y = \ln x$ sono l'una l'inversa dell'altra e i loro grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$. La simmetria porta il punto $P(1; e)$ in $Q(e; 1)$ e la tangente in P, di pendenza e, nella tangente in Q, di pendenza $\frac{1}{e}$: le pendenze in punti corrispondenti sono reciproche.

APPROFONDIMENTO · LA DERIVATA DELL'ARCOTANGENTE

Lo stesso metodo dà la derivata delle funzioni goniometriche inverse di *Matematica 4*, cap. 4, che però il programma non richiede. Se $y = \text{arctg}\, x$, allora $x = \text{tg}\, y$ con $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Derivando rispetto a x: $1 = (1 + \text{tg}^2 y) \cdot y'$, quindi

$$(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

È un risultato sorprendente: la derivata di una funzione goniometrica inversa è una funzione razionale, in cui non compare nessun seno o coseno. Nel capitolo 10, leggendo la formula al contrario, si scoprirà che l'area sotto il grafico di $\frac{1}{1+x^2}$ ha a che fare con π.

IN SINTESI

Regole di derivazione. Se f e g sono derivabili:

- $(f+g)' = f' + g'$ e $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ (k costante);
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, dove $g(x) \neq 0$;
- $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$;
- se f è invertibile e $f'(x_0) \neq 0$, la derivata dell'inversa in $f(x_0)$ è $\frac{1}{f'(x_0)}$.

La Tabella 6.1 raccoglie le derivate delle funzioni elementari, quelle del capitolo 5 e quelle nuove, insieme alla forma che ciascuna prende quando l'argomento è una funzione $f(x)$: in quella colonna la regola della catena è già applicata.

Tabella 6.1 Derivate delle funzioni elementari e delle corrispondenti funzioni composte. Nell'ultima colonna f è una funzione derivabile e il fattore $f'(x)$ viene dalla regola della catena.

Funzione	Derivata	Con argomento $f(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
e^x	e^x	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare un pezzo della regola. Tre errori ricorrono più di tutti gli altri.

- $(x^2 \operatorname{sen} x)' = 2x \cos x$ è sbagliato: la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate. Corretto: $2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$.
- $(\operatorname{sen}(2x))' = \cos(2x)$ è sbagliato: manca il fattore 2, la derivata della funzione interna. Corretto: $2\cos(2x)$. Il fattore $f'(x)$ della regola della catena c'è *sempre*, anche quando sembra banale.
- $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1 \cdot 1 - x(x+1)}{(x+1)^2}$ è sbagliato: nei due prodotti del numeratore sono stati scambiati g e g'. Il numeratore è $f'g - fg'$, con $f = x, f' = 1, g = x+1, g' = 1$. Corretto: $\frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Una precisazione sui limiti di questa tecnica. Le *Indicazioni nazionali* chiedono di saper derivare «le funzioni già studiate, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali»: è esattamente ciò che abbiamo visto. Una funzione costruita con molti livelli di

composizione si deriva con le stesse regole, ma il calcolo diventa lungo e di scarso interesse; per controllarlo si usa un software di calcolo simbolico. Ciò che conta è capire che cosa dice la derivata, non saperla calcolare in casi complicati.

6.3 Derivate successive e applicazioni alla fisica

6.3.1 La derivata seconda

La derivata f' di una funzione è a sua volta una funzione, che si può derivare di nuovo. La sua derivata si chiama **derivata seconda** di f e si indica con $f''(x)$, oppure, nella notazione di Leibniz, con $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Proseguendo si ottengono le **derivate successive**: la derivata terza f''', la quarta $f^{(4)}$ e così via. Per esempio, da $f(x) = x^3 - 2x$ si ottengono $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ e $f^{(4)}(x) = 0$: un polinomio di grado n ha la derivata n-esima costante e tutte le successive nulle. Per $y = \operatorname{sen} x$ le derivate si ripetono ogni quattro passi: $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $-\cos x$, di nuovo $\operatorname{sen} x$.

Se la derivata prima misura la rapidità con cui una grandezza cambia, la derivata seconda misura la rapidità con cui cambia la rapidità. Il caso più importante è quello del moto. Se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove lungo una retta, la velocità istantanea è $v(t) = s'(t)$ (capitolo 5) e l'accelerazione istantanea è la derivata della velocità, cioè la derivata seconda della posizione:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ESEMPIO SVOLTO

Un carrello si muove lungo una rotaia secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, con s in metri e t in secondi, per $0 \le t \le 4$. Determina velocità e accelerazione; trova gli istanti in cui il carrello è fermo e lo spazio effettivamente percorso.

Velocità e accelerazione. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$ m/s e $a(t) = 6t - 12$ m/s^2. All'inizio $v(0) = 9$ m/s e $a(0) = -12$ m/s^2: il carrello parte veloce e sta frenando.

Istanti di arresto. $v(t) = 0$ per $t = 1$ s e $t = 3$ s, quando il carrello si trova in $s(1) = 4$ m e $s(3) = 0$ m. Il segno di v dice in che verso si muove: avanti per $0 \le t < 1$, indietro per $1 < t < 3$ (dove $v < 0$), di nuovo avanti per $t > 3$. A $t = 2$ s l'accelerazione è nulla e la velocità $v(2) = -3$ m/s è la più negativa: in quell'istante il carrello torna indietro alla massima rapidità.

Spazio percorso. Alla fine $s(4) = 4$ m, quindi lo spostamento complessivo è di 4 m. Lo spazio percorso è maggiore: 4 m all'andata, 4 m al ritorno (da 4 m a 0 m) e 4 m nella ripartenza (da 0 m a 4 m), in tutto 12 m. Per calcolarlo bisogna conoscere gli istanti in cui la velocità cambia segno, e questi li dà la derivata.

6.3.2 Il moto armonico

Una massa appesa a una molla, spostata dalla posizione di equilibrio e lasciata andare, oscilla avanti e indietro. Se si trascurano gli attriti, la sua posizione rispetto all'equilibrio è descritta dalla legge del **moto armonico** $x(t) = A\cos(\omega t)$, dove A è l'ampiezza e la costante ω, la **pulsazione**, è legata al periodo da $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (*Matematica 4*, cap. 4). Con la regola della catena:

$$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2\,x(t)$$

L'ultima uguaglianza è il cuore del moto armonico: **l'accelerazione è proporzionale allo spostamento e ha verso opposto**. Quando la massa è lontana dall'equilibrio è richiamata indietro con forza; quando passa per l'equilibrio ($x = 0$) non accelera, ma ha la velocità massima $A\omega$. La Figura 6.2 mostra i tre grafici per $A = 4$ cm e $\omega = \pi$ rad/s: il periodo è $T = 2$ s, la velocità massima $4\pi \approx 12{,}6$ cm/s e l'accelerazione massima $4\pi^2 \approx 39{,}5$ cm/s^2. Ogni grafico ha valori estremi dove il successivo si annulla, ed è nullo dove il successivo è estremo: è ciò che la derivata deve fare.

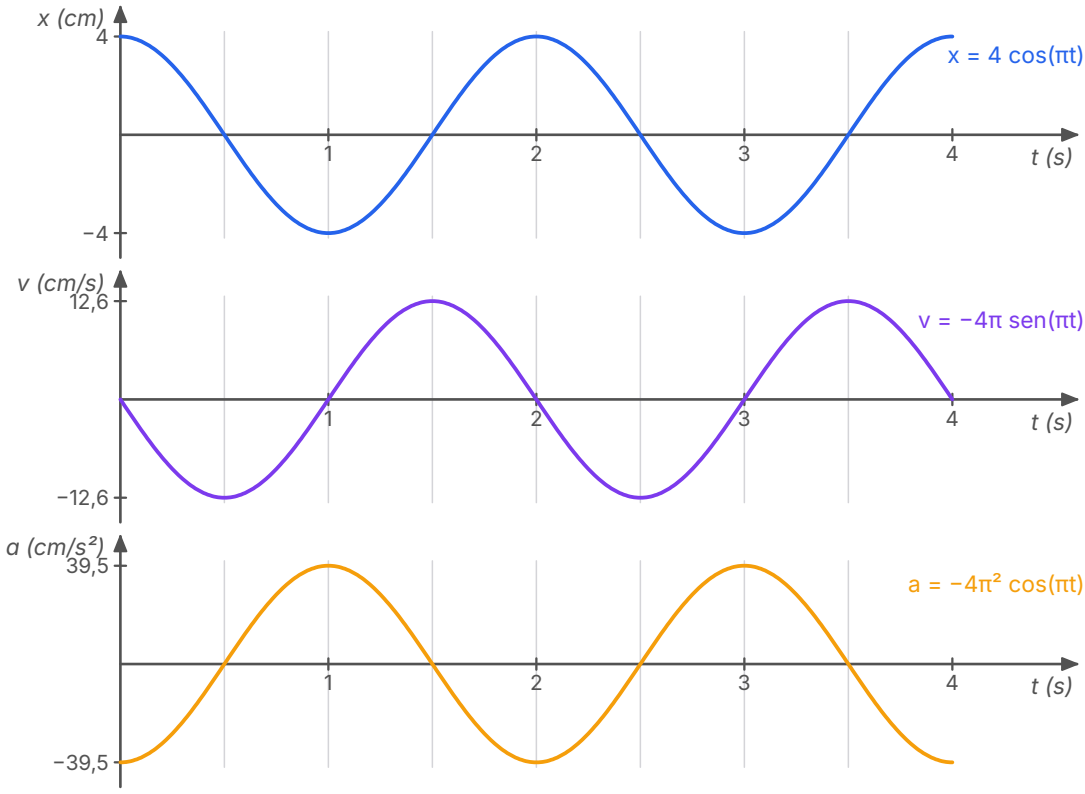

Figura 6.2 Posizione, velocità e accelerazione nel moto armonico $x = 4\cos(\pi t)$ (in cm, t in s), sugli stessi istanti. La velocità è la derivata della posizione e l'accelerazione quella della velocità: $a = -\pi^2 x$, quindi il grafico di a è quello di x capovolto e dilatato del fattore $\pi^2 \approx 9{,}87$. Le scale verticali dei tre grafici sono diverse.

Per la molla la seconda legge di Newton dà $ma = -kx$, dove k è la costante elastica; confrontando con $a = -\omega^2 x$ si ottiene $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Una molla più rigida o una massa più piccola danno oscillazioni più rapide.

COLLEGAMENTI

Filosofia: le leggi del moto e il determinismo. La seconda legge di Newton, $F = ma$, dice che le forze determinano l'*accelerazione*, cioè una derivata seconda della posizione. Conoscendo le forze in gioco, la posizione e la velocità di un corpo in un istante, la meccanica classica permette di ricostruire il moto in ogni istante futuro e passato: i pianeti, le maree, le eclissi. Il successo di questo programma, nel Settecento e nell'Ottocento, sostenne l'idea che l'universo intero fosse un meccanismo governato da leggi necessarie. Pierre-Simon de Laplace, nel *Saggio filosofico sulle probabilità*, immaginò un'intelligenza che, conoscendo in un istante tutte le forze e le posizioni di tutti i corpi, avrebbe avuto davanti agli occhi l'avvenire come il passato.

L'immagine è diventata il simbolo del **determinismo**, e il positivismo dell'Ottocento vi lesse il modello di ogni conoscenza certa. La fisica del Novecento ne ha mostrato i limiti: già alla fine dell'Ottocento Henri Poincaré, studiando il moto di tre corpi che si attraggono, scoprì che piccolissime differenze nelle condizioni iniziali possono produrre moti completamente diversi, e la meccanica quantistica ha introdotto leggi probabilistiche nella descrizione della materia. Torneremo su caso e determinismo nel capitolo 11.

6.3.3 Corrente elettrica e induzione

In fisica la derivata rispetto al tempo è il linguaggio di ogni «rapidità». L'intensità di corrente in un conduttore (capitolo 5) è la rapidità con cui la carica attraversa una sua sezione: se $q(t)$ è la carica passata fino all'istante t, allora $i(t) = q'(t)$, in ampere se q è in coulomb e t in secondi. Per esempio, se durante la carica di un condensatore (dati inventati) $q(t) = 6 \cdot 10^{-4}(1 - e^{-2t})$ C, la corrente è $i(t) = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 2e^{-2t} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\, e^{-2t}$ A: vale 1,2 mA all'inizio e circa 0,16 mA dopo un secondo, e si spegne man mano che il condensatore si carica.

COLLEGAMENTI

Fisica: l'induzione elettromagnetica. Il programma di fisica del quinto anno comprende la legge di Faraday–Neumann–Lenz: quando il flusso Φ del campo magnetico attraverso un circuito cambia nel tempo, nel circuito nasce una **forza elettromotrice indotta** uguale alla rapidità di variazione del flusso cambiata di segno, f.e.m. $= -\dfrac{d\Phi}{dt}$. Il segno meno esprime la legge di Lenz: la corrente indotta si oppone alla variazione che la produce.

In un alternatore una spira di area $S = 0{,}02\ \text{m}^2$ ruota con pulsazione $\omega = 100\pi$ rad/s (50 giri al secondo) in un campo magnetico uniforme $B = 0{,}5$ T. Il flusso è $\Phi(t) = BS\cos(\omega t) = 0{,}01\cos(100\pi t)$ Wb e la forza elettromotrice è

$$\text{f.e.m.} = -\Phi'(t) = 0{,}01 \cdot 100\pi \operatorname{sen}(100\pi t) = \pi \operatorname{sen}(100\pi t)\ \text{V}$$

Una tensione alternata sinusoidale, con valore massimo $\pi \approx 3{,}14$ V per una sola spira; con N spire si moltiplica per N. È il principio con cui si produce la corrente alternata della rete elettrica: la regola della catena spiega da sola perché la tensione massima è proporzionale alla velocità di rotazione ω.

6.4 Tangente, normale e approssimazione lineare

6.4.1 Retta tangente e retta normale

Nel capitolo 5 abbiamo visto che la tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. La **retta normale** al grafico nello stesso punto è la retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza. Due rette non verticali sono perpendicolari quando il prodotto delle loro pendenze è -1 (*Matematica 2*, cap. 5); quindi, se $f'(x_0) \neq 0$, la normale ha equazione

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Se $f'(x_0) = 0$ la tangente è orizzontale e la normale è la retta verticale $x = x_0$. In fisica la normale indica, per esempio, la direzione della forza che una superficie liscia esercita su un corpo appoggiato, e la retta rispetto a cui si misurano gli angoli di incidenza e di riflessione di un raggio luminoso su uno specchio curvo.

ESEMPIO SVOLTO

Scrivi le equazioni della tangente e della normale al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ nel suo punto di ascissa 4.

Il punto. $f(4) = \sqrt{16 + 9} = 5$, quindi $P(4; 5)$.

La pendenza. Con la regola della catena $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, quindi $f'(4) = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Tangente: $y - 5 = 0{,}8(x - 4)$, cioè $y = 0{,}8x + 1{,}8$. **Normale:** pendenza $-\frac{1}{0{,}8} = -1{,}25$, quindi $y - 5 = -1{,}25(x - 4)$, cioè $y = -1{,}25x + 10$.

Controllo. Entrambe le rette passano per P: $0{,}8 \cdot 4 + 1{,}8 = 5$ e $-1{,}25 \cdot 4 + 10 = 5$; il prodotto delle pendenze è $0{,}8 \cdot (-1{,}25) = -1$. Nella Figura 6.3 le unità sui due assi sono uguali, come serve perché l'angolo retto appaia tale.

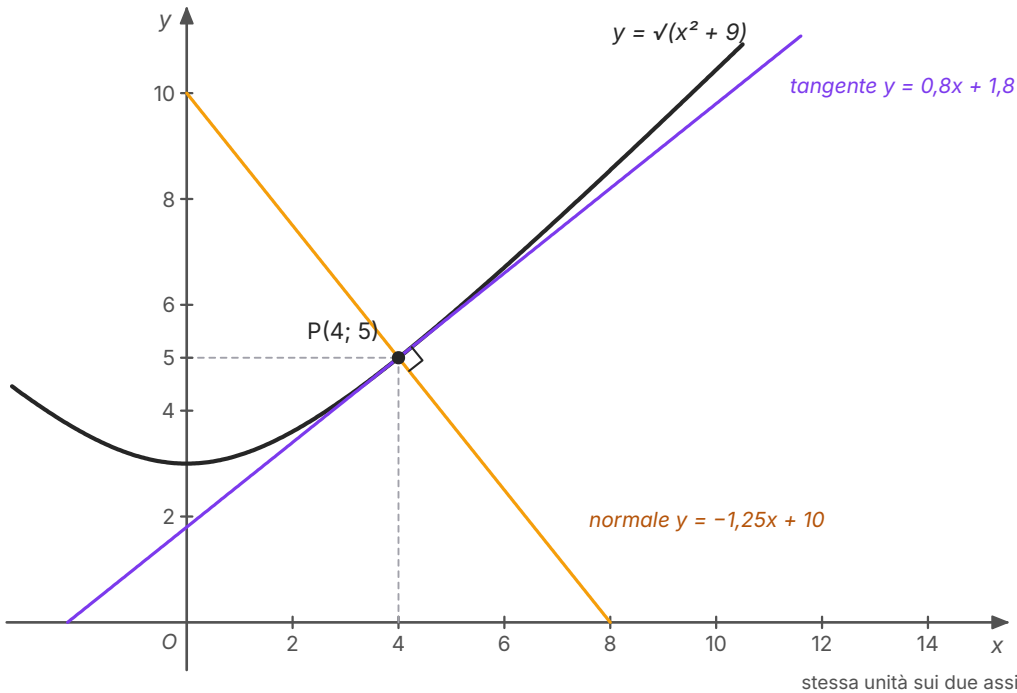

Figura 6.3 Tangente (viola) e normale (arancio) al grafico di $y = \sqrt{x^2 + 9}$ nel punto $P(4; 5)$. La normale è perpendicolare alla tangente: le loro pendenze, 0,8 e −1,25, hanno prodotto −1.

6.4.2 Il differenziale e l'approssimazione lineare

Vicino al punto di tangenza la curva e la sua tangente quasi si confondono. Questa osservazione ha una conseguenza pratica: per calcolare in modo approssimato $f(x_0 + \Delta x)$ si può sostituire alla

curva la tangente, che è una retta e si calcola facilmente. L'incremento della funzione è $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, quello lungo la tangente è $f'(x_0) \cdot \Delta x$. Quest'ultimo si chiama **differenziale** della funzione e si scrive

$$dy = f'(x_0)\, dx$$

dove $dx = \Delta x$ è l'incremento della variabile. L'**approssimazione lineare** consiste nello scrivere $\Delta y \approx dy$, cioè

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Per esempio, per calcolare $\sqrt{4{,}1}$ prendiamo $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ e $\Delta x = 0{,}1$. Poiché $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, si ha $f'(4) = \dfrac{1}{4}$ e $\sqrt{4{,}1} \approx 2 + \dfrac{0{,}1}{4} = 2{,}025$. Il valore vero è 2,02485...: l'errore è di circa 0,00015, meno di due decimillesimi, con un calcolo che si fa a mente.

La Figura 6.4 mostra che cosa succede quando l'incremento è grande. Per $y = \sqrt{x}$ con $x_0 = 1$ e $dx = 2$, la tangente $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ prevede il valore 2, mentre $\sqrt{3} \approx 1{,}732$: l'errore è circa 0,27, ben visibile. Il differenziale è una buona approssimazione di Δy solo per incrementi piccoli; ma allora è *molto* buona, perché l'errore diventa piccolo più rapidamente dell'incremento stesso: il rapporto $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ tende a zero per $\Delta x \to 0$, per la definizione stessa di derivata.

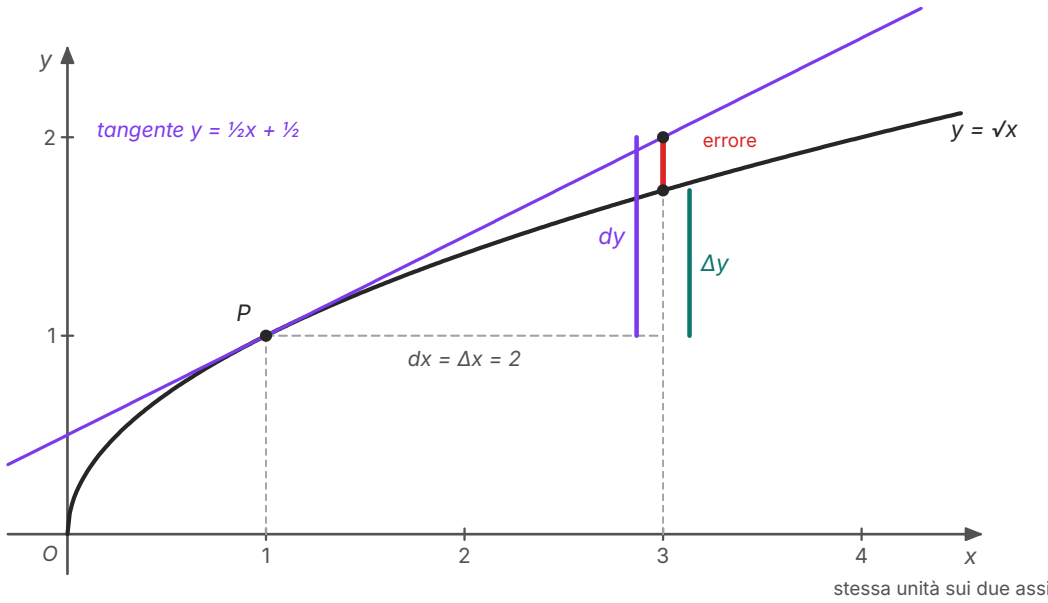

Figura 6.4 Il differenziale di $y = \sqrt{x}$ nel punto $P(1; 1)$ con $dx = 2$. L'incremento lungo la curva è $\Delta y = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73$, quello lungo la tangente è $dy = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$; la loro differenza (in rosso) è l'errore dell'approssimazione lineare, che diventa trascurabile quando dx è piccolo.

L'approssimazione lineare è ovunque nelle scienze, spesso senza nome. Quando in fisica si dice che per piccole oscillazioni il pendolo si comporta come una molla, si sostituisce $\operatorname{sen}\theta$ con θ: è l'approssimazione lineare del seno in 0, la cui tangente è $y = x$. Quando si dice che una crescita dell'1% al mese dà circa il 12% in un anno, si approssima $1{,}01^{12}$ con $1 + 12 \cdot 0{,}01$ (il valore vero è circa 1,127).

6.5 I teoremi del calcolo differenziale

Le regole delle sezioni precedenti dicono come calcolare la derivata in un punto. I teoremi di questa sezione dicono che cosa la derivata, conosciuta in tutto un intervallo, rivela della funzione: dove può avere un massimo o un minimo, quanto può variare, quando cresce. Le loro ipotesi sono essenziali, e per ognuna mostreremo una funzione che la viola e per cui la tesi è falsa.

6.5.1 Il teorema di Fermat

Un punto x_0 di un intervallo I è un **punto di massimo relativo** di f se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) \le f(x_0)$; è un punto di minimo relativo se, in un intorno, $f(x) \ge f(x_0)$. Massimi e minimi si

chiamano insieme *estremi*; nel capitolo 7 li studieremo in dettaglio. Il punto x_0 è un **punto interno** dell'intervallo se non ne è un estremo.

Teorema di Fermat. Se f è derivabile in un punto interno x_0 che è di massimo o di minimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione (per un massimo). Per h abbastanza piccolo $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Se $h > 0$ il rapporto incrementale $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ è quindi minore o uguale a zero, e per il teorema della permanenza del segno (capitolo 3) il suo limite destro è ≤ 0; se $h < 0$ il rapporto è maggiore o uguale a zero e il limite sinistro è ≥ 0. Poiché f è derivabile in x_0, i due limiti sono uguali a $f'(x_0)$, che è quindi insieme ≤ 0 e ≥ 0: $f'(x_0) = 0$. c.v.d.

Geometricamente: in un punto di massimo o di minimo interno, dove la curva ha tangente, la tangente è orizzontale. Le ipotesi contano, e il viceversa è falso: $y = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ma in 0 non ha né un massimo né un minimo, perché cresce sempre. Il punto deve essere interno: $f(x) = x$ su $[0; 1]$ ha il massimo in 1 ma $f'(1) = 1$. La funzione deve essere derivabile: $y = |x|$ ha un minimo in 0, dove la derivata non esiste.

6.5.2 Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Se f è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$, derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ e $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ in cui $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass (capitolo 4) la funzione continua f ha in $[a; b]$ un massimo assoluto M e un minimo assoluto m. Se entrambi sono assunti negli estremi a e b, poiché $f(a) = f(b)$ si ha $M = m$: la funzione è costante e la sua derivata è nulla in ogni punto di $]a; b[$. Altrimenti almeno uno dei due è assunto in un punto interno c, dove f è derivabile, e per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$. c.v.d.

Nella Figura 6.5, a sinistra, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ su $[0; 3]$ verifica le ipotesi: è un polinomio, quindi continuo e derivabile ovunque, e $f(0) = f(3) = 1$. La derivata $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ si annulla in $c = 1$, interno all'intervallo. A destra, $y = |x|$ su $[-1; 1]$ è continua e assume lo stesso valore 1 negli estremi, ma non è derivabile in 0: la sua derivata vale -1 o 1 e non si annulla mai. Anche le altre due ipotesi sono necessarie: la funzione che vale x per $0 \leq x < 1$ e 0 per $x = 1$ ha $f(0) = f(1) = 0$ ed è derivabile in $]0; 1[$, ma non è continua in 1, e la sua derivata vale sempre 1; la funzione $y = x$ su $[0; 1]$ è continua e derivabile, ma $f(0) \neq f(1)$.

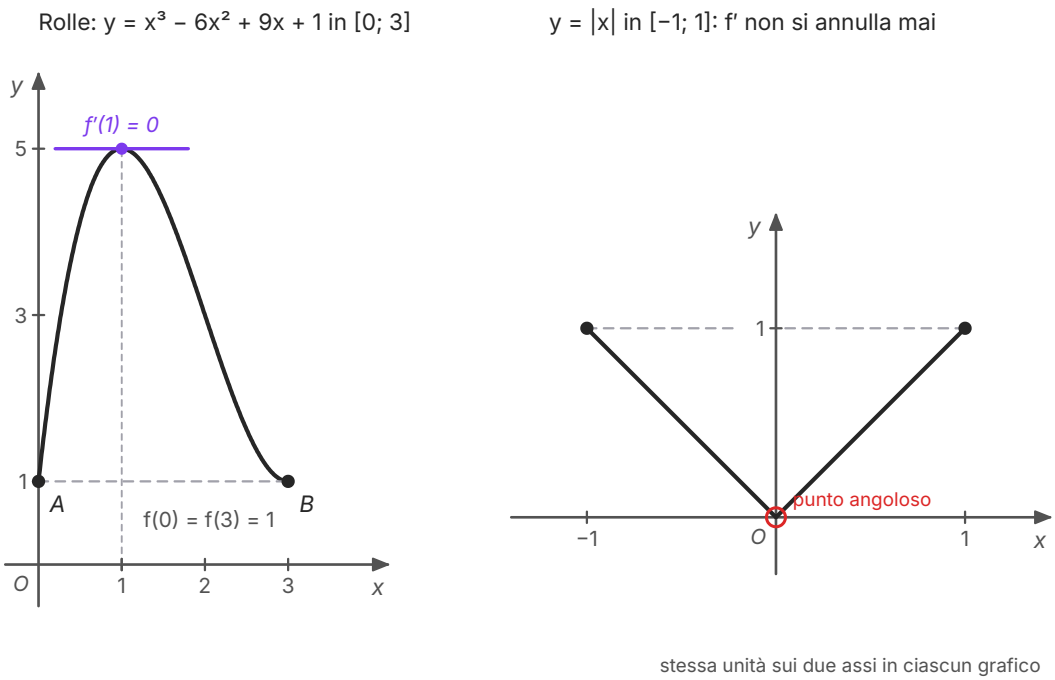

Figura 6.5 A sinistra, il teorema di Rolle per $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ in $[0; 3]$: agli estremi la funzione vale 1 e in $c = 1$ la tangente è orizzontale. A destra, $y = |x|$ in $[-1; 1]$: è continua e $f(-1) = f(1)$, ma non è derivabile in 0, e nessuna tangente è orizzontale.

6.5.3 Il teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange (o del valor medio). Se f è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, allora esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ in cui

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Sia $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ la pendenza della corda che unisce $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, e sia $r(x) = f(a) + m(x - a)$ la retta AB. La funzione $\varphi(x) = f(x) - r(x)$, distanza verticale fra la curva e la corda, è continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$, e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Per il teorema di Rolle esiste $c \in]a; b[$ con $\varphi'(c) = f'(c) - m = 0$, cioè $f'(c) = m$. c.v.d.

Il teorema di Rolle è il caso particolare in cui la corda è orizzontale. Geometricamente, il teorema di Lagrange dice che **esiste un punto in cui la tangente è parallela alla corda** (Figura 6.6). Per $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ su $[0; 4]$ la corda va da $A(0; 1)$ a $B(4; 5)$ e ha pendenza $\dfrac{5 - 1}{4} = 1$; l'equazione $3c^2 - 12c + 9 = 1$ ha le soluzioni $c = 2 \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, cioè $c_1 \approx 0{,}85$ e $c_2 \approx 3{,}15$, entrambe

interne all'intervallo. Il teorema garantisce l'esistenza di almeno un punto, non la sua unicità, e non dice come trovarlo: in questo caso i punti sono due. Anche qui le ipotesi sono necessarie. $y = |x|$ su $[-1; 2]$ è continua, ma non è derivabile in 0: la corda ha pendenza $\frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$, mentre la derivata vale soltanto -1 o 1. La funzione che vale x per $0 \le x < 1$ e 0 per $x = 1$ è derivabile in $]0; 1[$ ma non è continua in 1: la corda ha pendenza 0, la derivata vale sempre 1.

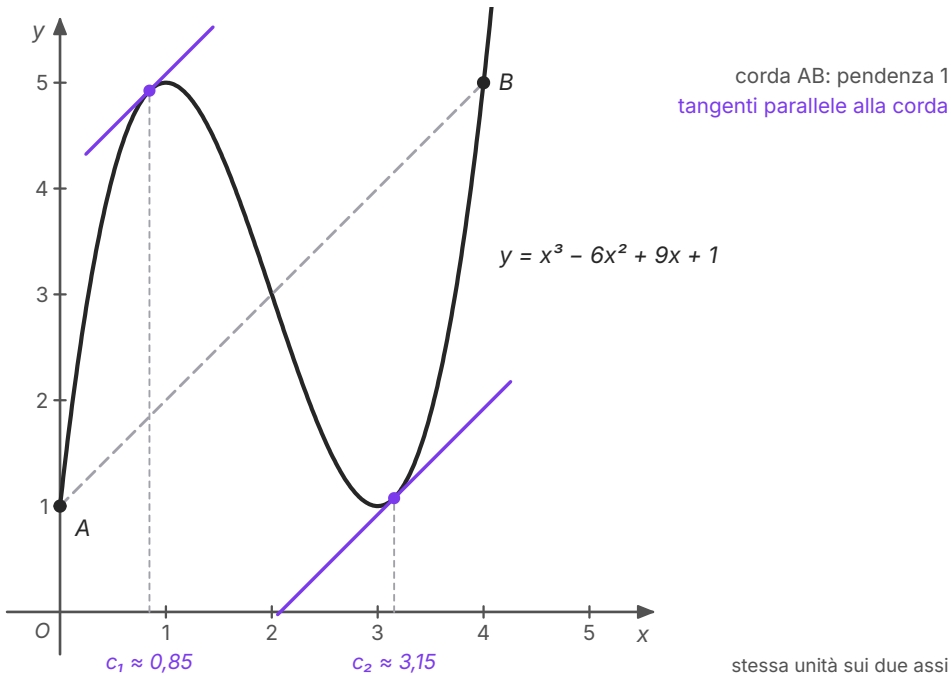

Figura 6.6 Il teorema di Lagrange per $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ in $[0; 4]$. La corda AB ha pendenza 1; nei punti di ascissa $c_1 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}85$ e $c_2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3{,}15$ le tangenti sono parallele alla corda.

La lettura cinematica è ancora più intuitiva. Se $s(t)$ è la posizione di un'auto, il rapporto $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ è la velocità media nell'intervallo di tempo e $s'(c)$ è la velocità istantanea nell'istante c: **in almeno un istante la velocità istantanea è uguale alla velocità media**. Su alcune autostrade un sistema di controllo registra il passaggio di ogni veicolo all'inizio e alla fine di un tratto e ne calcola la velocità media. Se un'auto percorre un tratto di 20 km in 8 minuti, la sua velocità media è $\frac{20}{8/60} = 150$ km/h; per il teorema di Lagrange in almeno un istante l'auto ha viaggiato esattamente a 150 km/h, oltre il limite di 130 km/h, anche se nessuno l'ha visto.

IN SINTESI

Teorema di Fermat. Ipotesi: x_0 è un punto interno di massimo o minimo relativo di f, e f è derivabile in x_0. **Tesi:** $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle. Ipotesi: f continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$, $f(a) = f(b)$. **Tesi:** esiste almeno un $c \in]a; b[$ con $f'(c) = 0$.

Teorema di Lagrange. Ipotesi: f continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$. **Tesi:** esiste almeno un $c \in]a; b[$ con $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Continuità sull'intervallo **chiuso**, derivabilità su quello **aperto**; i teoremi affermano l'esistenza di c, non la sua unicità.

6.5.4 Le conseguenze del teorema di Lagrange

Dal teorema di Lagrange discendono tre risultati che useremo continuamente. In ciascuno I è un *intervallo*.

- **Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante in I.** Presi due punti qualsiasi $x_1 < x_2$ di I, per il teorema di Lagrange $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ per un certo c fra i due: la funzione assume in tutti i punti lo stesso valore.
- **Se $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora f e g differiscono per una costante**: basta applicare il risultato precedente a $f - g$, che ha derivata nulla. Nel capitolo 10 questo fatto dirà che, trovata una funzione con una data derivata, tutte le altre si ottengono aggiungendo una costante.
- **Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è crescente in I** (e decrescente se $f'(x) < 0$). Infatti per $x_1 < x_2$ si ha $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. È lo strumento con cui, nel capitolo 7, studieremo dove una funzione cresce e dove decresce.

La parola «intervallo» non è un dettaglio. La funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, che vale -1 per $x < 0$ e 1 per $x > 0$, ha derivata nulla in tutto il suo dominio, ma non è costante: il dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo, e il teorema di Lagrange non si può applicare a due punti di segno opposto. Allo stesso modo $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, ma $\dfrac{1}{x}$ non è decrescente in tutto il dominio: $-1 < 1$ e $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$. È decrescente in ciascuno dei due intervalli $]-\infty; 0[$ e $]0; +\infty[$, separatamente.

APPROFONDIMENTO · IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Il teorema di Rolle ha una conseguenza utile per i limiti che si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (o $\frac{\infty}{\infty}$). Se f e g sono derivabili vicino a x_0, con $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0, il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ nella forma indeterminata è uguale al limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, quando quest'ultimo esiste. Per esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il limite notevole del capitolo 3; una tabella lo conferma: per x = 0,1, 0,01, 0,001 il rapporto vale circa 0,5171, 0,5017, 0,5002. La regola si deve a Johann Bernoulli, che per un accordo privato comunicava per lettera i suoi risultati al marchese Guillaume de L'Hôpital; questi la pubblicò nel 1696 nell'*Analyse des infiniment petits*, il primo manuale di calcolo differenziale, e da allora porta il suo nome. Il programma del liceo classico non la richiede: è un modo rapido per controllare un limite già calcolato in altro modo, non un sostituto della comprensione delle forme indeterminate.

SINTESI

- La derivata di una somma è la somma delle derivate e una costante moltiplicativa esce dalla derivata: $(f+g)' = f' + g'$, $(kf)' = kf'$.
- Regola del prodotto: $(fg)' = f'g + fg'$; la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate.
- Regola del quoziente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ dove $g \neq 0$; da essa $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.
- Regola della catena: $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, in notazione di Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Da essa $(a^x)' = a^x \ln a$ e $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
- La derivata della funzione inversa nel punto corrispondente è il reciproco della derivata: così $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ si ricava da $(e^x)' = e^x$.
- La derivata seconda è la derivata della derivata; nel moto $v = s'$ e $a = v' = s''$. Nel moto armonico $x = A\cos(\omega t)$ si ha $a = -\omega^2 x$.
- Intensità di corrente $i = q'(t)$; forza elettromotrice indotta $-\frac{d\Phi}{dt}$ (Faraday–Neumann–Lenz).
- La normale in un punto è perpendicolare alla tangente: pendenza $-\frac{1}{f'(x_0)}$ se $f'(x_0) \neq 0$, retta verticale se $f'(x_0) = 0$.
- Differenziale $dy = f'(x_0)\,dx$; approssimazione lineare $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, buona per piccoli incrementi.
- Fermat: in un estremo interno in cui è derivabile, $f' = 0$; non vale il viceversa (x^3 in 0).
- Rolle e Lagrange: con f continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$ esiste c con tangente parallela alla corda; in cinematica, la velocità istantanea uguaglia almeno una volta quella media.
- Su un intervallo: $f' = 0 \Rightarrow f$ costante; $f' = g' \Rightarrow f - g$ costante; $f' > 0 \Rightarrow f$ crescente.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La derivata di $y = x^2 \operatorname{sen} x$ è:

   A. $2x \cos x$

   B. $2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

   C. $2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x$

   D. $x^2 \cos x$

2. ● La derivata di $y = e^{3x}$ è:

   A. e^{3x}

   B. $3x\, e^{3x-1}$

   C. e^3

   D. $3e^{3x}$

3. ● Quale funzione verifica **tutte** le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 1]$?

   A. $y = |x|$

   B. $y = x^3$

   C. $y = x^2$

   D. $y = x$

4. ● Per $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[1; 3]$, il punto c previsto dal teorema di Lagrange è:

   A. $c = 2$

   B. $c = \sqrt{5}$

   C. $c = 4$

   D. $c = 1{,}5$

5. ● Un corpo si muove secondo la legge oraria $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$ (in metri e secondi). La sua accelerazione è:

   A. $10t - 2$ m/s²

   B. 10 m/s²

   C. 5 m/s²

   D. variabile nel tempo

6. ● La derivata di $y = 2^x$ è:

   A. $x \cdot 2^{x-1}$

   B. 2^x

   C. $\dfrac{2^x}{\ln 2}$

   D. $2^x \ln 2$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) La derivata di un prodotto è il prodotto delle derivate.

   b) Se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo.

   c) Il teorema di Lagrange garantisce che il punto c è unico.

   d) $(\ln(2x))' = \dfrac{1}{x}$.

   e) Se $f'(x) = 0$ in tutto il dominio, f è costante.

8. ● Completa.
a) La retta normale al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è la retta _____ alla tangente in quel punto; se $f'(x_0) \neq 0$ la sua pendenza è _____ .
b) Il differenziale di f in x_0 è $dy =$ _____ .
c) Nel teorema di Rolle la funzione deve essere continua nell'intervallo _____ $[a; b]$, derivabile nell'intervallo _____ $]a; b[$, e deve valere _____ .
d) Nel moto, l'accelerazione è la derivata _____ della posizione rispetto al tempo.

Calcolare

9. ● Deriva: a) $y = 3x^4 - 2x^3 + x - 7$; b) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$; c) $y = 5 \operatorname{sen} x - 2 \cos x + e^x$.

10. ● Deriva con la regola del prodotto: a) $y = x^3 e^x$; b) $y = (x^2 + 1) \cos x$; c) $y = x \ln x$.

11. ●● Deriva con la regola del quoziente: a) $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$; b) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; c) $y = \frac{\ln x}{x}$.

12. ● Deriva con la regola della catena: a) $y = (2x + 5)^4$; b) $y = \cos(3x)$; c) $y = e^{5x - 1}$; d) $y = \ln(3x^2 + 1)$.

13. ●● Deriva: a) $y = \sqrt{1 - x^2}$; b) $y = \operatorname{sen}^2 x$; c) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; d) $y = 3^{x^2}$.

14. ●● a) Calcola la derivata prima e la derivata seconda di $f(x) = x^4 - 4x^3$ e trova dove $f''(x) = 0$. b) Verifica che $y = e^{-2x}$ soddisfa l'uguaglianza $y'' = 4y$.

15. ●● Scrivi le equazioni della tangente e della normale al grafico di $f(x) = x^3 - 2x$ nel punto di ascissa 1. In quale altro punto la tangente incontra la curva?

16. ●● a) Scrivi la tangente al grafico di $y = \ln x$ nel punto di ascissa e e verifica che passa per l'origine. b) Trova il punto del grafico di $y = e^x$ in cui la tangente passa per l'origine e scrivi l'equazione di quella tangente.

17. ●● Verifica che le funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato e trova i punti c: a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ in $[1; 3]$; b) $f(x) = x^3 - x$ in $[-1; 1]$.

18. ●● Trova i punti c previsti dal teorema di Lagrange: a) $f(x) = x^3$ in $[0; 3]$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1; 4]$.

19. ●● Con l'approssimazione lineare calcola un valore approssimato e confrontalo con quello della calcolatrice: a) $\sqrt{9{,}2}$; b) $e^{0{,}1}$ (usa $x_0 = 0$); c) $1{,}02^{10}$ (usa $f(x) = x^{10}$ e $x_0 = 1$).

Dimostrare e argomentare

20. ●● Scrivi $e^{2x} = e^x \cdot e^x$ e dimostra con la regola del prodotto che $(e^{2x})' = 2e^{2x}$. Controlla il risultato con la regola della catena.

21. ●● Per $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1; 1]$ la corda che unisce gli estremi del grafico ha pendenza 1, ma $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ è sempre negativa: nessuna tangente è parallela alla corda. Spiega perché questo non contraddice il teorema di Lagrange.

22. ●● Trova l'errore e correggilo.
a) «$(\text{sen}(x^2))' = \cos(x^2)$.»
b) «La derivata di $\dfrac{x^2+1}{x}$ è il quoziente delle derivate, $\dfrac{2x}{1} = 2x$.»
c) «$f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$, quindi 0 è un punto di minimo.»

23. ●●● Senza usare le formule della goniometria, dimostra con le derivate che la funzione $f(x) = \text{sen}^2x + \cos^2x$ è costante in $\mathbb{R}$, e trova il valore della costante. Quale conseguenza del teorema di Lagrange hai usato, e perché vale in $\mathbb{R}$?

Problemi

24. ●● Un punto si muove lungo una retta secondo la legge $s(t) = -t^3 + 6t^2$ (s in metri, t in secondi), per $0 \le t \le 6$. a) Trova $v(t)$ e $a(t)$. b) In quale istante la velocità è massima, e quanto vale? c) In quale istante il punto inverte il moto, e dove si trova? d) Calcola posizione, velocità e accelerazione per $t = 6$ s e interpreta i segni.

25. ●● In un circuito in corrente alternata (dati inventati) la carica che ha attraversato una sezione è $q(t) = 0{,}004\ \text{sen}(100\pi t)$, in coulomb. a) Calcola l'intensità di corrente $i(t)$. b) Qual è il suo valore massimo? c) Qual è il periodo? d) Quanto vale i per $t = 0{,}005$ s?

26. ●● Induzione elettromagnetica. a) Il flusso attraverso una spira è $\Phi(t) = 0{,}05 \cdot (0{,}4 + 0{,}1t)$ Wb (un campo che cresce uniformemente su una spira di area 0,05 m^2). Calcola la forza elettromotrice indotta. b) Se il flusso decresce secondo la legge $\Phi(t) = 0{,}03\ e^{-2t}$ Wb, calcola la forza elettromotrice indotta per $t = 0$ e per $t = 1$ s.

27. ●● Un sistema di controllo della velocità media misura un tratto di autostrada di 18 km, con limite di 130 km/h. a) Un'auto lo percorre in 7 minuti e 30 secondi: calcola la velocità media e spiega perché, per il teorema di Lagrange, il conducente ha certamente superato il limite. b) Un'altra auto impiega 9 minuti. Si può concludere che non ha mai superato il limite?

28. ●● Una massa di 0,2 kg appesa a una molla oscilla secondo la legge $x(t) = 0{,}05\cos(4\pi t)$ (x in metri, t in secondi). a) Calcola il periodo. b) Calcola la velocità massima e l'accelerazione massima. c) Usando $a = -\omega^2 x$ e la legge $ma = -kx$, trova la costante elastica k della molla.

Verso l'esame

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Di due funzioni derivabili f e g si sa che $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g(1) = 1$, $g'(1) = -2$. Calcola: a) la derivata di $f \cdot g$ in 1; b) la derivata di $\dfrac{f}{g}$ in 1; c) la derivata di $f(g(x))$ in 1.

30. ●● Nello stile delle prove nazionali. Una tazza di caffè (dati simulati) si raffredda secondo la legge $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1t}$, con T in gradi Celsius e t in minuti. a) Calcola la rapidità di variazione della temperatura $T'(t)$. b) Quanto vale all'inizio e dopo 10 minuti? c) Che cosa significa il segno di T'? d) Qual è la temperatura dopo 10 minuti?

31. ●● Spunto per il colloquio. Nel *Saggio filosofico sulle probabilità* Laplace immaginò un'intelligenza capace di prevedere il futuro dell'universo conoscendo, in un istante, tutte le forze e tutte le posizioni dei corpi. Spiega perché nella meccanica di Newton contano la derivata prima e la derivata seconda della posizione, mostra su un esempio (il moto armonico) come la legge $a = -\omega^2 x$ determini il moto, e collega l'idea alla filosofia dell'Ottocento e alla fisica del Novecento.

32. ●●● Sfida. Dimostra che l'equazione $e^x = 1 + x$ ha l'unica soluzione $x = 0$. Suggerimento: considera $g(x) = e^x - 1 - x$; se avesse un altro zero $b \neq 0$, applica il teorema di Rolle a g nell'intervallo di estremi 0 e b. Interpreta il risultato con la tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto $(0; 1)$.

PER APPROFONDIRE

- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: come Newton e Leibniz arrivarono alle regole del calcolo, e la regola di de L'Hôpital.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con il teorema del valor medio.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Fermat, sui Bernoulli e su Lagrange.

Glossario del capitolo

Approssimazione lineare
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$: si sostituisce la curva con la tangente, per incrementi piccoli.

Derivata della funzione inversa
Se $f'(x_0) \neq 0$, la derivata dell'inversa nel punto $f(x_0)$ è $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Derivata seconda
La derivata della derivata, $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$; nel moto è l'accelerazione.

Differenziale
$dy = f'(x_0)\,dx$: l'incremento misurato lungo la tangente.

Forza elettromotrice indotta
Per la legge di Faraday–Neumann–Lenz è $-\frac{d\Phi}{dt}$, la rapidità di variazione del flusso magnetico cambiata di segno.

Funzione composta
Funzione $g(f(x))$ ottenuta applicando la funzione esterna g al risultato della funzione interna f.

Linearità della derivata
La derivata di una somma è la somma delle derivate e una costante moltiplicativa esce dalla derivata.

Massimo e minimo relativo
x_0 è di massimo (minimo) relativo se in un intorno $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Moto armonico
Moto con legge $x = A\cos(\omega t)$, in cui l'accelerazione è $a = -\omega^2 x$.

Regola del prodotto
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$: si deriva un fattore alla volta e si sommano i risultati.

Regola del quoziente
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, nei punti in cui $g \neq 0$.

Regola della catena
$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$; in notazione di Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Retta normale
Retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza; pendenza $-\frac{1}{f'(x_0)}$ se $f'(x_0) \neq 0$.

Teorema di Fermat
In un punto interno di massimo o minimo relativo in cui f è derivabile, $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Lagrange
Se f è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, esiste $c \in]a; b[$ con $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$: una tangente parallela alla corda.

Teorema di Rolle
Se f è continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e $f(a) = f(b)$, esiste $c \in]a; b[$ con $f'(c) = 0$.

Soluzioni

1. B. Regola del prodotto: $2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x$.

2. D. Regola della catena: $e^{3x} \cdot 3$.

3. C. $|x|$ non è derivabile in 0; x^3 e x hanno valori diversi agli estremi; x^2 è un polinomio e $f(-1) = f(1) = 1$ (con $c = 0$).

4. A. Corda: $\frac{9-1}{3-1} = 4$; $f'(c) = 2c = 4$ dà $c = 2$.

5. B. $v = 10t - 2$, $a = v' = 10$ m/s^2, costante.

6. D. $(a^x)' = a^x \ln a$.

7. a) Falso: $(fg)' = f'g + fg'$. b) Falso: x^3 ha derivata nulla in 0 ma è sempre crescente. c) Falso: garantisce l'esistenza di almeno un punto, non l'unicità. d) Vero: $\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ (oppure $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$). e) Falso se il dominio non è un intervallo: $\frac{|x|}{x}$ ha derivata nulla in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma vale -1 e 1; vero su un intervallo.

8. a) perpendicolare; $-\frac{1}{f'(x_0)}$. b) $f'(x_0)\,dx$. c) chiuso; aperto; $f(a) = f(b)$. d) seconda.

9. a) $12x^3 - 6x^2 + 1$. b) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$. c) $5\cos x + 2\operatorname{sen} x + e^x$.

10. a) $3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(x+3)$. b) $2x\cos x - (x^2+1)\operatorname{sen} x$. c) $\ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

11. a) $\frac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$. b) $\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. c) $\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

12. a) $4(2x+5)^3 \cdot 2 = 8(2x+5)^3$. b) $-3\operatorname{sen}(3x)$. c) $5e^{5x-1}$. d) $\frac{6x}{3x^2+1}$.

13. a) $\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, per $-1 < x < 1$. b) $2\operatorname{sen} x \cos x$ (cioè $\operatorname{sen}(2x)$). c) $-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$. d) $3^{x^2} \ln 3 \cdot 2x$.

14. a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$, nulla per $x = 0$ e $x = 2$. b) $y' = -2e^{-2x}$, $y'' = 4e^{-2x} = 4y$.

15. $f(1) = -1$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$. Tangente $y + 1 = x - 1$, cioè $y = x - 2$; normale $y + 1 = -(x-1)$, cioè $y = -x$. Intersezione: $x^3 - 2x = x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$; l'altro punto è $(-2; -4)$.

16. a) $f(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, cioè $y = \frac{x}{e}$, che passa per O. b) La tangente in $(x_0; e^{x_0})$ è $y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$; imponendo il passaggio per O: $0 = e^{x_0}(1 - x_0)$, quindi $x_0 = 1$. Punto $(1; e)$, tangente $y = ex$.

17. a) Polinomio, quindi continuo e derivabile; $f(1) = f(3) = 0$. $f'(x) = 2x - 4 = 0$ per $c = 2$. b) $f(-1) = f(1) = 0$; $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ per $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577$, entrambi interni.

18. a) Corda $\frac{27-0}{3} = 9$; $3c^2 = 9 \Rightarrow c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ (la soluzione $-\sqrt{3}$ non è nell'intervallo). b) Corda $\frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{4}$; $\sqrt{x}$ è continua in $[1; 4]$ e derivabile in $]1; 4[$.

19. a) $f = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $f'(9) = \frac{1}{6}$: $\sqrt{9{,}2} \approx 3 + \frac{0{,}2}{6} \approx 3{,}0333$; valore vero 3,0332... b) $e^{0,1} \approx 1 + 0{,}1 = 1{,}1$; valore vero 1,1052... c) $f'(1) = 10$: $1{,}02^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0{,}02 = 1{,}2$; valore vero 1,2190... L'errore cresce con l'incremento.

20. $(e^x \cdot e^x)' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$. Con la catena: $e^{2x} \cdot 2$. c.v.d.

21. Il teorema richiede che f sia continua in tutto l'intervallo chiuso $[-1; 1]$; $\frac{1}{x}$ non è definita in 0,

che è interno all'intervallo. Manca un'ipotesi, quindi la tesi può non valere.

22. a) Manca la derivata della funzione interna: $2x\cos(x^2)$. b) Il quoziente non si deriva così: $\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$ (oppure $x+\frac{1}{x}$, derivata $1-\frac{1}{x^2}$). c) Una derivata nulla non basta: x^3 è crescente in $\mathbb{R}$, quindi 0 non è né di massimo né di minimo.

23. $f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x+2\cos x\cdot(-\operatorname{sen}x)=0$ per ogni x. Poiché $\mathbb{R}$ è un intervallo, la prima conseguenza del teorema di Lagrange dice che f è costante; il valore si trova in un punto qualsiasi: $f(0)=0+1=1$.

24. a) $v(t)=-3t^2+12t=-3t(t-4)$ m/s; $a(t)=-6t+12$ m/s^2. b) La velocità (una parabola rivolta verso il basso) è massima dove $a=0$, cioè per $t=2$ s: $v(2)=12$ m/s. c) $v=0$ per $t=4$ s (oltre a $t=0$); per $t>4$ s $v<0$; il punto inverte il moto in $s(4)=32$ m. d) $s(6)=0$ m (è tornato al punto di partenza), $v(6)=-36$ m/s (si muove all'indietro), $a(6)=-24$ m/s^2 (accelerazione concorde con la velocità: il punto accelera all'indietro).

25. a) $i(t)=q'(t)=0{,}004\cdot 100\pi\cos(100\pi t)=0{,}4\pi\cos(100\pi t)$ A. b) $0{,}4\pi\approx 1{,}26$ A. c) $T=\frac{2\pi}{100\pi}=0{,}02$ s. d) $i(0{,}005)=0{,}4\pi\cos(\frac{\pi}{2})=0$ A: in quell'istante la carica è massima.

26. a) $\Phi(t)=0{,}02+0{,}005t$, f.e.m. $=-\Phi'(t)=-0{,}005$ V (costante, 5 mV in valore assoluto). b) f.e.m. $=-\Phi'(t)=0{,}06\,e^{-2t}$ V: 0,06 V per $t=0$ e $0{,}06\,e^{-2}\approx 0{,}0081$ V per $t=1$ s; il segno positivo indica, per la legge di Lenz, una corrente che tende a mantenere il flusso che sta diminuendo.

27. a) $\frac{18}{7{,}5/60}=144$ km/h. La posizione è una funzione continua e derivabile del tempo; per il teorema di Lagrange in almeno un istante la velocità istantanea è stata 144 km/h, oltre il limite. b) Velocità media $\frac{18}{9/60}=120$ km/h. No: il teorema garantisce solo che in almeno un istante la velocità è stata 120 km/h; l'auto potrebbe aver superato i 130 km/h in un tratto e rallentato in un altro.

28. a) $\omega=4\pi$ rad/s, $T=\frac{2\pi}{4\pi}=0{,}5$ s. b) $v_{\max}=A\omega=0{,}05\cdot 4\pi=0{,}2\pi\approx 0{,}628$ m/s; $a_{\max}=A\omega^2=0{,}05\cdot 16\pi^2=0{,}8\pi^2\approx 7{,}90$ m/s^2. c) $k=m\omega^2=0{,}2\cdot 16\pi^2\approx 31{,}6$ N/m.

29. a) $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3\cdot 1+2\cdot(-2)=-1$. b) $\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{[g(1)]^2}=\frac{3+4}{1}=7$. c) $f'(g(1))\cdot g'(1)=f'(1)\cdot(-2)=-6$.

30. a) $T'(t)=-6e^{-0{,}1t}$ °C/min. b) $T'(0)=-6$ °C/min; $T'(10)=-6e^{-1}\approx -2{,}2$ °C/min. c) Il segno meno indica che la temperatura diminuisce; il valore assoluto diminuisce col tempo: il raffreddamento rallenta man mano che il caffè si avvicina ai 20 °C dell'ambiente. d) $T(10)=20+60e^{-1}\approx 42{,}1$ °C.

31. Traccia: 1) la velocità è la derivata prima della posizione, l'accelerazione la derivata seconda; 2) $F=ma$: le forze fissano l'accelerazione, quindi, con posizione e velocità iniziali, l'intero moto; 3) esempio: $a=-\omega^2x$ con $x(0)=A$ e $v(0)=0$ dà $x=A\cos(\omega t)$, e si verifica derivando due volte; 4) Laplace e il determinismo, il positivismo che vi vede il modello della conoscenza certa; 5) i limiti: la sensibilità alle condizioni iniziali studiata da Poincaré, le leggi probabilistiche della meccanica quantistica; 6) rinvio al capitolo 11 su caso e determinismo.

32. $g(0)=0$, quindi 0 è soluzione. Se esistesse un'altra soluzione $b\neq 0$, g sarebbe continua e derivabile nell'intervallo di estremi 0 e b con valori nulli negli estremi; per il teorema di Rolle esisterebbe c strettamente compreso fra 0 e b, quindi $c\neq 0$, con $g'(c)=e^c-1=0$, cioè $e^c=1$ e $c=0$: assurdo. Interpretazione: $y=1+x$ è la tangente al grafico di e^x in (0; 1), e la tangente tocca il grafico solo in quel punto (la curva sta sempre sopra la tangente).