CAPITOLO

# 5

# La derivata

*In un istante la freccia non percorre alcuno spazio, eppure vola: la derivata è il modo esatto di parlare di quel volo. (testo della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Riconoscere nella velocità istantanea e nella tangente a una curva due aspetti dello stesso limite.
2. Definire il rapporto incrementale e la derivata, e calcolare derivate con la definizione nei casi semplici.
3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto.
4. Distinguere derivabilità e continuità, e riconoscere punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi.
5. Ricavare e usare le derivate fondamentali di potenze, seno, coseno, esponenziale e logaritmo.
6. Interpretare la derivata come tasso di variazione in fisica e in altri ambiti, e leggerla su un grafico.

**INDICE DEL CAPITOLO**


5.1 Due problemi, una sola idea ..... 2
5.2 Rapporto incrementale e derivata ..... 7
5.3 Derivabilità e continuità ..... 10
5.4 La funzione derivata e le derivate fondamentali ..... 12
5.5 Il significato della derivata ..... 16

**Matematica 5** · Parte III · Il calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 5: La derivata · pagine 131–156 del volume completo · estratto per lo studio

Un autovelox fotografa la velocità di un'auto in un preciso istante, e il tachimetro la mostra istante per istante. Ma che cosa significa «velocità in un istante», se in un istante l'auto non percorre nessuna strada? Nel Seicento questa domanda, insieme a un'altra in apparenza lontanissima (come si traccia la tangente a una curva qualsiasi?), diede origine al calcolo differenziale. In questo capitolo scopriremo che le due domande hanno la stessa risposta: la *derivata*, il limite del rapporto tra due incrementi. I limiti del capitolo 3 e la continuità del capitolo 4 ci danno già tutti gli strumenti per definirla con rigore; il resto del libro, fino al calcolo delle aree, si regge su questa idea.

## 5.1 Due problemi, una sola idea

### 5.1.1 Che cosa sappiamo già

La pendenza di una retta è il rapporto $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tra l'incremento delle ordinate e quello delle ascisse fra due suoi punti, e non dipende dai punti scelti. Per una curva le cose cambiano: la pendenza del segmento che congiunge due suoi punti dipende da quali punti prendiamo. Nel moto rettilineo uniforme la legge oraria $s = s_0 + vt$ ha per grafico una retta e la velocità è la sua pendenza; nella caduta libera la legge $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ ha per grafico un arco di parabola, e la velocità cambia da un istante all'altro. In *Matematica 3*, cap. 6, abbiamo trovato la tangente a una parabola imponendo al sistema retta–parabola il discriminante nullo, $\Delta = 0$: un metodo elegante, che però funziona solo per le coniche, dove l'equazione risolvente è di secondo grado. Infine, nel capitolo 3 abbiamo imparato a calcolare limiti anche nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, e nel capitolo 4 abbiamo visto che le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

### 5.1.2 La velocità istantanea

Lasciamo cadere un sasso da fermo. Trascurando la resistenza dell'aria, lo spazio percorso dopo $t$ secondi è $s(t) = 4{,}9t^2$ metri (è $\dfrac{1}{2}gt^2$ con $g = 9{,}8$ m/s$^2$). Qual è la velocità del sasso all'istante $t = 2$ s?

Sappiamo calcolare la **velocità media** in un intervallo di tempo: è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato. Tra 2 s e 3 s il sasso passa da $s(2) = 19{,}6$ m a $s(3) = 44{,}1$ m, con velocità media $\dfrac{44{,}1 - 19{,}6}{3 - 2} = 24{,}5$ m/s. Ma in quel secondo il sasso ha continuato ad accelerare: 24,5 m/s è una media, non la velocità a 2 s. Restringiamo allora l'intervallo e consideriamo

quello tra 2 s e $2 + h$ s, con $h$ sempre più piccolo. Il calcolo si può fare una volta per tutte: per $h \neq 0$

$$v_m = \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{4{,}9(4 + 4h + h^2) - 19{,}6}{h} = \frac{19{,}6h + 4{,}9h^2}{h} = 19{,}6 + 4{,}9h$$

La Tabella 5.1 riporta i valori per alcuni $h$, positivi e negativi (un $h$ negativo indica un intervallo che termina all'istante 2 s).

**Tabella 5.1** Velocità medie del sasso in caduta libera negli intervalli che hanno un estremo in $t = 2$ s, calcolate con $v_m = 19{,}6 + 4{,}9h$.

| $h$ (s) | intervallo (s) | velocità media (m/s) |
|---|---|---|
| 1 | [2; 3] | 24,5 |
| 0,5 | [2; 2,5] | 22,05 |
| 0,1 | [2; 2,1] | 20,09 |
| 0,01 | [2; 2,01] | 19,649 |
| 0,001 | [2; 2,001] | 19,604 9 |
| −0,001 | [1,999; 2] | 19,595 1 |
| −0,01 | [1,99; 2] | 19,551 |
| −0,1 | [1,9; 2] | 19,11 |

I valori si avvicinano a 19,6 da entrambe le parti, e la formula spiega perché: $19{,}6 + 4{,}9h$ tende a 19,6 per $h \to 0$. Chiamiamo **velocità istantanea** all'istante 2 s proprio questo limite:

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (19{,}6 + 4{,}9h) = 19{,}6 \text{ m/s}$$

Osserva che non abbiamo mai posto $h = 0$: il rapporto non avrebbe senso, perché diventerebbe $\frac{0}{0}$. Abbiamo semplificato per $h \neq 0$ e poi calcolato il limite, esattamente come nel capitolo 3 per le forme $\frac{0}{0}$ delle funzioni razionali. Sul grafico spazio–tempo (Figura 5.1) ogni velocità media è la pendenza di una secante, e la velocità istantanea è la pendenza della retta tangente nel punto P(2; 19,6).

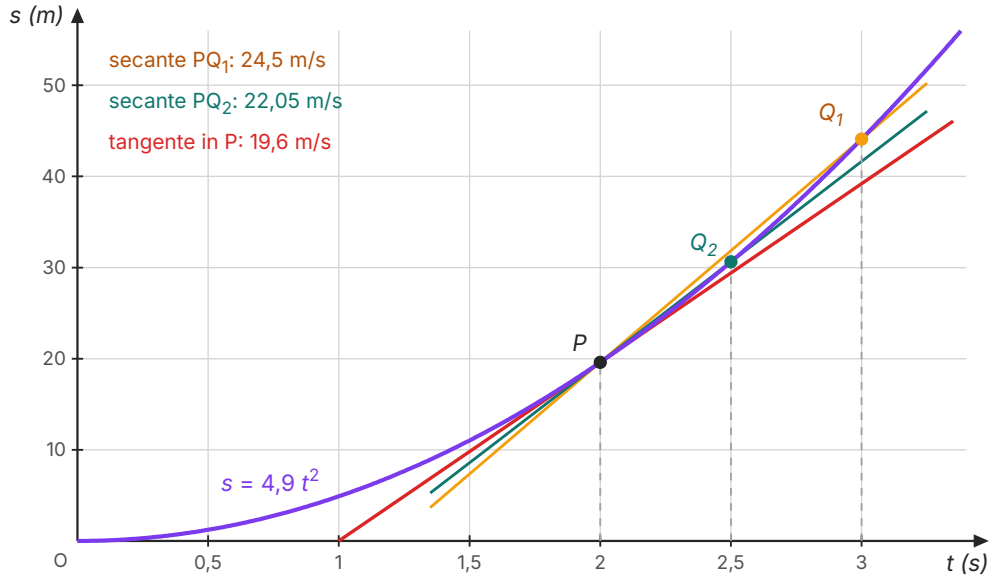



**Figura 5.1** Il grafico spazio–tempo del sasso in caduta libera, $s = 4{,}9t^2$ (scale diverse sui due assi). Le pendenze delle secanti $PQ_1$ e $PQ_2$ sono le velocità medie tra 2 s e 3 s e tra 2 s e 2,5 s; quando l'intervallo si restringe, le secanti tendono alla tangente in P, la cui pendenza, 19,6 m/s, è la velocità istantanea.

**COLLEGAMENTI · LA FRECCIA DI ZENONE**

Nel capitolo 2 abbiamo incontrato i paradossi di Zenone di Elea. Uno di essi, quello della freccia, riferito da Aristotele nella *Fisica*, si può riassumere così: in ogni istante la freccia in volo occupa uno spazio uguale a sé stessa, e dunque in quell'istante è ferma; ma il tempo del volo è fatto di istanti, quindi la freccia non si muove mai.

La velocità istantanea non risponde alla domanda «che cosa fa la freccia in un istante isolato?», alla quale la risposta è davvero: nessuno spostamento. Risponde a un'altra domanda: verso quale valore tendono le velocità medie su intervalli sempre più brevi che contengono quell'istante? Il moto non è una proprietà dell'istante preso da solo, ma del modo in cui la posizione cambia *intorno* a esso. È un'idea che i matematici del Seicento usavano senza saperla ancora formulare, e che il concetto di limite ha reso precisa; Aristotele, dal canto suo, rispondeva a Zenone negando che il tempo sia composto di istanti indivisibili.

### 5.1.3 La tangente a una curva

Che cos'è la tangente a una curva? Euclide definiva tangente alla circonferenza la retta che la tocca senza tagliarla, e per la circonferenza questo equivale ad avere con essa un solo punto in comune. Per una curva qualsiasi, però, «un solo punto in comune» non funziona: la retta $y = 3x - 2$, come vedremo tra poco, è tangente alla curva $y = x^3$ nel punto $(1; 1)$ eppure la incon-

tra di nuovo in (−2; −8); e l'asse $y$ ha un solo punto in comune con la parabola $y = x^2$, ma non le è tangente.

La definizione giusta è quella suggerita dal sasso. Fissiamo un punto P sulla curva e un secondo punto Q della curva: la retta PQ è una secante. Facciamo scorrere Q lungo la curva verso P. Se le pendenze delle secanti tendono a un numero finito $m$, la retta per P con pendenza $m$ si chiama **retta tangente** alla curva in P: è la posizione limite delle secanti.

Proviamo con la parabola $y = x^2$ nel punto P(1; 1). Il punto Q ha ascissa $1 + h$ e ordinata $(1 + h)^2$; la pendenza della secante PQ è

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

che tende a 2 per $h \to 0$. La tangente in P è quindi $y - 1 = 2(x - 1)$, cioè $y = 2x - 1$ (Figura 5.2). Lo stesso risultato si ottiene con il metodo di *Matematica 3*: il sistema tra la parabola e la retta porta a $x^2 - 2x + 1 = 0$, cioè $(x - 1)^2 = 0$, con $\Delta = 0$. Il metodo delle secanti però non ha bisogno che la curva sia una conica: funziona per ogni curva di cui sappiamo calcolare quel limite.

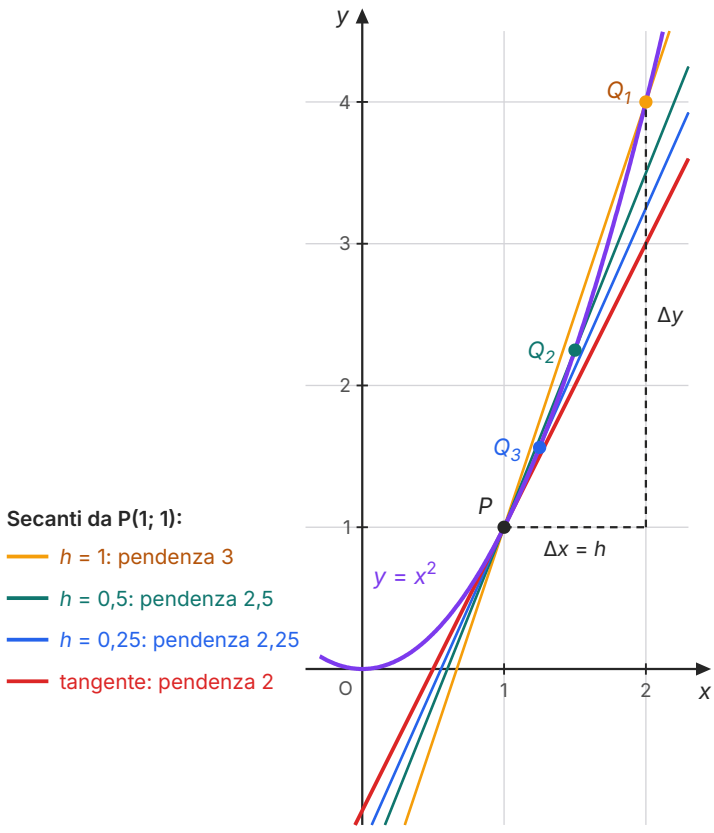



**Figura 5.2** Le secanti alla parabola $y = x^2$ condotte da P(1; 1) per $h$ = 1, 0,5 e 0,25, e la tangente in P, $y = 2x - 1$ (stessa scala sui due assi). Per $Q_1$ sono segnati gli incrementi $\Delta x = h$ e $\Delta y$: la pendenza della secante è $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + h$.

### 5.1.4 Un problema del Seicento

Le due questioni, la velocità di un corpo in un istante e la tangente a una curva, occuparono i matematici della prima metà del Seicento. Galileo, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), studiò la caduta dei gravi e stabilì che gli spazi percorsi a partire dalla quiete crescono come i quadrati dei tempi: è la legge $s = \frac{1}{2}gt^2$ che abbiamo appena usato, oggi scritta in forma algebrica. Negli stessi anni Pierre de Fermat trovava massimi, minimi e tangenti di curve algebriche confrontando il valore di un'espressione in $x$ e in un punto «vicino» $x + e$: divideva per $e$ e poi trascurava i termini che lo contenevano ancora. È quasi il nostro calcolo con $h$, ma senza una ragione per cui si potesse prima dividere per una quantità e poi considerarla nulla. Cartesio, nella *Géométrie* (1637), costruiva invece le normali alle curve con un metodo algebrico fondato sulle circonferenze.

Le due domande restavano problemi distinti, risolti con artifici diversi caso per caso. Capire che erano lo stesso problema, e trovare un algoritmo generale per risolverlo, fu il passo compiuto da Newton e da Leibniz (lo racconta l'Approfondimento alla fine del capitolo).

## 5.2 Rapporto incrementale e derivata

### 5.2.1 Il rapporto incrementale

Sia $f$ una funzione definita in un intervallo $I$ e sia $x_0$ un punto interno a $I$. Diamo alla variabile un **incremento** $h$, positivo o negativo ma diverso da 0, tale che $x_0 + h$ stia ancora in $I$: la funzione subisce l'incremento $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Si chiama **rapporto incrementale** di $f$ relativo a $x_0$ e all'incremento $h$ il quoziente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometricamente è la pendenza della secante che passa per $P(x_0; f(x_0))$ e $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$ (Figura 5.2, dove sono segnati $\Delta x$ e $\Delta y$); fisicamente, se $x$ è un tempo e $f(x)$ una posizione, è una velocità media. In generale misura la rapidità media con cui $f$ cambia tra $x_0$ e $x_0 + h$, e la sua unità di misura è quella di $f$ divisa per quella di $x$: euro al mese, gradi all'ora, abitanti all'anno.

### 5.2.2 La derivata in un punto

Si dice che $f$ è **derivabile** nel punto $x_0$ se il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ esiste ed è finito; tale limite si chiama **derivata** di $f$ in $x_0$ e si indica con $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se il limite non esiste, oppure vale $+\infty$ o $-\infty$, la funzione non è derivabile in $x_0$. Quando $f$ è continua, il rapporto incrementale per $h \to 0$ si presenta sempre nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$: tendono a 0 sia il numeratore sia il denominatore. Calcolare una derivata vuol dire proprio sciogliere questa indeterminazione, e il risultato dice quale dei due va a zero «più in fretta».

La derivata si indica in vari modi: $f'(x_0)$ (si legge «effe primo di ics zero»), la notazione di Lagrange; $y'$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, la notazione di Leibniz, che ricorda il rapporto da cui la derivata nasce; e, in fisica, per le derivate rispetto al tempo, il punto di Newton: se $x(t)$ è la posizione, la velocità si scrive anche $\dot{x}$.

**DA RICORDARE**

$\frac{dy}{dx}$ non è una frazione, ma un unico simbolo che indica il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Leibniz pensava a $dx$ e $dy$ come a quantità «infinitamente piccole»; oggi il simbolo resta per la sua comodità, ma la definizione è quella del limite. Nel capitolo 6 vedremo che $dy$ e $dx$ possono ricevere separatamente un significato preciso (il differenziale).

### 5.2.3 La retta tangente

Poiché la tangente è la posizione limite delle secanti, la tangente al grafico di $f$ nel punto $P(x_0; f(x_0))$ è la retta per P che ha pendenza $f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

**IN SINTESI**

**Derivata e tangente.** $f$ è derivabile in $x_0$ se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ è la pendenza della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0$, che ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, ed è la rapidità istantanea con cui $f$ cambia in $x_0$ (per esempio una velocità).

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Con la definizione calcola la derivata e scrivi la retta tangente: a) di $f(x) = x^2 - 3x$ in $x_0 = 1$; b) di $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 = 2$; c) di $f(x) = x^3$ in $x_0 = 1$. Nel caso c) trova anche gli altri punti in cui la tangente incontra la curva.

a) $f(1) = -2$ e $f(1 + h) = 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h = -2 - h + h^2$. Il rapporto incrementale è $\frac{-h + h^2}{h} = -1 + h$, che tende a $-1$: $f'(1) = -1$. Tangente: $y + 2 = -(x - 1)$, cioè $y = -x - 1$.

b) $f(2 + h) - f(2) = \frac{1}{2 + h} - \frac{1}{2} = \frac{-h}{2(2 + h)}$, quindi il rapporto incrementale è $\frac{-1}{2(2 + h)}$, che tende a $-\frac{1}{4}$. Tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, cioè $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

c) $(1 + h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3$, quindi il rapporto incrementale è $3 + 3h + h^2$, che tende a 3. Tangente: $y - 1 = 3(x - 1)$, cioè $y = 3x - 2$. Mettendo a sistema con la curva: $x^3 - 3x + 2 = 0$. Sappiamo che $x = 1$ è una radice; con Ruffini (*Matematica 4*, cap. 1) si trova $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. La radice $x = 1$ è doppia, il segno algebrico della tangenza; la radice $x = -2$ dà il punto $(-2; -8)$, dove la tangente taglia di nuovo la curva.

**Osservazione.** La tangenza è una proprietà *locale*: dice come si comporta la curva vicino a P, non che cosa accade lontano da P.

### 5.2.4 Derivata destra e derivata sinistra

Come per i limiti, possiamo far tendere $h$ a 0 da un solo lato. Si chiamano **derivata destra** e **derivata sinistra** di $f$ in $x_0$ i limiti

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Per il legame tra un limite e i limiti laterali (capitolo 3), $f$ è derivabile in $x_0$ se e solo se la derivata destra e la sinistra esistono, sono finite e sono uguali. Servono soprattutto nei punti in cui una funzione è definita «a tratti», con espressioni diverse a destra e a sinistra, e agli estremi di un intervallo chiuso: si dice che $f$ è derivabile in $[a; b]$ se è derivabile in ogni punto di $]a; b[$ e ha derivata destra in $a$ e derivata sinistra in $b$.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** La funzione $f(x) = x^2 + 1$ per $x \le 0$, $f(x) = x + 1$ per $x > 0$ è continua in 0? È derivabile in 0?

**Continuità.** $f(0) = 1$; da sinistra $x^2 + 1 \to 1$, da destra $x + 1 \to 1$: i due limiti laterali coincidono con $f(0)$ e la funzione è continua in 0.

**Derivate laterali.** Per $h < 0$ si usa la prima espressione: $\dfrac{(h^2+1)-1}{h} = h \to 0$, quindi $f'_-(0) = 0$. Per $h > 0$ si usa la seconda: $\dfrac{(h+1)-1}{h} = 1$, quindi $f'_+(0) = 1$.

**Conclusione.** Le derivate laterali sono finite ma diverse: $f$ è continua ma non derivabile in 0. Il grafico arriva da sinistra con tangente orizzontale e riparte verso destra con pendenza 1: nel prossimo paragrafo un punto così si chiamerà punto angoloso.

## 5.3 Derivabilità e continuità

### 5.3.1 Una funzione derivabile è continua

**IN SINTESI**

**Teorema.** *Ipotesi:* $f$ è derivabile nel punto $x_0$. *Tesi:* $f$ è continua in $x_0$.

**Dimostrazione.** Dobbiamo provare che $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, cioè che $\lim_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$. Per $h \neq 0$ possiamo scrivere

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Per $h \to 0$ il primo fattore tende a $f'(x_0)$, che per ipotesi è un numero finito, e il secondo tende a 0; per il teorema sul limite di un prodotto, il prodotto tende a $f'(x_0) \cdot 0 = 0$. c.v.d.

Il teorema si usa spesso nella forma contronominale: *se $f$ non è continua in $x_0$, allora non è derivabile in $x_0$*. Una funzione con un salto, cioè con una discontinuità di prima specie (capitolo 4), non ha tangente nel punto del salto: le secanti da un lato diventano sempre più ripide e non tendono a una retta di pendenza finita.

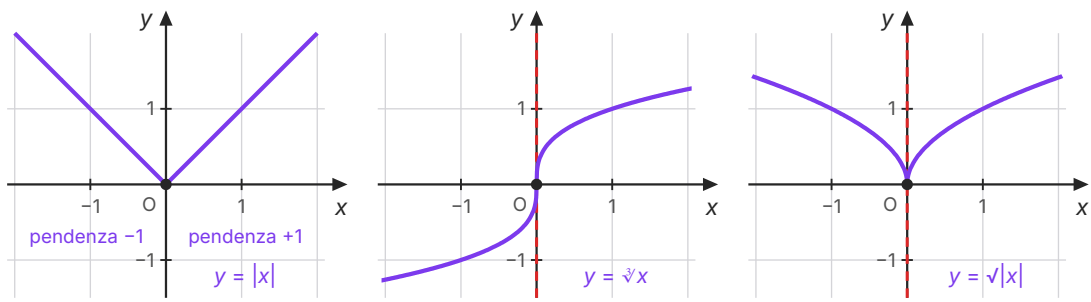
### 5.3.2 Funzioni continue ma non derivabili

Il viceversa del teorema è falso: esistono funzioni continue in un punto ma non derivabili in esso. I tre esempi della Figura 5.3 mostrano i tre modi tipici in cui accade.

**Il valore assoluto.** Per $f(x) = |x|$ in 0 il rapporto incrementale è $\dfrac{|h|}{h}$, che vale 1 per $h > 0$ e $-1$ per $h < 0$: $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Un punto in cui $f$ è continua e le derivate destra e sinistra esistono finite ma diverse si chiama **punto angoloso**: il grafico ha in quel punto due semitangenti distinte, che formano un angolo.

**La radice cubica.** Per $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in 0 il rapporto incrementale è $\dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$, che tende a $+\infty$ sia da destra sia da sinistra. Le secanti diventano sempre più ripide e tendono all'asse $y$: la tangente esiste ed è verticale, ma una retta verticale non ha pendenza, e $f$ non è derivabile in 0. Poiché il grafico attraversa la sua tangente passando da un semipiano all'altro, il punto si chiama **flesso a tangente verticale**.

**La radice del valore assoluto.** Per $f(x) = \sqrt{|x|}$ in 0 il rapporto incrementale è $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ per $h > 0$ e $-\dfrac{1}{\sqrt{|h|}}$ per $h < 0$: la derivata destra è $+\infty$ e la sinistra $-\infty$. I due rami arrivano nell'origine entrambi con tangente verticale, formando una punta: un punto così si chiama **cuspide**. La Tabella 5.2 riassume i tre casi.




a) punto angoloso b) flesso a tangente verticale c) cuspide

**Figura 5.3** Tre funzioni continue in 0 ma non derivabili in 0 (stessa scala sui due assi): a) $y = |x|$, punto angoloso, con semitangenti di pendenza $-1$ e $+1$; b) $y = \sqrt[3]{x}$, flesso a tangente verticale; c) $y = \sqrt{|x|}$, cuspide. In b) e c) la tangente verticale, cioè l'asse $y$, è tratteggiata in rosso.

**Tabella 5.2** Punti in cui una funzione continua non è derivabile.

| Punto | derivata sinistra | derivata destra | esempio in 0 |
|---|---|---|---|
| punto angoloso | finita | finita, diversa dalla sinistra | $y = \lvert x \rvert$ |
| flesso a tangente verticale | $+\infty$ (o $-\infty$) | lo stesso infinito | $y = \sqrt[3]{x}$ |
| cuspide | $-\infty$ (o $+\infty$) | l'infinito di segno opposto | $y = \sqrt{\lvert x \rvert}$ |

**ERRORE FREQUENTE**

**«È continua, quindi è derivabile.»** Falso: $|x|$, $\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt{|x|}$ sono continue in 0 e non vi sono derivabili. Vale solo l'implicazione opposta: derivabile ⇒ continua. Nell'Ottocento Weierstrass costruì perfino una funzione continua in ogni punto e derivabile in nessuno.

**«La derivata è infinita, quindi la tangente non esiste.»** Falso anche questo: in un flesso a tangente verticale la tangente esiste ed è una retta verticale. È la *derivata* che non esiste, perché una derivata deve essere un numero finito.

## 5.4 La funzione derivata e le derivate fondamentali

### 5.4.1 La funzione derivata

Finora abbiamo calcolato la derivata in un punto alla volta. Se $f$ è derivabile in ogni punto di un insieme, possiamo associare a ogni $x$ di quell'insieme il numero $f'(x)$: otteniamo una nuova funzione, la **funzione derivata** di $f$, indicata con $f'$, $y'$ o $\frac{dy}{dx}$. Il suo dominio è contenuto in quello di $f$ e può essere più piccolo: $\sqrt{x}$ è definita in $[0; +\infty[$ ma, lo vedremo tra poco, è derivabile solo in $]0; +\infty[$. Per calcolare $f'(x)$ si usa la definizione con $x$ al posto di $x_0$, trattando $x$ come un numero fissato e $h$ come la variabile che tende a 0.

### 5.4.2 Costanti e potenze

**Costante.** Se $f(x) = k$, il rapporto incrementale è $\frac{k-k}{h} = 0$: la derivata di una costante è 0. Una retta orizzontale è tangente a sé stessa in ogni punto.

**Identità.** Se $f(x) = x$, il rapporto è $\frac{x+h-x}{h} = 1$: $(x)' = 1$.

**Quadrato e cubo.** $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$, che tende a $2x$; $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$, che tende a $3x^2$. Quindi $(x^2)' = 2x$ e $(x^3)' = 3x^2$.

**Potenza *n*-esima.** Per un intero $n \geq 2$ usiamo lo sviluppo del binomio di Newton (*Matematica 4*, cap. 9):

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n$$

Sottraendo $x^n$ e dividendo per $h$ resta $nx^{n-1}$ più termini che contengono tutti almeno un fattore $h$, e che quindi tendono a 0. Perciò $(x^n)' = nx^{n-1}$: per esempio $(x^5)' = 5x^4$.

**Reciproco.** Per $x \neq 0$: $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$, che tende a $-\frac{1}{x^2}$.

**Radice quadrata.** Per $x > 0$ razionalizziamo il numeratore, come nel capitolo 3:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

che tende a $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. In $x = 0$ invece il rapporto incrementale destro è $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$: il grafico parte dall'origine con tangente verticale (l'asse $y$) e la funzione non è derivabile in 0.

Osserva che $\frac{1}{x} = x^{-1}$ e $\sqrt{x} = x^{1/2}$, e che le loro derivate, $-x^{-2}$ e $\frac{1}{2}x^{-1/2}$, seguono la stessa regola delle potenze intere. In effetti $(x^a)' = ax^{a-1}$ vale per ogni esponente reale $a$, dove la potenza e la sua derivata sono definite: lo accettiamo senza dimostrazione.

### 5.4.3 Seno e coseno

Per derivare sen $x$ servono le formule di addizione (*Matematica 4*, cap. 4) e due limiti notevoli del capitolo 3, validi con $x$ in radianti: $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ e $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$. Dal secondo segue $\frac{\cos h - 1}{h} = -h \cdot \frac{1-\cos h}{h^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Allora

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

e per $h \to 0$ si ottiene sen $x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$: $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$. Con un calcolo analogo, che svolgerai negli esercizi, si trova $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. La Figura 5.4 lo rende visibile: dove la sinusoide ha tangente orizzontale (in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$) il coseno vale 0; in 0 e in $2\pi$ la pendenza è 1, che è cos 0; in $\pi$ la pendenza è $-1 = \cos \pi$.

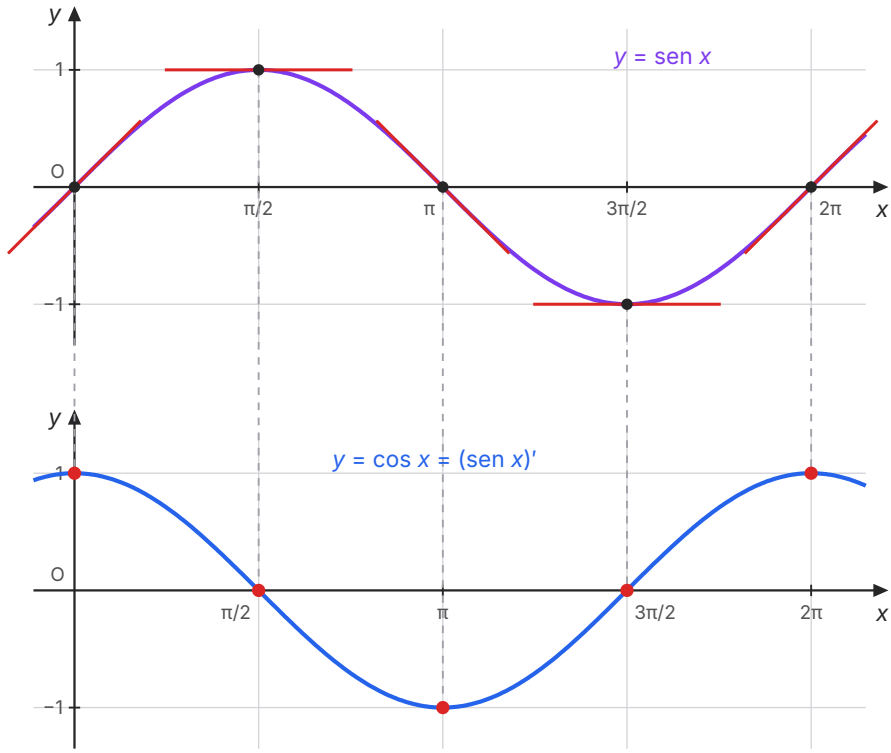



**Figura 5.4** In alto $y = \text{sen } x$ con le tangenti in 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ e $2\pi$; in basso $y = \cos x$ (stessa scala sui due assi, $x$ in radianti). Ogni punto rosso del grafico in basso ha per ordinata la pendenza della tangente nel punto corrispondente del grafico in alto.

**ERRORE FREQUENTE**

**Derivare il seno con gli angoli in gradi.** $(\text{sen } x)' = \cos x$ vale solo se $x$ è misurato in radianti, perché solo allora $\frac{\text{sen } h}{h} \to 1$. Con $x$ in gradi la funzione è in realtà $\text{sen}(\frac{\pi}{180}x)$ e, come si verificherà con le regole del capitolo 6, la sua derivata è $\frac{\pi}{180}\cos(\frac{\pi}{180}x)$, con il fattore $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}017\,45$. Nell'analisi gli angoli si misurano sempre in radianti.

### 5.4.4 L'esponenziale e il logaritmo

Per $f(x) = e^x$ le proprietà delle potenze danno

$$\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=e^{x}\cdot\frac{e^{h}-1}{h}$$

e il limite notevole $\frac{e^{h}-1}{h}\to 1$ del capitolo 3 porta a $(e^{x})'=e^{x}$. La funzione esponenziale di base $e$ coincide con la propria derivata: in ogni punto del suo grafico la pendenza della tangente è uguale all'ordinata.

Perché proprio $e$? Per una base $a>0$ qualsiasi lo stesso calcolo dà $\frac{a^{x+h}-a^{x}}{h}=a^{x}\cdot\frac{a^{h}-1}{h}$: la derivata di $a^{x}$ è $a^{x}$ moltiplicato per il numero $\lim_{h\to 0}\frac{a^{h}-1}{h}$, che è la pendenza del grafico di $a^{x}$ nel punto (0; 1). La Tabella 5.3 mostra che questo numero vale circa 0,693 per $a=2$, circa 1,099 per $a=3$, circa 2,303 per $a=10$, ed è esattamente 1 solo per $a=e$. Fra tutti gli esponenziali, $e^{x}$ è l'unico la cui derivata non porta con sé un fattore in più: per questo $e$ è la base «naturale» dell'analisi. I valori della tabella si avvicinano a $\ln 2$, $\ln 3$ e $\ln 10$: nel capitolo 6 dimostreremo che $(a^{x})'=a^{x}\ln a$.

**Tabella 5.3** Il rapporto $\frac{a^{h}-1}{h}$ per quattro basi e tre valori di $h$ (arrotondato alla terza cifra decimale); nell'ultima colonna il valore del limite.

| base $a$ | $h=0{,}1$ | $h=0{,}01$ | $h=0{,}001$ | limite |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,718 | 0,696 | 0,693 | $\ln 2\approx 0{,}693$ |
| $e\approx 2{,}718$ | 1,052 | 1,005 | 1,001 | 1 |
| 3 | 1,161 | 1,105 | 1,099 | $\ln 3\approx 1{,}099$ |
| 10 | 2,589 | 2,329 | 2,305 | $\ln 10\approx 2{,}303$ |

Per il logaritmo naturale, con $x>0$ e le proprietà dei logaritmi (*Matematica 4*, cap. 8):

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

Per $h\to 0$ anche $t=\frac{h}{x}$ tende a 0, e per il limite notevole $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1$ (capitolo 3) si ottiene $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Una verifica numerica: per $x=2$ e $h=0{,}001$ il rapporto incrementale vale 0,499 88..., vicinissimo a $\frac{1}{2}$. La Tabella 5.4 raccoglie le derivate trovate; nel capitolo 6 la completeremo con tg $x$, $a^{x}$ e $\log_{a}x$ e con le regole per derivare somme, prodotti, quozienti e funzioni composte.

**IN SINTESI**

**Tabella 5.4** Le derivate fondamentali ($x$ in radianti per seno e coseno).

| $f(x)$ | $f'(x)$ | dove vale |
|---|---|---|
| $k$ (costante) | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ ($n$ intero positivo) | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^\alpha$ ($\alpha$ reale) | $\alpha x^{\alpha-1}$ | dove sono definite |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $x \neq 0$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x > 0$ |
| $\operatorname{sen} x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\operatorname{sen} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x > 0$ |

## 5.5 Il significato della derivata

### 5.5.1 Velocità e accelerazione

Se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove lungo una retta, la sua velocità istantanea è $v(t) = s'(t)$. Allo stesso modo la rapidità con cui cambia la velocità è l'**accelerazione** istantanea, $a(t) = v'(t)$. Le unità seguono la regola del rapporto incrementale: metri al secondo per la velocità, metri al secondo per secondo, cioè $\mathrm{m/s^2}$, per l'accelerazione.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto; la sua altezza dal punto di lancio è $s(t) = 20t - 4{,}9t^2$ ($s$ in metri, $t$ in secondi). a) Calcola con la definizione la velocità $v(t)$. b) Quanto vale la velocità a 1 s e a 3 s? c) Quando e a che altezza la palla si ferma? d) Qual è l'accelerazione?

a) $s(t+h) - s(t) = 20h - 4{,}9(2th + h^2) = 20h - 9{,}8th - 4{,}9h^2$. Dividendo per $h$: $20 - 9{,}8t - 4{,}9h$, che tende a $20 - 9{,}8t$. Quindi $v(t) = 20 - 9{,}8t$ m/s.

b) $v(1) = 10{,}2$ m/s: la palla sale. $v(3) = -9{,}4$ m/s: il segno negativo dice che la palla scende.

c) La palla si ferma quando $v(t) = 0$, cioè per $t = \dfrac{20}{9{,}8} = \dfrac{100}{49} \approx 2{,}04$ s. In quell'istante $s = \dfrac{2000}{49} - \dfrac{1000}{49} = \dfrac{1000}{49} \approx 20{,}4$ m: è l'altezza massima. Sul grafico spazio–tempo la tangente in quel punto è orizzontale.

d) $v(t+h) - v(t) = -9{,}8h$, quindi $a(t) = -9{,}8$ m/s$^2$ in ogni istante: è l'accelerazione di gravità, diretta verso il basso.

La Figura 5.5 mostra i due grafici uno sopra l'altro: l'ordinata del grafico velocità–tempo in ogni istante è la pendenza della tangente al grafico spazio–tempo nello stesso istante. Nella versione interattiva si possono cambiare la velocità iniziale e il valore di $g$.

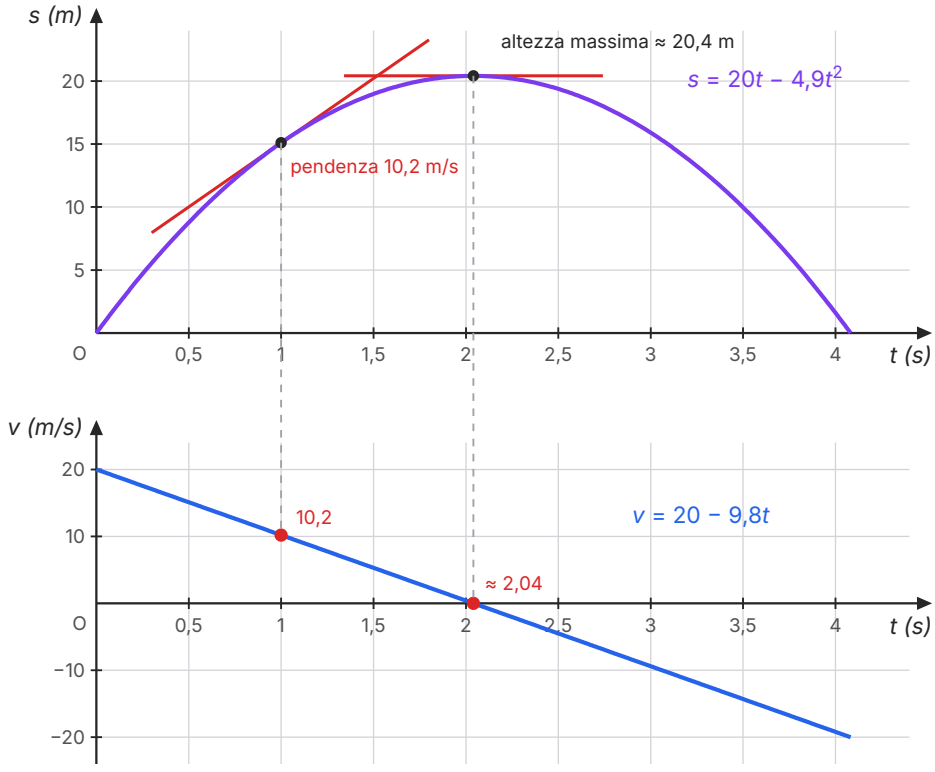



**Figura 5.5** Il lancio verticale $s = 20t - 4{,}9t^2$: in alto il grafico spazio–tempo, in basso il grafico velocità–tempo $v = 20 - 9{,}8t$, sullo stesso asse dei tempi (scale diverse sugli assi). La tangente a $s(t)$ all'istante 1 s ha pendenza 10,2 m/s, che è $v(1)$; all'altezza massima la tangente è orizzontale e la velocità si annulla ($t \approx 2{,}04$ s).

### 5.5.2 Tassi di variazione

Ogni volta che una grandezza dipende da un'altra, la derivata misura la rapidità istantanea con cui cambia: si chiama **tasso di variazione** istantaneo, e la sua unità di misura è quella della funzione divisa per quella della variabile.

**Corrente elettrica.** Sia $q(t)$ la carica che ha attraversato una sezione di un conduttore fino all'istante $t$. Il rapporto $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ è l'intensità media di corrente nell'intervallo, e il suo limite è l'**intensità di corrente** istantanea, $i(t) = q'(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, misurata in ampere, cioè coulomb al secondo. Per esempio (dati inventati), se $q(t) = 0{,}02t^2 + 0{,}1t$ coulomb, dalla definizione si ottiene $i(t) = 0{,}04t + 0{,}1$ ampere, e a 3 s la corrente è di 0,22 A. Nel capitolo 6 la stessa idea darà la forza elettromotrice indotta, legata alla rapidità con cui varia un flusso magnetico.

**Crescita di una popolazione.** Una colonia di batteri (dati simulati) conta $N(t) = 500e^t$ individui dopo $t$ ore. Un fattore costante si porta fuori dal rapporto incrementale, quindi

$N'(t) = 500e^t = N(t)$: in ogni istante la colonia cresce di tanti batteri all'ora quanti ne conta. È la versione istantanea della crescita esponenziale studiata in *Matematica 4*, cap. 7: la rapidità di crescita è proporzionale alla quantità presente.

**Economia.** Se $C(q)$ è il costo totale per produrre la quantità $q$ di un bene, la derivata $C'(q)$ si chiama costo marginale: approssima il costo di una unità prodotta in più.

### 5.5.3 Leggere la derivata su un grafico

Il segno di $f'(x_0)$ dice come è inclinata la tangente: se $f'(x_0) > 0$ la tangente sale, se $f'(x_0) < 0$ scende, se $f'(x_0) = 0$ è orizzontale. Guardiamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x$. Dalla definizione, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 3$, quindi $f'(x) = 3x^2 - 3$ (è la derivata di $x^3$ meno 3 volte quella di $x$: nel capitolo 6 vedremo che è una regola generale). La derivata si annulla per $x = \pm 1$: nei punti $(-1; 2)$ e $(1; -2)$ il grafico ha tangente orizzontale (Figura 5.6). Tra $-1$ e $1$ si ha $f'(x) < 0$ e il grafico scende; per $x < -1$ e per $x > 1$ si ha $f'(x) > 0$ e il grafico sale. Nell'origine la tangente ha pendenza $f'(0) = -3$.

Questa lettura funziona anche al contrario, e senza formule: dal grafico di una funzione si può disegnare quello della sua derivata, almeno nelle linee generali. Nel capitolo 6 dimostreremo, con il teorema di Lagrange, che il segno della derivata decide davvero dove una funzione cresce e dove decresce; nel capitolo 7 useremo questo risultato per studiare i grafici.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Il grafico di $f$ è la parabola con vertice V(2; 4), rivolta verso il basso, che passa per l'origine. Descrivi il grafico di $f'$ senza calcoli; poi verifica con la formula.

**Lettura del grafico.** Per $x < 2$ la parabola sale, e sempre meno ripida man mano che ci si avvicina al vertice: $f'$ è positiva e diminuisce. In $x = 2$ la tangente è orizzontale: $f'(2) = 0$. Per $x > 2$ la parabola scende, sempre più ripida: $f'$ è negativa e continua a diminuire. Il grafico di $f'$ è dunque una linea che scende e taglia l'asse $x$ in 2.

**Verifica.** La parabola è $f(x) = -x^2 + 4x$ (ha vertice (2; 4) e passa per O). Il rapporto incrementale è $\dfrac{-2xh - h^2 + 4h}{h} = -2x - h + 4$, quindi $f'(x) = -2x + 4$: una retta decrescente che si annulla in $x = 2$, come previsto.

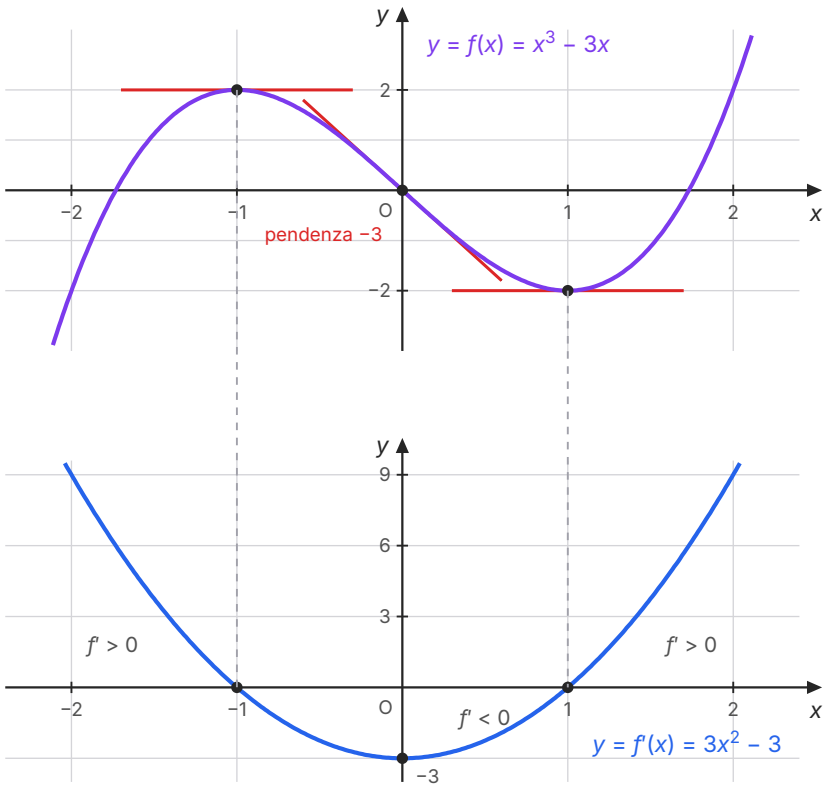



**Figura 5.6** In alto il grafico di $f(x) = x^3 - 3x$ con le tangenti in $x = -1$, 0 e 1; in basso, sullo stesso asse $x$, il grafico della derivata $f'(x) = 3x^2 - 3$ (scale diverse sugli assi $y$). Le tangenti orizzontali corrispondono agli zeri di $f'$; dove $f$ scende, $f'$ è negativa.

**APPROFONDIMENTO · NEWTON, LEIBNIZ E LA NASCITA DEL CALCOLO**

Isaac Newton elaborò il suo metodo a metà degli anni Sessanta del Seicento, quando l'università di Cambridge era chiusa per la peste. Pensava le grandezze come generate da un moto continuo nel tempo: le chiamava *fluenti*, e chiamava **flussioni** le loro velocità di variazione, indicate con un punto sopra la lettera. Nei *Principia* (1687) Newton presentò la sua meccanica in forma soprattutto geometrica; in apertura dell'opera descrive il tempo assoluto come qualcosa che scorre uniformemente, per sua natura, senza relazione con nulla di esterno: il fondale su cui scorrono anche le flussioni.

Gottfried Wilhelm Leibniz giunse al calcolo per un'altra via, negli anni Settanta dello stesso secolo, ragionando su differenze infinitamente piccole, che indicò con $dx$ e $dy$; introdusse anche il simbolo $\int$, una S allungata, iniziale di *summa*. Pubblicò per primo: la *Nova methodus pro maximis et minimis* uscì nel 1684 negli *Acta Eruditorum* di Lipsia, e conteneva le regole per derivare somme, prodotti e quozienti. Leibniz era anche un grande filosofo, e il suo principio di continuità, secondo cui in natura nulla avviene per salti (capitolo 4), si accorda bene con un calcolo fondato sul variare continuo delle grandezze.

Ne nacque una lunga e aspra disputa sulla priorità: i sostenitori di Newton accusarono Leibniz di aver copiato, e un rapporto della Royal Society, di cui Newton era presidente, diede ragione a Newton. Oggi gli storici riconoscono che le due scoperte furono indipendenti. Fu la notazione di Leibniz, più flessibile, a imporsi nell'Europa continentale, mentre i matematici inglesi restarono a lungo fedeli ai punti di Newton; nessuno dei due, però, sapeva dire con rigore che cosa fosse una quantità «infinitamente piccola». La risposta, come abbiamo visto nel capitolo 3, arrivò solo nell'Ottocento con il concetto di limite.

**SINTESI**

- La velocità media è $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; la velocità istantanea è il limite delle velocità medie su intervalli sempre più brevi. La tangente a una curva è la posizione limite delle secanti.
- Il rapporto incrementale $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ è la pendenza della secante per i punti di ascissa $x_0$ e $x_0 + h$, cioè la rapidità media di variazione di $f$.
- $f$ è derivabile in $x_0$ se il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ esiste ed è finito; il limite è la derivata $f'(x_0)$, indicata anche con $y'$ e $\frac{dy}{dx}$.
- La tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0$ è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- $f$ è derivabile in $x_0$ se e solo se le derivate destra e sinistra esistono, sono finite e sono uguali.
- Derivabile ⇒ continua; non vale il viceversa: punto angoloso ($|x|$), flesso a tangente verticale ($\sqrt[3]{x}$), cuspide ($\sqrt{|x|}$).
- La funzione derivata associa a ogni $x$ il numero $f'(x)$; il suo dominio può essere più piccolo di quello di $f$.
- Derivate fondamentali: $(k)' = 0$, $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(\text{sen } x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\text{sen } x$ (in radianti), $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $e$ è la base naturale perché la pendenza di $e^x$ in $(0; 1)$ vale esattamente 1.
- In fisica $v = s'$, $a = v'$, $i = q'$; in generale la derivata è il tasso di variazione istantaneo.
- Dove $f' > 0$ la tangente sale, dove $f' < 0$ scende, dove $f' = 0$ è orizzontale.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● Il rapporto incrementale $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ rappresenta:

   **A.** la pendenza della tangente nel punto di ascissa $x_0$
   **B.** la pendenza della secante per i punti di ascisse $x_0$ e $x_0 + h$
   **C.** l'incremento $\Delta y$ della funzione
   **D.** il valore della funzione in $x_0 + h$

2. ● Se $f'(3) = 0$, allora certamente:

   **A.** $f(3) = 0$
   **B.** $f$ ha in 3 un massimo o un minimo
   **C.** $f$ non è continua in 3
   **D.** la tangente al grafico nel punto di ascissa 3 è parallela all'asse $x$

3. ● Quale affermazione è vera per ogni funzione $f$ e ogni punto $x_0$?

   **A.** se $f$ è derivabile in $x_0$, è continua in $x_0$

   **B.** se $f$ è continua in $x_0$, è derivabile in $x_0$

   **C.** se $f$ non è continua in $x_0$, può comunque essere derivabile in $x_0$

   **D.** continuità e derivabilità in $x_0$ sono indipendenti

4. ● La funzione $y = |x - 2|$ nel punto $x = 2$ presenta:

   **A.** un flesso a tangente verticale

   **B.** una cuspide

   **C.** un punto angoloso

   **D.** una tangente orizzontale

5. ● Se $s(t)$ è la posizione di un corpo in moto rettilineo, $s'(t)$ è:

   **A.** la velocità istantanea

   **B.** l'accelerazione istantanea

   **C.** lo spazio percorso fino all'istante $t$

   **D.** la velocità media tra 0 e $t$

6. ● La formula $(\text{sen } x)' = \cos x$ vale:

   **A.** con $x$ in gradi e con $x$ in radianti

   **B.** solo con $x$ in gradi

   **C.** solo con $x$ in radianti

   **D.** solo per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Una funzione continua in $x_0$ è derivabile in $x_0$.

   b) Se $f'(x_0)$ esiste, la tangente nel punto di ascissa $x_0$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

   c) La derivata di $x^3$ è $3x$.

   d) Una retta tangente a una curva in un punto può incontrare la curva in altri punti.

   e) La funzione $\sqrt{x}$ è derivabile in $x = 0$.

8. ● Completa.

   a) Si dice che $f$ è _____ in $x_0$ se il limite per $h \to 0$ del _____ esiste ed è _____; tale limite si chiama _____ di $f$ in $x_0$.

   b) Un punto in cui $f$ è continua e le derivate destra e sinistra sono finite ma diverse si chiama _____.

   c) Se le derivate destra e sinistra sono infinite di segno opposto, il punto si chiama _____.

### Calcolare

9. ● Per $f(x) = x^2 + 1$ calcola il rapporto incrementale relativo a $x_0 = 1$ per $h = 0{,}5$, $h = 0{,}1$ e $h = 0{,}01$. Quale valore suggeriscono i risultati per $f'(1)$? Verificalo con la definizione.

10. ● Calcola con la definizione la derivata nel punto indicato.
a) $f(x) = 5x - 3$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = x^2 - 4x$, $x_0 = 3$; c) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = -1$.

11. ●● Calcola con la definizione la derivata nel punto indicato.
a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$; c) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$.

12. ●● Calcola con la definizione la funzione derivata.
a) $f(x) = x^2 + 3x$; b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; c) $f(x) = x^3 - x$.

13. ● Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa indicata.
a) $y = x^2$, $x_0 = -1$; b) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; c) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

14. ●● Usando la tabella delle derivate fondamentali, calcola la derivata di: a) $x^7$; b) $\frac{1}{x^3}$; c) $\sqrt[3]{x}$; d) $x\sqrt{x}$.
Suggerimento: scrivi ciascuna funzione come potenza $x^a$.

15. ●● Scrivi l'equazione della retta tangente: a) a $y = \text{sen } x$ in $x = 0$ e in $x = \pi$; b) a $y = e^x$ in $x = 0$; c) a $y = \ln x$ in $x = 1$. Che cosa noti confrontando le tangenti b) e c)?

16. ●● Calcola le derivate destra e sinistra nel punto $x_0 = 1$ e stabilisci se la funzione è derivabile.
a) $f(x) = x^2$ per $x \le 1$, $f(x) = 2x - 1$ per $x > 1$;
b) $g(x) = x^2$ per $x \le 1$, $g(x) = 3x - 2$ per $x > 1$.

17. ●● Stabilisci se la funzione è derivabile in $x = 0$ e, se non lo è, classifica il punto.
a) $y = |x| + x^2$; b) $y = \sqrt[3]{x^2}$; c) $y = x|x|$.

18. ●● Data $f(x) = x^2 - 4x + 1$, calcola $f'(x)$ con la definizione e trova i punti del grafico in cui la tangente è a) orizzontale; b) parallela alla retta $y = 2x$.

### Dimostrare e argomentare

19. ● Dimostra con la definizione che la derivata di $f(x) = mx + q$ è $m$ in ogni punto, e spiega perché il risultato è geometricamente evidente.

20. ●● Dimostra con la definizione che $(\cos x)' = -\text{sen } x$, usando la formula di addizione del coseno e i limiti notevoli del capitolo 3.

21. ●● Trova l'errore: «La funzione $f(x) = |x|$ è continua in 0, quindi è derivabile in 0; inoltre in 0 ha un minimo, quindi $f'(0) = 0$.»

22. ● Senza calcolare limiti, spiega perché la funzione $f(x) = x$ per $x < 1$, $f(x) = x + 1$ per $x \ge 1$ non è derivabile in $x = 1$.

### Problemi

23. ●● Un sasso cade da fermo e percorre $s(t) = 4{,}9t^2$ metri in $t$ secondi. a) Calcola la velocità media tra 1 s e 3 s. b) Calcola con la definizione la velocità istantanea a 3 s. c) Se il sasso è caduto da un'altezza di 44,1 m, dopo quanto tempo e con quale velocità (in m/s e in km/h) tocca terra?

24. ●● Una palla lanciata verso l'alto ha altezza $s(t) = 15t - 4{,}9t^2$ (metri, secondi). Calcola con la definizione la velocità $v(t)$ e l'accelerazione; trova l'istante in cui la palla raggiunge l'altezza massima e quanto vale questa altezza.

25. ●● Attraverso la sezione di un filo passa, fino all'istante $t$, la carica $q(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}5t$ (coulomb, secondi; dati inventati). a) Calcola l'intensità di corrente $i(t)$ e il suo valore a 2 s. b) Calcola l'intensità media di corrente tra 0 s e 2 s.

26. ●● Una colonia di batteri (dati simulati) conta $N(t) = 200e^t$ individui dopo $t$ ore. a) Calcola la velocità di crescita all'istante $t = 2$ h. b) Calcola l'aumento della colonia tra $t = 2$ h e $t = 3$ h e spiega perché è maggiore del valore trovato in a).

27. ● Il grafico di una funzione $f$ è una parabola con vertice V(2; 5), rivolta verso il basso. In quali intervalli $f'$ è positiva, in quali è negativa, dove si annulla? Che forma ha il grafico di $f'$?

### Verso l'esame

28. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un ciclista parte da fermo; la tabella dà la distanza percorsa (dati inventati): $t$ (s): 0 · 10 · 20 · 30 · 40; distanza (m): 0 · 80 · 200 · 360 · 520.
a) Calcola la velocità media negli intervalli [10; 20] e [20; 30].
b) Sapendo che nei primi 30 s il ciclista accelera sempre, tra quali valori è compresa la sua velocità all'istante 20 s? Quale stima proporresti?

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. La retta tangente al grafico di una funzione $f$ nel punto di ascissa 3 passa per i punti (3; 5) e (5; 9). Quanto valgono $f(3)$ e $f'(3)$? Scrivi l'equazione della tangente e usala per stimare $f(3{,}1)$.

30. ●● Spunto per il colloquio. Leibniz scriveva la derivata $\frac{dy}{dx}$, Newton metteva un punto sopra la lettera della grandezza che varia nel tempo. Spiega che cos'è la derivata partendo da un esempio fisico, illustra le due notazioni e la loro origine, e collega la nascita del calcolo alla fisica, alla filosofia e alla storia della cultura del Seicento.

31. ●●● Sfida. Trova le rette tangenti alla parabola $y = x^2$ che passano per il punto P(1; −3), esterno alla parabola. Suggerimento: la tangente nel punto di ascissa $a$ è $y = 2ax - a^2$; imponi il passaggio per P. Verifica poi il risultato con il metodo del discriminante di *Matematica 3*.

## PER APPROFONDIRE

- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: Fermat, Cartesio, Newton e Leibniz, e il lungo cammino dalle flussioni al limite.
- [MAOE] Maor, *e: The Story of a Number*: perché la funzione esponenziale di base *e* coincide con la propria derivata, e la disputa tra Newton e Leibniz.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con la derivata come limite e i suoi significati.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sul Seicento, da Galileo e Fermat a Newton e Leibniz.

# Glossario del capitolo

**Accelerazione**
La derivata della velocità rispetto al tempo, $a(t) = v'(t)$; si misura in $\mathrm{m/s^2}$.

**Cuspide**
Punto in cui una funzione continua ha derivate destra e sinistra infinite di segno opposto, come $\sqrt{|x|}$ in 0.

**Derivabile**
Si dice di $f$ in $x_0$ quando il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ esiste ed è finito.

**Derivata**
Il limite $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, quando esiste finito: la pendenza della tangente e il tasso istantaneo di variazione.

**Derivata destra, sinistra**
I limiti del rapporto incrementale per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$, indicati con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.

**Flesso a tangente verticale**
Punto in cui una funzione continua ha il rapporto incrementale che tende allo stesso infinito dai due lati: la tangente è verticale e il grafico la attraversa, come $\sqrt[3]{x}$ in 0.

**Flussione**
Nel linguaggio di Newton, la velocità con cui varia una grandezza («fluente») nel tempo; indicata con un punto sopra la lettera.

**Funzione derivata**
La funzione $f'$ che associa a ogni $x$ in cui $f$ è derivabile il numero $f'(x)$.

**Incremento**
La variazione $h = \Delta x$ data alla variabile, e la corrispondente variazione $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ della funzione.

**Intensità di corrente**
La derivata della carica che attraversa una sezione di un conduttore rispetto al tempo, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; si misura in ampere.

**Punto angoloso**
Punto in cui una funzione continua ha derivate destra e sinistra finite ma diverse: il grafico vi ha due semitangenti distinte.

**Rapporto incrementale**
Il quoziente $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$: la pendenza della secante per i punti di ascissa $x_0$ e $x_0 + h$.

**Retta tangente**
La posizione limite delle secanti per un punto P di una curva; per un grafico ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

**Tasso di variazione**
La rapidità con cui una grandezza cambia rispetto a un'altra: medio se è un rapporto incrementale, istantaneo se è una derivata.

**Velocità istantanea**
Il limite delle velocità medie su intervalli sempre più brevi che contengono l'istante considerato; è la derivata della posizione, $v(t) = s'(t)$.

**Velocità media**
Il rapporto $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ tra lo spazio percorso e il tempo impiegato.

# Soluzioni

**1.** B. È il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra due punti del grafico; la tangente è il suo limite.

**2.** D. $f'(3)$ è la pendenza della tangente. Non è detto che ci sia un estremo ($x^3$ in 0 ha derivata nulla ma nessun massimo o minimo), e una funzione derivabile è continua.

**3.** A. È il teorema del paragrafo «Derivabilità e continuità»; il viceversa è falso ($|x|$ in 0).

**4.** C. Per $h > 0$ il rapporto incrementale vale 1, per $h < 0$ vale $-1$: derivate laterali finite e diverse.

**5.** A. $v(t) = s'(t)$; l'accelerazione è la derivata della velocità.

**6.** C. Serve $\frac{\text{sen } h}{h} \to 1$, vero solo in radianti; in gradi compare il fattore $\frac{\pi}{180}$.

**7.** a) F: $|x|$ è continua in 0 ma non derivabile. b) V. c) F: $(x^3)' = 3x^2$. d) V: $y = 3x - 2$, tangente a $y = x^3$ in $(1; 1)$, la incontra in $(-2; -8)$. e) F: in 0 il rapporto incrementale destro tende a $+\infty$ (tangente verticale).

**8.** a) derivabile; rapporto incrementale; finito; derivata. b) punto angoloso. c) cuspide.

**9.** Il rapporto è $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$: 2,5; 2,1; 2,01. Suggerisce $f'(1) = 2$, e infatti $2 + h \to 2$.

**10.** a) $\frac{5h}{h} = 5$: $f'(2) = 5$. b) $f(3 + h) - f(3) = 2h + h^2$, rapporto $2 + h \to 2$: $f'(3) = 2$. c) $2(-1 + h)^2 - 2 = -4h + 2h^2$, rapporto $-4 + 2h \to -4$: $f'(-1) = -4$.

**11.** a) $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2(-2+h)} \to -\frac{1}{4}$. b) $\frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3} \to \frac{1}{6}$. c) $\frac{(2+h)^3 - 8}{h} = 12 + 6h + h^2 \to 12$.

**12.** a) Rapporto $2x + h + 3$: $f'(x) = 2x + 3$. b) $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$: $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$. c) Rapporto $3x^2 + 3xh + h^2 - 1$: $f'(x) = 3x^2 - 1$.

**13.** a) $f'(-1) = -2$, $f(-1) = 1$: $y = -2x - 1$. b) $f'(1) = -1$: $y = -x + 2$. c) $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f(4) = 2$: $y = \frac{1}{4}x + 1$.

**14.** a) $7x^6$. b) $(x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$. c) $(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$. d) $(x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

**15.** a) $\cos 0 = 1$: $y = x$; $\cos \pi = -1$: $y = -x + \pi$. b) $y = x + 1$. c) $y = x - 1$. Le due tangenti sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$, come i grafici di $e^x$ e di $\ln x$, che sono funzioni inverse.

**16.** a) $f(1) = 1$ e $f$ è continua in 1. Sinistra: $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h \to 2$; destra: $\frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = 2$. Uguali: $f$ è derivabile e $f'(1) = 2$. b) $g$ è continua in 1 $(3 - 2 = 1)$; derivata sinistra 2, destra $\frac{3(1+h) - 2 - 1}{h} = 3$: diverse, punto angoloso.

**17.** a) Rapporto $\frac{|h| + h^2}{h}$: tende a 1 da destra e a $-1$ da sinistra: punto angoloso. b) Rapporto $\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$: tende a $+\infty$ da destra e a $-\infty$ da sinistra: cuspide. c) Rapporto $\frac{h|h|}{h} = |h| \to 0$: derivabile, $f'(0) = 0$.

**18.** Rapporto $2x + h - 4$: $f'(x) = 2x - 4$. a) $2x - 4 = 0$ per $x = 2$: punto $(2; -3)$. b) $2x - 4 = 2$ per $x = 3$: punto $(3; -2)$.

**19.** $\frac{m(x+h) + q - (mx + q)}{h} = \frac{mh}{h} = m$ per ogni $h \neq 0$, quindi il limite è $m$. Le secanti di una retta sono la retta stessa: la tangente a una retta in ogni suo punto è la retta, con pendenza $m$.

**20.** $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$
$\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h} =$
$\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\operatorname{sen} x\cdot\frac{\operatorname{sen} h}{h}$. Per $h\to 0$:
$\frac{\cos h-1}{h}\to 0$ e $\frac{\operatorname{sen} h}{h}\to 1$, quindi il limite è
$\cos x\cdot 0-\operatorname{sen} x\cdot 1=-\operatorname{sen} x$. c.v.d.

**21.** Due errori. La continuità non implica la derivabilità: le derivate laterali di $|x|$ in 0 valgono $-1$ e 1, quindi $f'(0)$ non esiste. E un minimo non implica $f'=0$: lo implica solo se la funzione è derivabile in quel punto, interno al dominio (lo vedremo nel capitolo 6, teorema di Fermat).

**22.** $f(1)=2$, ma per $x\to 1^-$ si ha $f(x)\to 1$: $f$ ha un salto in 1, quindi non è continua; poiché una funzione derivabile è continua, $f$ non è derivabile in 1.

**23.** a) $\frac{44{,}1-4{,}9}{2}=19{,}6$ m/s. b)
$\frac{4{,}9(3+h)^2-44{,}1}{h}=29{,}4+4{,}9h\to 29{,}4$ m/s. c)
$4{,}9t^2=44{,}1$ dà $t=3$ s; la velocità è 29,4 m/s, cioè $29{,}4\cdot 3{,}6=105{,}84$ km/h.

**24.** $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=15-9{,}8t-4{,}9h$, quindi
$v(t)=15-9{,}8t$ m/s; $\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=-9{,}8$, quindi
$a=-9{,}8$ m/s$^2$. Altezza massima per $v=0$:
$t=\frac{15}{9{,}8}=\frac{75}{49}\approx 1{,}53$ s; $s(\frac{75}{49})=\frac{1125}{98}\approx 11{,}5$ m.

**25.** a) Rapporto $0{,}8t+0{,}4h+0{,}5$: $i(t)=0{,}8t+0{,}5$ A; $i(2)=2{,}1$ A. b) $q(2)=1{,}6+1=2{,}6$ C; intensità media $\frac{2{,}6}{2}=1{,}3$ A.

**26.** a) $N'(t)=200e^t$; $N'(2)=200e^2\approx 1478$ batteri all'ora. b) $N(3)-N(2)=200e^2(e-1)\approx 2539$ batteri. È di più perché la velocità di crescita, uguale a $N(t)$, aumenta durante l'ora: a $t=2$ h è la più bassa dell'intervallo.

**27.** $f'>0$ per $x<2$ (la parabola sale), $f'(2)=0$ (tangente orizzontale nel vertice), $f'<0$ per $x>2$. La pendenza diminuisce sempre: il grafico di $f'$ è una retta decrescente che taglia l'asse $x$ in 2 (per $f(x)=-a(x-2)^2+5$, con $a>0$, si trova $f'(x)=-2a(x-2)$).

**28.** a) $\frac{200-80}{10}=12$ m/s e $\frac{360-200}{10}=16$ m/s. b) Poiché la velocità cresce, a 20 s è maggiore della media su [10; 20] e minore di quella su [20; 30]: tra 12 e 16 m/s. Una buona stima è la media sull'intervallo [10; 30], centrato in 20 s: $\frac{360-80}{20}=14$ m/s.

**29.** $f(3)=5$, perché il punto di tangenza è (3; 5). $f'(3)$ è la pendenza della tangente: $\frac{9-5}{5-3}=2$. Tangente: $y=5+2(x-3)=2x-1$. Stima: $f(3{,}1)\approx 2\cdot 3{,}1-1=5{,}2$.

**30.** Traccia: 1) l'esempio del sasso: velocità media $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ e velocità istantanea come suo limite; 2) la definizione $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e la tangente come limite delle secanti; 3) Newton: grandezze «fluenti» nel tempo e loro «flussioni», il punto sulla lettera, i *Principia* (1687) e il tempo assoluto che scorre uniforme; 4) Leibniz: differenziali d$x$, d$y$, la *Nova methodus* (1684), una notazione che ricorda il rapporto e che si impose; 5) la disputa sulla priorità e la Royal Society; Galileo e la caduta dei gravi, la rivoluzione scientifica e la matematizzazione della natura; 6) il problema filosofico degli infinitesimi (Zenone, Berkeley) risolto solo dal limite nell'Ottocento.

**31.** La tangente in $(a;a^2)$ ha pendenza $2a$: $y=a^2+2a(x-a)=2ax-a^2$. Passa per P(1; −3) se $-3=2a-a^2$, cioè $a^2-2a-3=0$: $a=3$ o $a=-1$. Tangenti: $y=6x-9$ (in (3; 9)) e $y=-2x-1$ (in (−1; 1)). Verifica: la retta per P di pendenza $m$, $y=mx-m-3$, messa a sistema con la parabola dà $x^2-mx+m+3=0$; $\Delta=m^2-4m-12=0$ per $m=6$ o $m=-2$, gli stessi valori.