CAPITOLO

4

Le funzioni continue

Un grafico continuo non salta nessun valore: per arrivare in alto deve passare da tutte le quote intermedie. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la continuità di una funzione in un punto e in un intervallo e usarla per calcolare i limiti.
2. Riconoscere e classificare i punti di discontinuità e prolungare per continuità una funzione.
3. Enunciare i teoremi di Weierstrass, dei valori intermedi e degli zeri, con un controesempio per ogni ipotesi.
4. Usare il teorema degli zeri e la bisezione per stabilire e approssimare le soluzioni di un'equazione.
5. Trovare gli asintoti verticali, orizzontali e obliqui di una funzione.
6. Tracciare il grafico probabile di una funzione e collegare la continuità al motto «natura non facit saltus».

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 La continuità 2
4.2 I punti di discontinuità 4
4.3 Teoremi sulle funzioni continue 8
4.4 Gli asintoti 13
4.5 Il grafico probabile di una funzione 16

Matematica 5 · Parte II · Successioni, limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 4: Le funzioni continue · pagine 101–124 del volume completo · estratto per lo studio

Accendi una lampada con un interruttore: la luce passa da spenta ad accesa in un istante che, ai nostri occhi, non ha durata. Sali invece una scala a chiocciola: la tua altezza dal pavimento cambia senza salti, passando per tutti i valori intermedi. Nel primo caso il fenomeno *salta*, nel secondo varia *con continuità*. Anche le tariffe conoscono i salti: un parcheggio che fa pagare «ogni ora o frazione» costa lo stesso dopo 61 minuti e dopo 119, ma un minuto in più di 120 fa scattare il prezzo dell'ora successiva.

Nel capitolo precedente abbiamo imparato a calcolare il limite di una funzione in un punto. Ora usiamo i limiti per dire con precisione che cosa significa che il grafico di una funzione «non si spezza». Ne seguiranno tre teoremi dall'aria ovvia, che però hanno richiesto all'analisi dell'Ottocento uno sforzo di rigore: una funzione continua su un intervallo chiuso ha un massimo e un minimo, assume tutti i valori intermedi e, se cambia segno, si annulla. Infine metteremo insieme limiti, asintoti e segno per disegnare il *grafico probabile* di una funzione: il primo vero ritratto di una curva ottenuto con gli strumenti dell'analisi, che i capitoli sulle derivate completeranno.

4.1 La continuità

4.1.1 La definizione

Nel capitolo 3 abbiamo sottolineato più volte che il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non dipende da $f(x_0)$: il valore nel punto può mancare, oppure essere diverso dal limite. La continuità è proprio il caso in cui queste due informazioni coincidono.

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 (punto x_0 compreso). Si dice che f è **continua in un punto** x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La definizione contiene tre richieste, e ciascuna può fallire: **1)** $f(x_0)$ deve esistere, cioè x_0 deve appartenere al dominio; **2)** il limite per $x \to x_0$ deve esistere ed essere finito; **3)** il limite e il valore devono essere uguali. Nel linguaggio della definizione di limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni x del dominio con $|x - x_0| < \delta$. Detto in parole: se x è abbastanza vicino a x_0, il valore $f(x)$ è vicino quanto vogliamo a $f(x_0)$; piccole variazioni della variabile producono piccole variazioni della funzione.

Se il punto è un estremo del dominio, o se interessa un solo lato, si usano i limiti unilaterali: f è **continua da destra** in x_0 se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, **continua da sinistra** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Una funzione è continua in x_0 se e solo se lo è sia da destra sia da sinistra. Infine f è **continua in un intervallo** se è continua in ogni suo punto; in un intervallo chiuso $[a; b]$ si chiede, negli estremi, la continuità da destra in a e da sinistra in b.

Graficamente, una funzione continua in un intervallo ha un grafico che si traccia «senza staccare la matita dal foglio». È un'immagine utile, che useremo spesso, ma non è la definizione: la definizione parla di limiti, punto per punto, e vale anche per funzioni il cui grafico nessuna matita saprebbe disegnare (ne vedremo un esempio nell'Approfondimento alla fine del capitolo).

4.1.2 Le funzioni elementari sono continue

Verificare la definizione punto per punto sarebbe faticoso. Per fortuna vale un risultato generale, che enunciamo senza dimostrazione: tutte le funzioni che conosci sono continue nel loro dominio.

IN SINTESI

Funzioni continue. Sono continue in ogni punto del loro dominio:

- i polinomi (in tutto $\mathbb{R}$) e le funzioni razionali fratte (dove il denominatore non si annulla);
- le radici $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ... e il valore assoluto $|x|$;
- le funzioni goniometriche sen x, cos x, tg x e le loro inverse arcsen x, arccos x, arctg x;
- le funzioni esponenziali a^x e logaritmiche $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Teorema (operazioni). Ipotesi: f e g sono continue in x_0. **Tesi:** sono continue in x_0 anche $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e, se $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$. Inoltre, se g è continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$, la composta $f(g(x))$ è continua in x_0.

La conseguenza pratica è grande: **il limite di una funzione continua si calcola per sostituzione**. Nel capitolo 3 ci siamo concentrati sui casi difficili, le forme indeterminate e i punti esclusi dal dominio, proprio perché in tutti gli altri basta calcolare il valore.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+5}$; b) $\lim_{x\to 0} e^{\cos x}$; c) determina k in modo che la funzione sia continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 + k \quad \text{se } x \le 1, \qquad f(x) = 3x - 1 \quad \text{se } x > 1.$$

Soluzione. a) $\sqrt{x^2+5}$ è la composta di un polinomio e della radice quadrata, continua dove $x^2 + 5 \ge 0$, cioè ovunque: il limite è $\sqrt{4+5} = 3$. b) cos x è continua e e^x anche: il limite è $e^{\cos 0} = e^1 = e$.

c) Per $x < 1$ e per $x > 1$ la funzione coincide con un polinomio, quindi è continua; resta il punto di raccordo $x = 1$. Calcoliamo i due limiti unilaterali e il valore:

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2 + k) = 1 + k = f(1), \qquad \lim_{x\to 1^+} (3x - 1) = 2.$$

La funzione è continua in 1 se e solo se $1 + k = 2$, cioè $k = 1$. Per ogni altro valore di k il grafico ha in $x = 1$ un salto di ampiezza $|1 - k|$.

4.2 I punti di discontinuità

4.2.1 Una convenzione

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un **punto di discontinuità** per f. Nella scuola italiana si usa una convenzione che conviene dichiarare subito: si chiamano punti di discontinuità anche punti *esclusi* dal dominio, purché la funzione sia definita in tutti i punti vicini (cioè in un intorno di x_0 privato di x_0). Così $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (in ogni punto del dominio vale la definizione) e, secondo la convenzione, ha in $x = 0$ un punto di discontinuità. Non c'è contraddizione: la prima affermazione riguarda i punti del dominio, la seconda un punto che il dominio non contiene ma attorno al quale la funzione vive.

I punti di discontinuità si classificano in tre *specie*, secondo il comportamento dei limiti destro e sinistro (Figura 4.1).

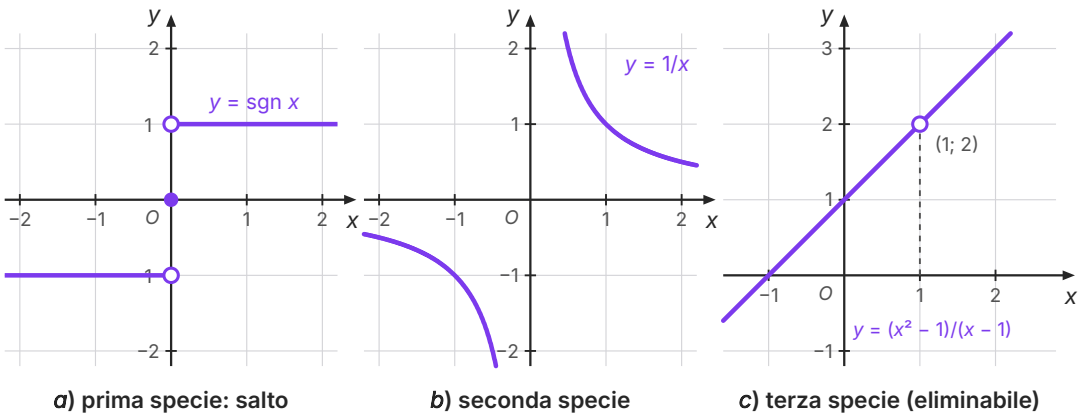


Figura 4.1 Le tre specie di discontinuità in x_0. a) La funzione segno: limiti unilaterali −1 e 1, finiti e diversi, e sgn 0 = 0. b) $y = \frac{1}{x}$: i limiti unilaterali in 0 sono infiniti. c) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ coincide con $y = x + 1$ tranne in $x = 1$, dove manca il punto (1; 2): il limite esiste finito.

4.2.2 Prima specie: il salto

Il punto x_0 è una **discontinuità di prima specie** se i limiti destro e sinistro esistono, sono finiti, ma sono diversi:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1, \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2, \qquad l_1 \neq l_2.$$

Il numero $|l_2 - l_1|$ si chiama **salto** della funzione in x_0. L'esempio tipico è la funzione segno, sgn $x = -1$ per $x < 0$, sgn 0 = 0, sgn $x = 1$ per $x > 0$: in 0 il salto è 2, qualunque valore si attribuisca alla funzione nel punto. Anche $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ha in 0 un salto 2 (vale −1 a sinistra e 1 a destra) ma non è definita in 0. Le tariffe «a scaglioni» sono funzioni con discontinuità di prima specie (Figura 4.2).

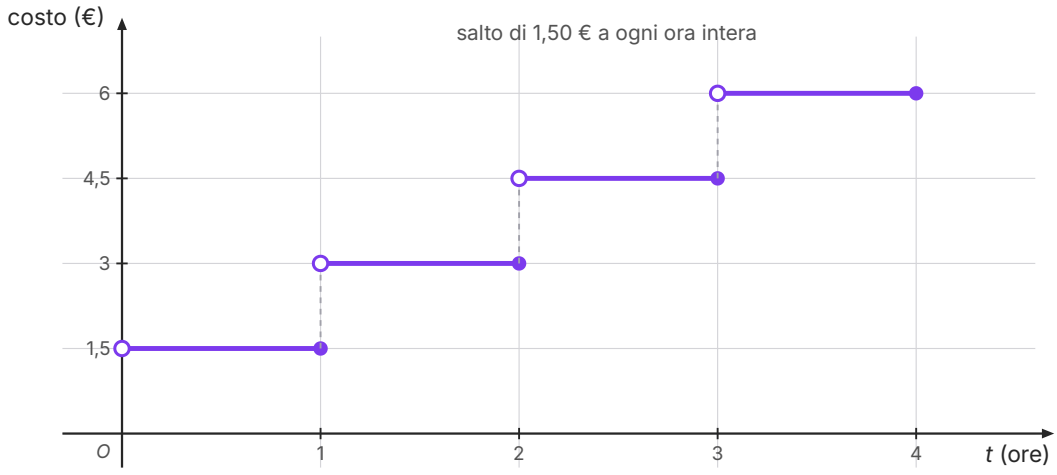


Figura 4.2 La tariffa di un parcheggio: 1,50 € per ogni ora o frazione di ora (dati inventati). Il costo è $C(t) = 1{,}5$ per $0 < t \le 1$, $C(t) = 3$ per $1 < t \le 2$ e così via: in $t = 1, 2, 3$ la funzione ha discontinuità di prima specie con salto 1,50 €, ed è continua da sinistra.

4.2.3 Seconda specie

Il punto x_0 è una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti unilaterali è infinito oppure non esiste. Per $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in 0 i limiti sono $-\infty$ da sinistra e $+\infty$ da destra. Per $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ in 0 basta un lato: da sinistra $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ e $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, da destra $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ e $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$. Infine $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, che nel capitolo 3 abbiamo visto oscillare sempre più fitta tra -1 e 1 vicino a 0, non ha limite né da destra né da sinistra: anche questa è una discontinuità di seconda specie, pur senza nessun valore infinito.

4.2.4 Terza specie: la discontinuità eliminabile

Il punto x_0 è una **discontinuità di terza specie**, detta anche **discontinuità eliminabile**, se il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ esiste ed è finito, ma f non è definita in x_0 oppure $f(x_0) \neq l$. Il nome dice che cosa si può fare: basta definire (o ridefinire) la funzione nel punto ponendo $f(x_0) = l$, e la nuova funzione è continua in x_0. Questa operazione si chiama **prolungamento per continuità**.

Così $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ coincide con $x + 1$ per $x \neq 1$ e il suo limite in 1 è 2: ponendo $f(1) = 2$ si ottiene la retta $y = x + 1$ intera. Più interessante è $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, che in 0 tende a 1 per il limite notevole del

capitolo 3: la funzione che vale $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ per $x \neq 0$ e 1 per $x = 0$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, e nessuna semplificazione algebrica avrebbe potuto «togliere» il problema.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova e classifica i punti di discontinuità di $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

Soluzione. La funzione è razionale, quindi continua nel suo dominio; il denominatore si annulla in $x = \pm 1$, e sono i soli candidati. Scomponiamo: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ e $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, quindi per $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}.$$

In $x = 1$: $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1-2}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$, finito, e $f(1)$ non esiste: discontinuità di **terza specie**, eliminabile ponendo $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

In $x = -1$: il numeratore tende a -3 e il denominatore $x + 1$ tende a 0, positivo da destra e negativo da sinistra. Quindi $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$: discontinuità di **seconda specie**.

COLLEGAMENTI

Fisica · Salti veri e salti apparenti. Nello schema di un circuito l'interruttore ideale porta la corrente da zero al suo valore in un istante: un salto di prima specie. Nella realtà ogni grandezza fisica impiega un tempo, anche piccolissimo, per cambiare. Quando si chiude il circuito di un condensatore attraverso una resistenza, la carica sulle armature cresce gradualmente, tanto più lentamente quanto più grandi sono resistenza e capacità, come vedrai in fisica: la funzione carica–tempo è continua. Il modello «a salto» è utile quando il tempo di variazione è trascurabile rispetto a quello che ci interessa.

Economia · Gli scaglioni. Tariffe postali per fasce di peso, prezzi dei biglietti per fasce d'età, parcheggi a ore: sono funzioni costanti a tratti, con discontinuità di prima specie al confine fra due fasce. Il salto spiega certi comportamenti: chi spedisce un pacco appena oltre il limite di una fascia ha interesse a togliere qualcosa, perché pochi grammi costano l'intero salto.

Filosofia · «Natura non facit saltus». Il motto latino, «la natura non fa salti», è legato tradizionalmente al nome di Leibniz, che in più scritti difese una *legge di continuità*: in natura ogni cambiamento avviene per gradi, attraverso tutti gli stati intermedi. L'idea fu ripresa da naturalisti e filosofi; Darwin, nell'*Origine delle specie*, la usò per descrivere l'evoluzione come accumulo di piccole variazioni. Il Novecento l'ha messa in crisi proprio nella fisica: nella teoria dei quanti l'energia di un atomo può assumere soltanto valori separati, e l'atomo passa dall'uno all'altro «saltando». La matematica non decide chi abbia ragione sulla natura; offre però il linguaggio per porre la domanda con precisione: continuità significa che il limite coincide con il valore, salto significa limiti unilaterali diversi.

4.3 Teoremi sulle funzioni continue

I tre teoremi di questo paragrafo riguardano funzioni continue su un *intervallo chiuso e limitato* $[a; b]$. Li enunciamo senza dimostrazione: le dimostrazioni usano la completezza di $\mathbb{R}$, la proprietà delle classi contigue che hai incontrato in *Matematica 2*, e appartengono ai corsi universitari. Per ciascuno vedremo che cosa significa sul grafico e, togliendo un'ipotesi alla volta, che cosa può andare storto.

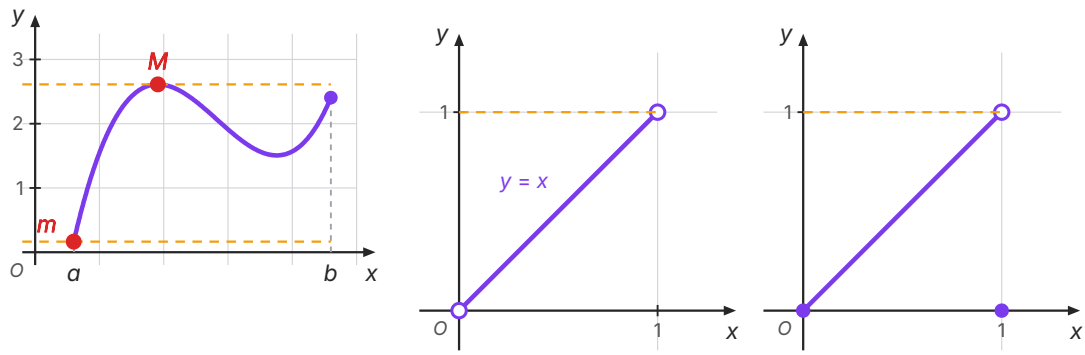
4.3.1 Il teorema di Weierstrass

Un numero M è il **massimo assoluto** di f in un intervallo se esiste un punto x_M dell'intervallo con $f(x_M) = M$ e $f(x) \le M$ per ogni x dell'intervallo; il **minimo assoluto** m si definisce in modo analogo con $f(x) \ge m$. Non è detto che esistano: $f(x) = x$ nell'intervallo $]0; 1[$ assume valori vicini quanto vogliamo a 1, ma non assume mai 1, e nessun altro valore è il più grande.

IN SINTESI

Teorema di Weierstrass. Ipotesi: f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. **Tesi:** f ha in $[a; b]$ un massimo assoluto M e un minimo assoluto m; quindi $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a; b]$.

Il massimo e il minimo possono essere assunti all'interno o negli estremi (nella Figura 4.3a il massimo è interno, il minimo è in a); possono essere assunti in più punti (pensa a sen x su $[0; 4\pi]$); se f è costante coincidono. Il teorema garantisce che esistono, non dice dove sono: per trovarli serviranno le derivate (capitolo 7).



a) continua su $[a; b]$ *b*) intervallo aperto $]0; 1[$ *c*) discontinua in $x = 1$

Figura 4.3 Il teorema di Weierstrass e le sue ipotesi. a) Una funzione continua su $[a; b]$ ha massimo M e minimo m. b) $y = x$ sull'intervallo aperto $]0; 1[$: nessun massimo e nessun minimo. c) La funzione che vale x per $0 \le x < 1$ e 0 per $x = 1$ è definita su $[0; 1]$, ma è discontinua in 1 e non ha massimo.

Nessuna ipotesi si può togliere. Se l'intervallo è aperto il teorema può fallire, come per $y = x$ su $]0; 1[$ (figura b). Se l'intervallo non è limitato può fallire: $y = x$ su $[0; +\infty[$ non ha massimo. Se la funzione non è continua anche in un solo punto può fallire (figura c). E su un intervallo non chiuso una funzione continua può perfino «esplodere»: $\frac{1}{x}$ su $]0; 1]$ assume valori grandi quanto si vuole. Attenzione al verso: le ipotesi sono *sufficienti*, non necessarie. Anche senza di esse il massimo o il minimo possono esistere ($y = x^2$ su $]-1; 2[$ ha minimo 0 in $x = 0$); il teorema dice soltanto che, con le ipotesi, esiste di sicuro.

4.3.2 Il teorema dei valori intermedi

IN SINTESI

Teorema dei valori intermedi. Ipotesi: f è continua in $[a; b]$; m e M sono il suo minimo e il suo massimo. **Tesi:** per ogni numero y_0 con $m \le y_0 \le M$ esiste almeno un $x_0 \in [a; b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

In altre parole una funzione continua su un intervallo non «salta» nessun valore: l'immagine di $[a; b]$ è l'intero intervallo $[m; M]$. Se un'escursionista parte da quota 800 m e arriva a 2000 m, a un certo istante si è trovata a quota 1500 m, perché la quota è una funzione continua del tempo. Con un salto il teorema cade: la tariffa della Figura 4.2 passa da 1,50 € a 3 € senza mai valere 2 €.

4.3.3 Il teorema degli zeri

Il caso più utile è quello in cui il valore intermedio è lo zero. Se f è negativa in a e positiva in b (o viceversa), il valore 0 è compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, quindi fra minimo e massimo, e viene assunto. Lo si chiama di solito teorema di Bolzano, dal matematico praghese Bernard Bolzano, che nel 1817 ne pubblicò una dimostrazione fondata non sull'intuizione geometrica ma soltanto sulle proprietà dei numeri.

IN SINTESI

Teorema degli zeri. Ipotesi: f è continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. **Tesi:** esiste almeno un $c \in]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.

Il teorema serve a dimostrare che un'equazione ha soluzioni anche quando non sappiamo risolverla. L'equazione $x = \cos x$ non si risolve con nessuna formula. Ma $f(x) = x - \cos x$ è continua, $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 - \cos 1 \approx 0{,}46 > 0$ (con il coseno in radianti): c'è una soluzione fra 0 e 1. Ancora una volta la continuità è indispensabile: la funzione che vale -1 per $x < 0$ e 1 per $x \ge 0$ è negativa in -1, positiva in 1 e non si annulla mai.

ERRORE FREQUENTE

Il teorema degli zeri dà l'**esistenza**, non l'unicità: $f(x) = x^3 - x$ su $[-2; 2]$ cambia segno e ha tre zeri, -1, 0 e 1. E non si può rovesciare: se $f(a) \cdot f(b) > 0$ la funzione può comunque annullarsi, come $x^2 - 1$ su $[-2; 2]$, positiva negli estremi e nulla in ± 1. Un terzo errore è dimenticare la continuità: $\dfrac{1}{x}$ vale -1 in -1 e 1 in 1, ma non ha zeri, perché non è continua su $[-1; 1]$.

4.3.4 La bisezione: dal teorema al calcolo

In *Matematica 4* (cap. 1) hai approssimato le soluzioni di un'equazione con il **metodo di bisezione**. Ora sappiamo perché funziona, e il metodo diventa a sua volta un'idea di dimostrazione del teorema degli zeri. Si parte da $[a; b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, si calcola f nel punto medio m e si tiene la metà fra $[a; m]$ e $[m; b]$ ai cui estremi f ha segni opposti (se $f(m) = 0$ si è trovato lo zero). Per il teorema la nuova metà contiene ancora uno zero. Ripetendo, si ottengono intervalli uno dentro l'altro, di ampiezza $\dfrac{b-a}{2^n}$ dopo n passi, che si stringono su un solo numero: è quello lo zero (Tabella 4.1 e Figura 4.4).

Tabella 4.1 Bisezione per $x - \cos x = 0$ su $[0; 1]$. A ogni passo si tiene la metà dell'intervallo ai cui estremi f ha segni opposti; l'ampiezza si dimezza.

passo	a	b	punto medio m	$f(m)$	ampiezza $b - a$
0	0	1	0,5	−0,3776	1
1	0,5	1	0,75	+0,0183	0,5
2	0,5	0,75	0,625	−0,1860	0,25
3	0,625	0,75	0,6875	−0,0853	0,125
4	0,6875	0,75	0,71875	−0,0339	0,0625
5	0,71875	0,75	0,734375	−0,0079	0,03125
6	0,734375	0,75	0,742188	+0,0052	0,015625

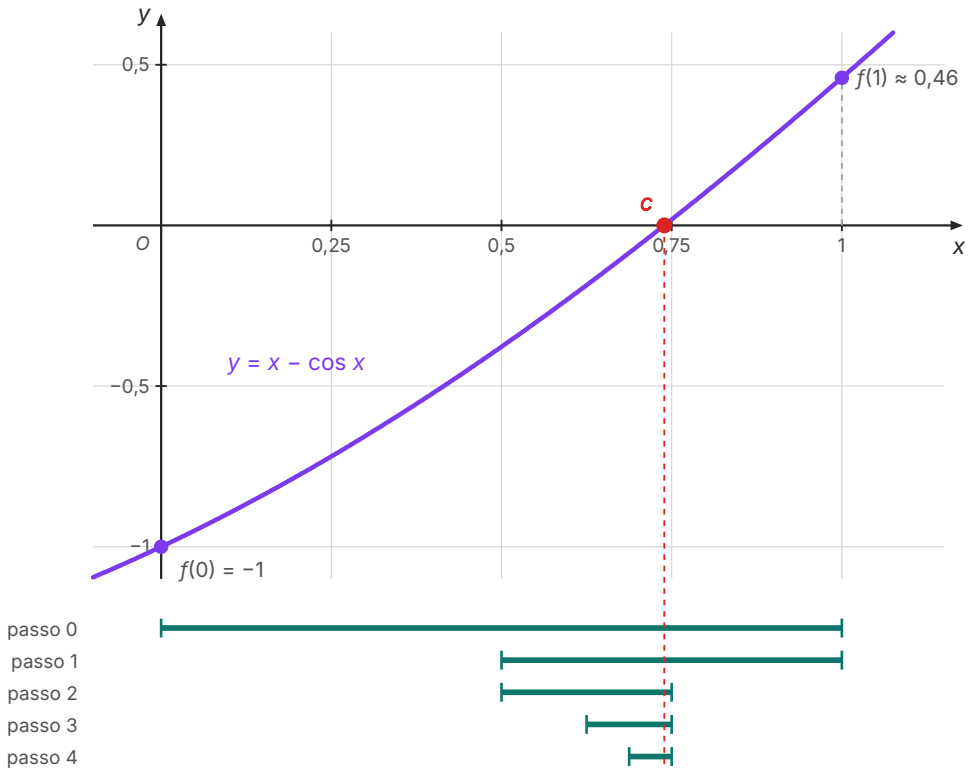


Figura 4.4 Il teorema degli zeri per $f(x) = x - \cos x$ su $[0; 1]$: $f(0) = -1$ e $f(1) \approx 0{,}46$ hanno segni opposti, e il grafico attraversa l'asse in $c \approx 0{,}739$. Sotto, i primi intervalli della bisezione: ognuno è metà del precedente e contiene c.

Dopo sei passi sappiamo che la soluzione sta in $[0{,}734375;\ 0{,}75]$; con altri passi si trova $c = 0{,}739085\ldots$ La bisezione è lenta (ogni passo guadagna un dimezzamento, cioè circa una cifra decimale ogni tre o quattro passi) ma sicura, e un foglio di calcolo la esegue in un attimo.

4.3.5 Quante soluzioni?

Il teorema degli zeri conta le soluzioni «dal basso»: ogni cambio di segno fra punti diversi ne garantisce una. Per contarle «dall'alto» servono altre informazioni. Una è il grado: un polinomio di grado n ha al più n zeri. Un'altra è la monotonia: una funzione strettamente crescente (o decrescente) su un intervallo è iniettiva (*Matematica 4*, cap. 1), quindi vi si annulla al più una volta.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che l'equazione $x^3 + x - 3 = 0$ ha una e una sola soluzione reale e trova l'intero n tale che la soluzione stia in $]n; n+1[$.

Soluzione. *Esistenza.* $f(x) = x^3 + x - 3$ è un polinomio, quindi continua. Proviamo valori interi: $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 7 > 0$. Per il teorema degli zeri c'è una soluzione in $]1; 2[$, quindi $n = 1$.

Unicità. x^3 e x sono strettamente crescenti in $\mathbb{R}$, e la somma di funzioni strettamente crescenti lo è ancora; sottrarre 3 trasla il grafico in basso senza cambiare la monotonia. Una funzione strettamente crescente non assume due volte lo stesso valore: lo zero è unico. (Una calcolatrice dà $x \approx 1{,}213$.)

4.4 Gli asintoti

4.4.1 Asintoti verticali e orizzontali

Nel capitolo 3 abbiamo incontrato i primi due tipi di asintoto. La retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** del grafico di f se almeno uno dei limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ è $+\infty$ o $-\infty$. La retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale** se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, con l finito. Ora possiamo dire dove cercarli.

- Gli asintoti verticali vanno cercati nei punti di discontinuità di seconda specie e negli estremi finiti del dominio che non gli appartengono: i punti esclusi dal dominio dove si annulla un denominatore, l'estremo $x = 0$ del dominio di $\ln x$, i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ per $\operatorname{tg} x$. Non ogni zero del denominatore dà un asintoto: nell'esempio svolto sui punti di discontinuità $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ ha l'asintoto $x = -1$, ma in $x = 1$ ha soltanto un «buco» (discontinuità eliminabile).
- Gli asintoti orizzontali si trovano calcolando i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, separatamente. Una funzione ne ha al massimo due, uno per lato: $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ tende a 0 per $x \to -\infty$ e a 1 per $x \to +\infty$, e ha i due asintoti $y = 0$ e $y = 1$.
- Un asintoto orizzontale può essere *attraversato* dal grafico: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ha asintoto $y = 0$ da entrambi i lati, eppure vale 0 in $x = 0$. L'asintoto descrive il comportamento «all'infinito», non vieta alla curva di toccare la retta altrove.

4.4.2 L'asintoto obliquo

Alcune funzioni tendono a $+\infty$ o a $-\infty$ ma lo fanno «come una retta». La funzione $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ ha la stessa velocità di crescita di x, e la divisione fra polinomi (con la regola di Ruffini, *Matema-*

tica 4, cap. 1) dice di più:

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Per $x \to \pm\infty$ l'ultimo termine tende a 0: la distanza verticale fra il grafico e la retta $y = x + 1$ diventa piccola quanto vogliamo (Figura 4.5). In generale la retta $y = mx + q$, con $m \neq 0$, è un **asintoto obliquo** del grafico di f per $x \to +\infty$ se

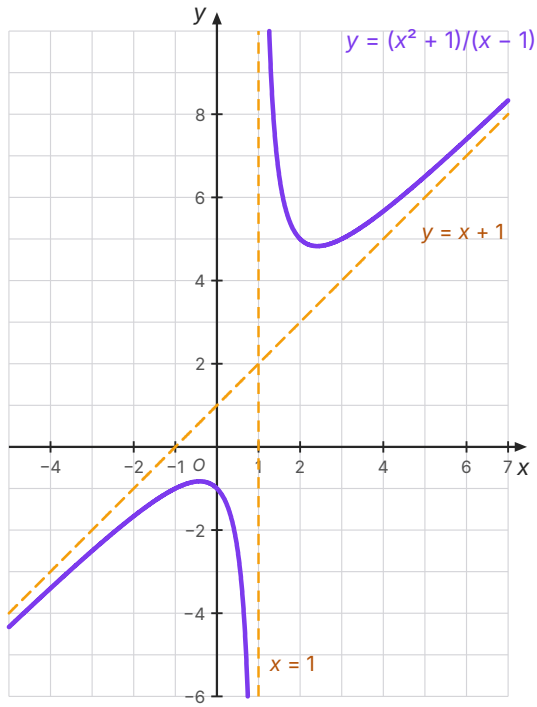
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0,$$

e analogamente per $x \to -\infty$. Come trovare m e q senza conoscere già la retta? Se la differenza tende a 0, dividendo per x si ottiene che $\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}$ tende a 0, cioè che $\frac{f(x)}{x}$ tende a m; poi $f(x) - mx$ deve tendere a q. Si calcolano quindi, nell'ordine,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

L'asintoto obliquo esiste solo se **entrambi** i limiti esistono finiti e $m \neq 0$ (con $m = 0$ si ritrova l'asintoto orizzontale $y = q$). Conviene cercarlo soltanto quando $f(x) \to \pm\infty$, e può mancare anche allora. Per $f(x) = x^2$ il primo limite è già infinito: la parabola cresce più in fretta di ogni retta. Per $f(x) = \ln x$ il primo limite vale 0 (gerarchia degli infiniti), ma $\ln x$ non ha limite finito: niente asintoto. Per $f(x) = x + \sqrt{x}$ si trova $m = 1$, ma $f(x) - x = \sqrt{x} \to +\infty$: la curva si allontana da ogni retta di pendenza 1, anche se «tende alla direzione» della bisettrice.

Per le funzioni razionali la regola è semplice: c'è un asintoto obliquo quando il grado del numeratore supera di **uno** quello del denominatore, e la retta è il quoziente della divisione fra i due polinomi, perché il resto diviso per il denominatore tende a 0.



Per $x \to \pm\infty$ la differenza $f(x) - (x+1) = 2/(x-1)$ tende a 0: la curva sta sopra l'asintoto a destra, sotto a sinistra.

Figura 4.5 Il grafico di $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ con l'asintoto verticale $x = 1$ e l'asintoto obliquo $y = x + 1$ (stessa scala sui due assi).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova gli asintoti di $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x+1}$.

Soluzione. Il dominio è $x \neq -1$. In $x = -1$ il numeratore vale $2 + 3 = 5$ e il denominatore tende a 0: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, e la retta $x = -1$ è asintoto verticale. Per $x \to \pm\infty$ il grado del numeratore supera di uno quello del denominatore: niente asintoto orizzontale, e cerchiamo quello obliquo.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x} = 2, \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x}{x+1} = -5.$$

L'asintoto obliquo, lo stesso a destra e a sinistra, è $y = 2x - 5$. Controllo con la divisione: $\dfrac{2x^2 - 3x}{x+1} = 2x - 5 + \dfrac{5}{x+1}$, e l'ultimo termine tende a 0.

4.4.3 Gli asintoti dell'iperbole, ritrovati

In *Matematica 4* (cap. 3) gli asintoti dell'iperbole erano stati mostrati con una tabella di valori. Ora li otteniamo come limiti. Per l'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ il ramo nel primo quadrante è il grafico di $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$, per $x \geq 2$. Si trova

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x} = \frac{1}{2}, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0,$$

dove nel secondo limite, una forma $+\infty - \infty$, abbiamo razionalizzato moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2-4} + x$. L'asintoto è $y = \frac{1}{2}x$, proprio la retta $y = \frac{b}{a}x$ con $a = 2$, $b = 1$; per simmetria gli altri rami danno $y = -\frac{1}{2}x$. Anche la funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) rivela così i suoi asintoti: $x = -\frac{d}{c}$, dove il denominatore si annulla, e $y = \frac{a}{c}$, limite per $x \to \pm\infty$.

4.5 Il grafico probabile di una funzione

4.5.1 Le informazioni che abbiamo

Con i limiti e la continuità possiamo raccogliere, su una funzione data dalla sua espressione, informazioni sufficienti per un primo disegno attendibile, il **grafico probabile**. Il procedimento ha sei passi.

1. **Dominio** (C.E.): i valori di x per cui l'espressione ha senso.
2. **Simmetrie**: se $f(-x) = f(x)$ la funzione è *pari* e il grafico è simmetrico rispetto all'asse y; se $f(-x) = -f(x)$ è *dispari* e il grafico è simmetrico rispetto all'origine (*Matematica 4*, cap. 1). Basta allora studiare $x \geq 0$.
3. **Intersezioni con gli assi**: con l'asse y il punto $(0; f(0))$, se 0 è nel dominio; con l'asse x le soluzioni di $f(x) = 0$.
4. **Segno**: dove $f(x) > 0$ il grafico sta sopra l'asse x, dove $f(x) < 0$ sta sotto. Sul piano si «cancellano» le regioni proibite.
5. **Limiti** agli estremi del dominio e nei punti esclusi; da essi gli **asintoti**.
6. **Disegno**: si raccordano le informazioni con una curva continua in ogni intervallo del dominio.

ESEMPIO SVOLTO

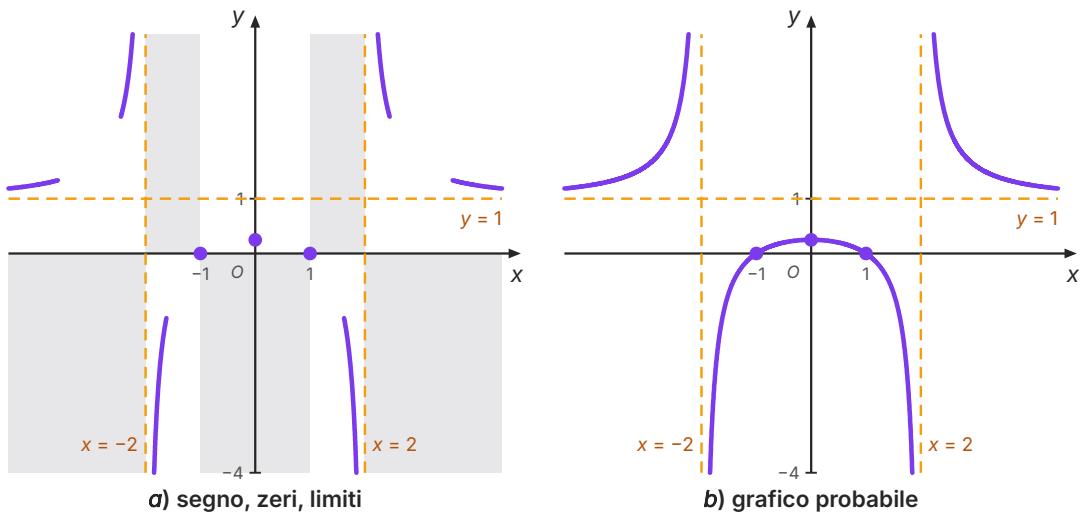
Problema. Traccia il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

Soluzione. *Dominio:* $x^2 - 4 \neq 0$, cioè $x \neq \pm 2$. *Simmetrie:* x compare solo al quadrato, quindi $f(-x) = f(x)$: la funzione è pari. *Intersezioni:* $f(0) = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$, punto $(0; \dfrac{1}{4})$; $f(x) = 0$ per $x = \pm 1$.

Segno: il numeratore è positivo per $|x| > 1$, il denominatore per $|x| > 2$. Quindi $f(x) > 0$ per $|x| > 2$ e per $|x| < 1$, $f(x) < 0$ per $1 < |x| < 2$ (Figura 4.6a).

Limiti: per $x \to 2^+$ il numeratore tende a 3 e il denominatore a 0^+, quindi $f(x) \to +\infty$; per $x \to 2^-$ il denominatore è negativo e $f(x) \to -\infty$. Per simmetria $f(x) \to -\infty$ per $x \to -2^+$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to -2^-$. Le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali. Per $x \to \pm\infty$ i gradi sono uguali e $f(x) \to 1$: la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale. Scrivendo $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2 - 4}$ si vede anche che per $|x| > 2$ la curva sta sopra l'asintoto.

Disegno: nell'intervallo $]-2; 2[$ la curva sale da $-\infty$, passa per $(-1; 0)$, $(0; \dfrac{1}{4})$ e $(1; 0)$, e ridiscende verso $-\infty$; per $x > 2$ scende da $+\infty$ avvicinandosi a $y = 1$ dall'alto, e a sinistra di -2 fa lo stesso per simmetria (figura b).



a) segno, zeri, limiti

b) grafico probabile

Figura 4.6 Il grafico probabile di $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. a) In grigio le regioni escluse dal segno; gli zeri, il punto $(0; \dfrac{1}{4})$ e il comportamento vicino agli asintoti $x = \pm 2$, $y = 1$. b) Le informazioni raccordate in una curva continua su ciascuno dei tre intervalli del dominio.

4.5.2 Un caso esponenziale

Lo stesso metodo funziona fuori dalle funzioni razionali. Sia $f(x) = x\,e^{-x}$, definita in tutto $\mathbb{R}$, né pari né dispari. Si annulla solo in $x = 0$ e ha il segno di x, perché $e^{-x} > 0$. Per $x \to -\infty$ entrambi i fattori vanno all'infinito: $x\,e^{-x} \to -\infty$; inoltre $\dfrac{f(x)}{x} = e^{-x} \to +\infty$, quindi a sinistra non c'è asintoto obliquo. Per $x \to +\infty$ si ha la forma $+\infty \cdot 0$: scrivendo $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}}$, la gerarchia degli infiniti (capitolo 3) dà limite 0, e $y = 0$ è asintoto orizzontale a destra. Il grafico probabile esce da $-\infty$, passa per l'origine, resta positivo e torna verso l'asse x: deve quindi avere un punto più alto, un massimo. Si può persino giustificarlo con il teorema di Weierstrass, perché la funzione è continua, positiva per $x > 0$ e vicina a 0 per x grande.

Che cosa il grafico probabile non dice. Dove la funzione cresce e dove decresce, dove sono esattamente i massimi e i minimi, come curva il grafico: nel caso di $x\,e^{-x}$ sappiamo che un massimo c'è, ma non dove (sta in $x = 1$, vedremo). Nell'esempio di $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ nulla esclude, per ora, che l'arco centrale abbia qualche ondulazione. Rispondere a queste domande è il compito della derivata (capitoli 5–7): il grafico probabile diventerà allora uno *studio di funzione* completo.

APPROFONDIMENTO · FUNZIONI CHE NESSUNA MATITA DISEGNA

L'idea di continuità come «tratto senza staccare la matita» funziona per le funzioni di questo libro, ma la definizione con i limiti va molto più lontano. Già Dirichlet propose una funzione che vale 1 nei numeri razionali e 0 negli irrazionali. Poiché in ogni intervallo, per quanto piccolo, ci sono sia numeri razionali sia irrazionali (*Matematica 2*), vicino a qualsiasi punto la funzione assume entrambi i valori: non ha limite in nessun punto ed è **discontinua ovunque**. Il suo grafico non si può disegnare.

Più sorprendente fu il risultato di Karl Weierstrass, lo stesso del teorema sul massimo e il minimo: egli costruì una funzione **continua in ogni punto** il cui grafico, per quanto lo si ingrandisca, appare sempre spezzato, senza un tratto liscio, e che quindi non ha retta tangente in nessun punto (nel linguaggio del capitolo 5: non è derivabile in nessun punto). Molti matematici dell'Ottocento consideravano le funzioni continue «quasi ovunque lisce»; esempi come questo mostrarono che l'intuizione geometrica non basta e che le definizioni rigorose servono proprio a ragionare dove l'immaginazione non arriva.

SINTESI

- f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$: il valore esiste, il limite esiste finito e i due coincidono. È continua in un intervallo se lo è in ogni suo punto.
- Polinomi, funzioni razionali, radici, valore assoluto, funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche sono continue nel loro dominio; somme, prodotti, quozienti e composte di funzioni continue sono continue. Il limite di una funzione continua si calcola per sostituzione.
- Prima specie: limiti destro e sinistro finiti e diversi (salto). Seconda specie: almeno un limite unilaterale infinito o inesistente. Terza specie (eliminabile): il limite esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o $f(x_0)$ non esiste; si elimina con il prolungamento per continuità.
- Per convenzione si studiano come punti di discontinuità anche punti esclusi dal dominio attorno ai quali la funzione è definita, come $x = 0$ per $\frac{1}{x}$.
- Teorema di Weierstrass: una funzione continua su $[a; b]$ chiuso e limitato ha massimo e minimo assoluti. Senza una delle ipotesi la tesi può cadere.
- Teorema dei valori intermedi: una funzione continua su $[a; b]$ assume ogni valore compreso fra il minimo e il massimo.
- Teorema degli zeri (Bolzano, 1817): se f è continua su $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, esiste $c \in]a; b[$ con $f(c) = 0$. Garantisce l'esistenza, non l'unicità; l'unicità segue, per esempio, dalla stretta monotonia.
- Il metodo di bisezione applica ripetutamente il teorema degli zeri: dopo n passi lo zero è racchiuso in un intervallo di ampiezza $\frac{b - a}{2^n}$.
- Asintoto verticale $x = x_0$: un limite unilaterale infinito in x_0. Asintoto orizzontale $y = l$: limite l per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ (al più due, uno per lato; il grafico può attraversarlo).
- Asintoto obliquo $y = mx + q$: $m = \lim \frac{f(x)}{x}$ finito e non nullo, $q = \lim [f(x) - mx]$ finito. Per una funzione razionale c'è quando il grado del numeratore supera di uno quello del denominatore.
- Grafico probabile: dominio, simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti e asintoti. Crescenza, massimi e minimi richiedono la derivata.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La funzione f è continua in x_0 se:
   - **A.** $f(x_0)$ esiste
   - **B.** $f(x_0)$ esiste e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - **C.** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito
   - **D.** il grafico di f passa per l'origine

2. ● La funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ in $x = 0$ ha:
   - **A.** una discontinuità eliminabile
   - **B.** una discontinuità di seconda specie
   - **C.** una discontinuità di prima specie con salto 2
   - **D.** nessuna discontinuità, perché 0 non è nel dominio

3. ● La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ in $x = 2$:
   - **A.** è continua
   - **B.** ha un asintoto verticale
   - **C.** ha una discontinuità di prima specie
   - **D.** ha una discontinuità eliminabile: si prolunga ponendo $f(2) = 4$

4. ●● L'asintoto obliquo di $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$ è:
   - **A.** $y = x + 4$
   - **B.** $y = x + 3$
   - **C.** $y = x - 1$
   - **D.** $y = 3x$

5. ●● Per quale funzione il teorema degli zeri garantisce uno zero nell'intervallo $[-1; 1]$?
   - **A.** $f(x) = x^2 - 4$
   - **B.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   - **C.** $f(x) = x^2$
   - **D.** $f(x) = x^3 + 2x - 1$

6. ●● L'equazione $x^5 + x - 1 = 0$ ha una soluzione nell'intervallo:
   - **A.** $]-1; 0[$
   - **B.** $]0; 1[$
   - **C.** $]1; 2[$
   - **D.** $]2; 3[$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Se f è continua in $[a; b]$, allora ha un massimo in $[a; b]$.
   b) Se f ha un massimo e un minimo in $[a; b]$, allora è continua.
   c) Una funzione può avere tre asintoti orizzontali.
   d) Il grafico di una funzione non può mai intersecare un suo asintoto orizzontale.
   e) Se f è continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, lo zero in $]a; b[$ è unico.

8. ● Completa.
   a) x_0 è un punto di discontinuità di _____ specie se i limiti destro e sinistro sono finiti ma diversi.
   b) Una discontinuità di terza specie si chiama anche _____ ; si elimina con il _____ .
   c) Per l'asintoto obliquo $y = mx + q$ si calcola $m = \lim \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim$ _____ .
   d) Il metodo di _____ dimezza a ogni passo l'intervallo che contiene lo zero.

Calcolare

9. ● Calcola i limiti, usando la continuità.
   a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$; b) $\lim_{x\to \pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$; c) $\lim_{x\to 1} \ln(x^2 + e - 1)$; d) $\lim_{x\to 0} 2^{x+1} \cos x$.

10. ●● Determina k in modo che la funzione sia continua in $\mathbb{R}$.
    a) $f(x) = kx + 1$ per $x \le 1$, $f(x) = x^2 + 3$ per $x > 1$.
    b) $f(x) = 2^x$ per $x < 0$, $f(x) = k - x$ per $x \ge 0$.

11. ●● Trova e classifica i punti di discontinuità.
    a) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$; b) $f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$; c) $f(x) = \ln|x|$; d) $f(x) = x + 1$ per $x < 0$, $f(x) = x^2$ per $x \ge 0$.

12. ●● Ciascuna funzione ha in $x = x_0$ una discontinuità eliminabile: trova il valore da attribuirle nel punto per prolungarla per continuità.
    a) $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$, $x_0 = 0$; b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$, $x_0 = 3$; c) $\frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$, $x_0 = 0$; d) $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $x_0 = 0$.

13. ●● Trova gli asintoti verticali e orizzontali.
    a) $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$; b) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$; c) $y = \frac{x}{x^2 - 9}$; d) $y = \ln(x - 2)$; e) $y = 2 - e^{-x}$.

14. ●● Trova tutti gli asintoti.
    a) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$; b) $y = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}$; c) $y = \frac{4x^2 - 1}{2x}$.

15. ●● Dimostra che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ha tre soluzioni reali e trova tre intervalli di ampiezza 1, con estremi interi, che le contengono.

16. ●● Applica tre passi del metodo di bisezione all'equazione $x^3 + x - 3 = 0$ sull'intervallo $[1; 2]$, e scrivi l'intervallo finale.

17. ●● Traccia il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

18. ●●● Traccia il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$, con i suoi asintoti.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Per ciascuna funzione dì se ha massimo e minimo assoluti nell'intervallo indicato e, se il teorema di Weierstrass non si applica, quale ipotesi manca.
a) $y = \dfrac{1}{x}$ su $[1; +\infty[$; b) $y = x^2$ su $]-1; 1[$; c) $y = \operatorname{sgn} x$ su $[-1; 1]$.

20. ●● Spiega perché ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero reale. Suggerimento: studia i limiti per $x \to \pm\infty$ e usa il teorema degli zeri.

21. ●● Trova l'errore: «La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ vale -1 in $x = -1$ e 1 in $x = 1$; per il teorema degli zeri esiste $c \in]-1; 1[$ con $\dfrac{1}{c} = 0$.»

22. ●●● Sia f continua in $[0; 1]$ con $0 \le f(x) \le 1$ per ogni x. Dimostra che esiste $c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = c$ (un *punto fisso*). Suggerimento: applica il teorema degli zeri a $g(x) = f(x) - x$.

Problemi

23. ●● Un taxi (dati inventati) chiede 3 € alla partenza più 1,20 € per ogni chilometro o frazione di chilometro, per corse fino a 5 km.
a) Quanto costano corse di 2,3 km, 3 km e 3,1 km?
b) In quali punti la funzione costo è discontinua? Di che specie, con quale salto? È continua da destra o da sinistra?
c) Esiste una corsa che costa esattamente 5 €? Perché questo non contraddice il teorema dei valori intermedi?

24. ●● Un monaco parte alle 7:00 dal piede di un monte e ne raggiunge la cima alle 17:00, con soste e cambi di passo. Il giorno dopo riparte dalla cima alle 7:00 e, per la stessa strada, arriva al piede alle 13:00. Dimostra che c'è un punto della strada in cui il monaco si trova alla stessa ora nei due giorni.

25. ●● In un serbatoio che contiene 100 L di acqua pura entra, a partire dall'istante $t = 0$, acqua salata con 30 g di sale per litro, al ritmo di 5 L al minuto; il liquido si mescola e nulla esce. Dopo t minuti la concentrazione è $c(t) = \dfrac{150t}{100 + 5t}$ g/L.
a) Calcola $c(10)$.
b) Dopo quanti minuti la concentrazione è 20 g/L?
c) Calcola $\lim_{t \to +\infty} c(t)$ e spiega il risultato. La concentrazione raggiunge mai quel valore?

26. ● Alle 6:00 un termometro segna 4 °C, alle 14:00 segna 18 °C.
    a) Spiega perché in un certo istante fra le 6:00 e le 14:00 la temperatura è stata di 10 °C.
    b) Si può dire quante volte? Si può escludere che abbia toccato 20 °C?

Con il computer

27. ●● Con un foglio di calcolo applica la bisezione all'equazione $e^x + x - 3 = 0$ sull'intervallo [0; 1] (colonne: a, b, punto medio m, $f(m)$; la riga successiva sceglie la metà giusta con una funzione SE).
    a) Perché l'intervallo [0; 1] va bene come punto di partenza?
    b) Quanti passi servono perché l'ampiezza dell'intervallo sia minore di 10^{-4}?
    c) Scrivi la soluzione con tre cifre decimali esatte.

Verso l'esame

28. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un corriere (dati inventati) applica queste tariffe: fino a 2 kg, 5 €; oltre 2 kg e fino a 5 kg, 8 €; oltre 5 kg e fino a 10 kg, 12 €. Sia $C(p)$ il costo di un pacco di massa p (in kg), con $0 < p \le 10$. Quale affermazione è vera?

    A. C è continua in]0; 10]
    B. in $p = 2$ la funzione C ha un salto di 5 €
    C. un pacco di 5 kg costa 8 €, uno di 5,1 kg costa 12 €
    D. esiste un pacco che costa 10 €

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Uno studente usa un'app per imparare il lessico latino. Il numero di parole che ricorda dopo t giorni di esercizio è descritto (dati simulati) da $N(t) = \dfrac{40t}{t+2}$ centinaia di parole.
    a) Quante parole ricorda dopo 6 giorni?
    b) Dopo quanti giorni arriva a 3600 parole?
    c) Calcola $\lim_{t \to +\infty} N(t)$: che cosa rappresenta l'asintoto orizzontale?

30. ●● Spunto per il colloquio. *Documento:* nel 1817 Bernard Bolzano pubblicò a Praga una «dimostrazione puramente analitica» del fatto che una funzione continua, negativa in un punto e positiva in un altro, si annulla fra i due. A molti contemporanei sembrava un fatto evidente, che bastava «vedere» sul disegno.
    Spiega l'enunciato e il suo uso, e discuti perché un matematico dovrebbe dimostrare ciò che sembra evidente, collegandoti alla fisica, alla filosofia o alla storia.

31. ●●● Sfida. Dimostra che l'equazione $x = \cos x$ ha **una e una sola** soluzione reale. Suggerimento: spiega perché le soluzioni stanno in $[-1; 1]$, escludi l'intervallo $[-1; 0]$ e usa la monotonia su $[0; 1]$.

PER APPROFONDIRE

- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: Bolzano, Cauchy e la definizione rigorosa di continuità.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le funzioni continue, il teorema di Bolzano e le sue applicazioni.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Weierstrass e l'aritmetizzazione dell'analisi nell'Ottocento.

Glossario del capitolo

Asintoto obliquo
La retta $y = mx + q$, $m \neq 0$, con $f(x) - (mx + q) \to 0$ per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$; $m = \lim \dfrac{f(x)}{x}$, $q = \lim [f(x) - mx]$.

Continuità da destra, da sinistra
Uguaglianza fra $f(x_0)$ e il limite destro, o sinistro, in x_0.

Discontinuità di prima specie
Limiti destro e sinistro finiti e diversi; la loro differenza in valore assoluto è il salto.

Discontinuità di seconda specie
Almeno uno dei limiti unilaterali è infinito o non esiste.

Discontinuità di terza specie (eliminabile)
Il limite esiste finito, ma $f(x_0)$ non esiste o è diverso dal limite.

Funzione continua in un intervallo
Funzione continua in ogni punto dell'intervallo (negli estremi di un intervallo chiuso, da destra o da sinistra).

Funzione continua in un punto
f è continua in x_0 se $f(x_0)$ esiste e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Grafico probabile
Disegno di una funzione ricavato da dominio, simmetrie, intersezioni, segno, limiti e asintoti.

Massimo e minimo assoluti
Il più grande e il più piccolo dei valori assunti da f in un insieme, se esistono.

Metodo di bisezione
Approssimazione di uno zero dimezzando ogni volta l'intervallo e tenendo la metà ai cui estremi la funzione ha segni opposti.

Prolungamento per continuità
Definire o ridefinire la funzione in un punto di discontinuità eliminabile con il valore del limite.

Punto di discontinuità
Punto x_0, del dominio o escluso da esso ma con la funzione definita attorno, in cui f non è continua.

Teorema degli zeri
Se f è continua su $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, f si annulla in almeno un punto di $]a; b[$.

Teorema dei valori intermedi
Una funzione continua su $[a; b]$ assume tutti i valori compresi fra il suo minimo e il suo massimo.

Teorema di Weierstrass
Una funzione continua su $[a; b]$ chiuso e limitato ha massimo e minimo assoluti.

Soluzioni

1. B. Servono l'esistenza del valore e l'uguaglianza fra limite e valore; C da sola non basta.

2. C. Per $x < 0$ vale -1, per $x > 0$ vale 1: limiti unilaterali finiti e diversi, salto 2 (0 è escluso dal dominio ma, per la convenzione, è un punto di discontinuità).

3. D. Per $x \neq 2$ la funzione è $x + 2$, che tende a 4.

4. A. $\frac{x^2+3x}{x-1} = x + 4 + \frac{4}{x-1}$; oppure $m = 1$, $q = \lim \frac{4x}{x-1} = 4$.

5. D. È continua, $f(-1) = -4$ e $f(1) = 2$. A: $f(\pm 1) = -3$, stesso segno; B: non continua in 0; C: $f(\pm 1) = 1$ (lo zero c'è, ma il teorema non lo garantisce).

6. B. $f(x) = x^5 + x - 1$: $f(-1) = -3$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 33$; l'unico cambio di segno fra interi è in $]0; 1[$ (soluzione $\approx 0{,}755$).

7. a) Vero (Weierstrass). b) Falso: sgn x su $[-1; 1]$ ha massimo 1 e minimo -1 ma è discontinua in 0. c) Falso: al più due, uno per $x \to +\infty$ e uno per $x \to -\infty$. d) Falso: $\frac{x}{x^2+1}$ ha asintoto $y = 0$ e passa per l'origine. e) Falso: lo zero esiste, ma può non essere unico ($x^3 - x$ su $[-2; 2]$).

8. a) prima. b) eliminabile; prolungamento per continuità. c) $[f(x) - mx]$. d) bisezione.

9. a) $\frac{9-6}{4} = \frac{3}{4}$. b) $\sqrt{2}$. c) $\ln e = 1$. d) $2^1 \cdot 1 = 2$.

10. a) Limite sinistro e valore: $k + 1$; limite destro: 4. Quindi $k = 3$. b) Limite sinistro $2^0 = 1$; limite destro e valore: k. Quindi $k = 1$.

11. a) $\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$ per $x \neq -2$: in $x = -2$ terza specie (limite $-\frac{1}{4}$); in $x = 2$ seconda specie ($+\infty$ da destra, $-\infty$ da sinistra). b) In $x = 3$ prima specie: -1 da sinistra, 1 da destra, salto 2. c) In $x = 0$ seconda specie: $-\infty$ da entrambi i lati. d) In $x = 0$ prima specie: limite sinistro 1, destro $0 = f(0)$; salto 1.

12. a) $3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 3$. b) $\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2 \to 1$. c) Razionalizzando, $\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \to \frac{1}{4}$. d) $\frac{1}{2}$ (limite notevole).

13. a) $x = 3$; $y = 2$. b) Nessun asintoto verticale (denominatore mai nullo); $y = 0$. c) $x = 3$ e $x = -3$; $y = 0$. d) $x = 2$ ($\lim_{x \to 2^+} = -\infty$); nessun asintoto orizzontale ($\ln(x-2) \to +\infty$). e) $y = 2$ per $x \to +\infty$; per $x \to -\infty$, $2 - e^{-x} \to -\infty$ e nessun asintoto (né orizzontale né obliquo, perché $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$); nessun asintoto verticale.

14. a) $x = -1$; obliquo $y = x - 1$, perché $\frac{x^2+3}{x+1} = x - 1 + \frac{4}{x+1}$. b) Nessun asintoto verticale; obliquo $y = 2x$, perché $\frac{2x^3+x}{x^2+1} = 2x - \frac{x}{x^2+1}$. c) $x = 0$; obliquo $y = 2x$, perché $\frac{4x^2-1}{2x} = 2x - \frac{1}{2x}$.

15. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ è continua; $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$. Tre cambi di segno: soluzioni in $]-2; -1[$, $]0; 1[$, $]1; 2[$. Un polinomio di terzo grado ne ha al più tre: sono esattamente tre ($\approx -1{,}879$; $0{,}347$; $1{,}532$).

16. $f(1) = -1$, $f(2) = 7$. Passo 1: $m = 1{,}5$, $f(1{,}5) = 1{,}875 > 0 \to [1; 1{,}5]$. Passo 2: $m = 1{,}25$, $f(1{,}25) \approx 0{,}203 > 0 \to [1; 1{,}25]$. Passo 3: $m = 1{,}125$, $f(1{,}125) \approx -0{,}451 < 0 \to [1{,}125; 1{,}25]$. (La soluzione è $\approx 1{,}213$.)

17. C.E. $x \neq \pm 1$; dispari ($f(-x) = -f(x)$): simmetrico rispetto a O. Passa per O, unico zero. Segno: $f > 0$ per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$; $f < 0$ per $x < -1$ e per $0 < x < 1$. Limiti: $x \to 1^+$: $+\infty$; $x \to 1^-$: $-\infty$; $x \to -1^+$: $+\infty$; $x \to -1^-$: $-\infty$; per $x \to \pm\infty$: 0. Asintoti $x = \pm 1$ e $y = 0$ (attraversato in O). Grafico: tre rami; quello centrale scende da $+\infty$ (a destra di -1) attraverso O fino a $-\infty$ (a sinistra

di 1); per $x > 1$ scende da $+\infty$ verso 0; per $x < -1$ è il simmetrico rispetto a O.

18. C.E. $x \neq 1$; né pari né dispari. Zero in $x = 0$ (il grafico tocca l'asse in O). Segno: $f > 0$ per $x > 1$, $f < 0$ per $x < 1$ con $x \neq 0$. Limiti: $x \to 1^+$: $+\infty$; $x \to 1^-$: $-\infty$; $x \to \pm\infty$: $\pm\infty$. Asintoto verticale $x = 1$; obliquo: $m = 1$, $q = \lim \frac{x}{x-1} = 1$, cioè $y = x + 1$, dato che $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$: a destra la curva sta sopra l'asintoto, a sinistra sotto. Grafico: a sinistra di 1 sale da $-\infty$ seguendo l'asintoto obliquo, tocca l'asse in O e scende verso $-\infty$; a destra di 1 scende da $+\infty$ e poi risale lungo $y = x + 1$.

19. a) Massimo 1 (in $x = 1$); nessun minimo: i valori si avvicinano a 0 senza raggiungerlo. Manca la limitatezza dell'intervallo. b) Minimo 0 (in $x = 0$); nessun massimo: i valori si avvicinano a 1. Manca la chiusura dell'intervallo. c) Massimo 1 e minimo -1, anche se la funzione è discontinua in 0: le ipotesi del teorema sono sufficienti, non necessarie.

20. Sia $P(x) = a\,x^n + \ldots$ con n dispari e, per esempio, $a > 0$. Il limite di un polinomio per $x \to \pm\infty$ è quello del termine di grado massimo: $P(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e $P(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ (x^n ha il segno di x). Quindi esistono a_1 con $P(a_1) < 0$ e $b_1 > a_1$ con $P(b_1) > 0$; P è continuo su $[a_1; b_1]$ e il teorema degli zeri dà uno zero. Se $a < 0$ si scambiano i segni.

21. $\frac{1}{x}$ non è continua su $[-1; 1]$: non è nemmeno definita in 0. Manca un'ipotesi del teorema, e infatti $\frac{1}{x}$ non si annulla mai.

22. $g(x) = f(x) - x$ è continua in $[0; 1]$ (differenza di funzioni continue). $g(0) = f(0) \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Se uno dei due è nullo, $c = 0$ o $c = 1$ è un punto fisso. Altrimenti $g(0) > 0 > g(1)$ e per il teorema degli zeri esiste $c \in]0; 1[$ con $g(c) = 0$, cioè $f(c) = c$.

23. a) $3 + 1{,}20 \cdot 3 = 6{,}60$ € per 2,3 km e per 3 km; $3 + 1{,}20 \cdot 4 = 7{,}80$ € per 3,1 km. b) In $x = 1, 2, 3, 4$: prima specie, salto 1,20 €; la funzione è continua da sinistra (a 3 km esatti si paga ancora 6,60 €). c) No: i costi possibili sono 4,20; 5,40; 6,60; 7,80; 9,00 €. Il teorema dei valori intermedi richiede la continuità, che qui manca.

24. Sia $s_1(t)$ la distanza dal piede, lungo la strada, all'ora t del primo giorno e $s_2(t)$ quella del secondo (per $13 \leq t \leq 17$ il monaco è fermo al piede: $s_2 = 0$); sono funzioni continue su $[7; 17]$. Sia d la lunghezza della strada e $g(t) = s_1(t) - s_2(t)$: $g(7) = 0 - d < 0$, $g(17) = d - 0 > 0$. Per il teorema degli zeri esiste un istante c con $s_1(c) = s_2(c)$: a quell'ora il monaco era nello stesso punto nei due giorni.

25. a) $c(10) = \frac{1500}{150} = 10$ g/L. b) $150t = 20(100 + 5t) \Leftrightarrow 50t = 2000 \Leftrightarrow t = 40$ min. c) 30 g/L: con il passare del tempo il liquido è quasi tutto acqua salata in arrivo, che ha 30 g/L. Non lo raggiunge mai: $c(t) = 30 - \frac{3000}{100 + 5t} < 30$ per ogni t; $y = 30$ è asintoto orizzontale.

26. a) La temperatura è una funzione continua del tempo e 10 °C è compreso fra 4 °C e 18 °C: per il teorema dei valori intermedi è assunto almeno una volta. b) No: il teorema dà almeno una volta, non quante. Non si può escludere 20 °C: la temperatura può aver superato 18 °C ed essere poi scesa; i dati agli estremi non dicono nulla sul massimo.

27. a) $f(x) = e^x + x - 3$ è continua, $f(0) = -2 < 0$ e $f(1) = e - 2 \approx 0{,}718 > 0$. b) Dopo n passi l'ampiezza è $\frac{1}{2^n}$; $2^n > 10\,000$ richiede $n = 14$ ($2^{14} = 16\,384$). c) $x \approx 0{,}792$ (dopo 14 passi l'intervallo è $[0{,}79205; 0{,}79211]$; la soluzione è 0,79206...).

28. C. A è falsa (salti in 2 e in 5); B è falsa (il salto in 2 è $8 - 5 = 3$ €); D è falsa (i costi possibili sono 5, 8 e 12 €).

29. a) $N(6) = \frac{240}{8} = 30$ centinaia, cioè 3000 parole. b) $\frac{40t}{t+2} = 36 \Leftrightarrow 40t = 36t + 72 \Leftrightarrow t = 18$ giorni. c) Il limite è 40: $y = 40$ è l'asintoto orizzontale, cioè il numero massimo di parole (4000) a cui la memoria si avvicina senza raggiungerlo, nel modello.

30. Traccia: 1) enunciato del teorema degli zeri e sue ipotesi (continuità su un intervallo chiuso, segni opposti agli estremi); 2) uso: esistenza di soluzioni di equazioni non risolubili con formule, bisezione; 3) perché dimostrarlo: l'intuizione del disegno presuppone proprio la continuità che si vuole

definire, e funzioni come quella di Dirichlet o quella di Weierstrass mostrano che l'intuizione inganna; 4) legame con il rigore dell'Ottocento (Cauchy, Weierstrass) e con la critica di Berkeley (capitolo 3); 5) filosofia: il rapporto fra intuizione e dimostrazione, che Kant aveva posto al centro della conoscenza matematica e che Bolzano volle ridurre ai soli concetti; 6) fisica: le grandezze che variano con continuità e il motto «natura non facit saltus».

31. Se $x = \cos x$, allora $|x| = |\cos x| \leq 1$: le soluzioni stanno in $[-1; 1]$. In $[-1; 0]$ si ha $\cos x > 0$ (perché $|x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$) mentre $x \leq 0$: nessuna soluzione. In $[0; 1]$, $g(x) = x - \cos x$ è continua, $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = 1 - \cos 1 \approx 0{,}46 > 0$: c'è una soluzione. È unica perché x è crescente e $\cos x$ è strettamente decrescente in $[0; 1]$, quindi g è strettamente crescente. La soluzione è $x \approx 0{,}739$.